

1823-

МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра "Прикладная математика - 2"

З.С. Липкина, А.С. Милевский

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Методические указания

Часть 1

Москва - 2003

М.У.

Липкина З.С.

№1823

Численные методы

01-02840

Г03 Ч. 1



1823-

МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра "Прикладная математика - 2"

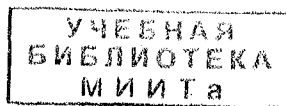
З.С.Липкина, А.С.Милевский

УТВЕРЖДЕНО
редакционно-издательским
советом университета

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

*Методические указания для студентов
специальности "Прикладная информатика"*

Часть 1



Москва - 2003

УДК 519.6
Л 61

Липкина З.С., Милевский А.С. Численные методы.
Методические указания. Часть 1. – М.:МИИТ, 2003. – 32 с.

Методические указания предназначены для студентов специальностей, в учебных планах которых предусмотрена дисциплина “Численные методы”. Рассмотрены вычислительные методы, наиболее часто используемые в практике инженерных расчетов. Приведены варианты расчётных заданий и примеры их решения.

© Московский государственный
университет путей сообщения (МИИТ),
2003

1. Элементы теории погрешностей

1.1 Введение

В этой главе рассматриваются погрешности вычислений. Рассматриваемые вопросы могут выглядеть как излишняя педантичность в эпоху компьютеров, но это совсем не так. Вот два примера.

Пример. Формула Тейлора для вычисления синуса

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

даёт абсолютно точный ответ при любом X , если все вычисления производить абсолютно точно. Попробуем вычислить по ней синусы для различных X , используя 20 слагаемых и максимально точные вычисления, например, на MS Excel.

X	1	10	15
По формуле Тейлора	0,841470985	-0,54402179	-1,4127068
Точное значение sin(x)	0,841470985	-0,54402111	0,65028784

В последнем случае получился совсем уж бессмысленный результат. Всё дело здесь в накоплении погрешности в процессе вычислений. Использование не 20, а, например, 100 слагаемых уже ничего не исправит – проверьте!

Пример. Проверим формулу $\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$ для $a=1001$,

$b=1000,9999999999$, $c=0,0000000003$. Вычисления будем проводить с максимально возможной точностью на MS Excel. Левая часть равенства оказывается равной 3333,3333249, правая (разность дробей) – 3333,333007. Оба ответа отличаются от правильного = 10000/3, причём второе больше.

1.2 Абсолютная и относительная погрешности.

Пусть a – точное значение некоторой величины, a^* – приближённое. Тогда расстояние между этими числами $|a-a^*|$ называется *абсолютной погрешностью* приближённого значения. Как правило, абсолютная погрешность не может быть найдена точно, так как неизвестно точное значение

величины. Поэтому на практике под (“пределной”) абсолютной погрешностью понимают число $\Delta(a^*)$, такое что

$$|a - a^*| \leq \Delta(a^*)$$

Отсюда следует, что

$$a^* - \Delta(a^*) \leq a \leq a^* + \Delta(a^*).$$

Последнее двойное неравенство иногда символически записывают в виде

$$a = a^* \pm \Delta(a^*)$$

Предельной относительной погрешностью (или просто относительной погрешностью) называют число $\delta(a^*)$, такое что

$$\frac{|a - a^*|}{|a^*|} \leq \delta(a^*)$$

Относительную погрешность часто выражают в процентах. Ясно, что

$$\Delta(a^*) = |a^*| \delta(a^*)$$

Аналогично предыдущему, иногда пишут

$$a = a^* (1 \pm \delta(a^*))$$

1.3 Значащие цифры числа. Верные цифры.

Значащими цифрами числа называют все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева.

Пример. Пусть $a^* = 0,015040$. Здесь пять значащих цифр. Последний нуль указывает на то, что вычисления ведутся с шестью знаками после запятой. Первые три нуля не являются значащими (они служат для определения десятичных разрядов других цифр).

Значащую цифру называют *верной в широком смысле*, если абсолютная погрешность числа не превосходит единицы соответствующего разряда, и *верной в узком смысле*, если погрешность числа не превосходит половины разряда (или, что то же самое, 5 следующего разряда). Иногда употребляется термин *число верных цифр после запятой*: подсчитывается количество верных цифр после запятой от первой до последней верной.

1.4 Правила округления.

✓ Если первая из отбрасываемых цифр числа меньше 5, то оставшиеся цифры оставляют без изменения, если же она больше пяти, то к последней оставшейся цифре добавляется единица.

✓ Если последняя из отбрасываемых цифр равна 5, то последнюю из оставшихся цифр оставляют без изменения, если после этой 5 все остальные цифры равны нулю; в противном случае к последней оставшейся цифре добавляется единица.

Пример. $\epsilon = 2,718281828$. Округляя до трёх значащих цифр, получаем 2,72, до четырёх – 2,718 и т.д.

1.5 Погрешность функции.

Пусть величина Y является функцией аргументов X_1, \dots, X_n . Пусть X_1^*, \dots, X_n^* – приближенные значения этих аргументов. Тогда за приближённое значение Y принимается величина $y^* = y(X_1^*, \dots, X_n^*)$

Попробуем оценить погрешность. Если функция дифференцируема в достаточной окрестности точки X_1, \dots, X_n , то на основании теоремы Лагранжа можно записать $y = y^* + \sum \frac{\partial y(\dots)}{\partial x_i} (x_i - x_i^*)$, где частные производные $\frac{\partial y(\dots)}{\partial x_i}$ берутся при значениях аргументов, лежащих между точным x_i и приближенным x_i^* значением. Поэтому абсолютная погрешность y^* не превосходит

$$\Delta y \leq \sum_{i=1}^n \max \left| \frac{\partial y(\dots)}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

На практике обычно используют более простую и не вполне точную формулу

$$\Delta(y^*) \approx \sum \left| \frac{\partial y(X_1^*, \dots, X_n^*)}{\partial x_i} \right| \Delta(x_i^*)$$

1.6 Погрешности арифметических операций.

✓ (Предельная) абсолютная погрешность суммы (разности) равна сумме абсолютных погрешностей слагаемых.

$$\Delta(f^* + g^*) = \Delta(f^*) + \Delta(g^*)$$

Действительно, если, например, $Y = X_1 + X_2$, то частные производные равны 1, поэтому на основании формулы из предыдущего пункта

✓ (Предельная) относительная погрешность произведения (частного) равна сумме абсолютных погрешностей множителей.

$$\delta(f^*g^*) = \delta(f^*) + \delta(g^*).$$

Действительно, если, например, $y = x_1 x_2$, то частные производные от $\ln(y)$ равны 1, поэтому на основании формулы из предыдущего пункта

✓ (Предельная) относительная погрешность степени находится по формуле

$$\delta(f^m) = m \delta(f).$$

Например, $\delta(\sqrt{x}) = \delta(x)/2$.

1.7 Обратная задача теории погрешностей.

На практике нередко приходится решать обратную задачу: каковы должны быть погрешности аргументов, чтобы погрешность функции не превосходила заданной величины? Используя формулы из пункта 1.4, можем записать

$\Delta(y^*) \approx \sum B_i \Delta(x_i^*)$, где B_i — некоторые числа (например,

$B_i = \left| \frac{\partial y(x_1^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_i} \right|$). Если задано значение $\Delta(y^*)$, то значения

$\Delta(x_i^*)$ из этого равенства находятся неоднозначно. Часто используется принцип равных влияний, то есть погрешности, вызванные каждым сла-

гаемым, полагают равными. Тогда $B_i \Delta(x_i^*) = \frac{\Delta(y^*)}{n}$, откуда

$$\Delta(x_i^*) = \frac{\Delta(y^*)}{B_i n}, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Иногда вместо этого полагают $\Delta(x_i^*) = \frac{\Delta(y^*)}{(B_1 + B_2 + \dots + B_n)}$

2. Интерполяция

2.1 Постановка задачи

Под *аппроксимацией* в математике понимается (приближённое) нахождение неизвестных значений какой-либо величины по известным её значениям. Частный вопрос такого рода – задача об интерполировании значений функции.

Пусть даны различные точки X_0, X_1, \dots, X_n , называемые *узлами интерполяции*, и значения в этих точках некоторой функции $y_i = f(x_i)$. Совокупность пар чисел (X_i, y_i) , $i=0, 1, \dots, n$, называется *исходными данными для интерполяции*. Требуется найти *многочлен наименьшей степени*, график которого проходит через все точки (X_i, y_i) . Такой многочлен называется *интерполяционным*.

Можно поставить и более общую задачу. Пусть

$\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$ – некоторый набор функций. Тогда функцию

$\Phi^{(n)}(x) = a_0\varphi_0 + \dots + a_n\varphi_n$ назовем *обобщенным многочленом степени*

n . (Если в качестве набора функций взять $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$, то

$\Phi^{(n)}(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ – обычный многочлен степени n .)

Требуется построить обобщенный многочлен наименьшей степени, значения которого в узлах интерполяции совпадают с y_i , т.е.

$y_i = y(x_i) = \Phi^{(n)}(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$. Многочлен с этими свойствами называется *обобщенным интерполяционным многочленом*.

2.2 Система уравнений для коэффициентов интерполяционного многочлена

Приведём сначала некоторые общие положения. Подставляя заданные точки, получаем систему уравнений для определения коэффициентов многочлена:

$$a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + \dots + a_n\varphi_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Эта система уравнений является линейной относительно параметров a_0, a_1, \dots, a_n . Она имеет единственное решение для любых правых частей U_i , если соответствующий определитель не равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \cdots & \varphi_n(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

Система функций $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ называется *системой Чебышева* на некотором интервале, если любой обобщенный многочлен

$\Phi^{(n)}(x) = a_0\varphi_0(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x)$ имеет на этом интервале не более n различных корней.

Теорема. *Задача интерполирования имеет единственное решение для любого набора узлов X_i на некотором интервале и любого набора значений функции U_i в том и только в том случае, если система функций $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ является системой Чебышева на этом интервале.*

Заметим, что система $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ удовлетворяет условиям этой теоремы, поэтому справедлива

Теорема. *Для любого набора точек (x_i, y_i) с различными узлами x_i существует единственный интерполяционный многочлен*

$$L_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n.$$

Непосредственное нахождение коэффициентов многочлена решением системы уравнений неэффективно. Для этого есть удобные готовые формулы. Следует иметь в виду, что так как интерполяционный многочлен – единственный, то любые формулы в конечном счёте дают одинаковый результат.

2.3 Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа

Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа имеет вид:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_n^{(i)}(x),$$

$$L_n^{(i)}(x) = \frac{(x-x_0) \cdots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \cdots (x-x_n)}{(x_i-x_0) \cdots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \cdots (x_i-x_n)} \quad (2.1)$$

(В каждом произведении в числителе и знаменателе дроби пропущен один множитель, который мог бы обратиться в ноль знаменателя.)

Пример. Для функции, заданной таблицей

x	0,1	0,5	0,8
y	2,7	3,1	3,8

написать интерполяционный многочлен, используя формулу Лагранжа.

Решение. Поскольку точек три, степень многочлена равна 2. Находим:

$$L^2(x) = 2,7 \frac{(x-0,5)(x-0,8)}{(0,1-0,5)(0,1-0,8)} + 3,1 \frac{(x-0,1)(x-0,8)}{(0,5-0,1)(0,5-0,8)} +$$

$$+ 3,8 \frac{(x-0,1)(x-0,5)}{(0,8-0,1)(0,8-0,5)} =$$

$$= 1,904762x^2 - 0,142857x + 2,695238$$

Формула Лагранжа удобна, если для одних и тех же узлов интерполяции x_i приходится строить интерполяционные многочлены для различных y_i . В этом случае выражения $L_n^{(i)}(x)$ в (2.1) можно вычислить *один раз*, а затем в каждом случае только домножить их на y_i и сложить. Неудобство же состоит в том, что при добавлении нового узла интерполяции всё приходится пересчитывать заново – все слагаемые в формуле сильно изменяются.

2.4 Схема Эйткена

Это удобный метод вычисления значения интерполяционного многочлена в фиксированной точке $x=x^*$.

Пусть заданы данные интерполяции (x_i, y_i) , $i=0, 1, \dots, n$. Надо вычислить значение интерполяционного многочлена Лагранжа $L_n(x^*)$. Положим

$$L_{i,i+1}(x) = \frac{\begin{vmatrix} x - x_i & y_i \\ x - x_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix}}{x_{i+1} - x_i}$$

Нетрудно проверить подстановкой, что $L_{i,i+1}(x_i) = y_i$, $L_{i,i+1}(x_{i+1}) = y_{i+1}$, т.е. $L_{i,i+1}$ – интерполяционный многочлен (первой степени) по точкам (x_i, y_i) , (x_{i+1}, y_{i+1}) . Аналогично,

$$L_{i,i+1,i+2} = \frac{\begin{vmatrix} x - x_i & L_{i,i+1}(x) \\ x - x_{i+2} & L_{i+1,i+2}(x) \end{vmatrix}}{x_{i+2} - x_i}$$

– интерполяционный многочлен второй степени (парабола) по точкам (x_i, y_i) , (x_{i+1}, y_{i+1}) , (x_{i+2}, y_{i+2}) . В общем случае

$$L_{i,i+1,\dots,i+m}(x) = \frac{\begin{vmatrix} x - x_i & L_{i,i+1,\dots,i+m-1}(x) \\ x - x_{i+m} & L_{i+1,i+2,\dots,i+m}(x) \end{vmatrix}}{x_{i+m} - x_i} \quad (2.2)$$

– интерполяционный многочлен степени m по точкам (x_i, y_i) , (x_{i+1}, y_{i+1}) , (x_{i+m}, y_{i+m}) . Таким образом, значение интерполяционного многочлена в точке $x = x^*$ равно $L_n(x^*) = L_{0,1,\dots,n}(x^*)$.

Вычисления заносятся в таблицу:

x_i	y_i	$x^* - x_i$	$L_{i,i+1}(x^*)$	$L_{i,i+1,i+2}(x^*)$...	$L_{0,12n}(x^*)$
x_0	y_0	$x^* - x_0$	$L_{01}(x^*)$	$L_{012}(x^*)$...	$L_{0,12n}(x^*)$
x_1	y_1	$x^* - x_1$	$L_{12}(x^*)$	$L_{123}(x^*)$...	
x_2	y_2	$x^* - x_2$	$L_{23}(x^*)$	$L_{124}(x^*)$		
...		
x_{n-1}	y_{n-1}	$x^* - x_{n-1}$	$L_{n-1,n}(x^*)$			
x_n	y_n	$x^* - x_n$				

На каждом шаге в столбце стоят значения интерполяционных полиномов, построенных не по всем, а только по части исходных точек. Если значения эти совпадают в остаточной степени, то процесс вычислений можно оборвать, не доходя до последнего столбца. При этом одновременно контролируется, насколько хорошо точки «ложатся» на график полинома меньшей степени. Преимуществом схемы Эйткена является также возможность лёг-

кого добавления новых узлов интерполяции. Недостаток схемы – если требуется найти значения интерполяционного многочлена в нескольких точках, для каждой все расчёты нужно проводить в полном объёме.

Пример. Вычислить приближённо в точке $x^*=0.2$ значение функции по схеме Эйткена. Функция задана таблицей.

Решение. Заполняем поочерёдно столбцы таблицы:

x_i	y_i	x^*-x_i	$L_{i,i+1}(x^*)$	$L_{i,i+1,i+2}(x^*)$	$L_{0123}(0,2)$
0,0	2,1	0,2	2,9	2,7333	2,7131
0,1	2,5	0,1	2,65	2,6625	
0,3	2,8	-0,1	2,725		
0,7	3,1	-0,5			

Здесь

$$L_{0,1}(0.2) = \frac{0.5 - 0.21}{0.1} = 2.9, \quad L_{1,2}(0.2) = \frac{0.28 + 0.25}{0.2} = 2.65,$$

$$L_{2,3}(0.2) = \frac{2.8 \cdot 0.5 - 0.31}{0.4} = 2.725,$$

и т.д. Ответом является число $L_{0,1,\dots,n}(0.2) = 2.7131$.

2.5 Интерполяционный многочлен в форме Ньютона.

2.5.1 Основная идея.

Схема Эйткена позволяет легко добавлять новые узлы интерполяции, но вычисления проводятся только в одной конкретной точке x^* . А что произойдёт со всем многочленом при добавлении нового узла? Попробуем строить L_n постепенно, подбирая коэффициенты a_n в соотношениях

$$L_1(x) = y_0 + a_1(x-x_0),$$

$$L_2(x) = y_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) = L_1(x) + a_2(x-x_0)(x-x_1),$$

$$L_3(x) = y_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = \\ = L_2(x) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),$$

...

$$L_n(x) = L_{n-1}(x) + a_n(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{n-1}).$$

Ясно, что найденные на предыдущем шаге коэффициенты не меняются, так что на каждом шаге нужно определить только один коэффициент. Он легко находится подстановкой в соотношение $L_k(x_k) = y_k$:

$$a_k = \frac{y_k - L_k(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})}$$

Удобнее, однако, использовать формулы для a_k через так называемые *разделённые разности*.

2.5.2 Разделённые разности.

Разделёнными разностями первого порядка функции $y=y(x)$, заданной таблично $y_i=y(x_i)$, $i=0,1,\dots,n$ называют отношения

$$[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Аналогично определяют разделённые разности второго порядка

$$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{[x_{i+1}, x_{i+2}]_y - [x_i, x_{i+1}]_y}{x_{i+2} - x_i},$$

и любого k -ого порядка

$$[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]_y - [x_i, \dots, x_{i+k-1}]_y}{x_{i+k} - x_i}. \quad (2.3)$$

Индекс y можно опускать, если понятно, о какой функции идёт речь.

Пример. Вычислить разделённые разности функции, заданной в предыдущем примере.

Заполняем столбцы таблицы.

x_i	y_i	$[x_i, x_{i+1}]$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0.0	2.1	4	-8.3333	10.119
0.1	2.5	1.5	-1.25	
0.3	2.8	0.75		
0.7	3.1			

Здесь $[x_0, x_1] = \frac{2,5 - 2,1}{0,1} = 4$ $[x_1, x_2] = \frac{2,8 - 2,5}{0,2} = 1,5$

$$[x_2, x_3] = \frac{3,1 - 2,8}{0,4} = 0,75 \quad [x_0, x_1, x_3] = \frac{1,5 - 4}{0,3} = -8,333$$

$$[x_1, x_2, x_3] = \frac{0,75 - 1,5}{0,6} = -1,25 \quad [x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{-1,25 - (-8,333)}{0,7} = 10,119$$

2.5.3 Интерполяционная формула Ньютона

Лемма. Если $y = P(x)$ есть многочлен n -ой степени, то его разделенная разность $(n+1)$ порядка тождественно равна нулю для любой системы различных между собой чисел X_0, X_1, \dots, X_n .

Из этой леммы вытекает, что

$$\begin{aligned} P(x) &= P(x_0) + [x, x_0](x - x_0) = \\ &P(x_0) + [x, x_0](x - x_0) + [x, x_0, x_1](x - x_0)(x - x_1) = \dots = \\ &P(x_0) + [x_0, x_1](x - x_0) + \dots + [x_0, x_0, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Так как последнее слагаемое в силу леммы равно нулю, то, полагая $P(x) = L_n(x)$, получаем формулу Ньютона для интерполяционного многочлена:

$$L_n(x) = y_0 + [x_0, x_1](x - x_0) + [x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + [x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \quad (2.4)$$

Пример. Для функции предыдущего примера написать интерполяционный многочлен Ньютона и вычислить $L_3(0,2)$.

$$L_3(x) = 2,1 + 4(x - 0) - 8,333(x - 0)(x - 0,1) + 10,119(x - 0)(x - 0,1)(x - 0,3)$$

$$\begin{aligned} L_3(0,2) &= 2,1 + 4 \cdot 0,2 - 8,333 \cdot 0,2 \cdot 0,1 + 10,119 \cdot 0,2 \cdot 0,1 \cdot (-0,1) = \\ &= 2,1 + 0,8 - 0,1667 - 0,0202 = 2,7131 \end{aligned}$$

Результат, естественно, совпадает с вычисленным по схеме Эйткена.

2.6 Интерполяция для равноотстоящих узлов.

2.6.1 Обозначения

На практике чаще всего используются равноотстоящие узлы

X_0, X_1, \dots, X_n , т.е. $X_k = X_0 + k h$, где h – шаг интерполяции. В этом

случае удобно следующее обозначение. Положим $t = \frac{x-x_0}{h}$, т.е.

$x = x_0 + th$, t – число шагов от точки x_0 до данной точки x .

2.6.2 Многочлен Лагранжа для равноотстоящих узлов.

Ясно, что $\frac{x-x_k}{x_i-x_k} = \frac{x-x_0-kh}{x_0+ih-x_0-kh} = \frac{t-k}{i-k}$, и формула Лагранжа принимает вид

$$L_n(x) = L_n(x_0 + th) = \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{n!} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i}}{t-i} C_n^i y_i$$

2.6.3 Конечные разности.

Для равноотстоящих узлов вместо разделенных разностей удобнее использовать *конечные разности*

$$\begin{aligned} \Delta y_i &= y_{i+1} - y_i, \\ \Delta^2 y_i &= \Delta(\Delta y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i, \\ &\dots, \\ \Delta^n y_i &= \Delta(\Delta^{n-1} y_i) = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i \end{aligned}$$

Результаты заносятся в таблицу

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$		$\Delta^{n-1} y_i$	$\Delta^n y_i$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$...	$\Delta^{n-1} y_0$	$\Delta^n y_n$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_1$...	$\Delta^{n-1} y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_2$			
...			
x_{n-1}	y_{n-1}	Δy_{n-1}	$\Delta^2 y_{n-1}$				
x_n	y_n	Δy_n					

Разделенные разности, разумеется, можно выразить через конечные:

$$[x_i, x_{i+1}]_y = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\Delta y_i}{h}$$

$$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]_y = \frac{[x_{i+1}, x_{i+2}]_y - [x_i, x_{i+1}]_y}{x_{i+2} - x_i} = \frac{\frac{\Delta y_{i+1}}{h} - \frac{\Delta y_i}{h}}{2h} = \frac{\Delta^2 y_i}{2h^2} \dots$$

и в общем случае:

$$[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]_y = \frac{\Delta^k y_i}{h^k k!} \quad (2.5)$$

2.6.4 Интерполяционная формула Ньютона для равноотстоящих узлов

Подставляя (2.5) в формулу Ньютона (2.4), получаем *интерполяционную формулу Ньютона для равноотстоящих узлов*

$$L_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

Если использовать обозначение $t = \frac{x - x_0}{h}$, то получим

$$L_n(x) = L_n(x_0 + th) = y_0 + \Delta y_0 t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} t(t-1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t-1) \dots (t-n+1). \quad (2.6)$$

Эта формула называется *первой интерполяционной формулой Ньютона*. Её выгодно использовать для интерполирования функции в окрестности точки x_0 , где t мало (хотя формула, конечно, справедлива при любом t). По-другому упорядочив точки, легко получить *вторую интерполяционную формулу Ньютона* («интерполирование назад»)

$$L_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x-x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x-x_n)(x-x_{n-1}) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_n)(x-x_{n-1}) \dots (x-x_1).$$

Если положить $s = \frac{x-x_n}{h}$, то формула примет вид

$$L_n(x) = L_n(x_n + sh) = y_n + \Delta y_{n-1}q + \frac{s(s+1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{s(s+1) \dots (s+n-1)}{n!} \Delta^n y_0. \quad (2.7)$$

2.7 Погрешность интерполяции

Оценку погрешности интерполяции облегчает

Теорема. Если функция $y(x)$ имеет производную порядка $n+1$ на отрезке $[a, b]$, все узлы интерполяции $X_0 < X_1 < \dots < X_n$ лежат на этом отрезке, то существует такая точка $\xi \in [X_0, X_n]$, что

$$y(x) - L_n(x) = y^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{\omega_n(x)}{(n+1)!},$$

$$\omega_n(x) = (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n)$$

Таким образом, если известно, например, что абсолютная величина производной $y^{(n+1)}$ не превосходит некоторого числа M , то на этом отрезке

$$|y(x) - L_n(x)| \leq M \cdot \frac{|\omega_n(x)|}{(n+1)!} \quad (2.8)$$

3. Системы линейных уравнений

3.1 Введение

Мы рассмотрим следующие задачи линейной алгебры:

- ✓ решение системы линейных уравнений $Ax = b$, где A – квадратная матрица размера $n \times n$, x и b – векторы (столбцы);
- ✓ вычисление определителя матрицы;
- ✓ нахождение обратной матрицы.

Основной задачей является решение системы линейных уравнений. Известно, что если $\det A \neq 0$, то система уравнений $Ax = b$ имеет единственное решение $x = A^{-1}b$.

На практике кроме существования чрезвычайно важна ещё и *устойчивость* решения относительно погрешностей правой части и элементов матрицы. Если матрица A^{-1} имеет большие элементы, то ничтожное изменение правой части может привести к совершенно другому ответу. Такая система называется *плохо обусловленной*, её решение требует особой осторожности.

Пример. Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x + 7y = 12 \\ 7x + 10y = 17 \end{cases}$$

Её решение: $x=1, y=1$. Предположим, что правые части известны не точно, погрешность порядка 0,1. То есть на самом деле правые части могут равняться, например, 12,1 и 16,9. Решите ту же систему с новыми правыми частями! Совсем другой ответ, не правда ли? Одна из переменных даже стала отрицательной. Вывод – эту систему *бессмысленно* решать, если правые части заданы даже с такой небольшой погрешностью – система *плохо обусловлена*. А вот если во втором уравнении вместо 10 стояло бы, например, 2, ситуация стала бы в корне иной.

Методы решения линейных систем разделяются на прямые (конечные) и итерационные. Естественно, никакой практический метод не может быть бесконечным. Имеется в виду, что *прямые методы* дают решение за *конечное* число действий, *итерационные* же находят решение методом *последовательного приближения* и дают точный ответ только *в пределе*. Это вовсе не означает, что решение, полученное при помощи прямого метода, точнее. При решении большой плохо обусловленной системы ошибки округления могут привести к бессмысленным результатам. Итерационный метод здесь может оказаться точнее, так как при его применении ошибки не накапливаются.

Прямые методы просты и наиболее универсальны. Для систем порядка $n < 10^4$ чаще всего применяются именно они. В первую очередь это методы различные модификации метода Гаусса.

Итерационные методы выгодны для систем специального вида, со слабо заполненной матрицей большого размера $n=10^4-10^7$.

3.2 Метод исключения Гаусса

3.2.1 Идея метода

Идеей этого метода является последовательное исключение неизвестных. Сначала при помощи первого уравнения из всех остальных исключается X_1 , при помощи второго уравнения из всех остальных, начиная с третьего, исключают X_2 и т.д. пока не останется последнее уравнение с одним неизвестным – X_n . Это *прямой ход* метода. Матрица принимает характерный *треугольный вид*. Затем вычисляют X_n , подставляют его значение в предпоследнее уравнение, содержащее X_n и X_{n-1} , и т.д., пока из первого уравнения не находят X_1 . Это *обратный ход метода* Гаусса.

Если же $a_{11}=0$, то X_1 приходится исключать, используя не первое, а другое уравнение, и аналогичная ситуация может возникнуть на любом шаге.

Кроме того, в процессе решения приходится делить на a_{11} , и если a_{11} мало, это приводит к большим погрешностям. Поэтому обычно используют модификацию метода Гаусса – *метод главного элемента*.

3.2.2 Метод Гаусса с выбором главного элемента

Метод начинается с “выравнивания” задачи: уравнения умножаются на степени 10, чтобы наибольший коэффициент в каждом уравнении был между 1 и 10. Выберем теперь такое уравнение, в котором коэффициент при каком либо X_i имеет наибольший модуль. Это уравнение назовем *главным*, а соответствующий коэффициент – *главным элементом*. Исключим X_i из остальных уравнений, а само это уравнение вычеркнем из системы, точнее, пометим как далее неизменяемое. Оно нам не понадобится до обратного хода. Повторим эту процедуру, пока есть уравнения. Обратный ход – как в методе Гаусса. В методе Гаусса с выбором главного элемента погрешность округлений обычно невелика и только для плохо обусловленных систем точность может оказаться недостаточной.

3.2.3 Метод Жордана–Гаусса

Обратный ход фактически можно не делать, если использовать метод Жордана- Гаусса или так называемый метод полного исключения. В этом методе при исключении переменной X_i её исключают из всех уравнений, включая и те, которые были главными на предыдущих шагах. Матрица в итоге получается не треугольная, а диагональная – в каждом уравнении ровно одна неизвестная.

3.2.4 Замечания.

- ✓ Число арифметических операций метода Гаусса имеет порядок n^3 .
- ✓ Для увеличения точности решения определяют *невязку* приближенно-го решения – вектор $b_1 = b - Ax$. Погрешность $\varepsilon = x_{\text{точн}} - x$ удовлетворяет системе $A\varepsilon = b_1$. Решая эту систему и вычисляя приближенно \bar{r}_1 , получим более точное решение $x + \varepsilon$. Если нужно увеличить точность, то операцию повторяют.
- ✓ Кроме ошибок, вызванных погрешностями вычислений, существуют случайные ошибки, причины которых сбои или невнимательность. Текущий контроль осуществляется с помощью столбца Σ , над которым, с одной стороны, производятся те же действия, что и над остальными столбцами, а с другой стороны, сумма всех элементов строки (кроме элемента в столбце Σ) должна быть равна элементу столбца Σ с точностью до единицы последнего разряда.

Пример. Решить методом Жордана с выбором главного элемента.

$$\begin{cases} 1,2x_1 + 2,4x_2 - 3,1x_3 = 0,5 \\ 2,5x_1 - 1,8x_2 + 5,1x_3 = 5,8 \\ 3,7x_1 + 2,3x_2 - 7,1x_3 = -1,1 \end{cases}$$

Решение приведено в таблице

X_1	X_2	X_3	Свободный член	Σ	Множитель
1,2	2,4	-3,1	0,5	1	-3,1/7,1
2,5	-1,8	5,1	5,8	11,6	5,1/7,1
3,7	2,3	-7,1	-1,1	-2,2	
-0,415	1,396	0	0,98	1,96/1,961	0,415/5,158
5,158	-0,148	0	5,01	10,019/10,02	
3,7	2,3	-7,1	-1,1	-2,2	-3,7/5,158

x_1	x_2	x_3	Свободный член	Σ	Множитель
0	1,384	0	1,383	2,767/2,768	
5,158	-0,148	0	5,01	10,019/10,02	0,148/1,384
0	2,406	-7,1	-4,694	-9,388/-9,387	-2,406/1,384
0	1,384	0	1,383	2,768	
5,158	0	0	5,158	10,316	
0	0	-7,1	-7,098	-14,196	

$$\text{Отсюда } x_1 = \frac{5,158}{5,158} = 1 \quad x_2 = \frac{1,383}{1,383} = 1 \quad x_3 = \frac{-7,098}{-7,1} = 1.$$

Пояснения. На первом шаге главное уравнение – третье, главный элемент – коэффициент -7.1 при x_3 . Исключим x_3 из первого уравнения, домножив третье на $-3.1/7.1$ и сложив с первым. Исключим x_3 из второго уравнения, домножив третье на $5.1/7.1$ и сложив с первым. Первый шаг закончен. На втором шаге генеральная строка – вторая, генеральный элемент – коэффициент 5.158 при x_1 . Далее аналогично.

3.3 Вычисление определителей

Пусть надо вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1,2 & 2,4 & -3,1 \\ 2,5 & -1,8 & 5,1 \\ 3,7 & 2,3 & -7,1 \end{pmatrix}$.

Так как определитель треугольной матрицы равен просто произведению диагональных элементов, желательно смысл привести эту матрицу к треугольному виду. Метод Гаусса с выбором главного элемента, дополненный перестановкой строк и столбцов как раз позволяет это сделать. При этом прибавление к строке другой, умноженной на число, не меняет определитель, а перестановка двух строк (или столбцов) меняет его знак.

Итак, выберем главный элемент (-7.1) и установим нули в остальных элементах этого столбца, как в методе Гаусса:

$$\begin{pmatrix} -0.415 & 1.396 & 0 \\ 5.158 & -0.148 & 0 \\ 3.7 & 2.3 & -7.1 \end{pmatrix}.$$

Теперь выберем главный элемент в оставшихся двух строках – число 5.158 во второй строке, и обнулیم число в этом столбце в первой строке (третья больше не меняется!).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1.383 & 0 \\ 5.158 & -0.148 & 0 \\ 3.7 & 2.3 & -7.1 \end{pmatrix}.$$

Переставим первый и второй столбцы, получим (нижнюю) треугольную матрицу. Её определитель равен $(-7,1) \cdot 5,158 \cdot 1,384 = -50,684571$. Поскольку была одна перестановка столбцов, определитель исходной матрицы равен (с точностью до округлений) 50,68.

Замечание. На этом примере можно убедиться в полезности численных методов. Прямое нахождение определителя как суммы всевозможных произведений элементов даже при $n=30$ потребует совершенно астрономического количества действий (порядка 10^{30}). А метод Гаусса позволяет вычислять определители сотого и более порядка.

3.4 Метод Жордана вычисления обратной матрицы

Пусть A – квадратная матрица порядка n . Матрица A^{-1} называется обратной для матрицы A , если $AA^{-1}=E$, где E – единичная матрица порядка n . Перейдём к вычислению обратной матрицы. Будем искать A^{-1} в ви-

де $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix}$. Тогда соотношение $AA^{-1}=E$ можно записать

так: $\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot x_{kj} = \delta_{ij}$, δ_{ij} – элемент единичной матрицы. Для любого

столбца матрицы A^{-1} получается одна и та же система уравнений с различными только правыми частями. Эти n систем метод Жордана позволяет решать одновременно. Для этого составим матрицу, содержащую n строк и $2n$ столбцов, для чего к матрице A справа припишем матрицу E . Теперь указанными выше преобразованиями приведем матрицу A к диагональному виду, совершая те же преобразования со строками приписанной матрицы E . Каждую главную строку сразу или в конце надо разделить

на главный элемент. Поскольку главный элемент может не лежать на главной диагонали, затем надо переставить строки так, чтобы слева стояла единичная матрица. При этом переставляются строки расширенной матрицы, а матрица, стоящая справа и будет обратной матрицей для A .

Пример. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1,2 & 2,4 & -3,1 \\ 2,5 & -1,8 & 5,1 \\ 3,7 & 2,3 & -7,1 \end{pmatrix}$$

Решение.

x_1	x_2	x_3	b_1	b_2	b_3	Множитель
1,2	2,4	-3,1	1	0	0	3,1
2,5	-1,8	5,1	0	1	0	-5,1
3,7	2,3	-7,1	0	0	1	
-0,415	1,396	0	1	0	-0,437	0,415
5,158	-0,148	0	0	1	0,719	
-0,521	-0,324	1	0	0	-0,141	0,521
0	1,384	0	1	0,081	-0,379	
1	-0,029	0	0	0,194	0,139	0,029
0	-0,329	1	0	0,101	-0,069	0,339
0	1	0	0,72	0,058	-0,274	
1	0	0	0,021	0,196	0,13	
0	0	1	0,245	0,12	-0,162	
1	0	0	0,02	0,196	0,13	
0	1	0	0,723	0,058	-0,274	
0	0	1	0,245	0,12	-0,162	

Пояснения. Делим третью строчку на $-7,1$ и записываем ее на месте третьей строки следующего шага. Затем прибавляем к первой и второй строке эту новую третью строку, умноженную на $3,1$ и $-5,1$ соответственно. Затем вторую строку следующего шага делим на $5,158$ и т.д. На пятом шаге переставляем первую и вторую строки. Матрица

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,021 & 0,196 & 0,13 \\ 0,723 & 0,058 & -0,274 \\ 0,245 & 0,12 & -0,162 \end{pmatrix} \text{ является обратной.}$$

Сделаем проверку: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1,0009 & 0,002 & 0,0006 \\ 0,0006 & 0,9976 & 0,008 \\ 0,0011 & 0,006 & 1,001 \end{pmatrix}$

3.5 Методы итераций

3.5.1 Идея итерационных методов

Для систем большой размерности методы Гаусса требуют уже значительного числа операций, так что накопленная погрешность округлений становится большой. Поэтому «точное» решение, найденное методом Гаусса, на самом деле является приближенным. Его надо уточнять. Эти соображения делают актуальными для решения систем приближенные методы, в частности, *итерационные методы*.

Суть итераций состоит в том, что, взяв в качестве начального приближения некоторую, быть может, достаточно грубую оценку решения, затем методом последовательных приближений сделать его достаточно близким к точному решению.

При этом обычно в значениях последовательных приближений берут $m+1$ десятичных знаков, и итерации производят до тех пор, пока они не начнут совпадать, после чего результат округляют на один знак. Если же коэффициенты системы являются приближенными числами с m верными знаками, то решение системы производится с точностью до m знаков.

Итерационный процесс обладает важным свойством *отсутствия накопления ошибок*. Ошибка в вычислении, сделанная на некотором шаге, будет исправлена в последующих, так как ошибочное приближение можно рассматривать как новое начальное приближение.

Недостатком является необходимость преобразования системы к такому виду, чтобы процесс итераций сходил.

Пример. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x - y + z = 7 \\ 4x - 8y + z = -21 \\ -2x + y + 5z = 15 \end{cases}$$

Выразим их первого уравнения $x = \frac{7+y-z}{4}$, из второго $y = \frac{21+4x+z}{8}$, из

третьего $z = \frac{15+2x-y}{5}$. Возьмём начальное приближение $x_0=1, y_0=2,$

$z_0=2$, и подставим его в правую часть этих формул. Получим $x_1=1.75,$
 $y_1=3.373, z_1=3.$

Подставляя полученные значения в те же формулы, находим

$x_2=1.84, y_2=3.3875, z_2=3.025,$

$x_3=1.9625, y_3=3.925, z_3=2.9625,$

$x_4=1.9625, y_4=3.925, z_4=2.9625, \dots$

Процесс постепенно сходится к точному решению $x=2; y=4; z=3.$

Это – метод Якоби.

3.5.2 Метод Якоби.

Итак, пусть задана система n уравнений $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$

Пусть диагональные элементы $a_{ii} \neq 0$ для всех i . Этого всегда можно добиться, переставив строки или столбцы. Выразим из первого уравнения x_1 , из второго – x_2 и так далее.

$$x_i = \beta_i + \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

В матричной форме систему можно записать так

$$x = \beta + \alpha \cdot x, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Пусть вектор $x^{(0)}$ – нулевое приближение решения. Тогда последующие находятся по формулам

$$x^{(i+1)} = \beta + \alpha \cdot x^{(i)},$$

Получаем последовательность векторов $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(i)}, \dots$ Пусть эта последовательность имеет предел – вектор x^* . Тогда x^* , естественно,

удовлетворяет исходной системе уравнений. Решающим фактором здесь является *существование предела*, т.е. *сходимость* последовательности.

Уточним понятие предела последовательности матриц. Пусть

$A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})$, $k = 1, 2, \dots, n, \dots$ – последовательность матриц одинаковой размерности. Матрица $A = (a_{ij})$ той же размерности называется *пределом* последовательности матриц, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $K > 0$ такое, что $|a_{ij}^{(k)} - a_{ij}| \leq \varepsilon$ для всех $k > K$ и для всех элементов (i, j) .

Сформулируем условия, при которых итерационный процесс сходится, для чего введем понятие нормы матрицы.

Нормой матрицы A называется неотрицательная функция $\|A\|$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$1) \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0 \quad 2) \|\alpha \cdot A\| = |\alpha| \cdot \|A\|, \quad 3) \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

Чаще всего рассматривают следующие нормы

$$\|A\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad \|A\|_2 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad \|A\|_3 = \sqrt{\sum_i \sum_{j=1}^n a_{ij}^2},$$

т.е. максимум сумм модулей по строкам, максимум сумм модулей по столбцам и корень из суммы квадратов.

Им соответствуют нормы векторов:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \|x\|_1 = \max(|x_i|) \quad \|x\|_2 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \|x\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Справедлива следующая

Теорема: Процесс итерации $x^{(k+1)} = \beta + \alpha \cdot x^{(k)}$ для системы $x = \beta + \alpha \cdot x$ сходится к единственному ее решению \tilde{x} , если какая-нибудь норма матрицы α меньше единицы. При этом

$$\|\tilde{x} - x^k\| \leq \frac{\|\alpha\|^k}{1 - \|\alpha\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|, \quad \|\tilde{x} - x^k\| \leq \frac{\|\alpha\|}{1 - \|\alpha\|} \|\tilde{x}^k - \tilde{x}^{k-1}\|$$

Замечания. 1) В качестве начального вектора X^0 можно взять вектор β – вектор свободных членов. Тогда оценка погрешности имеет вид

$$\left\| \xi - \bar{x}^{(k)} \right\| \leq \frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1 - \|\alpha\|} \|\beta\|$$

2) Если $\|\alpha\| \leq \frac{1}{2}$, то оценка погрешности принимает вид

$$\left\| \tilde{x} - x^{(k)} \right\| \leq \left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\|$$

т.е. если $\left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\| \leq \varepsilon$, то $\left\| \tilde{x} - x^{(k)} \right\| \leq \varepsilon$

Погрешность приближения, оцениваемая по этим формулам, на практике оказывается весьма завышенной и процесс итераций обычно прекращают тогда, когда стабилизируется нужное количество десятичных знаков.

Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 1,2x_1 + 2,4x_2 - 3,1x_3 = 0,5 \\ 2,5x_1 - 1,8x_2 + 5,1x_3 = 5,8 \\ 3,7x_1 + 2,3x_2 - 7,1x_3 = -1,1 \end{cases}$$

Здесь все $a_{ii} \neq 0$. Запишем систему в форме $x = \beta + \alpha x$ для чего из 1-ого уравнения выразим $x_i, i = 1, 2, 3$.

$$\begin{cases} x_1 = 0,417 - 2x_2 + 2,583x_3 \\ x_2 = -3,222 + 1,389x_1 + 2,833x_3 \\ x_3 = 0,155 + 0,521x_1 + 0,324x_2 \end{cases} \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2,583 \\ 1,389 & 0 & 2,833 \\ 0,521 & 0,324 & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь все канонические нормы матрицы α больше единицы, а потому итерационный процесс расходится.

Приведем простые *достаточные условия*, при которых итерационный процесс сходится.

Теорема. Процесс итераций сходится, если выполнены неравенства

$$\left| a_{ii} \right| \geq \sum_{j \neq i} \left| a_{ij} \right| \quad \text{или} \quad \left| a_{jj} \right| \geq \sum_{i \neq j} \left| a_{ij} \right|,$$

т.е. если модули диагональных элементов матрицы A или для каждой строки превышают сумму модулей остальных элементов этой строки, или же для каждого столбца превышают сумму модулей остальных элементов этого столбца.

Итак, чтобы решить данную систему методом итераций, надо заменить ее эквивалентной, для которой метод итераций уже сходил бы. Практически поступают следующим образом. В системе находят уравнения, в которых один из коэффициентов по модулю превосходит бы сумму модулей остальных. Перестановкой строк или столбцов добиваются, чтобы эти коэффициенты были диагональными. Затем составляют линейно независимые между собой линейные комбинации уравнений, чтобы и для остальных диагональных элементов указанное условие было выполнено. Надо при этом следить, чтобы *каждое уравнение* хотя бы один раз попало в линейную комбинацию.

Продолжение примера. Для заданной системы элемент $a_{33} = -7,1$ уже удовлетворяет нужному условию. В качестве первого уравнения новой системы возьмем второе плюс третье, минус первое, а второго – третье минус три первых. Получим систему

$$\begin{cases} 5,0x_1 - 1,9x_2 + 1,1x_3 = 4,2 & 5 \geq 1,9 + 1,1 \\ 0,1x_1 - 4,9x_2 + 2,2x_3 = -2,6 & 4,9 \geq 0,1 + 2,2 \\ 3,1x_1 + 2,3x_2 - 7,1x_3 = -1,1 & 7,1 \geq 3,7 + 2,3 \end{cases}$$

Разрешая уравнения этой системы относительно x_1, x_2, x_3 , получим

$$\begin{cases} x_1 = 0,84 + 0,38x_2 - 0,22x_3 \\ x_2 = 0,531 + 0,02x_1 + 0,449x_3 \\ x_3 = 0,155 + 0,521x_1 + 0,324x_2 \end{cases}$$

Чтобы можно было оценить погрешность приближений, найдём нормы матрицы

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0,38 & -0,22 \\ 0,02 & 0 & 0,449 \\ 0,521 & 0,324 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|\alpha\|_1 = \max(0,6; 0,469; 0,845) = 0,845 < 1$$

$$\|\alpha\|_2 = \max(0,541; 0,704; 0,669) = 0,704 < 1$$

$$\|\alpha\|_3 = \sqrt{0,38^2 + 0,22^2 + 0,449^2 + 0,521^2 + 0,324^2} = 0,878 < 1$$

В данном случае все три нормы меньше 1.

Запишем итерационные формулы в развернутом виде

$$\begin{aligned}
 x_1^{(k)} &= 0,84 + 0,38x_2^{(k-1)} - 0,22x_3^{(k-1)} \\
 x_2^{(k)} &= 0,531 + 0,02x_1^{(k-1)} + 0,449x_3^{(k-1)} \\
 x_3^{(k)} &= 0,155 + 0,521x_1^{(k-1)} + 0,324x_2^{(k-1)}
 \end{aligned}$$

За нулевое приближение возьмем вектор свободных членов

$$x_1^{(0)} = 0,84, \quad x_2^{(0)} = 0,531, \quad x_3^{(0)} = 0,155.$$

Находим,

$$x_1^{(1)} = 0,84 + 0,38 \cdot 0,531 - 0,22 \cdot 0,155 = 1,0077$$

$$x_2^{(1)} = 0,531 + 0,02 \cdot 0,84 + 0,449 \cdot 0,155 = 0,6174$$

$$x_3^{(1)} = 0,155 + 0,521 \cdot 0,84 + 0,324 \cdot 0,531 = 0,7647$$

Результаты последовательных итераций запишем в таблицу

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0,84	0,531	0,155
1	1,0077	0,6174	0,7647
2	0,9064	0,8945	0,8800
3	0,9863	0,9442	0,9171
4	0,9970	0,9625	0,9748
5	0,9913	0,9886	0,9863
6	0,9987	0,9938	0,9918
7	0,9994	0,9963	0,9973

Точное решение, как мы видели,

$x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Взяв приближенное решение

$$x_1^{(7)} = 0,9994, \quad x_2^{(7)} = 0,9963, \quad x_3^{(7)} = 0,9973,$$

получим, что

$$\|\tilde{x} - x^7\|_m = 0,0036 \approx 0,004$$

С другой стороны, так как

$$\|\alpha\|_1 = 0,845 \quad \|\beta\|_1 = 0,84, \text{ то}$$

$$\|\tilde{x} - x^7\| \leq \frac{0,845^8}{1 - 0,845} \cdot 0,84 = 1,41. \text{ Действительная погрешность оказа-}$$

лась здесь значительно меньше ее оценки.

3.5.3 Метод Зейделя

Он заключается в том, что при вычислении очередного приближения переменной x_i учитываются уже вычисленные приближения переменных

$$x_1, x_2, \dots, x_{i-1}.$$

Обычно метод Зейделя дает лучшую сходимость, чем метод простой итерации. Он может сходиться даже в том случае, когда расходится метод простой итерации. Однако есть примеры, когда процесс Зейделя сходится

медленнее обычной итерации или даже расходится, в то время, когда метод простой итерации сходится. Наконец, если одна из канонических норм матрицы α меньше 1, то процесс Зейделя сходится к единственному решению.

Пример. Применим метод Зейделя к рассмотренной выше системе. Положим опять $x^{(0)} = \beta$. Тогда (сравните с примером для метода Якоби!)

$$x_1^{(1)} = 0,84 + 0,38 \cdot 0,531 - 0,22 \cdot 0,155 = 1,0077$$

$$x_2^{(1)} = 0,531 + 0,02 \cdot 1,0077 + 0,449 \cdot 0,155 = 0,6207$$

$$x_3^{(1)} = 0,155 + 0,521 \cdot 1,0077 + 0,324 \cdot 0,6207 = 0,8810.$$

Аналогично получим

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,8819 \\ 0,9442 \\ 0,9204 \end{pmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,9963 \\ 0,9642 \\ 0,9865 \end{pmatrix}, \quad x^{(4)} = \begin{pmatrix} 0,9894 \\ 0,9937 \\ 0,9924 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, погрешность на четвёртом шаге: $\|\tilde{x} - x^{(4)}\|_1 = 0,01$.

4. Метод наименьших квадратов

4.1 Постановка задачи

Интерполяция редко применяется для количества узлов, большего 3–4. В крайнем случае точки разбивают на группы и интерполируют каждую группу в отдельности, «склеивая» результаты (так называемые *сплайны*). Причина состоит в том, что интерполяция по большому числу узлов лишена практического смысла.

Пример. Пусть имеются данные по годам за 15 лет об объёме валового национального продукта (X) и объёме экспорта (Y) в некоторой стране. Нелепо выглядел бы результат исследований учёного-экономиста, выводящего отсюда зависимость Y от X в виде полинома *четырнадцатой* (!) степени. Который на следующий год (с добавлением новых данных) превратился бы в полином пятнадцатой степени.

Само требование интерполяции — чтобы график построенной функции проходил *точно* через заданные точки, является неудовлетворительным с практической точки зрения. Реальные данные редко бывают известны аб-

солютно точно. Ещё важнее то, что нельзя (а часто не требуется) объять необъятное и учесть все факторы. На объём экспорта, например, влияют множество факторов и целью может быть нахождение и выделение *основных зависимостей и тенденций*.

Пример. Изменение курсов акций внешне выглядят как беспорядочные колебания относительно некоторой кривой, называемой *трендом*. Как подобрать уравнение этой кривой *наилучшим образом*?

4.2 Метод наименьших квадратов

Обычным подходом является следующий. Пусть дано некоторой количество точек плоскости (x_i, y_i) , $i=1, 2, \dots, n$. Точки могут и повторяться. Выбирается некоторая, по возможности простая, зависимость в виде обобщённого полинома

$$f(x) = \beta_1 \varphi_1(x) + \beta_2 \varphi_2(x) + \dots + \beta_m \varphi_m(x) \quad (4.1)$$

Здесь β_i – неизвестные коэффициенты, φ_i – известные функции. Коэффициенты подбираются так, чтобы минимизировать *остаточную сумму квадратов*:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 \rightarrow \min \quad (4.2)$$

Дифференцируя левую часть этого соотношения и приравнивая производную нулю, легко получить следующую систему линейных уравнений для нахождения коэффициентов β_i :

$$\begin{cases} A_{11}\beta_1 + A_{12}\beta_2 + \dots + A_{1m}\beta_m = B_1 \\ A_{22}\beta_1 + A_{22}\beta_2 + \dots + A_{2m}\beta_m = B_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ A_{m2}\beta_1 + A_{m2}\beta_2 + \dots + A_{mm}\beta_m = B_m \end{cases} \quad (4.3)$$

где

$$A_{kl} = \sum_{i=1}^n \varphi_k(x_i) \varphi_l(x_i), \quad B_k = \sum_{i=1}^n y_i \varphi_k(x_i) \quad (4.4)$$

Пример. Имеется информация за 7 лет о среднем доходе (x) и среднем потреблении (y):

Годы	1	2	3	4	5	6	7
Доход	14.5	15.7	16.3	18.5	20.3	21.7	23
Потребление	12	12.7	13	15.5	16.5	17.3	20

Для этих данных требуется подобрать наилучшую прямую $y = \beta_1 + \beta_2 x$ методом наименьших квадратов.

Здесь $\varphi_1(x)=1$, $\varphi_2(x)=x$. Вычисляем коэффициенты системы уравнений (4.3) по формулам (4.4):

$$A_{11} = \sum \varphi_1 \varphi_1 = \sum 1 = 7, \quad A_{12} = A_{21} = \sum \varphi_1 \varphi_2 = \sum x = 130,$$

$$A_{22} = \sum \varphi_2 \varphi_2 = \sum x^2 = 2476.6,$$

$$B_1 = \sum y \varphi_1 = \sum y = 107, \quad B_2 = \sum (y \varphi_2) = \sum (yx) = 2042.4.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 7\beta_1 + 130\beta_2 = 107 \\ 130\beta_1 + 2476.6\beta_2 = 2042.4, \end{cases}$$

откуда $\beta_1 = -1.167$, $\beta_2 = 0.8859$. Таким образом, наилучшее линейное приближение для исходных данных имеет вид $y = -1.167 + 0.8859 x$. На потребление тратится примерно 88% дохода.

Учебно-методическое издание

Липкина Зоя Семеновна
Милевский Александр Станиславович

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ.

Методические указания
Часть 1

Подписано в печать - *15.10.03.*

Заказ № *1144.*

Изд. № *427-03.*

Формат 60x84 / 16

Усл. печ. л. - *2,0.*

Тираж - *100.*

Цена - *13 руб. 00 коп.*

127994, Москва, ул. Образцова, 15
Типография МИИТа

**Цена - 13руб.00 коп
(по себестоимости)**