ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»

Кафедра «Математика»

А.И. Гусев

Линейная алгебра в задачах

ЧАСТЬ 2

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Москва – 2014

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»

Кафедра «Математический анализ»

А.И. Гусев

Линейная алгебра в задачах

часть 2

Рекомендовано редакционно-издательским советом
университета в качестве методических указаний
для студентов экономических специальностей

Москва – 2014

УДК 519.2
Г96

Гусев А.И. Линейная алгебра в задачах. Часть 2: Методические указания для практических занятий.
– М.: МГУПС (МИИТ), 2014. – 36 с.

В методических указаниях представлен основной практический материал по курсу линейная алгебра (операции над векторами, аналитическая геометрия на плоскости, аналитическая геометрия в пространстве). Изложенный материал иллюстрируется большим количеством примеров и задач разного уровня сложности. Разобраны тестовые и значимые задачи. Методические указания содержат варианты для самостоятельных работ.

Учебно-методическое издание

Гусев Анатолий Иванович

Линейная алгебра в задачах. Часть 2
Методические указания для практических занятий

Подписано в печать-	Формат-	Тираж 100 экз.
Усл. печ. л. -	Заказ-	Изд. № 230-14

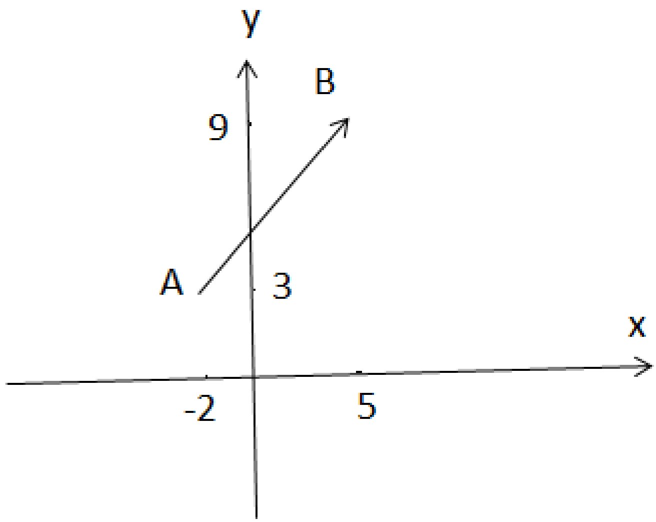
I ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА.

1. Векторы, сложение и умножение на число.

Пример 1. На плоскости заданы две точки A(-2;3), B(5;9).

Построить вектор $\overrightarrow{AB}$ и найти координаты и длину вектора.

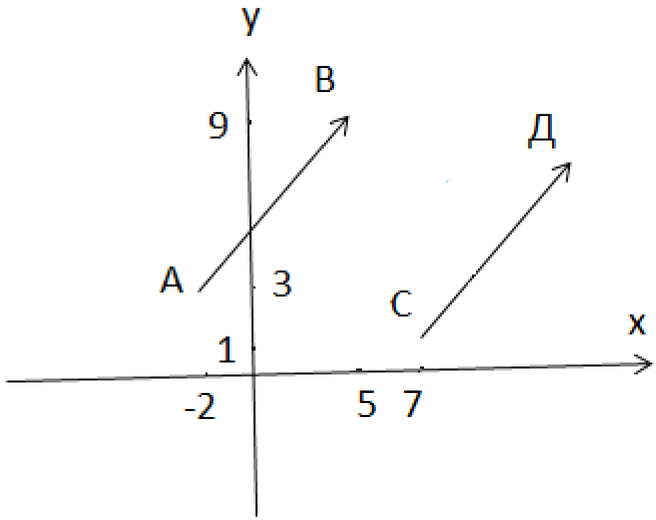
Решение.



Координаты вектора= (7;6), длина вектора = $\sqrt{49+36}=\sqrt{85}$.

Пример 2. Задана точка C(7;1). Построить вектор с началом в точке C и равным вектору $\overrightarrow{AB}$ (из примера 1). Найти координаты конца полученного вектора.

Решение. Вектор $\overrightarrow{AB}$ переносим параллельно так, чтобы начало совпало с точкой C, получим вектор $\overrightarrow{СД}$.



Координаты точки Д = координатам точки С + координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, т.е. Д(14;7).

Пример 3. Заданы два вектора **а**(4;-2), **в**(-16;к). Найти к, чтобы векторы были параллельны.

Решение. $\dfrac{4}{-16} = \dfrac{-2}{\kappa} \Rightarrow \kappa = 8.$

.

Пример 4. Задан вектор $\overrightarrow{OA}$, где О(0;0), А(3;2).

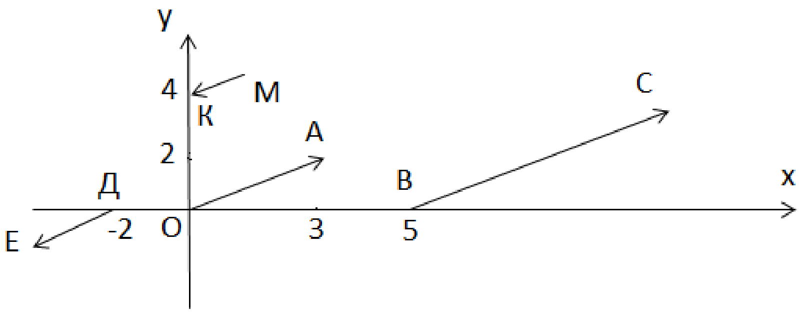
Построить и найти координаты вектора $\overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{OA}$ с началом в точке В(5;0).

Построить и найти координаты вектора $\overrightarrow{ДE}$ == -$\overrightarrow{OA}$ /2 с началом в точке Д(-2;0).

Построить и найти координаты вектора $\overrightarrow{MK}$ == -$\overrightarrow{OA}$ /3 с концом в точке К (0;4).

Найти координаты точек С , Е и М.

Решение.



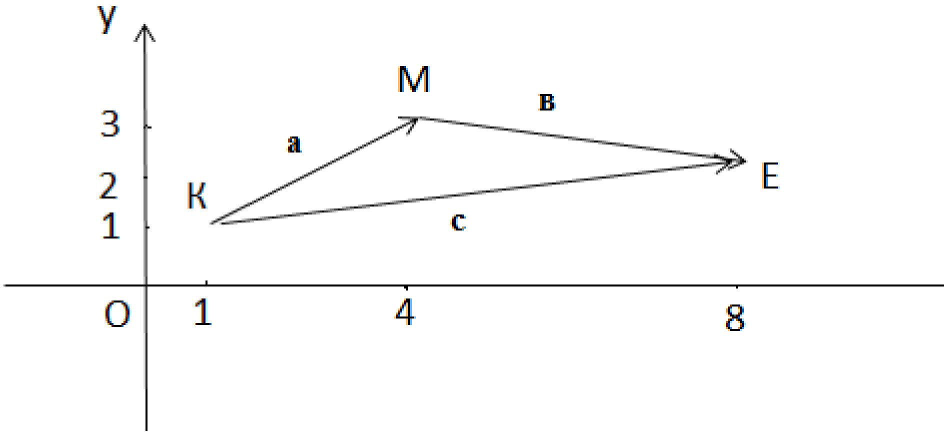
Координаты векторов $\overrightarrow{BC}(6;4)$, $\overrightarrow{ДЕ}(-3/2;-1)$, $\overrightarrow{MK}(-1;-2/3)$.

Координаты точки С=координатам точки В + координаты вектора $\overrightarrow{BC}$, С(11,4), аналогично координаты Е(-7/2;-1). Координаты точки М = координатам точки К + координаты

$\overrightarrow{KM}(1;2/3)$, М(1,14/3).

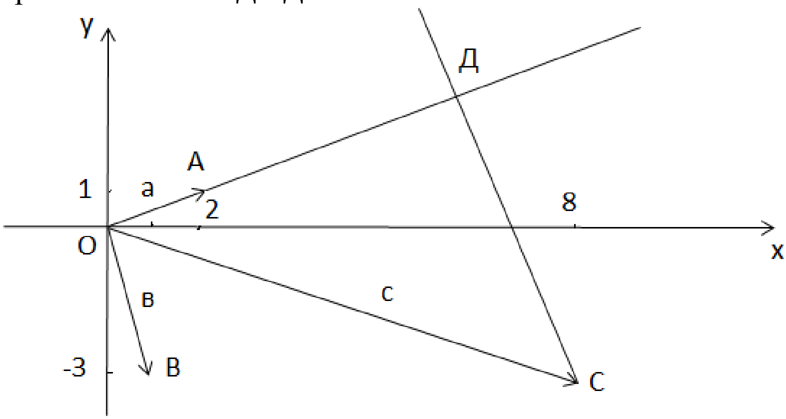
Пример 5. Заданы два вектора **а(**3,2) и **в(**4,-1). Построить вектор **с=а+в,** начало которого расположено в точке К(1,1). Найти координаты вектора **с** и координаты конца вектора **с**.

Решение. Из точки К строим вектор **а,** конец вектора **а** расположен в точке М(4,3). Из точки М строим вектор **в**, конец вектора **в** расположен в точке Е(8,2). Начало вектора **с** совпадает с точкой К, а конец с точкой Е. Координаты вектора **с** равны сумме координат векторов **а(**3,2) и **в(**4,-1), т. е. **с**(7;1). Координаты конца вектора **с** = координатам точки К + координаты вектора **с**, т.е. Е(8;2).



Пример 6. Заданы три вектора **а**(2;1), **в**(1;-3), **с**(8;-3). Разложить геометрически и аналитически вектор **с** по векторам **а** и **в.**

Решение. Построим заданные векторы с началом (0;0). Проведем прямую через **а.** Через конец вектора **с,** проведем прямую, параллельную вектору **в,** получим точку пересечения Д и искомое геометрическое разложение **с**=$\overrightarrow{ОД}$ +$\overrightarrow{ДС}$.



Найдем аналитическое разложение. Пусть **с=**к**а**+м**в** или в координатах

2к+м=8;
к-3м=-3.

Решая систему находим к=3, м=2. Отсюда следует, что **с=**3**а**+2**в,** а отсюда следует $\overrightarrow{ОД}$ =3**а,** $\overrightarrow{ДС}$ =2**в.**

Задание для самостоятельного решения.

1. Построить вектор $\overrightarrow{AB}$,где A(-1;3), B(4;-2). Найти его длину.
2. Построить вектор $\overrightarrow{AB}$,где A(1;2;0), B(4;3,5). Найти его длину.
3. Заданы два вектора **а**(4;-2;5), **в**(20;к;м). Найти к и м чтобы векторы были параллельны.
4. Построить и найти координаты вектора $\overrightarrow{KM}$ = 3 $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке (-1;2), где вектор $\overrightarrow{AB}$ из примера 1. Найти координаты точки М.
5. Построить и найти координаты вектора $\overrightarrow{KM}$ = -2 $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке (0;0;3), где вектор $\overrightarrow{AB}$ из примера 2. Найти координаты точки М.
6. Заданы два вектора **а(**-1,3) и **в(**3,2). Построить вектор **с=2а-3в,** начало которого расположено в точке К(0,2). Найти координаты вектора **с** и координаты конца вектора **с**.
7. Заданы два вектора **а(**1,2;0) и **в(**0,2,4). Построить вектор **с=а+в,** начало которого расположено в точке К(0,0;3). Найти координаты вектора **с** и координаты конца вектора **с**.
8. Заданы три вектора **а**(-1;2), **в**(3;1), **с**(-8;2). Разложить геометрически и аналитически вектор **с** по векторам **а** и **в.**

9. Найти единичный вектор со направленный с вектором **а(**4,-1,2).

2. Скалярное произведение векторов.

Пример 1. Заданы два вектора **а(**1,-3) и **в(-**5,4) . Найти скалярное произведение векторов и угол между векторами.

Решение. **а•в=**$1*(-5)+(-3)*4=-17$.

$\cos\varphi=$ **а•в/(**$|a||в|$) =**-17/(**$\sqrt{1+9}$*****$\sqrt{25+16}$ **)= -17/**$\sqrt{410}$.

Пример 2. Заданы длины векторов $|a|=5,\ |в|=3$ **.** Угол между векторами = π/3. Найти скалярное произведение векторов.

Решение. **а•в=**$|a||в|\cos\varphi$=5*3*0.5=15/2

Пример 3. Заданы два вектора **а(**4,-2) и **в(-**3,к) . При каком к векторы ортогональны (перпендикулярны).

Решение. **а•в= -**12-2к=0, к= -6.

Пример 4. Заданы вершины треугольника A(1;3;5), B(2;-1;4), C(3;-2,1). Найти:

а) Угол A;

в) высоту треугольника опущенную из вершины B.

Решение. $\overrightarrow{AB}(1;-4;-1),\ \overrightarrow{AC}(2;-5;-4).\ \cos<A=\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}/(|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|)$ =**(**2+20+4)/ **(**$\sqrt{1+16+1}$*****$\sqrt{4+25+16}$ **)**=26/$\sqrt{18*45}$=26/(9$\sqrt{10}$**).** Высота h опущенная из вершины B = $|\overrightarrow{AB}|$***sin** $<A$ =$\sqrt{18}$*****$\sqrt{1-676/810}$=$\sqrt{134}$/3$\sqrt{5}$.

Пример 5. Заданы длины векторов $|a|=\mathbf{7},\ |в|=\mathbf{3}.$ Косинус угла между ними = 1/3. Найти угол между векторами **с**=2**а**-3**в, д= -а**+2**в.** Найти длины векторов **с** и **д.**

Решение. $|с| = \sqrt{с \bullet с} = \sqrt{4 * 49 + 9 * 9 - 12 * а \bullet в} = \sqrt{98 + 81 - 12 * 7 * 3 * \frac{1}{3}} = \sqrt{95}.$ $|д| = \sqrt{д \bullet д} = \sqrt{1 * 49 + 4 * 9 - 4 * а \bullet в} = \sqrt{49 + 36 - 4 * 7 * 3 * \frac{1}{3}} = \sqrt{57}.$

$\cos\widehat{сд}$=**с•д**//(|с||д|)=(2*49-6*9+7***а•в**)/ $\sqrt{95}\sqrt{57}$=(44+7*7*3*1/3)/ $\sqrt{95}\sqrt{57}$=93/ $(\sqrt{95}\sqrt{57})$.

Задание для самостоятельного решения.

1. Заданы длины векторов $|а| = 4,\ |в| = 6$. Угол между векторами = 2π/3. Найти скалярное произведение векторов.
2. Заданы два вектора **а(**-3,5) и **в(**4,2) . Найти скалярное произведение векторов и угол между векторами.
3. Заданы два вектора **а(**3к,1) и **в(**к,-12) . При каком к векторы ортогональны.
4. Заданы три последовательные вершины параллелограмма A(2;4;-3), B(1;5;3), C(-2;1,4). Найти угол между диагоналями параллелограмма.
5. Заданы длины векторов $|а| = 4,\ |в| = \mathbf{6}$. Косинус угла между ними = -1/6. Найти угол между векторами **с=а**+2**в, д=** 3**а**-5**в.** Найти длины векторов **с** и **д.**

3. Векторное произведение векторов.

Пример 1. Заданы два вектора **а**=2i+3j-5k, **в=** 3i+4j-2k. Используя свойство векторного произведения найти, **а×в.**

Решение. Используем свойства : **а×в** = - **в×а,** если векторы параллельны, то их векторное произведение =0. Векторное произведение ортов **i×j=k, j×k=i, k×i=j.** Используя свойство линейности, получим (2i+3j-5k) × **(**3i+4j-2k)=8**i×j** - 4 **i×k**+9**j×i** -6 **j×k** – 15**k×i** - 20 **k×j** = 14 **j×k** – 11**k×i** - **i×j** =14**i** – 11**j** – **k.**

Пример 2. Решить пред идущую задачу с помощью формального определителя.

Решение. **а×в**=$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -5 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

=14**i** – 11**j** – **k.**

Пример 3. Заданы вершины треугольника А(1;3;5), В(2;-1;4), С(3;-2,1). Найти площадь треугольника АВС.
Решение. $\overrightarrow{AB}$(1;-4;-1),), $\overrightarrow{AC}$(2;-5;-4). .

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$=$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -4 & -1 \\ 2 & -5 & -4 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}$

=11**i** +2**j** +3**k.**

$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{121+4+9}=\frac{\sqrt{134}}{2}$.

Пример 4. Заданы три последовательные вершины параллелограмма A(2;4), B(1;5), C(-2;1). Используя векторное произведение найти площадь параллелограмма.
Решение. Рассмотрим эти точки в пространстве A(2;4;0), B(1;5;0), C(-2;1;0).
$\overrightarrow{AB}$(-1;1;0), $\overrightarrow{BC}$(-3;-4;0).

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}=i\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$$

$=7\mathbf{k}$. S=$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}|$=7.

Пример 5. Заданы длины векторов $|a| = \mathbf{2}$, $|в| = 5$. Синус угла между ними = 1/5. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах **с=**2**а+в** и **д= а-**2**в.**

Решение. Площадь параллелограмма S=$|c \times д|$**.** $c \times д =$ **(**2**а+в)** × **(а-**2**в)= - 5 а×в. S=**5$|a \times в| = \mathbf{5 * 2 * 5 * 1/5}$**=10.**

Задание для самостоятельного решения.

1. Заданы два вектора **а**=5i-3j+2k, **в**= -4i+5j-6k. Используя свойство векторного произведения найти, **а×в.**
2. Решить пред идущую задачу с помощью формального определителя.
3. Заданы вершины треугольника A(2;5), B(4;-1), C(3;-2). Используя векторное произведение найти площадь треугольника ABC.
4. Заданы три последовательные вершины параллелограмма A(2;4,1), B(1;5;2), C(-2;1,7). Используя векторное произведение найти площадь параллелограмма.
5. Заданы длины векторов $|a| = 4$, $|в| = 3$. Синус угла между ними = 1/4. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах **с=а-**3**в** и **д=** 2**а+5в.**

4. Смешанное произведение векторов.

Пример 1. Найти объем параллелепипеда построенного на векторах **а(**3,1;4), **в(**2,-3;1), **с(**5;-2;6).

Решение. **авс**= $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$

=3(-18+2)-(12-5)+4(-4+15)=-11.

V= $|\text{авс}| = 11.$

Пример 2. Найти объем тетраэдра, вершины которого А(2;3;0), В(-3;1;4), С(4;1;2), Д(0;2,-1).

Решение. $\overrightarrow{\text{АВ}}$(-5;-2;4), $\overrightarrow{\text{АС}}$(2;-2;2), $\overrightarrow{\text{АД}}$(-2;-1;-1).

$\overrightarrow{\text{АВ}}\,\overrightarrow{\text{АС}}\,\overrightarrow{\text{АД}} =$

$$\begin{vmatrix} -5 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -20 + 4 - 24 = -40.$$

Объем тетраэдра =1/6 $\left|\overrightarrow{\text{АВ}}\,\overrightarrow{\text{АС}}\,\overrightarrow{\text{АД}}\right|$ =20/3.

Пример 3. Заданы координаты точек А(2;3;0), В(-3;1;4), С(4;1;2), Д(к;2,-1). Найти к, чтобы точки лежали в одной плоскости.

Решение. Точки лежат в одной плоскости $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{\text{АВ}}\,\overrightarrow{\text{АС}}\,\overrightarrow{\text{АД}}$ =0.

$\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AД} =$

$$\begin{vmatrix} -5 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ \kappa-2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (\kappa-2)\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4(\kappa-2) - 18 - 14 = 0.$$

4(к-2)=32⇒ к=10.

Пример 4. Определить ориентацию векторов, т.е. векторы **а(**1,3;-1), **в(**-2,1;3), **с(**2;0;1) образуют правую или левую тройку векторов..

Решение. **авс**= $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 27$.

Так как **авс** >0, следовательно векторы **авс** образуют правую тройку.

Задание для самостоятельного решения.

1. Задана вершина А(2,-1,3) параллелепипеда и три вершины параллелепипеда исходящие из вершины А: В(3,1,2); С(-3,2,4);Д(2,-1,3). Найти объем параллелепипеда.
2. Компланарны ли векторы **а(**4,3;2), **в(**1,-1;3), **с(**3;2;1).
3. Найти объем тетраэдра, вершины которого А(1;3;-2), В(4;2;1), С(3;2;1), Д(-1;2,4).
4. Заданы координаты точек А(1;3;-1), В(2;1;-3), С(3;-1;к), Д(4;2,5). Найти к, чтобы точки лежали в одной плоскости.
5. Определить ориентацию векторов, т.е. векторы **а(**2,1;3), **в(**1,-2;4), **с(**-5;2;-3) образуют правую или левую тройку векторов..

Индивидуальные задания.

(задания содержат параметры: а, в, с, d. ф, и, н, которые выдает преподаватель в пределах от 1 до 6).

1. Заданы два вектора в пространстве **u**=аi+вj+сk, **v**=-вi+сj-dk, где i,j,k - ,базис в декартовой системе координат. Построить векторы **u,v** и **w**=2**u-v**. Вычислить координаты и длину вектора **w**.

2. Заданы два вектора на плоскости **u**=аi-вj, **v**=--сi+dj. Построить векторы **u,v** и **w**=**u**-2**v**. Вычислить координаты и длину вектора **w**.

3. Разложить вектор **x**(н,с,и) по векторам **u,v,w**(и,ф,с), где **u,v** из задачи 1.

4.Найти площадь, угол А и высоту, проведенную из вершины А треугольника АВС, где А(н,и,ф), В(с,ф,н), С(и,с,а).

5.Построить и найти координаты вектора **w**=**u** x **v** (векторное произведение векторов), где векторы **u,v** – из задачи1.

6.Найти объем тетраэдра АВСД , где А,В,С – из задачи 4, а Д(а,в,с). Найти высоту тетраэдра, опущенную из вершины Д.

7. Векторы **u,v**- из задачи1. Найти:

а) (2**u**-3**v**)•(**u**+2**v**);

б) $|u+v|$;

в) ПР$_v$**u**;

г) направляющие косинусы вектора **u**;

д) (**u**+2**v**)x(**v-u**).

7. Вектор **x** ортогонален векторам **u, v**, а $|x|$=20. Векторы **u,v** – из задачи 1. Найти все **x**.

8. **u,v,w** – произвольные векторы. Доказать:

а) (а**u**+в**v**)**w**(с**u**+d**w**)=-вс**uwv**;

б) (а**u**+в**v**)(с**v**+ф**w**(с**u**+d**w**)=-(асd+вфс)**uvw.**

II АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Деление отрезка в данном отношении.

Пример 1. A(2;-3), B(-6;5). Точка M делит отрезок AB пополам, найти координаты точки M.

Решение. M(x;y). x=$\frac{x1+x2}{2}$ =$\frac{2+(-6)}{2}$=-2, y=$\frac{y1+y2}{2}$=$\frac{-3+5}{2}$=1, M(-2,1).

Пример 2. A(3;2;-4), B(9;5;2). Отрезок AB делится точками M и K на три равные части (M расположена ближе к A). Найти координаты точек деления.

Решение. M(x;y;z). λ =$\frac{AM}{MB}$=1/2. x=$\frac{x1+\lambda x2}{1+\lambda}$=$\frac{3+\left(\frac{1}{2}\right)9}{1+1/2}$=5,

y=$\frac{2+\left(\frac{1}{2}\right)5}{1+1/2}$=3, z=$\frac{-4+\left(\frac{1}{2}\right)2}{1+1/2}$=-2, M(5;3;-2). K(x1;y1;z1). λ =$\frac{AK}{KB}$=2.

x1==$\frac{3+2*9}{1+2}$=7, y1=$\frac{2+2*5}{1+2}$=4, z1=$\frac{-4+2*2}{1+2}$=0, K(7;4;0).

Пример 3. В точках A(1;4), B(6;9) помещены соответственно массы 100кг. и 400кг. Найти координаты центра масс.

Решение. Пусть M(x;y) – центр масс. Тогда λ =$\frac{AM}{MB}$=400/100=4. x=$\frac{1+4*6}{1+4}$=5, y=$\frac{4+4*9}{1+4}$=8, M(5;8).

Пример 4. A(4;2), B(7;6), C(9;14). M- точка пересечения биссектрисы угла A со стороной BC. Найти координаты точки M.

Решение. M(x;y). По теореме о биссектрисе λ =$\frac{BM}{MC}$=$\frac{AB}{AC}$=$\frac{5}{13}$.

x=$\frac{7+(\frac{5}{13})*9}{1+5/13}$=68/9, y=$\frac{6+(\frac{5}{13})*14}{1+5/13}$=74/9, M($\frac{68}{9}$; $\frac{74}{9}$).

Задание для самостоятельного решения.

1. A(-5;6), B(-11;20). Точка M делит отрезок AB пополам, найти координаты точки M.
2. A(5;3;4), B(9;7;12). Отрезок AB делится на четыре равные части. Найти координаты точек деления.

3. В точках A(2;6), B(10;12) помещены соответственно массы 200кг. и 300кг. Найти координаты центра масс.
4. A(2;5), B(6;8), C(10;11). M- точка пересечения биссектрис углов A и B. Найти координаты точки M.

2. Площадь треугольника и многоугольника.
Пример 1. A(2;4), B(3;6), C(5;8). Найти площадь треугольника ABC.
Решение 1. S=$\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x2-x1 & y2-y1 \\ x3-x1 & y3-y1 \end{vmatrix}$=$\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$==$\pm\frac{1}{2}$(4-6)=1.
Решение 2. S=$\pm\frac{1}{2}$($\begin{vmatrix} x1 & y1 \\ x2 & y2 \end{vmatrix}$+$\begin{vmatrix} x2 & y2 \\ x3 & y3 \end{vmatrix}$+$\begin{vmatrix} x3 & y3 \\ x1 & y1 \end{vmatrix}$)
=$\pm\frac{1}{2}$($\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$+$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$)= $\pm\frac{1}{2}(0-6+4)=1.$
Пример 2. A(2;4), B(3;-6), C(-4;-2), Д(-2,5). Найти площадь четырехугольника ABCД.
Решение. . S=$\pm\frac{1}{2}$($\begin{vmatrix} x1 & y1 \\ x2 & y2 \end{vmatrix}$+$\begin{vmatrix} x2 & y2 \\ x3 & y3 \end{vmatrix}$+$\begin{vmatrix} x3 & y3 \\ x4 & y4 \end{vmatrix}$+$\begin{vmatrix} x4 & y4 \\ x1 & y1 \end{vmatrix}$)
=$\pm\frac{1}{2}$($\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}$+$\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$+$\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$)= $\pm\frac{1}{2}$(-24-18-16-18)=38.

Задание для самостоятельного решения.
1. A(-3;5), B(4;7), C(2;-6). Найти площадь треугольника ABC.
2. A(1;5), B(4;2), C(3;-2), Д(-2,-5), E(-4,3). Найти площадь пятиугольника ABCДЕ.

3. Задачи на прямую на плоскости.

Пример 1. Написать уравнение прямой проходящей через точку M(2,5) и перпендикулярной вектору N(3,-4) (вектор N называется направляющим вектором прямой).

Решение. 3(x-3)-4(y-5)=0 или 3x-4y+11=0.
Пример 2. Найти угол между прямыми 2x+4y+7=0; -3x+7y+5=0.
Решение. cosφ=N_1•N_2/
$\left(\left|N_1\right|\left|N_2\right|\right) = (2\cdot(-3)+4\cdot 7)/(\sqrt{4+16}\sqrt{9+49}) = 22/(\sqrt{20}\sqrt{58})$.
Пример 3. Найти к при котором прямые 2x-5y+3=0; 3x+кy+20=0 ортогональны.
Решение. N_1•N_2=0. 6-5к=0. к=6/5.
Пример 4. Найти уравнение прямой проходящей через две точки A(5,-2), B(3,7).
Решение1. $N = (\overrightarrow{AB})^{\perp} = (-2;9)^{\perp} = (9;2)$. 9(x-5)+2(y+2)=0. 9x+2y-41=0.
Решение2. $\frac{x-5}{3-5} = \frac{y+2}{7-(-2)}$. 9x+2y-41=0.
Пример 5. Найти расстояние от точки M(2,-3) до прямой 5x+6y-10=0.
Решение. $\rho = \frac{\left|5\cdot 2+6\cdot(-3)-10\right|}{\sqrt{25+36}} = \frac{18}{\sqrt{61}}$.
Пример 6. Написать уравнение прямой проходящей через точку M(4,-5) и перпендикулярной прямой 2x+3y-4=0.

Решение. Обозначим через $N_1(2;3)$ нормальный вектор к заданной прямой. Пусть N – нормальный вектор искомой прямой. Так как прямые ортогональны то $N \perp N_1$. $N = (2;3)^{\perp} = (-3;2)$. -3(x-4)+2(y+5)=0 или -3x+2y+22=0.
Пример 7. Написать уравнение прямой проходящей через точку M(-2,3) и параллельной прямой 5x+2y+2=0.
Решение. Так как прямые параллельны то за нормальный вектор искомой прямой можно взять нормальный вектор

заданной прямой, т.е. N=(5;2). 5(x+2)+2(y-3)=0 или 5x+2y+4=0.

Пример 8. Показать, что прямые 2x-3y-7=0; -4x+6y+5=0 параллельны и найти расстояние между ними.

Решение. Нормальные векторы прямых $N_1(2;-3)$ и $N_2(-4;6)$ параллельны, так как $\frac{2}{-4}=\frac{-3}{6}$, поэтому прямые параллельны. Возьмем точку на первой прямой положим y=0 тогда x=7/2. Расстояние от точки M(7/2;0) до второй прямой равно расстоянию между прямыми.

$$\rho = \frac{|-4\cdot 7/2+6\cdot 0+5|}{\sqrt{16+36}} = \frac{9}{\sqrt{52}}.$$

Пример 9. A(2;5), B(7;4), C(1;8). В треугольнике ABC найти уравнения высоты, медианы и биссектрисы проведенных из вершины A.

Решение. Найдем уравнение высоты. Высота проходит через точку A и перпендикулярна $\overrightarrow{BC}(-6;4)$. -6(x-2)+4(y-5)=0 или -6x+4y-8=0 или -3x+2y-4=0.

Найдем уравнение медианы. Пусть M – середина стороны BC. Тогда M($\frac{7+1}{2}$;$\frac{4+8}{2}$) или M(4;6). Медиана проходит через две точки A и M, поэтому ее уравнение $\frac{x-2}{4-2}=\frac{y-5}{6-5}$ или x-2y+8=0.

Найдем уравнение биссектрисы.

Решение1. $|AB|=\sqrt{25+1}=\sqrt{26}$. $|AC|=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$. Пусть M – точка пересечения биссектрисы и стороны BC. По теореме о биссектрисе $\lambda=\frac{BM}{MC}=\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{10}}$. По формуле деления отрезка в данном отношении ($x=(x_1+\lambda x_2)/(1+\lambda)$) находим координаты точки M: $x_0=\frac{7+\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{10}}}{1+\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{10}}}= \frac{7\sqrt{10}+\sqrt{26}}{\sqrt{10}+\sqrt{26}}$;

$y_0=\frac{4+8\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{10}}}{1+\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{10}}}=\frac{4\sqrt{10}+8\sqrt{26}}{\sqrt{10}+\sqrt{26}}$. Биссектриса проходит через точки A и M, поэтому уравнение биссектрисы

$$\frac{x-2}{x_0-2}=\frac{y-5}{y_0-5} \quad или \quad \frac{x-2}{\frac{5\sqrt{10}-\sqrt{26}}{\sqrt{10}+\sqrt{26}}}=\frac{y-5}{\frac{-\sqrt{10}+3\sqrt{26}}{\sqrt{10}+\sqrt{26}}},$$

отсюда получаем уравнение биссектрисы $(3\sqrt{26}-\sqrt{10})x+(\sqrt{26}-5\sqrt{10})y-11\sqrt{26}+27\sqrt{10}=0$.

Решение2. Уравнение стороны AB: $\frac{x-2}{5}=\frac{y-5}{-1}$ или x+5y-27=0. Уравнение стороны AC: $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-5}{3}$ или 3x+y-11=0. Напишем уравнения биссектрис для прямых AB иAC: $\frac{x+5y-27}{\sqrt{26}}=\pm\frac{3x+y-11}{\sqrt{10}}$. Из этих двух прямых надо выбрать искомую. Рассмотрим прямую с +, получим $(3\sqrt{26}-\sqrt{10})x+(\sqrt{26}-5\sqrt{10})y-11\sqrt{26}+27\sqrt{10}=0$. Если при подстановки координат точек B и C в правую часть получим числа разных знаков, тогда это искомая прямая, если же одинаковых знаков, то искомая прямая находится подстановкой знака -. Подставим в правую часть точку B получим $14\sqrt{26}$. При подстановке точки C получим $-2\sqrt{26}-14\sqrt{10}$.Получили числа разных знаков, тем самым рассматриваемая прямая с + искомая.

Пример 10. Задана прямая 2x+5y-7=0. Написать тангенциальное уравнение прямой.

Решение. 5y=-2x+7 или $y=-\frac{2}{5}x+7/5$.

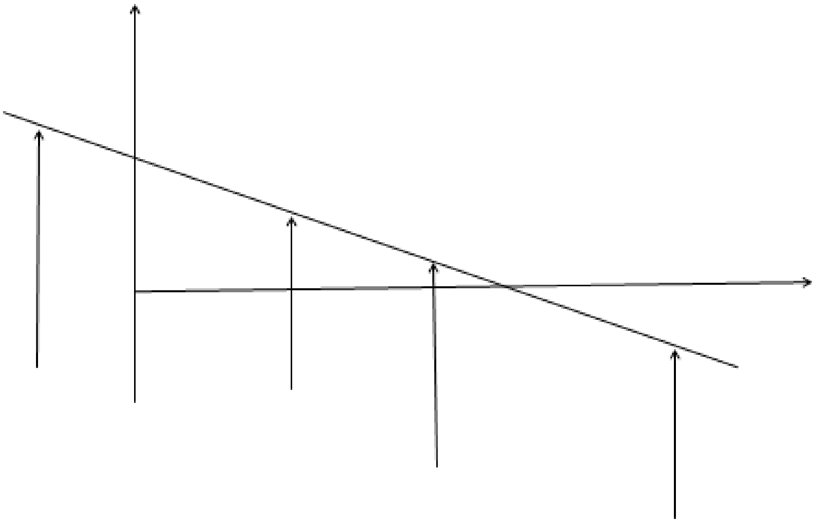
Пример 11. Задана прямая 3x-5y+2=0. Написать уравнение прямой в нормальной форме.

Решение. -3x+5y-2=0 или $\sqrt{9+25}(-\frac{3}{\sqrt{34}}x+\frac{5}{\sqrt{34}}y-\frac{2}{\sqrt{34}})=0$ или $x\cos\varphi+y\sin\varphi-\frac{2}{\sqrt{34}}=0$, где

$\varphi=\arccos(-\frac{3}{\sqrt{34}})$.

Пример 12. Указать область заданную неравенством 2x+5y<10.

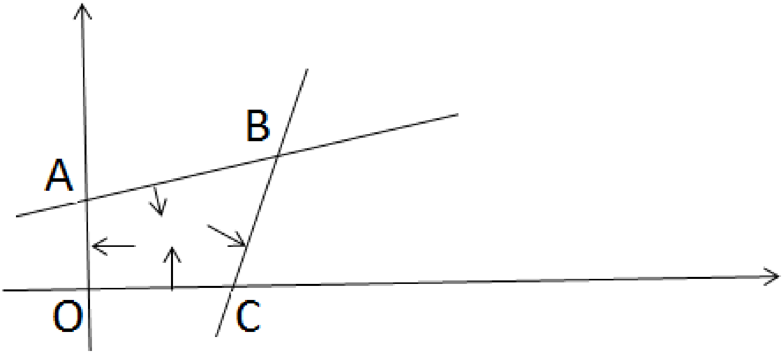
Решение. Запишем неравенство в тангенциальном виде $y<-\frac{2}{5}x+2$. Искомая область расположена ниже прямой $y=-\frac{2}{5}x+2$. Покажем эту область на чертеже



Стрелочки означают, что сама линия не входит.

Пример 13. Указать область заданную неравенствами x>0, y≥0, x-2y+6≥0, 6x -3y-25<0.

Решение. Запишем неравенства в тангенциальном виде $y\leq\frac{1}{2}x+3$, $y>2x-\frac{25}{3}$. Покажем искомую область на чертеже.



Искомая область заключена в четырехугольнике O(0;0), A(0;3). B($7\frac{5}{9}$:$6\frac{7}{9}$), C($4\frac{1}{6}$;0). Отрезки AB и OC входят в искомую область, а отрезки OA и BC не входят.

Задание для самостоятельного решения.

1. Написать уравнение прямой проходящей через точку M(-3,7) и перпендикулярной вектору N(2,-9).
2. Найти угол между прямыми -4x+2y-11=0; 3x-5y+2=0.
3. Найти к при котором прямые кх-4y+8=0; 3x+2y+7=0 а)ортогональны; б) параллельны.
4. Найти уравнение прямой проходящей через две точки A(3,4), B(-5,8).
5. Найти расстояние от точки M(-4,2) до прямой -3x+4y-5=0.
6. Написать уравнение прямых, проходящих через точку M(4,-5) и а) перпендикулярной прямой 2x+3y-4=0; б) параллельной прямой 2x+3y-4=0.
7. Показать, что прямые 5x+2y+11=0; 10x+4y-2=0 параллельны и найти расстояние между ними.
8. A(1;4), B(2;6), C(-3;5). Найти расстояние от вершины B до а) медианы проведенной из вершины A, б) биссектрисы проведенной из вершины A.

9. Задана прямая 4x-7y+10=0. Написать а) тангенциальное уравнение прямой, б) нормальное уравнение прямой.
10. Указать область заданную неравенством -3x+4y>12.
11. Указать область заданную неравенствами $x \geq 0$, y>0, $x/7+y/2 \geq 1$, x +y/6>1

.

4. Задачи на плоскость.

Пример 1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M(2;6;-4) и перпендикулярной вектору N(3;-5;7).

Решение. 3(x-2)-5(y-6)+7(z+4)=0 или 3x -5y +7z+52=0.

Пример 2. Найти уравнение плоскости, проходящей через три точки A(3;2;5), B(-2,4;6), C(4;7;2).

Решение 1. $\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-5 \\ (-2-3) & (4-2) & (6-5) \\ (4-3) & (7-2) & (2-5) \end{vmatrix}$=0 или .

$\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-5 \\ -5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$=0 или

(x-3)$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}$-(y-2) $\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$+(z-5) $\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$=0 или -11(x-3) -14(y-2)-27(z-5)=0 или

11x+14y+27z-196=0.

Решение 2. $\overrightarrow{AB}$(-5;2;1), $\overrightarrow{AC}$(1;5;-3).

$$N=\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

=-11**i** -14**j** -27**k.** Плоскость проходит через точку A с направляющим вектором N, ее уравнение

-11(x-3)-14(y-2)-27(z-5)=0 или 11x+14y+27z-196=0.

Пример 3. Найти угол между плоскостями 2x-3y+5z-3=0, 4x+6y-7z+2=0.

Решение. $\cos\varphi = \dfrac{N_1 * N_2}{|N_1||N_2|}$ =$(2\cdot 4 + (-3)\cdot 6 + 5\cdot(-7))/(\sqrt{4+9+25}\cdot\sqrt{16+36+49})=$ $-45/(\sqrt{38}\cdot\sqrt{101})$.

Пример 4. Доказать, что плоскости 5x –y+3z-4=0, 2x+4y-2z+7=0 ортогональны.

$N_1 \bullet N_2 = 5\cdot 2+(-1)\cdot 4+3\cdot(-2)=0$, отсюда следует, что плоскости ортогональны.

Пример 5. Найти расстояние от точки M(3,4;-5) до плоскости 2x-3y+6z+4=0.

Решение. $\rho = \dfrac{|2\cdot 3 - 3\cdot 4 + 6\cdot(-5)+4|}{\sqrt{4+9+36}} = \dfrac{32}{7}$.

Пример 6. Доказать, что плоскости x-3y+2z-5=0, -2x+6y-4z+2=0 параллельны и найти расстояние между ними.

Решение. $N_1(1;-3;2)$, $N_2(-2;6;-4)$ – направляющие векторы плоскостей. $N_2=-2N_1$, поэтому плоскости параллельны. На первой плоскости возьмем точку M(5;0;0). Расстояние от этой точки до второй плоскости равно расстоянию между плоскостями.

$$\rho = \frac{|-2\cdot 5 + 6\cdot 0 - 4\cdot 0 + 2|}{\sqrt{4+36+16}} = \frac{8}{\sqrt{56}}.$$

Пример 7. Найти уравнение плоскости проходящей через точки M(-2;6;3), K(3;1;4) и перпендикулярной плоскости 4x+2y-7=0.

Решение. $N_1(4;2;0)$ – направляющий вектор заданной плоскости. Пусть N - направляющий вектор искомой плоскости. $N \perp N_1$ так как плоскости ортогональны, $N \perp$

$\overrightarrow{MK}$, так как точки М и К лежат в искомой плоскости. Поэтому за направляющий вектор искомой прямой можно взять

$$N=N_1\times\overrightarrow{MK}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & -5 & 1 \end{vmatrix}=i\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -5 \end{vmatrix}=2\mathbf{i}-4\mathbf{j}$$

$-30\mathbf{k}$**.** Пишем уравнение искомой плоскости проходящей через точку М с направляющим вектором N

2(x+2)-4(y-6)-30(z-3)=0 или 2x-4y-30z+118=0.

Пример 8. Найти уравнение плоскости проходящей через точки М(3;-2;1), К(4;5;-2) и параллельной оси ОУ.

Решение. N- направляющий вектор искомой плоскости. N $\perp\overrightarrow{MK}$, N $\perp$ **j** , поэтому за направляющий вектор искомой прямой можно взять

$$N=\mathbf{j}\times\overrightarrow{MK}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & -3 \end{vmatrix}=i\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}=-3\mathbf{i}-$$

k. Пишем уравнение искомой плоскости проходящей через точку М с направляющим вектором N

-3(x-3)-(z-1)=0 или -3x-z+10=0.

Пример 9. Плоскость пересекает оси ox, oy,oz в точках М(3;0;0), К(0,-4;0), Л(0;0;7). Найти уравнение плоскости.

Решение. $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}+\frac{z}{7}=1$.

Пример 10. Найти уравнение плоскости проходящей через точки М(1;5;3), К(2;-1;4) и параллельной линии пересечения плоскостей 3x+y-z+2=0, 2y+5z-3=0.

Решение. N- направляющий вектор искомой плоскости. N $\perp\overrightarrow{MK}$. $N_1(3;1;-1)$, $N_2(0;2;5)$ – направляющие векторы заданных плоскостей. Линия пересечения параллельна вектору $\mathbf{u}=N_1xN_2$, поэтому N $\perp$ **u**, отсюда следует, что за N можно взять N=**u** x $\overrightarrow{MK}$.

$$\mathbf{u}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}=i\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=7\mathbf{i}-15\mathbf{j}+6\mathbf{k}.$$

$$N=\mathbf{u}\times\overrightarrow{MK}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 7 & -15 & 6 \\ 1 & -6 & 1 \end{vmatrix}=i\begin{vmatrix} -15 & 6 \\ -6 & 1 \end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} 7 & -15 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}=21\mathbf{i}-\mathbf{j}$$

$-27\mathbf{k}$. Пишем уравнение искомой плоскости проходящей через точку M с направляющим вектором N
21(x-1)-(y-5)-27(z-3)=0 или 21x-y-27z+65=0.

Задание для самостоятельного решения.

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M(-3;2;5) и перпендикулярной вектору N(2;4;-5).
2. Найти уравнение плоскости, проходящей через три точки A(1;-5;2), B(3,-6;4), C(2;3;-1).
3. Найти угол между плоскостями 7x+2y-3z+4=0, -5x+3y-z+9=0.
4. При каком к плоскости 2x +5y-2z+7=0, 4x+кy-6z+5=0 ортогональны.
5. Найти расстояние от точки M(-3,2;4) до плоскости 3x-5y+2z-7=0.
6. Доказать, что плоскости 2x+y-3z+8=0, 6x+3y-9z+1=0 параллельны и найти уравнение плоскости, расположенной посередине между ними.
7. Найти уравнение плоскости проходящей через точку M(3;2;-4) и перпендикулярной плоскостям 3x+2y-z+2=0, -x+4y-2z+3=0.
8. Найти уравнение плоскости проходящей через ось oz и через точку M(4;-3;2).

9. Плоскость пересекает оси ox, oy,oz в точках М(-5;0;0), К(0,7;0), Л(0;0;-3). Найти уравнение плоскости.
10. Найти уравнение плоскости проходящей через точки М(5;-2;4), К(3;4;6) и перпендикулярной плоскости 4x-2y+3z-8=0.

Задачи на прямую в пространстве.

Пример 1. Написать параметрическое и каноническое уравнение прямой, проходящей через точку М(5;-2;4) и параллельной вектору **u**(4;5;-7).

Решение. $\begin{cases} \mathrm{x} = 5 + 4t; \\ y = -2 + 5t; \\ z = 4 - 7t. \end{cases}$ – параметрическое уравнение прямой,

$\frac{\mathrm{x}-5}{4}=\frac{\mathrm{y}+2}{5}=\frac{z-4}{-7}$ - каноническое уравнение прямой.

Пример 2. Написать параметрическое уравнение прямой, проходящей через две точки М(3;5;-2) и К(4;2;7).

Решение. Направляющий вектор прямой $\overrightarrow{\text{МК}}$(1;-3;9).

Параметрическое уравнение прямой

$$\begin{cases} \mathrm{x} = 3 + t; \\ y = 5 - 3t; \\ z = -2 + 9t. \end{cases}$$

Пример 3. Написать параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку М(7;5;3) и параллельной прямой $\frac{\mathrm{x}-5}{2}=\frac{\mathrm{y}+2}{-4}=\frac{z-4}{9}$.

Решение. Направляющий вектор заданной прямой **u**(2;-4;9) является и направляющим вектором искомой прямой, поэтому параметрическое уравнение искомой прямой

$$\begin{cases} x = 7 + 2t; \\ y = 5 - 4t; \\ z = 3 + 9t. \end{cases}$$

Пример 4. Написать параметрическое уравнение прямой, заданной в общем виде

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 4 = 0; \\ 5x + 2y - 6z + 3 = 0. \end{cases}$$

Решение . Найдем точку на прямой. Положим y=-4, тогда

$\begin{cases} 2x + 3z = 0; \\ 5x - 6z = 5. \end{cases}$ Решая уравнения получим x=5/9, z=-10/27.

M(5/9;-4;-10/27) – точка на прямой. N_1(2;-1;3), N_2(5;2;-6) – направляющие векторы соответствующих плоскостей.

Направляющий вектор прямой =

$$N_1 \times N_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -6 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 27\mathbf{j}$$

+9**k.**

Параметрическое уравнение искомой прямой

$$\begin{cases} x = 5/9; \\ y = -4 + 27t; \\ z = -10/27 + 9t. \end{cases}$$

Пример 5. Найти угол между между прямыми

$\frac{x-2}{5} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+5}{-4}$, $\frac{x+6}{-2} = \frac{y-3}{6} = \frac{z-7}{8}$.

Решение. $\mathbf{u}_1$(5;3;-4), $\mathbf{u}_2$(-2;6;8) – направляющие векторы прямых.

$\cos\varphi = \dfrac{u_1 * u_2}{|u_1||u_2|}$ =(5$\cdot(-2) + 3\cdot 6 - 4\cdot$

8)/($\sqrt{25+9+16}\cdot\sqrt{4+36+64}$)=

-24/($\sqrt{50}\cdot\sqrt{104}$).

Пример 6. Доказать, что уравнения

$\begin{cases} x = 7 + 2t; \\ y = 5 - 4t; \\ z = 3 + 9t. \end{cases}$ и $\frac{x-3}{4}=\frac{y-13}{-8}=\frac{z+15}{18}$ задают одну и туже прямую.

Решение 1. **u**$_1$(2;-4;9), **u**$_2$(4;-8;18) – направляющие векторы прямых. **u**$_2$=2**u**$_1$, отсюда следует, что прямые параллельны. M(7;5;3) – точка на первой прямой, проверим, что она удовлетворяет второму уравнению $\frac{7-3}{4}=\frac{5-13}{-8}=\frac{3+15}{18}$, отсюда следует, что прямые совпадают.

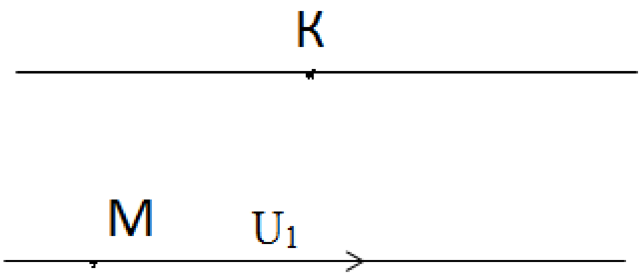
Решение 2. Подставим x,y,z в второе уравнение $\frac{7+2t-3}{4}=\frac{5-4t-13}{-8}=\frac{3+9t+15}{18}$ или

$\frac{t}{2}+1=\frac{t}{2}+1=\frac{t}{2}+1$ – верное равенство, отсюда следует, что прямые совпадают.

Пример 7. Доказать, что прямые

$\begin{cases} x = 2 + t; \\ y = 1 + 3t; \\ z = -3 - 2t. \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 - 2t; \\ y = 4 - 6t; \\ z = 1 + 4t. \end{cases}$ параллельны и найти расстояние между ними.

Решение. **u**$_1$(1;3;-2), **u**$_2$(-2;-6;4) – направляющие векторы прямых. **u**$_2$=-2**u**$_1$, отсюда следует, что прямые параллельны. M(2;1;-3) – точка на первой прямой, K(3;4;1) – точка на второй прямой. Пусть ρ-расстояние между прямыми. Рассмотрим треугольник со сторонами МК и вектором **u**$_1$ исходящим из точки М. Площадь треугольника = $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{MK}\times U_1\right|=\frac{1}{2}|U_1|\,\rho$, отсюда имеем $\rho=\frac{|\overrightarrow{MK}\times U_1|}{|U_1|}$.



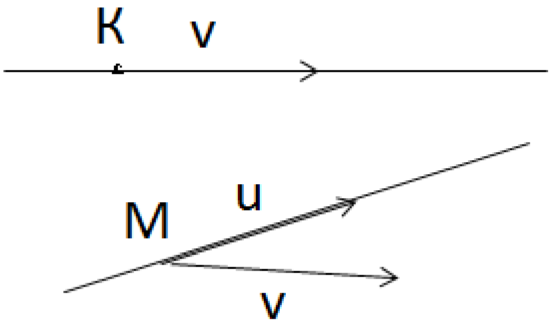
$$\overrightarrow{МК} \times U_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -18\mathbf{i} + 6\mathbf{j}\ .$$

$$\rho = \frac{\sqrt{324+36}}{\sqrt{1+9+4}} = \frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{14}}\ .$$

Пример 8. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми

$$\begin{cases} x = 1 + 2t; \\ y = 3 - t; \\ z = -1 + 3t. \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 - 2t; \\ y = -2 + 3t; \\ z = 4 + t. \end{cases}$$

Решение. **u**(2;-1;3), **v**(-2;3;1) – направляющие векторы прямых. М(1;3;-1) – точка на первой прямой, К(5;-2;4) – точка на второй прямой. Пусть ρ-расстояние между прямыми.



Рассмотрим тетраэдр с ребрами МК, векторами **u, v** исходящим из точки М. Рассмотрим треугольник, образованный векторами **u, v** исходящими из точки М. Площадь треугольника S= $\frac{1}{2}|U \times V|$. Объем тетраэдра = $\frac{1}{6}\left|UV\overrightarrow{\text{МК}}\right|$ =$\frac{1}{3}$ S$\cdot$ ρ, отсюда имеем

ρ =$\frac{\left|UV\overrightarrow{\text{МК}}\right|}{|U\times V|}$. **uv**$\overrightarrow{\text{МК}}$=

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 40 - 14 - 6 = 20.$$

u x **v**= $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$ **=**-10**i** -8**j** +4**k.** ρ =$\frac{20}{\sqrt{180}}$=$\frac{\sqrt{20}}{3}$.

Задание для самостоятельного решения.

1. Написать параметрическое и каноническое уравнение прямой, проходящей через точку М(5;7;-3) и параллельной вектору **u**(-2;4;3).
2. Написать параметрическое и каноническое уравнение прямой, проходящей через две точки М(4;-2;1) и К(2;5;8).
3. Написать каноническое уравнение прямой, заданной в общем виде

$$\begin{cases} 3x + 2y - z + 5 = 0; \\ 2x - 3y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

4. Найти угол между между прямыми $\frac{x+5}{-4}=\frac{y-6}{5}=\frac{z-3}{2}$, $\frac{x-7}{8}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-3}{7}$.
5. Написать уравнение прямой, проходящей через точку М(3;5;2) и перпендикулярной оси оу.
6. Найти расстояние от точки М(4;2;1) до прямой $\frac{x+5}{-4}=\frac{y-6}{5}=\frac{z-3}{2}$.
7. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми $\frac{x+5}{-4}=\frac{y-6}{5}=\frac{z-3}{2}$, $\frac{x-7}{8}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-3}{7}$.

Задачи на прямую и плоскость в пространстве.

Пример 1. Доказать, что прямая $\frac{x-3}{4}=\frac{y-8}{3}=\frac{z-2}{-5}$ параллельна плоскости 2x-y+z+3=0.

Решение. **u(**4;3;-5) - направляющий вектор прямой, N(2;-1;1) - направляющий вектор плоскости. **u•N**=4·2+3·(-1)+(-5)·1=0, отсюда следует, что прямая параллельна плоскости.

Пример 2. Доказать, что прямая

$$\begin{cases} x = 7 + 4t; \\ y = 5 - 2t; \\ z = 3 + 2t, \end{cases}$$

перпендикулярна плоскости 2x-y+z+3=0.

Решение. **u(**4;-2;2) - направляющий вектор прямой, N(2;-1;1) - направляющий вектор плоскости. **u** параллельна N (**u**=2N), отсюда следует, что прямая перпендикулярна плоскости.

Пример 3. Найти угол между прямой $\frac{x-3}{4}=\frac{y-8}{3}=\frac{z-2}{-5}$ и плоскостью 3x-y+4z-10=0.

Решение. **u(**4;3;-5) - направляющий вектор прямой, N(3;-1;4) - направляющий вектор плоскости. sinφ=$\frac{|u\bullet N|}{|u||N|}$=$|4\cdot 3+3\cdot(-1)+(-5)\cdot 4|/(\sqrt{16+9+25}\sqrt{9+1+16})$=11/(10$\sqrt{13}$).

Пример 4. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку M(3;1;5) и прямую $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-6}{4}$.

Решение 1. **u(**3;-2;4) - направляющий вектор прямой, К(1;-2;6) – точка на прямой. Пусть N – направляющий вектор искомой плоскости, тогда N ⊥ **u** и N ⊥ $\overrightarrow{MK}$, отсюда следует, что в качестве N можно взять N=**u** x $\overrightarrow{MK}$=

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 4 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$$ **=10i -11j -13k.**

Уравнение искомой плоскости 10(x-3)-11(y-1)-13(z-5)=0 или 10x-11y -13z+46=0.

Решение 2. Пусть A(x;y;z) – произвольная точка искомой плоскости, тогда векторы **u**, $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{MA}$ линейно зависимы или $\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-5 \\ 3 & -2 & 4 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$=0 или

(x-3)$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$-(y-1)$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$+(z-5)$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$=0 или 10x-11y - 13z+46=0.

Пример 5. Доказать, что прямые $\frac{x-3}{4}=\frac{y-4}{6}=\frac{z-1}{-2}$

$\begin{cases} x = 2 - 2t; \\ y = 1 - 3t; \\ z = -3 + t, \end{cases}$ параллельны и найти уравнение плоскости в которой они лежат.

Решение. **u(**4;6;-2), **v(**-2;-3;1) направляющие векторы соответствующих прямых. **u**=-2**v,** отсюда следует, что прямые параллельны. M(3;4;1), K(2;1;-3) – точки на соответствующих прямых. Пусть A(x;y;z) – произвольная точка искомой плоскости, тогда векторы **u**, $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{MA}$ линейно зависимы или

$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z-1 \\ 4 & 6 & -2 \\ -1 & -3 & -4 \end{vmatrix}$=0 или

(x-3)$\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$-(y-4)$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}$+(z-1)$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$=0 или -30(x-3)+18(y-4)-6(z-1)=0 или -30x+18y -6z+24=0.

Пример 6. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-3}{-2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-1}{1}$ и плоскости 2x-y+3z-1=0.

Решение. Запишем уравнение в параметрической форме

$\begin{cases} x = 3 - 2t; \\ y = 4 + 3t; \\ z = 1 + t. \end{cases}$ Подставим в уравнение плоскости $2(3 - 2t)$-(4+3t)+3(1+t)-1=0 или -4t+4=0

или t=1, отсюда имеем x=1, y=7, z=2. M(1;7;2) – точка пересечения прямой и плоскости.

Пример 7. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M(5;-2;3) и параллельную прямым $\frac{x-2}{5}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+5}{-4}$, $\frac{x+6}{-2}=\frac{y-3}{6}=\frac{z-7}{8}$.

Решение. **u**(5;3;-4), **v**(-2;6;8) – направляющие векторы прямых. Пусть N – направляющий вектор искомой плоскости, тогда N ⊥ **u** и N ⊥ **v**, отсюда следует, что в качестве N можно взять N=**u** x **v**=

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 3 & -4 \\ -2 & 6 & 8 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}$$ =48**i** -24**j** +36**k.**

Уравнение искомой плоскости 48(x-3)-24(y-1)+36(z-5)=0 или 4(x-3)-2(y-1)+3(z-5)=0 или 4x-2y +3z-25=0.

Пример 8. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки M(5;-2;3), K(3;6;2) и параллельной прямой $\frac{x-2}{5}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+5}{-4}$.

Решение. **u(**5;3;-4) - направляющий вектор прямой. Пусть A(x;y;z) – произвольная точка искомой плоскости, тогда векторы **u**, $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{MA}$ линейно зависимы или

$$\begin{vmatrix} x-5 & y+2 & z-3 \\ 5 & 3 & -4 \\ -2 & 8 & -1 \end{vmatrix}=0$$ или

$(x-5)\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 8 & -1 \end{vmatrix}-(y+2)\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}+(z-3)\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 8 \end{vmatrix}=0$ или 29(x-5)+13(y+2)+46(z-3)=0 или

29x+13y +46z-257=0.

Задание для самостоятельного решения.

1. Найти при каком к прямая $\frac{x-2}{5}=\frac{y-4}{к}=\frac{z+5}{-4}$ параллельна плоскости 2x+4y-z+7=0.
2. Найти угол между прямой $\frac{x+4}{-3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+4}{-4}$ и плоскостью x+2y-3z+5=0.
3. Доказать, что прямые

$$\begin{cases} x = 2+3t; \\ y = 3+4t; \\ z = -5-2t, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3-t; \\ y = 1+2t; \\ z == 9+4t \end{cases}$$

пересекаются и найти уравнение плоскости в которой они лежат.

4. Найти проекцию точки M(5;-2;3) на плоскость x-3y+6z-2=0.
5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M(1;-2;6) и параллельную оси oy и прямой $\frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z+5}{5}$.
6. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки M(3;4;-2), K(5;2;3) и параллельной оси ox.
7. A(3;2;5), B(-2,4;6), C(4;7;2). Написать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения медиан и перпендикулярную к плоскости треугольника.

Индивидуальные задания.

1.Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3, где

$M_0(a;b;c)$, $M_1(d;a;b)$, $M_2(c;b;a)$, $M_3(b;d;c)$.

Найти уравнение прямой M_1M_2.

2. Найти угол между плоскостями

ax+by+cz+d=0,

bx-ay+dz-c=0.

Написать каноническое уравнение прямой, заданной как пересечение плоскостей.

Построить первую плоскость.

3. Найти точку пересечения прямой и плоскости

$\frac{x-Ф}{a}=\frac{y+И}{b}=\frac{z-Ф}{c}$, dx+ay-bz+c=0.

Найти угол между ними.

4.Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-Ф}{a}=\frac{y+И}{b}=\frac{z-Ф}{c}$ и перпендикулярную плоскости dx+ay-bz+c=0.

5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(a;b;c)$ и прямую

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0; \\ bx-ay+dz-c=0. \end{cases}$$

Построить прямую.

6. $M_0(a;b;c)$, $M_1(d;a;b)$, $M_2(c;b;a)$. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M_0 и перпендикулярную M_1M_2.

7. $M_0(a;b;c)$, $M_1(d;a;b)$, $M_2(c;b;a)$, $M_3(b;d;c)$.

Найти проекцию точки M_0 на плоскость $M_1M_2M_3$ и на прямую M_1M_2.

8. Найти кратчайшее расстояние между прямыми M_0M_1 и M_2M_3, где $M_0(a;b;c)$, $M_1(d;a;b)$, $M_2(c;b;a)$, $M_3(b;d;c)$.

9. Построить прямые на плоскости

$ax+by+d=0$,

$bx+dy-a=0$.

а) Записать их уравнения в тангенциальном виде;

б) найти угол между этими прямыми;

в) написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(c;b)$ и перпендикулярную первой прямой;

г) найти расстояние от точки $M(c;-a)$ до второй прямой.

10. $M_0(a;b)$, $M_1(d;a)$, $M_2(c;b)$, $M_3(b;d)$. Найти площадь треугольника $M_0M_1M_2$ и площадь четырехугольника $M_0M_1M_2M_3$..

11. $A(a;b;c)$, $B(a+5c;b+10a;c+5Ф)$. Точка К расоложена на отрезке АВ, причем длина АК в четыре раза меньше чем АВ. Найти координаты точки К.