МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра “Математика”

А.Е.Гарслян

МЕТОД ЖОРДАНА - ГАУССА

Методические указания к практическим занятиям

Москва – 2010

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра “Математика ”

А.Е.Гарслян

МЕТОД ЖОРДАНА - ГАУССА

Рекомендовано редакционно – издательским советом университета в качестве методических указаний для студентов специальностей ИЭФ и ИУИТ

Москва – 2010

УДК-51

Г 20
Гарслян А.Е. МЕТОД ЖОРДАНА - ГАУССА. Методические указания к практическим занятиям. – М.: МИИТ, 2010.–28 с.

Предназначено для студентов специальностей, в учебных планах которых предусмотрена дисциплина “Линейная алгебра ” или элементы этой дисциплины. Содержит задачи и методические указания по их решению методом Жордана-Гаусса. Задачи могут быть использованы на практических занятиях, в контрольных, зачётных работах и для выдачи индивидуальных домашних заданий.

Учебно-методическое издание

Гарслян Александр Егишевич

МЕТОД ЖОРДАНА – ГАУССА

Методические указания к практическим занятиям

Подписано в печать	Формат 60х84 / 16
Заказ №	Усл. печ. л. –
Тираж – 200 экз.	Изд. № 215-10

127994, ГСП–4, Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9
Типография МИИТ’а

КАРЛ ФРИДРИХ ГАУСС
1777 - 1855

1.РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ГАУССА.

Решение системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса проводится исключением переменных эквивалентными преобразованиями исходной системы, приводящее расширенную матрицу системы к виду трапеции (прямой ход), и отысканием значений переменных из вышестоящих строк трапеции через нижестоящие, начиная с последней строки трапеции (обратный ход).

Рассмотрим пример решения системы методом Гаусса. Справа от системы указываются производимые с ней действия. В тексте под системой приводятся необходимые объяснения к этим действиям, после которых следует результат.

$2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2$ $3x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 3$ $5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1$ $x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 3$ Меняя местами уравнения, делаем единичным коэффициент при первой переменной, в первом уравнении (ведущий элемент). Это нужно для дальнейшего исключения этой переменной из остальных уравнений. Для того чтобы сделать единичным ведущий элемент, можно было бы поступить и по-другому, например: разделить обе части первого уравнения на два, или поменять местами слагаемые в уравнениях.	Меняем местами первое и четвертое уравнения.
$x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 3$ $2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2$ $3x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 3$ $5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1$ Справа от системы уравнений в круглых скобках указаны числа, используемые как множители правых и левых частей уравнений, в результате сложения которых происходит исключение переменной, в данном случае $x_{1,}$	(2) (3) (5) ←(-1) ← (-1) ← (-1)

из второго, третьего и четвертого уравнения. В дальнейшем такие уравнения будем называть ведомыми, а уравнение с ведущим элементом – ведущим уравнением. Ведущее уравнение не меняется, напротив него нет стрелы. Ведущее уравнение с каждым из ведомых уравнений образует пару, справа от которой в колонку выписываются необходимые для исключения переменной множители. Каждое уравнение, напротив которого имеется стрелочный указатель (ведомое уравнение), преобразуется путем сложения с ним соответствующего этой стрелке ведущего уравнения (стрелки нет, а множители указаны). Перед этим сложением правые и левые части ведущего и ведомого уравнения умножаются на соответствующие множители. Первое уравнение переписываем без изменений, напротив него нет стрелочного указателя. Умножив обе части первого уравнения на 2, прибавим его ко второму, предварительно умноженному на (-1), а результирующее уравнение запишем на место второго, согласно стрелочному указателю напротив второй строки. Умножив обе части первого уравнения на 3, прибавим его к третьему, предварительно умноженному на (-1), а результирующее уравнение запишем на место третьего. Умножив обе части первого уравнения на 5, прибавим его к четвёртому, предварительно умноженному на (-1), а результирующее уравнение запишем на место четвёртого.	

$x_1+3x_2-5x_3+7x_4=3$ $5x_2-8x_3+13x_4=4$ $12x_2-19x_3+23x_4=6$ $14x_2-24x_3+33x_4=14$ Разделив обе части второго уравнения на 5, делаем ведущий элемент второго уравнения единичным.	$\leftarrow$(:5)
$x_1+3x_2-5x_3+7x_4=3$ $x_2-1,6x_3+2.6x_4=0,8$ $12x_2-19x_3+23x_4=6$ $14x_2-24x_3+33x_4=14$ Первое и второе уравнение переписываем без изменений. Умножив обе части второго уравнения на 12, прибавим его к, третьему, предварительно умноженному на (-1), а результирующее уравнение запишем на место третьего. Умножив обе части второго уравнения на 14, прибавим его к четвёртому, предварительно умноженному на (-1), а результирующее уравнение запишем на место четвёртого.	(12)(14) $\leftarrow$(-1) $\leftarrow$ (-1)
$x_1+3x_2-5x_3+7x_4=3$ $x_2-1,6x_3+2,6x_4=0,8$ $-0,2x_3+8,2x_4=3,6$ $1,6x_3+3,4x_4=-2,8$ Разделив обе части третьего уравнения на -0,2, делаем ведущий элемент третьего уравнения единичным	$\leftarrow$(: -0.2)
$x_1+3x_2-5x_3+7x_4=3$ $x_2-1,6x_3+2,6x_4=0,8$ $x_3-41x_4=-18$ $1,6x_3+3,4x_4=-2,8$ Первое, второе и третье уравнение переписываем без изменений. Умножив обе части третьего уравнения на 1,6, прибавим его к четвёртому, предварительно умноженному на (-1), а результирующее уравнение запишем на место четвёртого.	(1,6) $\leftarrow$ (-1)

$x_1+3x_2-5x_3+7x_4=3$ $x_2-1{,}6x_3+2{,}6x_4=0{,}8$ $x_3-41x_4=-18$ $-69x_4=-26$ Разделив обе части четвёртого уравнения на -69, делаем ведущий элемент четвёртого уравнения единичным. Вычисления будут производиться с точностью до тысячных (с двумя верными значащими цифрами).	←(:69)
$x_1+3x_2-5x_3+7x_4=3$ $x_2-1{,}6x_3+2{,}6x_4=0{,}8$ $x_3-41x_4=-18$ $x_4=0.377$ Прямой ход завершен. Расширенная матрица приняла вид трапеции, левая боковая сторона которой состоит из единичных коэффициентов ведущих элементов, и нижележащим нулевым треугольником. Значение переменной x_4 уже найдено: $x_4.=0{,}377$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & -1.6 & 2.6 & 0{,}8 \\ 0 & 0 & 1 & -41 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}377 \end{pmatrix}$ Начинается этап обратного хода.	Из 3-ей строки трапеции (из третьего уравнения) находим значение переменной x_3.
$x_3=-18+41x_4=-18+41*0{,}377=-2{,}543$ Сделан первый шаг обратного хода. Значение переменной x_3 найдено.	Из 2-ой строки трапеции (из второго уравнения) находим значение переменной x_2
$x_2=0{,}8+1{,}6x_3-2{,}6x_4=0{,}8+1{,}6*(-2{,}543)-$	Из 1-ой строки

-2,6*0,377=-4,249 Сделан второй шаг обратного хода. Значение переменной x_2 найдено.	трапеции (из первого уравнения) находим значение переменной x_1
$x_1=3-3x_2+5x_3-7x_4=3-3*(-4,249)+$ $+5*(-2,543)-7*0,377=0,399$ Сделан последний, третий шаг обратного хода. Значение переменной x_1 найдено. Обратный ход завершен.	Объединяем найденные значения переменных в упорядоченный числовой набор в виде столбца.
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,399 \\ -4,249 \\ -2,543 \\ 0,377 \end{pmatrix}$ Это единственное частное решение, которое имеет заданная система уравнений.	Для проверки частного решения подставляем найденные значения во все уравнения системы
2*0,399+ (-4,249)- 2(-2,543)+ 0,377=2 3*0,399- 3(-4,249)+4(-2,543)-2*0,377=3 5*0,399+ (-4,249)- (-2,543)+2*0,377=1 0,399+3(-4,249)-5(-2,543)+7*0,377=3 Подсчёты левых частей приводят к системе: $\begin{cases} 2,012=2 \\ 3,018=3 \\ 1,043=1 \\ 3,006=3 \end{cases}$, которые подтверждают верность двух значащих цифр найденного приближённого решения.	

Для получения точного решения той же системы, при исключении переменных в методе Гаусса желательно не допускать округлений. Это возможно, если элементы расширенной матрицы системы в результате эквивалентных преобразований остаются целыми числами или неокруглёнными дробями.

Так как производить вычисления с неокруглёнными дробями не всегда приятнее, чем с целыми числами, то иногда более привлекательным может быть путь через целые числа, а не дроби, тем более, неокруглённые. Однако полностью избавиться от дробей не удастся, но на этапе прямого хода это возможно, если ведущие элементы не в обязательном порядке приводить к единичному значению, а исключать переменные, не выполняя операции деления с дробным результатом, используя следующий порядок вычислений.

$2x_1+x_2-2x_3+x_4=2$ $3x_1-3x_2+4x_3-2x_4=3$ $5x_1+x_2-x_3+2x_4=1$ $x_1+3x_2-5x_3+7x_4=3$	(3) (5) (-1) ←(-2) ← (-2) ← (2)
$2x_1+x_2-2x_3+x_4=2$ $9x_2-14x_3+7x_4=0$ $3x_2-8x_3+x_4=8$ $5x_2-8x_3+13x_4=4$	(-1)(-5) ←(3) ← (9)
$2x_1+x_2-2x_3+x_4=2$ $9x_2-14x_3+7x_4=0$ $-10x_3-4x_4=24$ $-2x_3+82x_4=36$	(-1) ← (5)
$2x_1+x_2-2x_3+x_4=2$ $9x_2-14x_3+7x_4=0$ $-10x_3-4x_4=24$ $414x_4=156$	Прямой ход завершен. Расширенная матрица приняла вид трапеции. Начинается обратный ход.
Из 4-го уравнения (из 4-ой строки трапеции): $x_4=156/414=26/69$. Из 3-го уравнения (из 3-ей строки трапеции): $x_3=(-24-4x_4)/10=(-24-4*26/69)/10=-176/69$. Из 2-го уравнения (из 2-ой строки трапеции): $x_2=(14x_3-7x_4)/9=(14*(-176/69)-7*26/69)/9=$ $=-294/69$.	

Из 1-го уравнения (из 1-ой строки трапеции): $x_1=(2-x_2 + 2x_3-x_4)/2=(2-(-294/69)+2(-176/69)-$ $-26/69\ )/2 = 27/69$.	
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27/69 \\ -294/69 \\ -176/69 \\ 26/69 \end{pmatrix}$	Обратный ход завершен. Система имеет единственное частное решение.

Для проверки найденного решения,
подставим его в исходную систему уравнений:

2*27/69+(-294/69)-2(-176/69)+ 26/69=2
3*27/69- 3(-294/69)+4*(-176/69)-2*26/69=3
5*27/69+(-294/69)- (-176/69)+ 2*26/69=1
27/69+ 3(-294/69) - 5(-176/69)+ 7*26/69=3

Подсчёты левых частей приводят к системе тождеств:

$$\begin{cases} 2 = 2 \\ 3 = 3 \\ 1 = 1 \\ 3 = 3 \end{cases},$$

которая подтверждает верность найденного решения.
Найденное решение является точным.
Исключение переменных на этапе прямого хода, приводящее расширенную матрицу системы к виду трапеции, может быть выполнено без написания самих уравнений, но с написанием, непосредственно, преобразуемой расширенной матрицы, что освобождает от написания имен переменных, а, значит, экономит силы и создает комфорт при решении системы на первом этапе. Ниже показан порядок решения той же системы с помощью расширенной матрицы системы.

$2x_1+\ x_2-2x_3+\ \ x_4=2$ $3x_1-3x_2+4x_3-\ 2x_4=3$ $5x_1+\ x_2-\ \ x_3+2x_4=1$ $x_1+3x_2-5x_3+7x_4=3$	Коэффициенты при переменных и свободные члены заносятся в расширенную матрицу системы
x_1 x_2 x_3 x_4 c 2 1 -2 1 2 3 -3 4 -2 3 5 1 -1 2 1 1 3 -5 7 3	(3) (5) (-1) ←(-2) ← (-2) ← (2)
x_1 x_2 x_3 x_4 c 2 1 -2 1 2 0 9 -14 7 0 0 3 -8 1 8 0 5 -8 13 4	(-1)(-5) ←(3) ← (9)
x_1 x_2 x_3 x_4 c 2 1 -2 1 2 0 9 -14 7 0 0 0 -10 -4 24 0 0 -2 82 36	(-1) ← (5)
x_1 x_2 x_3 x_4 c 2 1 -2 1 2 0 9 -14 7 0 0 0 -10 -4 24 0 0 0 414 156 Прямой ход завершен. Расширенная матрица приняла вид трапеции, включающей квадратную матрицу треугольного вида и столбец правых частей уравнений. На главной диагонали треугольной матрицы расположены не равные нулю ведущие элементы. Под главной диа-	Перед началом второго этапа - обратного хода, вернемся к обычной форме представления системы в виде уравнений.

гональю одни нули. Над главной диагональю – элементы, полученные эквивалентными преобразованиями. Определитель этой треугольной матрицы называется базисным минором системы. В данном примере столбцы базисного минора соответствуют всем переменным системы, но в других системах уравнений столбцы некоторых переменных могут в него не входить. Переменные, столбцы по которым входят в базисный минор, будем в дальнейшем называть базисными переменными. В этом примере все переменные базисные. Порядок базисного минора равен числу базисных переменных, равен рангу матрицы коэффициентов системы и называется рангом системы.	

$2x_1+ x_2- 2x_3+ x_4 = 2$

$9x_2-14x_3+7x_4 = 0$

$-10x_3 -4x_4 =24$

$414x_4=156$

Из 4-го уравнения (из 4-ой строки трапеции):
$x_4=156/414=26/69$.

Из 3-го уравнения (из 3-ей строки трапеции):
$x_3=(-24-4x_4)/10=(-24-4 *26/69)/10=-176/69$.

Из 2-го уравнения (из 2-ой строки трапеции):
$x_2=(14x_3-7x_4)/9=(14*(-176/69)-7*26/69)/9=$
$= -294/69$.

Из 1-го уравнения (из 1-ой строки трапеции):
$x_1=(2-x_2 + 2x_3-x_4)/2=(2-(-294/69)+2(-176/69)-$
$-26/69)/2 = 27/69$.

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27/69 \\ -294/69 \\ -176/69 \\ 26/69 \end{pmatrix}$	Обратный ход завершен. Получено единственное частное решение.

Рассмотрим пример системы уравнений, при решении которой не все имеющиеся в системе переменные по ходу решения будут базисными, то есть базисный минор будет включать столбцы не по всем переменным.

$2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2$ $3x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 3$ $5x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 5$ $x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 1$	Коэффициенты при переменных и свободные члены заносятся в расширенную матрицу системы
x_1 x_2 x_3 x_4 c 2 1 -2 1 2 3 -3 4 -2 3 5 -2 2 -1 5 1 -4 6 -3 1	(3) (5) (-1) ←(-2) ← (-2) ← (2)
x_1 x_2 x_3 x_4 c 2 1 -2 1 2 0 9 -14 7 0 0 9 -14 7 0 0 -9 14 -7 0	(-1)(-1) ←(1) ← (1)
x_1 x_2 x_3 x_4 c 2 1 -2 1 2 0 9 -14 7 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	Исключим из расширенной матрицы нулевые строки
x_1 x_2 x_3 x_4 c 2 1 -2 1 2 0 9 -14 7 0 Прямой ход завершен. Расширенная матрица приняла вид трапеции, включающей квадратную матрицу треугольного вида, соответст-	Перед началом второго этапа - обратного хода, вернемся к обычной форме представления системы в виде уравнений.

<table>
<tr><td>вующая базисному минору, и прямоугольной матрицы, включающей столбцы небазисных переменные и правые части уравнений.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$2x_1+\ x_2-2x_3+\ x_4\ \ \ =2$
$\qquad 9x_2-14x_3+7x_4=0$
Из 2-го уравнения (из 2-ой строки трапеции): $x_2=(14x_3-7x_4)/9$
Из 1-го уравнения (из 1-ой строки трапеции):
$x_1=(2-x_2+2x_3-x_4)/2=(9+2x_3-x_4)/9$
Обратный ход завершен.Система имеет бесконечное множество частных решений. Выпишем общее решение системы Пусть x_3=a, x_4=b, тогда общее решение системы:</td></tr>
<tr><td>$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (9+2a-b)/9 \\ (14a-7b)/9 \\ a \\ b \end{pmatrix}$$</td><td>, где: $a, b \in (-\infty, +\infty)$</td></tr>
</table>

15

ВИЛЬГЕЛЬМ ЙОРДАН
1842 - 1899

2.РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ЖОРДАНА-ГАУССА.

Вычисления на этапе обратного хода в рассмотренном выше решении системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса, в большинстве случаев, связаны с дробями. Для исключения из схемы решения дробных вычислений можно исключить процедуру подстановки найденных из нижних строк расширенной матрицы значений переменных, но тогда придётся исключать такие переменные из всех вышестоящих строк (уравнений), при этом расширенная матрица системы уравнений будет иметь вид трапеции, в которой не только над, но и под левой боковой ее стороной будут одни нули. Следующий пример решения системы иллюстрирует именно такое преобразование расширенной матрицы системы.

$2x_1+x_2-2x_3+x_4=2$ $3x_1-3x_2+4x_3-2x_4=3$ $5x_1+x_2-x_3+2x_4=1$ $x_1+3x_2-5x_3+7x_4=3$	Коэффициенты при переменных и свободные члены заносятся в расширенную матрицу системы
x_1 x_2 x_3 x_4 c 2 1 -2 1 2 3 -3 4 -2 3 5 1 -1 2 1 1 3 -5 7 3 Переменная x_1 исключается из второго, третьего и четвёртого уравнений, то есть из всех, кроме первого.	(3) (5) (-1) ←(-2) ← (-2) ← (2)
x_1 x_2 x_3 x_4 c 2 1 -2 1 2 0 9-14 7 0 0 3 -8 1 8 0 5 -8 13 4 Переменная x_2 исключается из первого, третьего и четвёртого уравнений, то есть из всех, кроме второго .	← (9) (-1)(-5)(-1) ←(3) ← (9)
x_1 x_2 x_3 x_4 c 18 0 - 4 2 18	←(:2)

17

0 9-14 7 0 0 0-10- 4 24 0 0 -2 82 36 В первом, третьем и четвёртом уравнении правые и левые части упрощаются за счёт деления на 2	 ← (:2) ← (:2)
x_1 x_2 x_3 x_4 c 9 0 - 2 1 9 0 9-14 7 0 0 0 -5 -2 12 0 0 -1 41 18 Переменная x_3 исключается из первого, второго и четвёртого уравнений, то есть из всех, кроме третьего.	 ← (5) ← (-5) (14) (-2)(-1) ← (5)
x_1 x_2 x_3 x_4 c 45 0 0 9 21 0-45 0 -63 168 0 0 -5 -2 12 0 0 0 207 78 В первом, втором и четвёртом уравнении правые и левые части упрощаются за счёт деления на 3.	 ← (:3) ← (:3) ← (:3)
x_1 x_2 x_3 x_4 c 15 0 0 3 7 0-15 0 -21 56 0 0 -5 -2 12 0 0 0 69 26 Расширенная матрица системы уже приведена к виду трапеции, однако, над ее левой боковой стороной не все элементы нулевые. А потому, переменная x_4 исключается из первого, второго и третьего уравнений, то есть из всех, кроме четвёртого.	 ← (23) ← (23) ← (69) (2) (7) (-1)

x_1 x_2 x_3 x_4 c 345 0 0 0 135 0 -345 0 0 1470 0 0 -345 0 880 0 0 0 69 26 Расширенная матрица системы имеет вид трапеции, у которой над левой боковой стороной одни нули, сама же левая боковая сторона нулей не содержит. Базисный минор в этом случае представлен диагональной матрицей. Делением правых и левых частей всех четырех уравнений на ведущие элементы, можно привести диагональную матрицу к виду единичной матрицы, и тогда столбец правых частей будет представлять собой решение системы.	 ←(:345) ←(:-345) ←(:-345) ←(:69)
x_1 x_2 x_3 x_4 c 1 0 0 0 27/69 0 1 0 0 - 294/69 0 0 1 0 - 176/69 0 0 0 1 26/69	Вернемся к обычной форме представления системы в виде уравнений.
x_1=27/69 x_2= - 294/69 x_3=- 176/69 x_4=26/69	По ходу решения расширенная матрица оставалась целочисленной.

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27/69 \\ -294/69 \\ -176/69 \\ 26/69 \end{pmatrix}$	Получено единственное частное решение.

В рассмотренном примере матрица базисного минора приводится к единичной, а преобразования проводятся так, что первой базисной становится переменная из первого столбца, второй – из второго и так далее. Для упрощения вычислений можно изменить порядок выделения базисных переменных, проводить это выделение в наиболее удобном для вычислений, простом по элементам столбце. После выбора удобного для исключения переменной столбца, можно выбрать в нем элемент, удобный для вычислений. Для этого можно сравнить элементы тех строк, в которых ещё нет базисных переменных. Столбцы некоторых переменных расширенной матрицы системы уравнений могут изначально состоять из одного ненулевого и всех остальных нулевых элементов. Эти переменные могут быть использованы как базисные, несмотря на то что, порядок их расположения может быть произвольным. Рассмотрим пример такой системы уравнений.

$5x_2 + 6x_4 = 3$ $3x_1 + 7x_2 = 4$ $2x_2 + 9x_3 = 5$	Выберем базисные переменные.
$5x_2 + [6x_4] = 3$ $[3x_1] + 7x_2 = 4$ $2x_2 + [9x_3] = 5$ Квадратными скобками отмечены слагаемые, соответствующие базисным переменным.	Выразим базисные переменные через свободные (небазисные) переменные.
$x_4 = (3-5x_2)/6$ $x_1 = (4-7x_2)/3$ $x_3 = (5-2x_2)/9$ Подставляя в эти формулы произвольные значения переменной x_2, можно получать частные решения системы,	Пусть: $x_2 = a$, тогда общее решение системы может быть представлено формулой:

то есть числовые наборы, обращающие исходную систему уравнений в систему тождеств.	
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4-7a)/3 \\ a \\ (5-2a)/9 \\ (3-5a)/6 \end{pmatrix},$	где $a \in (-\infty, +\infty)$
Формула общего решения содержит параметр «а», выбор значения которого уточняется указанием интервала допустимых для него значений.	

Базисный минор в этом примере включал столбцы переменных x_1, x_3, x_4, элементы которых с поправкой на перестановку строк образуют единичную матрицу.

Рассмотрим пример решения системы с выделением базисных переменных, базисный минор для которых компонуется выбором удобных для вычислений столбцов и строк, без обязательного упорядочивания базисных элементов по главной диагонали базисного минора, но с полным обнулением элементов базисного столбца, за исключением самого базисного элемента.

$2x_1+5x_2-3x_3+(x_4) = 5$ $9x_1-3x_2+4x_3-2x_4 = 6$ $8x_1+2x_2-8x_3+2x_4 = 1$ X_4 выд. как базисную	(2) (2) ← (1) ← (-1)
$2x_1+5x_2-3x_3+[x_4] = 5$ $13x_1+7x_2-2x_3 = 16$ $-4x_1+8x_2+(2x_3) = 9$ X_3 выд. как базисную	← (2) ← (1) (1) (3)
$-8x_1+34x_2+[2x_4] = 37$ $(9x_1)+15x_2 = 25$ $-4x_1+8x_2+[2X_3] = 9$ X_1 выд. как базисную	← (9) (8) (4) ← (9)
$426X_2+[18x_4] = 533$ $[9x_1]+15x_2 = 25$ $132x_2+[18x_3] = 181$	

x_4=(533-426x2)/18 x_1=(25-15x2)/9 x_3=(181-132x2)/18	Пусть: x_2=a, тогда общее решение системы:
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (25-15a)/9 \\ a \\ (181-132a)/18 \\ (533-426a)/18 \end{pmatrix},$	где $a \in (-\infty, +\infty)$

Для проверки найденного решения,
подставим его в исходную систему уравнений.

$$\begin{cases} 2(25-15a)/9 + 5a - 3(181-132a)/18 + (533-426a)/18 = 5 \\ 9(25-15a)/9 - 3a + 4(181-132a)/18 - 2(533-426a)/18 = 6 \\ 8(25-15a)/9 + 2a - 8(181-132a)/18 + 2(533-426a)/18 = 1 \end{cases}$$

После преобразований, получим: тождества:

$$\begin{cases} 5 = 5 \\ 6 = 6 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

Эти тождества позволяют утверждать о верности найденного решения системы, так как для любого значения параметра «а», из формулы получается числовой набор значений неизвестных, обеспечивающий те же самые тождества, а значит порождаемые полученной формулой числовые наборы, являются частными решениями исходной системы уравнений. А с другой стороны, всякий числовой набор, являющийся частным решением системы, а, соответственно, обращающий уравнения исходной системы в тождества, полностью соответствует полученной формуле, так как, приведшие к этой формуле преобразования, могут быть проделаны над исходной системой, после подстановки соответствующих числовых значений переменных. Таким образом, полученная формула описывает множество всех числовых наборов, обеспечивающих обращение системы уравнений в систему тождеств, то есть множество всех частных решений системы, а потому является общим решением системы уравнений.
Приведенный для этой системы порядок решения соответствует методу Жордана – Гаусса.

Таким образом, для решения системы линейных алгебраических уравнений методом Жордана – Гаусса нужно выполнить следующие действия:

- выделить в уравнениях по одной базисной переменной с полным исключением ее из остальных уравнений;
- выразить базисные переменные через свободные переменные;
- выписать решение системы (формулу множества частных решений).

При выделении базисных переменных некоторые уравнения могут обратиться в тождества, - которые могут быть отброшены, как не влияющие на решение, но в некоторых системах могут быть уравнения, обращающиеся в неверные равенства, - у таких систем нет решений (противоречивые системы уравнений). Окончательно полученное при решении общее число базисных переменных определяет ранг системы. Если ранг системы совпадает с рангом расширенной матрицы системы, то система уравнений имеет решение (Теорема Кронекера – Капелли).

В следующем примере показано применение метода Жордана - Гаусса с использованием расширенной матрицы системы.

$4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5$ $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 1$ $5x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 6$ $7x_1 - 3x_2 + 10x_3 - 7x_4 = 8$	Коэффициенты при переменных и свободные члены заносятся в расширенную матрицу системы
x_1 x_2 x_3 x_4 c 4 3 1 2 5 1 (-2) 3 -3 1 5 1 4 -1 6 7 - 3 10 -7 8 Переменная x_2 будет выделена как базисная во втором уравнении, а потому будет исключена из первого, третьего и четвёртого уравнений, то есть из всех, кроме второго.	 ←(2) (3) (1) (3) ← (2) ← (-2)
x_1 x_2 x_3 x_4 c 11 0 11(-5) 13 1 [-2] 3 -3 1	 (-3)(-1) (1) ←(5)

<table>
<tr><td>11 0 11 -5 13
-11 0 -11 5 -13
Переменная x_4 будет выделена как базисная в первом уравнении, а потому будет исключена из второго, третьего и четвёртого уравнений, то есть из всех, кроме первого.</td><td>← (1)
← (1)</td></tr>
<tr><td>x_1 x_2 x_3 x_4 c
11 0 11 [-5] 13
-28 [-10] -18 0 -34
0 0 0 0 0
0 0 0 0 0
Во втором уравнении правые и левые части упрощаются за счёт деления на 2</td><td>

←(:-2)</td></tr>
<tr><td>x_1 x_2 x_3 x_4 c
11 0 11 [-5] 13
14 [5] 9 0 17
0 0 0 0 0
0 0 0 0 0

Первые две строки полученной расширенной матрицы соответствуют уравнениям, в которых выделены базисные переменные, их коэффициенты выделены квадратными скобками. Остальные строки в результате преобразований обнулены, соответствующие им равенства – это уже не уравнения, а числовые тождества, в которых процедура выделения базисных переменных не предполагается.</td><td>Вернемся к обычной форме представления системы.</td></tr>
<tr><td>$11x_1 + 11x_3 - [5x_4] = 13$
$14x_1 + [5x_2] + 9x_3 = 17$</td><td>Выразим базисные переменные через</td></tr>
</table>

0= 0 0= 0 Так как, окончательно, базисных переменных оказалось всего две, то ранг системы равен двум. Так как ранг расширенной матрицы также равен двум, то система имеет решение	свободные, а тождества отбросим.
$x_4=(-13+11x_1+11x_3)/5$ $x_2=(17-14x_1-9x_3)/5$	Пусть: $x_1=a$, $x_3=b$, тогда общее решение системы:
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ (17-14a-9b)/5 \\ b \\ (-13+11a+11b)/5 \end{pmatrix}$	, где: $a,b \in (-\infty,+\infty)$

Для проверки найденного решения,
подставим его в исходную систему уравнений.

$$\begin{cases} 4a+3(17-14a-9b)/5+b+2(-13+11a+11b)/5=5 \\ a-2(17-14a-9b)/5+3b-3(-13+11a+11b)/5=1 \\ 5a+(17-14a-9b)/5+4b-(-13+11a+11b)/5=6 \\ 7a-3(17-14a-9b)/5+10b-7(-13+11a+11b)/5=8 \end{cases}$$

После преобразований,
получим: тождества:

$$\begin{cases} 5 = 5 \\ 1 = 1 \\ 6 = 6 \\ 8 = 8 \end{cases}$$ Решение верно.

Рассмотрим пример решения ещё одной системы.

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2$ $2x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 1$ $x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = -1$ $3x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 5$	Коэффициенты при переменных и свободные члены заносятся в расширенную матрицу системы
x_1 x_2 x_3 x_4 c (1) 2 3 1 2 2 -3 1 -3 1 1 -5 -2 -4 -1 3 -1 4 -2 5 Переменная x_1 будет выделена как базисная в первом уравнении, а потому будет исключена из второго, третьего и четвёртого уравнений, то есть из всех, кроме первого.	(2) (-1) (-3) ←(-1) ← (1) ← (1)
x_1 x_2 x_3 x_4 c [1] 2 3 1 2 0 7 5 (5) 3 0 -7 -5 -5 -3 0 -7 -5 -5 -1 Переменная x_4 будет выделена как базисная во втором уравнении, а потому будет исключена из первого, третьего и четвёртого уравнений, то есть из всех, кроме второго.	← (5) (-1) (1) (1) ← (1) ← (1)

$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & c \\ [5] & 3 & 10 & 0 & 7 \\ 0 & 7 & 5 & [5] & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}$ Первые две строки полученной расширенной матрицы соответствуют уравнениям, в которых выделены базисные переменные, их коэффициенты выделены квадратными скобками. В остальных строках в результате преобразований обнулены коэффициенты при переменных, соответствующие им равенства – чисто числовые, в них процедура выделения базисных переменных не предполагается, так как такие равенства уравнениями не являются.	Вернемся к обычной форме представления системы уравнений.
$[5x_1] + 3x_2 + 10x_3 = 7$ $7x_2 + 5x_3 + [5x_4] = 3$ $0 = 0$ $0 = 2$ Так как, окончательно, базисных переменных оказалось всего две, то ранг системы равен двум. Так как ранг расширенной матрицы равен трем, то система не имеет решений. Вывод о несовместности системы уравнений следует сразу из противоречивости последнего равенства: $0 = 2$	Система уравнений несовместна, решений нет.

27

3.ЗАДАЧИ НА ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЖОРДАНА-ГАУССА

В следующих задачах, перед началом решения подставить вместо параметров: Н, Г, П - соответствующие им значения, исходя из того, что:

Н – номер студента по списку группы (1,2,..) ,

Г – номер группы (1,2,..); *П* – номер потока (1, 2,…).

Например: 6-ой по списку студент в группе ЭЭТ-125 имеет следующие значения параметров: Н=6; Г=5; П=2.

1.Решить систему уравнений

$$\begin{cases} H\ x_1 + \Gamma\ x_2 + \Pi\ x_3 + 2\ x_4 = 3 \\ 2\ x_1 - 3\ x_2 + 2\ x_3 + \ x_4 = 1 \\ (H-2)\ x_1 + (\Gamma+3)x_2 + (\Pi-2)x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

2. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} H\ x_1 + \Gamma\ x_2 + \Pi\ x_3 + 2\ x_4 \geq 3 \\ 2\ x_1 - 3\ x_2 + 2\ x_3 + \ x_4 \leq 1 \\ (H-2)\ x_1 + (\Gamma+3)x_2 + (\Pi-2)x_3 + x_4 \geq 2 \end{cases}$$

3.Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} H & \Gamma & \Pi & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ (н-1) & (\Gamma+3) & (\Pi+2) & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

4. Решить матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} H & \Gamma & \Pi & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} X \leq \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

СОДЕРЖАНИЕ