ФГБ ОУ ВПО «МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)»

Кафедра «Математика»

М.В. Ишханян

Комбинаторика и теория вероятностей

Методические указания к практическим занятиям

Москва – 2011

ФГБ ОУ ВПО «МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)»

Кафедра «Математика»

М.В. Ишханян

Комбинаторика и теория вероятностей

Рекомендовано редакционно-издательским советом университета в качестве методических указаний для студентов экономических специальностей

Москва – 2011

УДК 519.21

И 97

Ишханян М.В. Комбинаторика и теория вероятностей. Методические указания к практическим занятиям. – М.:МИИТ, 2011. – 57 с.

Предназначено для студентов всех специальностей ИЭФ. Содержит краткое изложение элементов теории вероятности, примеры решения задач по теории вероятностей и варианты индивидуальных заданий.

Учебно-методическое издание

Ишханян Маргарита Владимировна

КОМБИНАТОРИКА И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Методические указания к практическим занятиям

Подписано в печать	Формат 60x84 / 16
Заказ №	Усл. печ.л. –
Тираж – 150 экз.	Изд. № 197–11

127994, Москва, ул.Образцова, 9. Стр.9

1 Случайные события

Теория вероятностей является разделом математики, в котором изучают математические модели случайных явлений, наблюдаемых в природе и обществе.

Основными понятиями теории вероятностей являются понятия элементарного исхода (или элементарного события) и понятие пространства элементарных исходов (или пространство элементарных событий).

§1 Пространство элементарных исходов

Рассмотрим некоторый эксперимент $\boldsymbol{E}$ (опыт, испытание, наблюдение). Будем считать, что его можно проводить неоднократно. В результате эксперимента $\boldsymbol{E}$ могут появляться разные события, которые все вместе составляют некоторое множество $\boldsymbol{F}$.

Элементарным исходом (или **элементарным событием**) называют любой простейший исход эксперимента. Множество всех элементарных исходов будем называть **пространством элементарных исходов**.

Таким образом, множество исходов эксперимента образует пространство элементарных исходов, если выполнены следующие условия:

i. в результате эксперимента один из исходов обязательно происходит;
ii. появление одного из исходов эксперимента исключает появление остальных;
iii. в рамках данного эксперимента нельзя разделить элементарный исход на более мелкие составляющие.

В дальнейшем пространство элементарных исходов будем обозначать прописной буквой Ω, а сами элементарные исходы – строчной буквой ω. Принадлежность элемента ω множеству Ω будем записывать в виде $\omega \in \Omega$. Тот факт, что множество Ω состоит из элементов $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p, \ldots,$ и только из них, записывается в виде

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p, \ldots\}$$

или в виде

$$\Omega = \{\omega_k, k = 1,2,\ldots, p, \ldots\}$$

Рассмотрим примеры, поясняющие понятие пространство элементарных исходов.

Пример 1.1. Пусть эксперимент состоит в однократном подбрасывании правильной шестигранной игральной кости. Исходом эксперимента может оказаться любой из шести элементарных исходов $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$, где ω_k, $k = 1, \ldots, 6,$ означает появление k очков на верхней грани кости, то есть

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}.$$

§2 События. Действия над событиями

Событие – это любое явление, в отношении которого имеет смысл говорить, наступило оно или не наступило, в результате определенного комплекса условий или случайного эксперимента. Обозначаются события заглавными латинскими буквами $A, B, C, \ldots$

Пример 2.1. Пусть эксперимент состоит в однократном подбрасывании одной игральной кости (кубик). Самый разумный способ задать пространство элементарных исходов таков:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\},$$

где элементарные исходы соответствуют числу выпавших очков. Тогда, множество $A = \{1,3,5\}$ соответствует событию: «выпало нечетное число очков».

Наблюдаемые события разделяют на три вида: случайное, достоверное и невозможное.

1. Событие называется **случайным**, если оно может произойти или не произойти в результате эксперимента, т.е. результат данного события нельзя заранее прогнозировать.
2. Событие называется **достоверным,** если оно обязательно происходит в результате проведения эксперимента $\boldsymbol{E}$. Оно обозначается буквой $\boldsymbol{I}$.
3. Событие называется **невозможным,** если оно заведомо не произойдет в результате эксперимента $\boldsymbol{E}$. Оно обозначается символом пустого множества $\emptyset$.

События можно наглядно изображать с помощью диаграмм Эйлера – Венна. Пространство всех элементарных исходов изобразим в виде прямоугольника. Каждый элементарный исход ω соответствует точке внутри данного прямоугольника, а каждое событие A - некоторой области внутри прямоугольника (см. рис.1).

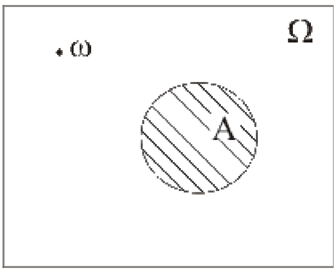


Рис.1

Рассмотрим теперь операции над событиями. Для простоты восприятия будем иллюстрировать эти операции с помощью диаграмм Эйлера – Венна.

Суммой (или **объединением**) двух событий A и B называется событие C, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из данных событий. Сумму событий записывают в виде $C = A + B$ или $C = A \cup B$ (см. рис 2,а).

Произведением (или **пересечением**) двух событий A и B называется событие C, которое происходит тогда и только тогда, когда одновременно происходят оба события A и B Произведение событий записывают в виде $C = AB$ или $C = A \cap B$.(см. рис 2,б).

События называются **несовместными**, если их одновременное появление при осуществлении комплекса условий невозможно, т.е. появление события A в данном испытании исключает появление события B в этом же испытании (см. рис 2,в).

Пример 2.2. Если из урны с черными и белыми шарами случайным образом извлекается шар черного цвета, то его появление исключает извлечение белого шара в этой же попытке.

Если событие A - какое-либо событие, то событие, состоящее в том, что событие A не наступило, называется **противоположным** событию A (или **дополнением** к событию A) и обозначается как $\overline{A}$. (см. рис 2,г).

Говорят, что событие A **влечет** событие B, если всегда, как только происходит событие A, происходит и событие B. Обозначается как $A \subseteq B$. (см. рис 2,д).

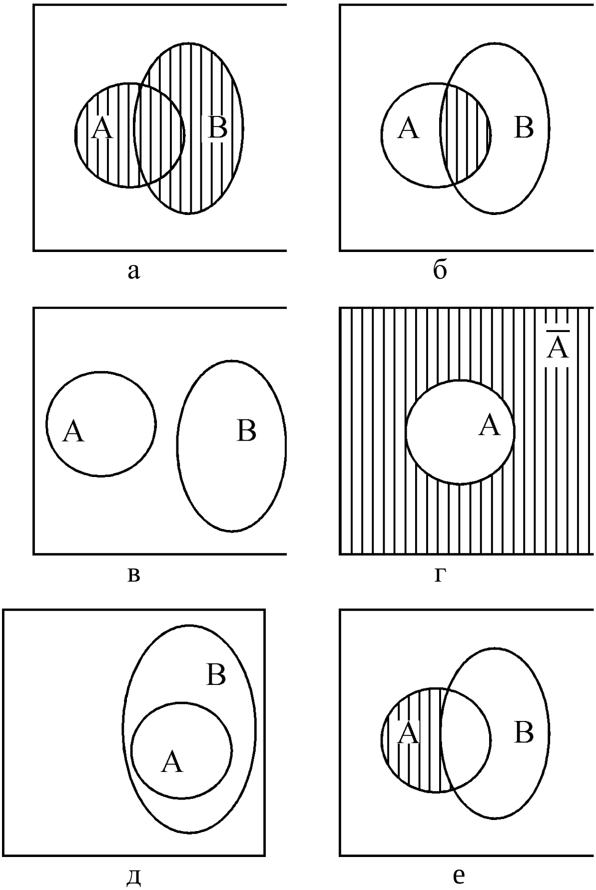


Рис.2

Разностью двух событий A и B называется событие C, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит событие A, но не происходит событие B. Разность событий A и B записывают в виде $C = A \setminus B$ (см. рис 2,е).

События называются **единственно возможными**, если появление в результате испытания одного и только одного из них является достоверным событием.

Пример 2.3. Если стрелок произвел выстрел по цели, то обязательно произойдет одно из двух событий – попадание или промах. Эти события единственно возможные.

События называются **равновозможными**, если есть основания считать, что ни одно из этих событий не является более возможным, чем другие.

Пример 2.4. Появление орла и появление решки при бросании монеты есть события равновозможные, потому что предполагается, что монета изготовлена из однородного материала, имеет правильную цилиндрическую форму, и наличие чеканки не влияет на выпадение той или иной стороны монеты.

Приведем основные свойства операций над событиями, справедливость которых нетрудно проверить с помощью диаграмм Эйлера – Венна.

1. $A+A=A$;
2. $A+I=I$;
3. $A+\varnothing=A$;
4. $AA=A$;
5. $A\varnothing=\varnothing$;
6. $A+B=B+A$;
7. $AB=BA$;
8. $(A+B)+C=A+(B+C)$;
9. $(AB)C=A(BC)$; $\overline{\overline{A}}=A$;
10. $(A+B)C=AC+BC$;
11. $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$; $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$ - правила Де Моргана.

Пример 2.5. В урне 5 красных, 2 синих и 3 белых шара. Все шары пронумерованы цифрами от 1 до 10. Из урны берется наудачу 1 шар. Пусть событие A={шар с четным номером}, событие B={шар с номером, кратным 3}, событие C={шар красного цвета}, событие D={шар синего цвета}, и, наконец, E={шар белого цвета}. Что представляют собой следующие события: а) $A+B$; б) $C+E$; с) AD; д) $\overline{AD}\setminus E$?

□ а) Событие $A+B$ ={вынули шар с номером 2, или 3, или 4, или 6, или 8, или 9, или 10}. б) Событие $C+E$ ={вынули шар красного или белого цвета}. с) Событие $AD =${вынули шар синего цвета с четным номером}. д) Событие $\overline{AD}$ является противоположным к событию AD, следовательно, $\overline{AD}$={вынули шар красного или белого цвета с нечетным номером}. Таким образом, событие $\overline{AD} \setminus E =${вынули шар красного цвета с нечетным номером}. ■

Пример 2.6. Событие $A =${хотя бы один из трех проверяемых утюгов неисправен}, событие B={все три утюга исправны}. Что представляют собой следующие события а) $A \cap B$; б) $\overline{A} \cap B$?

□ Событие B является противоположным событию A, следовательно, $A \cap B = \varnothing$; $\overline{A} \cap B = B$ ■

Пример 2.7. Из 25 студентов группы 20 человек увлекается спортом (событие A), 9 – музыкой (событие B), 6 – музыкой и спортом (событие AB). С помощью диаграммы Эйлера – Венна показать, что означают события $\overline{A+B}$, $\overline{A}B, A\overline{B}$.

□ Построим диаграмму Эйлера – Венна (см. рис 3.). Круги обозначают события A и B, пересечение кругов – событие AB

События $\overline{A}B$ и $A\overline{B}$ означают соответственно, что 3 студентов увлекаются только музыкой, а 14 – только спортом.

Следовательно, музыкой или спортом увлекаются 23 студента, и поэтому событие $\overline{A+B}$ означает, что только двое из студентов не имеют этих увлечений. ■

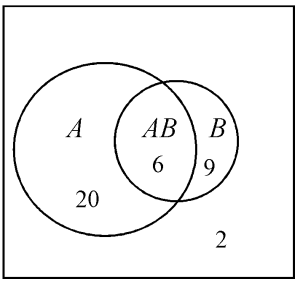


Рис 3.

2 Вероятность события

Вероятность – второе основное понятие в теории вероятностей после случайного события.

§1 Классическое определение вероятности

В классическом определении вероятности исходят из того, что пространство элементарных исходов Ω содержит конечное число элементарных исходов, причем все они равновозможны.

Пусть N – общее число равновозможных элементарных исходов в Ω, а N_A – число элементарных исходов, образующих событие A (или как говорят, благоприятствующих событию A).

Вероятностью события A называется отношение числа N_A благоприятствующих событию A элементарных исходов к общему числу N равновозможных элементарных исходов, т.е.

$$P(A)=\frac{N_A}{N}$$

Данное определение вероятности события принято называть классическим определением вероятности.

Приведем основные свойства вероятности события:

1. $0 \le P(A) \le 1$
2. $P(\Omega)=1$
3. $P(\varnothing) = 0$
4. $P(\overline{A})=1-P(A)$

5. $P(A) < P(B)$, если $A \subset B$
6. Если $AB = \emptyset$, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$

При нахождении вероятностей с использованием классического определения может оказаться полезной следующая схема.

1. Надо четко осмыслить, в чем состоит эксперимент.
2. Сформулировать четко, в чем состоит событие A, вероятность которого надо найти.
3. Четко сформулировать, что мы будем понимать под элементарным событием в нашей задаче и проверить три условия на Ω.
4. Подсчитать N .
5. Подсчитать N_A.
6. Найти $P(A)$.

Пример 1.1. Из урны, содержащей 10 белых и 20 черных шаров, наугад вынимают один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белого цвета.

□ Итак, требуется найти вероятность $P(A)$ события $A=${из урны извлечен белый шар}. Заметим, что число элементарных исходов в данном эксперименте равно числу шаров в урне, т.е. $N=30$, а число исходов, благоприятствующих событию A: $N_A = 10$. Поэтому в соответствии с определением классической вероятности

$$P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} \ \blacksquare$$

3 Основные понятия и формулы комбинаторики

При нахождении вероятностей с помощью классического определения широко используется комбинаторика.

Комбинаторика – раздел математики, в котором изучаются задачи выбора элементов из заданного множества и расположения их в группы по заданным правилам.

Полученные группы элементов называются **соединениями**. Они могут отличаться друг от друга как составом элементов и их общим числом, так и порядком следования элементов.

Многие комбинаторные задачи могут быть решены с помощью следующих двух важных правил, называемых соответственно **правилами умножения и сложения**.

§1 Правило умножения

Пусть требуется выполнить последовательно k операций, при этом первую операцию можно выбрать n_1 способами, вторую операцию n_2 способами, и т.д., k – ю операцию – n_k способами. Тогда все k операций могут быть выполнены числом способов, равным

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

Пример 1.1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2,3,4,5, если: а) цифры не повторяются? б) цифры могут повторятся?

□ а) Чтобы получить требуемое трехзначное число, надо выполнить три операции: последовательно выбрать три различные цифры.

Имеется 5 различных способов выбора цифры для первого места (слева в трехзначном числе). После того как первое место занято, например, цифрой 3, осталось четыре цифры для заполнения второго места. Для заполнения третьего места остается выбор из трех цифр. Следовательно, согласно правилу умножения, все три операции можно выполнить $N = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ способами.

б) В данном случае цифры трехзначного числа могут повторяться, следовательно, искомое количество чисел $N = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. ■

Пример 1.2. Пусть из пункта А в пункт В имеется 5 дорог, а из пункта В в пункт С – 6 дорог.

1) Сколько существует различных вариантов проезда из пункта А в пункт С?
2) Сколько существует различных вариантов проезда из пункта А в пункт В и обратно?
3) Сколько существует различных вариантов проезда из пункта А в пункт В и обратно при условии, что дороги туда и обратно будут разными?

□ 1) Чтобы добраться из пункта А в пункт С надо выполнить два действия: доехать из пункта А в пункт В (1-ое действие), а потом из пункта В в пункт С (2-ое действие). Существует 5 различных путей из пункта А в пункт В, следовательно, есть 5 способов для выполнения 1-го действия, при этом существует 6 различных путей из пункта В в пункт С – это 6 различных способов 2-го действия. Согласно правилу умножения, число различных способов выбора пути из пункта А в пункт С равно $5 \cdot 6 = 30$.

2) Из пункта А в пункт В ведет 5 дорог, значит, имеется 5 способов проезда туда и 5 способов проезда обратно. По правилу умножения число всех способов проезда туда и обратно равно $5 \cdot 5 = 25$.

3) Рассуждаем аналогично пункту 2), но учитываем, что дороги туда и обратно не должны совпадать, т.е. при выборе одного из 5-ти способов проезда «туда» обратно можно вернуться одним из 4-х способов. Поэтому число различных способов проехать из пункта А в пункт В и вернуться обратно, но обязательно другой дорогой, равно $5 \cdot 4 = 20$.■

§2 Правило сложения

Если некоторый объект x можно выбрать n_1 способами, а объект y можно выбрать n_2 способами, причем первые и вторые способы не пересекаются, то любой из указанных объектов (x или y), можно выбрать $n_1 + n_2$ способами.

Пример 2.1. В студенческой группе 14 девушек и 6 юношей. Сколькими способами можно выбрать, для выполнения различных заданий, двух студентов одного пола?

□ По правилу умножения двух девушек можно выбрать $14 \cdot 13 = 182$ способами, а двух юношей - $6 \cdot 5 = 30$ способами. Следует выбрать двух студентов одного пола: двух студенток или двух юношей. Согласно правилу сложения таких способов выбора будет $182 + 30 = 212$. ■

§3 Размещения

Размещениями из n элементов по k $(0 < k \le n)$ элементов называются соединения, каждое из которых состоит из k различных элементов, взятых из данных n элементов.

При этом, размещения отличаются друг от друга или самими элементами, или их порядком.

Число размещений из n элементов по k элементов обозначается символом A_n^k (читается: «A из n по k») и вычисляется по формуле

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

или

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \text{ где } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, 1! = 1, 0! = 1 \qquad (3.2)$$

Пример 3.1. $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Пример 3.2. Составить различные размещения по 2 из элементов множества $D = \{a, b, c\}$ и подсчитать их число.

□ Из трех элементов можно образовать следующие размещения по два элемента: *(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b).* Согласно формуле (3.1) их число: $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$. ■

Пример 3.3. На девяти карточках написано по одной цифре от 1 до 9 без повторений. Располагая любые 5 карточек в строку, мы получим пятизначное число. Сколько различных пятизначных чисел можно изобразить, используя эти 9 карточек?

□ Карточки образуют множество $D = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Для образования пятизначного числа надо взять любые пять карточек из множества *D* и упорядочить их. Поэтому любому пятизначному числу соответствует размещение из 9-ти элементов по 5. Количество трехзначных чисел, которые можно изобразить при помощи пяти карточек, совпадает с числом различных размещений из 9-ти элементов по 5 и может быть найдено по формуле

$$A_9^5 = \frac{9!}{4!} = 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 15120\,. \blacksquare$$

Пример 3.4. В коробке имеется 7 пуговиц семи основных цветов. Портной необходимо пришить к кофте 5 пуговиц. Сколько существует различных способов пришить пуговицы к кофте?

□ Все пуговицы в коробке образуют множество из семи различных элементов. Для того, чтобы пришить пуговицы к кофте портной нужно достать из коробки пять пуговиц и расположить их на кофте по вертикали сверху вниз. Выбранные пуговицы образуют множество из 5 элементов. Это множество определяется элементами, вошедшими в него (цветами пуговиц), а также их порядком сверху вниз. Поэтому данное множество является размещением из 7 элементов по 5 и, следовательно, искомое число различных способов равняется числу размещений из 7 элементов по 5

$$A_7^5 = \frac{7!}{2!} = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 2520 \;\blacksquare$$

Пример 3.5. В урне находятся 30 пронумерованных шаров: 5 белых, 10 черных и 15 красных шаров. Из урны последовательно без возвращения производят 5 извлечений по одному шару. Сколькими способами можно произвести указанное извлечение так, чтобы при первых двух извлечениях вынутыми оказались белые шары, при последующих двух извлечениях – черные, а при последнем извлечение – красный?

□ По условию все шары пронумерованы, следовательно, мы имеем дело с 30 различными объектами. Получение требуемой последовательности пяти шаров – результат трёх действий.

1)Сначала выбирается 2 белых шара с учетом их порядка из 5 белых шаров. Так как все шары различны, то порядок следования шаров важен. Таким образом, мы имеем дело с размещением без повторений. Следовательно, рассматриваемое действие может быть совершено A_5^2 способами.

2)Второе действие состоит в выборе последовательности из 2-х черных шаров (с учетом их порядка) из 10 черных шаров. Это действие может быть совершено A_{10}^2 различными способами.

3)Третье действие состоит в выборе одного красного шара. Последнее действие может быть выполнено A_{15}^1 различными способами.

Число различных последовательностей рассматриваемых пяти шаров совпадает с числом таких трёх действий, и, по правилу умножения, выражается по формуле

$$A_5^2 \cdot A_{10}^2 \cdot A_{15}^1 = \frac{5!}{3!} \cdot \frac{10!}{8!} \cdot \frac{15!}{14!} = 5 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 15 = 27000 \ \blacksquare$$

§4 Размещения с повторениями

Размещениями с повторениями из n элементов по k элементов называются соединения, содержащие k элементов, каждый из которых может быть любого из n типов.

Размещения с повторениями могут отличаться друг от друга элементами, их порядком и кратностью повторения элементов.

Число размещений с повторениями n элементов по k элементов обозначается символом V_n^k (читается: «V из n по k ») и вычисляется по формуле

$$V_n^k = n^k \qquad (4.1)$$

Пример 4.1. $V_{10}^2 = 10^2 = 100$

Пример 4.2. Сколько можно составить размещений с повторениями по 2 элемента множества $D = \{a, b, c\}$?

□ Из трех элементов можно образовать следующие размещения с повторениями по два элемента: *(a,a), (b,b), (c,c), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b).*Согласно формуле (4.1) их число: $V_3^2 = 3^2 = 9$. ■

Пример 4.3. Замок камеры хранения открывается при наборе определенной комбинации из четырех цифр от 0 до 9. Пассажир забыл свой номер и набирает комбинацию наугад. Сколько попыток предшествовало удачной, если пассажиру удалось угадать номер только на последней из всех возможных попыток?

□ Любая набранная пассажиром комбинация – размещение с повторением из 10 элементов по 4 элемента. Значит число всевозможных комбинаций равняется числу размещений с повторениями из 10 элементов по 5

$$V_{10}^4 = 10^4 = 10000$$

Следовательно, пассажир угадал свой номер с 10000 попытки. ■

§5 Перестановки

Перестановками из n элементов называются размещения из n элементов по n элементов, отличающиеся друг от друга лишь порядком элементов.

Число перестановок из n элементов обозначается символом P_n (читается: «P из n») и вычисляется по формуле (3.1) при $k = n$:

$$P_n = A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n! \quad (5.1)$$

Таким образом, $P_n = n!$.

Пример 5.1. Из трех букв *a, b, c* можно составить следующие слова - перестановки: *abc, acb, bca, bac, cab, cba*. Их число $P_3 = 3! = 6$

Пример 5.2. На полке 5 книг. Книги сняты с полки и после реставрации поставлены на полку в случайном порядке. Сколько различных вариантов расположения книг на полки после реставрации?

□ Число различных вариантов $P_5 = 5! = 120$ ■

Пример 5.3. На прилавке магазина наудачу располагаются 10 плюшевых игрушек. Сколько существует различных способов расположения 10 игрушек, при которых 3 заранее помеченные игрушки окажутся рядом?

□ Для отыскания числа различных вариантов расположения плюшевых игрушек на прилавке магазина, при которых 3 заранее отмеченные игрушки окажутся рядом, временно свяжем эти 3 помеченные игрушки вместе и будем считать, что получилась плюшевая игрушка. После этого на прилавке окажутся 7+1= 8 плюшевых игрушек. Существует 8! различных способов расположения указанных 8 игрушек на прилавке. При этом, игрушки в связке мы можем менять местами 3! различными способами (число перестановок трех игрушек). Следовательно, число искомых перестановок из 10 игрушек равно 8!·3!.■

§6 Сочетания

Сочетаниями из n элементов по k $(0 < k \le n)$ элементов называются соединения, каждое из которых состоит из k различных элементов, взятых из данных n элементов.

Эти соединения отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. В отличие от размещений, порядок следования элементов здесь не учитывается.

Число сочетаний из n элементов по k элементов обозначается символом C_n^k (читается: «C из n по k») и вычисляется по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{6.1}$$

Свойства числа сочетаний

1. $C_n^k = C_n^{k-1}$
2. $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$
3. $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^n b^n$

(формула бинома Ньютона)

4. $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$

Пример 6.1. Составить различные сочетания по 2 из элементов множества $D = \{a, b, c\}$ и подсчитать их число.

□ Из трех элементов можно образовать следующие сочетания по два элемента: *(a, b)*, *(a, c)*, *(b, c)*. Их число: $C_3^2 = \frac{3!}{2!1!} = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 3$. ■

Пример 6.2. В урне находятся 30 пронумерованных шаров: 5 белых, 10 черных и 15 красных шаров. Из урны наудачу берутся 7 шаров. Сколькими различными способами можно вынуть 7 шаров?

□ Число различных способов вынуть 7 шаров из 30 совпадает с числом сочетаний из 30 элементов по 7 элементов и равно $C_{30}^7 = \frac{30!}{7!23!} = 5040$ ■

Пример 6.3. Из вазы, где стоят 10 красных и 4 белых розы, выбирают 1 красный и 2 белых цветка. Сколькими способами можно сделать такой выбор?

□ Число способов $N = n_r \cdot n_w$,

где n_r – число способов выбрать красную розу, а n_w – число способов выбрать две белые розы. Из условия следует, что $n_r = 10$, а $n_w = C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$. Таким образом, $N = 60$ ■

Пример 6.4. В коробке находятся 20 деталей, из которых 4 бракованных. Из коробки наудачу берутся 5 деталей. Найти число различных способов взятия 5-ти деталей, среди которых ровно 3 бракованных.

□ Чтобы получить множество из 5 деталей, содержащих 3 доброкачественные, надо совершить последовательно 2 действия: во-первых, взять 3 бракованные изделия из общего числа 4 бракованных деталей, а во-вторых, взять 2 доброкачественные детали из 16 доброкачественных деталей.

Тогда по правилу умножения оба действия можно совершить $C_4^3 \cdot C_{16}^2$ различными способами. ■

§7 Вычисление вероятностей с помощью формул комбинаторики

Пример 7.1. Ребенок играет с 6 буквами разрезной азбуки: Т, Р, М, С, Е, А. Какова вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово МАСТЕР?

□ Итак, требуется найти вероятность $P(A)$ события $A=${из букв составлено слово «мастер»}. В данном случае число элементарных исходов равно числу перестановок из $n=6$ элементов, т.е.

$$N = P_6 = 720.$$

Очевидно, что число исходов, благоприятствующих событию A,

$$N_A = 1.$$

Следовательно, $P(A) = \dfrac{1}{720}$ ■

Пример 7.2. Две радиостанции могут работать на одной из трех фиксированных частот каждая. Найти вероятность, что при одновременном и независимом выходе в эфир они будут работать на различных частотах.

□ Пусть событие $A=${радиостанции работают на разных частотах}. Требуется найти вероятность $P(A)$.

Элементарный исход нашего эксперимента состоит в выборе двумя радиостанциями частоты для вещания. Каждая из радиостанций, независимо от другой, выбирает любую из трех частот, причем нам важно какую именно частоту каждая из них выберет, следовательно, элементарный исход нашего эксперимента совпадает с размещением из трех элементов по два.

По условию обе радиостанции могут выбрать одну и туже частоту, поэтому, число элементарных исходов эксперимента равно числу размещений с повторениями из 3 элементов по 2 элемента, т.е. $N = 3^2 = 9$.

Число исходов, благоприятствующих событию A, равно числу размещений без повторений из 3 элементов по 2 элемента, т.е. $N = A_3^2 = 6$.

Следовательно, $P(A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ ■

Пример 7.3. В партии содержатся 50 деталей, из которых 10 бракованных. Из партии наудачу берутся 5 деталей. Найти вероятность того, что: 1) все 5 деталей бракованные; 2) в пятерке извлеченных деталей 3 детали бракованные и 2 детали доброкачественные.

□ Пусть событие A={все 5 деталей бракованные}, а B={в пятерке извлеченных деталей 3 детали бракованные и 2 – доброкачественные}. Надо найти $P(A)$ и $P(B)$.

Элементарный исход нашего эксперимента состоит в выборке 5 деталей из пятидесяти, причем порядок следования деталей не имеет значения. Следовательно, элементарное событие совпадает с сочетанием из 50 элементов по 5. Общее число таких элементарных событий совпадает с числом различных сочетаний из 50 элементов по 5 и равно

$$N = C_{50}^5 = \frac{50!}{5! \cdot 45!}$$

Событию А благоприятствуют лишь те пятерки деталей, которые взяты из 10 бракованных деталей, т.е. $N_A = \frac{10!}{5!\cdot 5!}$ и

$P(A) = \frac{C_{10}^5}{C_{50}^5}$.

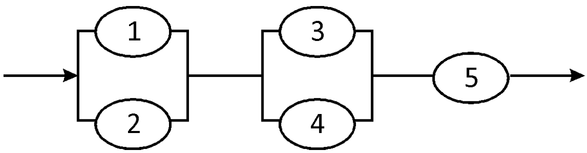
Событию В благоприятствуют лишь те пятерки деталей, которые содержат 3 бракованные и 2 доброкачественные детали. По правилу умножения число таких исходов равно $N_B = C_{10}^3 C_{40}^2$ и, следовательно, $P(B) = \frac{C_{10}^3 C_{40}^2}{C_{50}^5}$. ■

4 Задачи для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть событие A заключается в том, то выбранный студент окажется юношей; событие B – в том, что он не курит, а событие C – в том, что он живет в общежитии. Описать событие $AB\overline{C}$. Когда справедливо равенство $AB\overline{C} = A$?

2. Электрическая цепь состоит из элементов, соединенных по следующей схеме



Пусть событие A_i означает безотказную работу за время T элемента с номером $i(i = 1,2,3,\ldots)$, а событие B – безотказную работу цепи. Написать формулу, выражающую событие B через все события A_i.

3. Сколькими способами можно переставить буквы слова «статистика», таким образом, чтобы три буквы «т» шли подряд?

4. Имеется 9 пар перчаток различных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну на левую руку и одну на правую руку так, чтобы они были разных размеров?

5. Сколькими способами можно распределить 48 задач по алгебре между 12 студентами для самостоятельного решения по 4 задачи каждому?

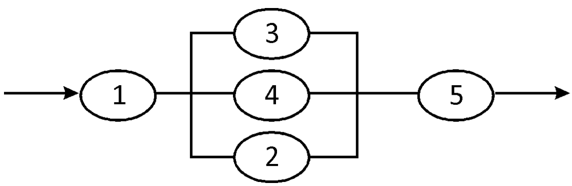
6. В ящике 100 болтов диаметром d=4см и 2 болта диаметром d=6см. Наудачу извлекают один болт. Какова вероятность, что он диаметром d=6см?

7. На книжной полке стоят 15 книг, среди которых 9 детективов. Наудачу выбираются 4 книги. Найти вероятность того, что среди них окажется 3 детектива.

Вариант 2

1. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть событие A заключается в том, то выбранный студент окажется юношей; событие B – в том, что он не курит, а событие C – в том, что он живет в общежитии. Описать событие $A\overline{B}C$. Когда справедливо включение $\overline{C} \subset B$?

2. Электрическая цепь состоит из элементов, соединенных по следующей схеме



Пусть событие A_i означает безотказную работу за время T элемента с номером $i (i = 1,2,3,\ldots)$, а событие

B – безотказную работу цепи. Написать формулу, выражающую событие B через все события A_i.

3. Сколько чётных пятизначных чисел можно составить из цифр числа 19352, если каждую цифру можно использовать в записи не более одного раза?

4. Сколькими способами можно составить трехцветный флаг, если имеется материал пяти различных цветов?

5. Необходимо доставить рекламные проспекты в 6 различных фирм. Сколькими способами это могут сделать трое курьеров?

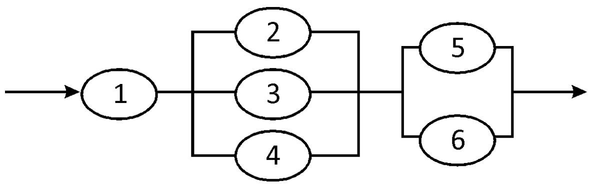
6. В коробке 47 шариковых ручек с синими чернилами и 3 – с красными чернилами. Наудачу извлекают одну ручку и, не возвращая её обратно, извлекают ещё одну. Какова вероятность, что последняя шариковая ручка с синими чернилами, если первая извлеченная ручка оказалась с красными чернилами?

7. В группе 25 студентов, среди них 5 отличников. Выбирают по списку 10 студентов. Найти вероятность того, что среди них окажется 3 отличника.

Вариант 3

1. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть событие A заключается в том, то выбранный студент окажется юношей; событие B – в том, что он не курит, а событие C – в том, что он живет в общежитии. Описать событие $\overline{A}BC$. Когда справедливо равенство $\overline{A} = B$?

2. Электрическая цепь состоит из элементов, соединенных по следующей схеме



Пусть событие A_i означает безотказную работу за время T элемента с номером $i(i=1,2,3,\ldots)$, а событие B – безотказную работу цепи. Написать формулу, выражающую событие B через все события A_i.

3. Сколькими способами можно переставить буквы слова «**кофеварка**», чтобы гласные и согласные буквы чередовались?

4. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске два квадрата белый и черный, не лежащие на одной вертикали?

5. В парке предприятия имеется 15 автобусов. Сколькими способами можно выделить для дежурства в выходные дни 2 автобуса из имеющихся?

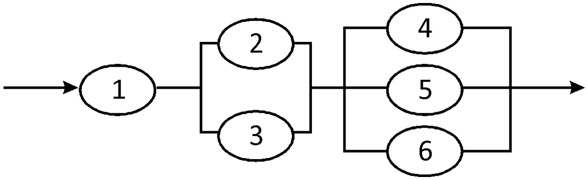
6. Из стопки упаковок сменных блоков для тетради на кольцах, в которой 34 блока желтого цвета и 5 – синего, подряд вынимают один за другим все блоки. Какова вероятность, что вторым по порядку будет блок синего цвета?

7. В группе из 20 студентов 4 не сдали экзамен по информатике. По списку отобрали 16 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов нет должников.

Вариант 4

1. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть событие A заключается в том, то выбранный студент окажется юношей; событие B – в том, что он не курит, а событие C – в том, что он живет в общежитии. Описать событие $A\overline{B}\overline{C}$. Когда справедливо равенство $\overline{C}=B$?

2. Электрическая цепь состоит из элементов, соединенных по следующей схеме



Пусть событие A_i означает безотказную работу за время T элемента с номером $i (i = 1,2,3,\ldots)$, а событие B – безотказную работу цепи. Написать формулу, выражающую событие B через все события A_i.

3. Сколько чётных пятизначных чисел можно получить из цифр 1, 2, 3, 4?

4. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, так, чтобы одна полоса всегда была красной, если имеется материал белого, красного, синего и зеленого цветов?

5. Для участия в эстафете выбраны пять девушек и трое юношей. Необходимо разбить их на 2 команды по 4 человека так, чтобы в каждой команде было хотя бы по одному юноше. Сколькими способами это можно сделать?

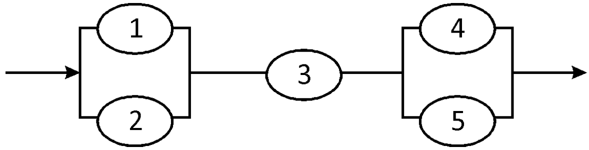
6. Из колоды, содержащей 36 карт, наудачу извлекают одну карту. Найти вероятность, что эта карта будет девяткой пик?

7. На полке в случайном порядке расставлены 15 учебников, причем 5 из них в мягком переплете. Школьник берет 3 учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из них окажется в мягком переплете.

Вариант 5

1. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть событие A заключается в том, то выбранный студент окажется юношей; событие B – в том, что он не курит, а событие C – в том, что он живет в общежитии. Описать событие $\overline{A}B\overline{C}$. Когда справедливо равенство $\overline{C} = A$?

2. Электрическая цепь состоит из элементов, соединенных по следующей схеме



Пусть событие A_i означает безотказную работу за время T элемента с номером $i(i = 1,2,3,\ldots)$, а событие B – безотказную работу цепи. Написать формулу, выражающую событие B через все события A_i.

3. Сколькими способами можно переставить буквы слова «**эконометрика**» таким образом, чтобы вторая и четвертая буквы были согласными?

4. В эстафете участвуют 11 команд. Сколькими способами между ними могут быть распределены второе и третье места?

5. На плоскости 8 точек. Через каждую пару проходит прямая. Сколько получено прямых?

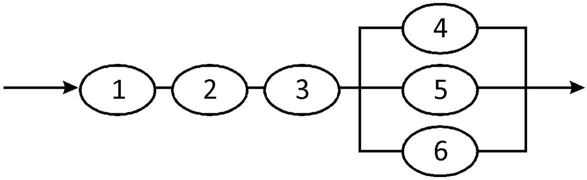
6. На складе находится 20 литых дисков и 10 – кованых. Со склада приносят в торговый зал 5 дисков. Какова вероятность, что все они окажутся литыми?

7. В партии из 67 деталей имеется 28 стандартных. Наудачу отобраны 36 деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных имеется 12 стандартных.

Вариант 6

1. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть событие A заключается в том, то выбранный студент окажется юношей; событие B – в том, что он не курит, а событие C – в том, что он живет в общежитии. Описать событие $\overline{A}\overline{B}C$. Когда справедливо равенство $\overline{B} = B$?

2. Электрическая цепь состоит из элементов, соединенных по следующей схеме



Пусть событие A_i означает безотказную работу за время T элемента с номером $i(i = 1,2,3,\ldots)$, а событие B – безотказную работу цепи. Написать формулу, выражающую событие B через все события A_i.

3. Сколько чётных пятизначных чисел можно получить из цифр 5, 9, 6, 0, так, чтобы цифры в числе не повторялись?

4. В комнате студенческого общежития живут трое студентов. У них есть 4 чашки, 5 блюдцев и 6 чайных ложек (все чашки, блюдца и ложки различные). Сколькими способами может быть накрыт стол для чаепития, если каждый получит одну чашку, блюдце и ложку?

5. Сколько комбинаций кодового замка можно составить из 10 цифр, если замок открывается при одновременном нажатии двух кнопок?

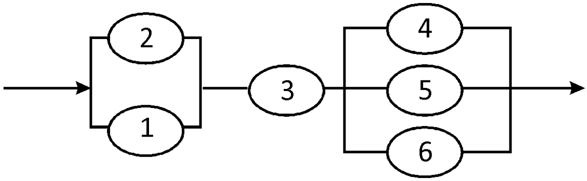
6. Из колоды, содержащей 54 карты наудачу извлекают одну карту. Найти вероятность, что эта карта будет тузом?

7. В урне 15 белых и 5 черных шаров. Наугад достают 5 шаров. Найти вероятность того, что среди них окажется ровно 3 белых шара.

Вариант 7

1. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть событие A заключается в том, то выбранный студент окажется юношей; событие B – в том, что он не курит, а событие C – в том, что он живет в общежитии. Описать событие $A\overline{BC}$. Когда справедливо равенство $\overline{C} = C$?

2. Электрическая цепь состоит из элементов, соединенных по следующей схеме



Пусть событие A_i означает безотказную работу за время T элемента с номером $i(i = 1,2,3,\ldots)$, а событие B – безотказную работу цепи. Написать формулу, выражающую событие B через все события A_i.

3. Сколькими способами 10 студентов могут встать в очередь друг за другом?

4. Сколько словарей из двух иностранных языков надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять технические переводы с любого из пяти языков: русского, английского, немецкого, итальянского, французского, на любой другой из этих пяти языков?

5. Сколькими способами можно раздать 6 карт четырем игрокам, если в колоде 36 карт?

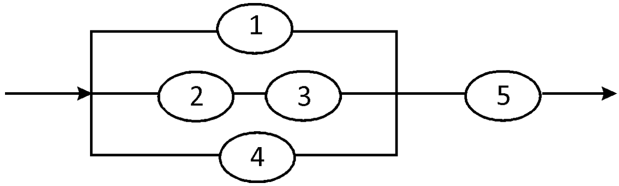
6. Игральную кость бросают 2 раза. Найти вероятность того, что оба раза выпадет одинаковое число очков.

7. В коробке 18 шаров, среди которых 10 цветных. Наудачу берем 7 шаров. Найти вероятность того, что среди них окажется 4 цветных.

Вариант 8

1. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть событие A заключается в том, то выбранный студент окажется юношей; событие B – в том, что он не курит, а событие C – в том, что он живет в общежитии. Описать событие $A\overline{BC}$. Когда справедливо включение $\overline{B} \subset A$?

2. Электрическая цепь состоит из элементов, соединенных по следующей схеме



Пусть событие A_i означает безотказную работу за время T элемента с номером $i (i = 1,2,3,\ldots)$, а событие B – безотказную работу цепи. Написать формулу, выражающую событие B через все события A_i.

3. Для участия в ежегодной эстафете выбраны 3 девушки и 7 юношей. Сколькими способами можно расставить их на этапах, чтобы начинали и заканчивали эстафету юноши?

4. Сколькими способами можно рассадить 6 гостей на 8 стульях?

5. Для шести менеджеров проводится психологический тренинг в течение нескольких дней. Каждый день их объединяют в группы по три человека. Сколькими способами можно сделать так, чтобы состав группы не повторялся?

6. Игральную кость бросают один раза. Найти вероятность того, что выпадет четное число очков.

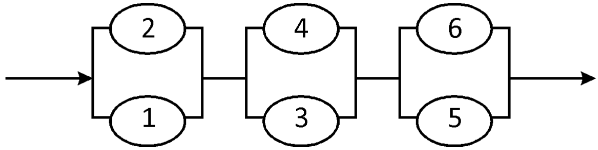
7. В бригаде 23 рабочих, среди них 6 женщин. Выбирают по списку 10 рабочих. Найти вероятность того, что среди них окажется 4 женщины.

Вариант 9

1. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть событие A заключается в том, то выбранный студент окажется юношей; событие B – в том, что он не курит, а

событие C – в том, что он живет в общежитии. Описать событие $\overline{ACB}$. Когда справедливо включение $C \subset A$?

2. Электрическая цепь состоит из элементов, соединенных по следующей схеме



Пусть событие A_i означает безотказную работу за время T элемента с номером $i(i = 1,2,3,\ldots)$, а событие B – безотказную работу цепи. Написать формулу, выражающую событие B через все события A_i.

3. Сколькими способами можно пронумеровать грани параллелепипеда?

4. Сколько словарей из двух иностранных языков необходимо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять технические переводы с любого из десяти иностранных языков?

5. В пространстве заданы 12 точек, каждые три из которых не лежат на одной прямой. Сколько различных плоскостей через них можно провести (любую поверхность можно задать с помощью трех точек, не лежащих на одной прямой)?

6. Игральную кость бросают три раза. Найти вероятность того, каждый раз выпадет нечётное число очков.

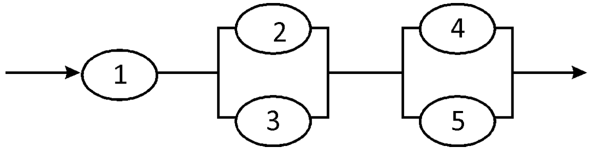
7. Из карточек с русским алфавитом первоклассник отобрал 15 карточек. Какова вероятность, что среди них окажется 4 гласных?

Вариант 10

1. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть событие A заключается в том, то выбранный студент

окажется юношей; событие B – в том, что он не курит, а событие C – в том, что он живет в общежитии. Описать событие $\overline{ABC}$. Когда справедливо равенство $\overline{A}B = B$?

2. Электрическая цепь состоит из элементов, соединенных по следующей схеме



Пусть событие A_i означает безотказную работу за время T элемента с номером $i(i = 1,2,3,\ldots)$, а событие B – безотказную работу цепи. Написать формулу, выражающую событие B через все события A_i.

3. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, чтобы каждое из них начиналось с комбинации «25»?

4. Сколькими способами из 54 карт можно выбрать по одной карте каждой масти?

5. Параллелограмм пересекается двумя рядами прямых, параллельных сторонам, каждый ряд состоит из 10 линий. Сколько параллелограммов в получившейся фигуре?

6. Игральную кость бросают один раза. Найти вероятность того, что число выпавших очков не меньше пяти.

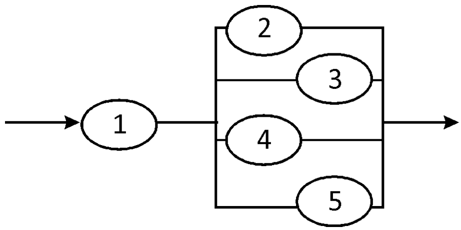
7. В продаже имеется 27 белых роз и 12 розовых. Продавец наугад вынул 9 цветов. Какова вероятность, что в полученном букете будет пять красных роз?

Вариант 11

1. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть событие A заключается в том, то выбранный студент окажется девушкой; событие B – в том, что он не курит, а

событие C – в том, что он не живет в общежитии. Описать событие $AB\overline{C}$. Когда справедливо равенство $AB\overline{C} = B$?

2. Электрическая цепь состоит из элементов, соединенных по следующей схеме



Пусть событие A_i означает безотказную работу за время T элемента с номером $i(i = 1,2,3,\ldots)$, а событие B – безотказную работу цепи. Написать формулу, выражающую событие B через все события A_i.

3. Сколькими способами можно посадить за круглый стол 5 мужчин и пять женщин, чтобы два лица одного пола не оказались рядом?

4. Сколькими способами можно расставить 8 спортсменов на 3 дорожках бассейна?

5. Сторону треугольника разделили на 10 отрезков и точки деления соединили с вершиной, противолежащей данной стороне. Сколько треугольников получилось в исходном треугольнике?

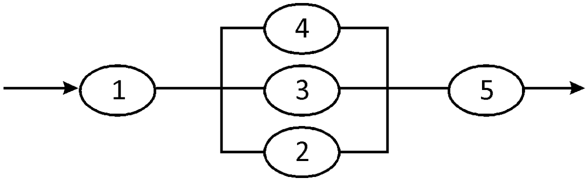
6. Игральную кость бросают один раз. Найти вероятность, что число выпавших очков меньше 4.

7.В результате анализа технического состояния 500 новых автомобилей одной модификации у 10 из них обнаружен дефект тормозной системы, у 25 - нарушения в работе коробки передач. Какова вероятность, что среди отпущенных дилерскому центру 50 автомобилей 46 не будут иметь вышеперечисленных дефектов?

Вариант 12

1. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть событие A заключается в том, то выбранный студент окажется девушкой; событие B – в том, что он не курит, а событие C – в том, что он не живет в общежитии. Описать событие $A\overline{B}C$. Когда справедливо включение $\overline{C} \subset B$?

2. Электрическая цепь состоит из элементов, соединенных по следующей схеме



Пусть событие A_i означает безотказную работу за время T элемента с номером $i (i = 1,2,3,\ldots)$, а событие B – безотказную работу цепи. Написать формулу, выражающую событие B через все события A_i.

3. Для участия в легкоатлетической эстафете выбраны 2 девушки и 5 юношей. Сколькими способами можно расставить их по этапам, чтобы на втором и третьем этапах бежали девушки?

4. Сколькими способами 10 пассажиров можно разместить на 20 местах автобуса?

5. Требуется отгадать, какую из пяти монет достоинством 10 коп., 50 коп., 1 руб., 2 руб., и 5 руб. держит в руке партнер. Сколько может быть дано неверных ответов?

6. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна восьми.

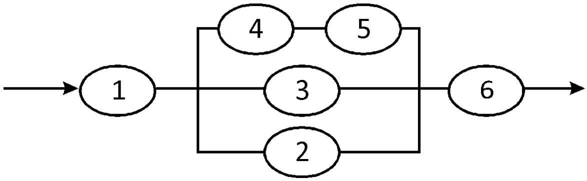
7. В пачке 87 фотографий, среди которых 53 матовых, остальные – глянцевые. Наудачу выбирают 33

фотографий. Найти вероятность того, что среди них окажется 14 глянцевых?

Вариант 13

1. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть событие A заключается в том, то выбранный студент окажется девушкой; событие B – в том, что он не курит, а событие C – в том, что он не живет в общежитии. Описать событие $\overline{A}BC$. Когда справедливо равенство $\overline{A}=B$?

2. Электрическая цепь состоит из элементов, соединенных по следующей схеме



Пусть событие A_i означает безотказную работу за время T элемента с номером $i(i=1,2,3,\ldots)$, а событие B – безотказную работу цепи. Написать формулу, выражающую событие B через все события A_i.

3. Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 4, 5, 6, 7, 8, 9 так, чтобы каждое из них начиналось с комбинации «567»?

4. Сколько четырехзначных целых чисел можно составить из четных однозначных положительных чисел, если цифры в числе не повторяются?

5. Сколькими способами можно выбрать из чисел от 1 до 100 три числа, сумма которых делится на три?

6. Брошены две монеты. Какое из событий A или B является более достоверным: A - монеты лягут

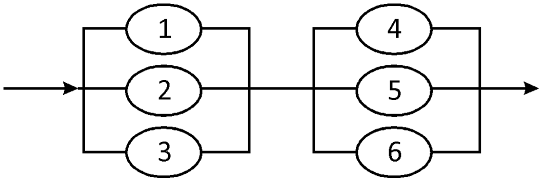
одинаковыми сторонами; B - монеты лягут разными сторонами.

7. Из 11 зеленых и 8 красных кубиков выбирают 6 кубиков. Найти вероятность что среди них будет 4 красных.

Вариант 14

1. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть событие A заключается в том, то выбранный студент окажется девушкой; событие B – в том, что он не курит, а событие C – в том, что он не живет в общежитии. Описать событие $A\overline{B}\overline{C}$. Когда справедливо равенство $\overline{C} = B$?

2. Электрическая цепь состоит из элементов, соединенных по следующей схеме



Пусть событие A_i означает безотказную работу за время T элемента с номером $i(i = 1,2,3,\ldots)$, а событие B – безотказную работу цепи. Написать формулу, выражающую событие B через все события A_i.

3. Сколькими способами можно расставить 30 томов так, чтобы первый и второй тома не оказались рядом?

4. Сколько трехзначных целых чисел можно составить из нечетных однозначных положительных чисел, если цифры в числе не повторяются?

5. Сколькими способами можно раздать колоду из 52 карт 13 игрокам по 4 карты каждому?

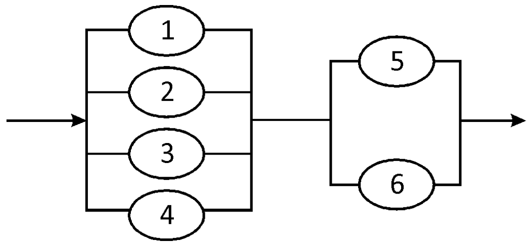
6. В ящике находятся 20 болтов и 30 гаек. Что вероятнее: достать 2 болта или достать 2 гайки?

7. Для участия в легкоатлетической эстафете выбраны 6 девушек и 7 юношей. Трое из них были оставлены в качестве запасных. Какова вероятность, что среди оставшихся 2 девушки?

Вариант 15

1. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть событие A заключается в том, то выбранный студент окажется девушкой; событие B – в том, что он не курит, а событие C – в том, что он не живет в общежитии. Описать событие $\overline{A}B\overline{C}$. Когда справедливо равенство $\overline{C} = A$?

2. Электрическая цепь состоит из элементов, соединенных по следующей схеме



Пусть событие A_i означает безотказную работу за время T элемента с номером $i (i = 1,2,3,\ldots)$, а событие B – безотказную работу цепи. Написать формулу, выражающую событие B через все события A_i.

3. Имеется семь бусин различных цветов. Сколько различных ожерелий из них можно составить так, чтобы бусины синего и красного цвета не находились рядом?

4. Сколько двухзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4?

5. На плоскости задано 15 точек, из которых 4 лежат на одной прямой, а кроме них никакие 3 точки не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников, вершинами которых являются данные точки?

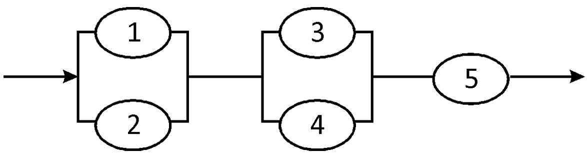
6. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков больше их произведения.

7. На тепловой электростанции 15 сменных инженеров, из них 3 женщины. В смену занято 3 человека. Найти вероятность того, что в случайно выбранную смену среди них будет не более двух женщин.

Вариант 16

1. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть событие A заключается в том, то выбранный студент окажется девушкой; событие B – в том, что он не курит, а событие C – в том, что он не живет в общежитии. Описать событие $A\overline{B}\overline{C}$. Когда справедливо равенство $\overline{B} = B$?

2. Электрическая цепь состоит из элементов, соединенных по следующей схеме



Пусть событие A_i означает отказ элемента с номером $i (i = 1,2,3,\ldots)$, а событие B – отказ цепи за время T (прекращение тока в цепи). Написать формулу, выражающую событие B через все события A_i.

3. Во время летней сессии студентам предстоит сдать 5 экзаменов. Сколькими способами можно составить график сдачи экзаменов?

4. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 5, 6, 7?

5. Сколько можно построить различных прямоугольных параллелепипедов, длина каждого ребра которых выражается целым числом от 1 до 10?

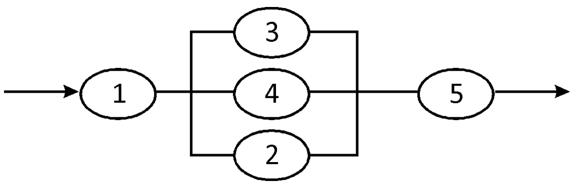
6. Абонент забыл последнюю цифру телефонного номера и набрал её наудачу. Какова вероятность, что он набрал её правильно?

7. Для производственной практики на 30 студентов представлено 15 мест в Перми, 8 – в Березниках, остальные – в другие города Пермского Края. Найти вероятность, что среди случайно выбранных девяти студентов пятеро останутся в Перми, а остальные – уедут в Березники.

Вариант 17

1. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть событие A заключается в том, то выбранный студент окажется девушкой; событие B – в том, что он не курит, а событие C – в том, что он не живет в общежитии. Описать событие $\overline{ABC}$. Когда справедливо равенство $\overline{C} = C$?

2. Электрическая цепь состоит из элементов, соединенных по следующей схеме



Пусть событие A_i означает отказ элемента с номером $i(i = 1,2,3,\ldots)$, а событие B – отказ цепи за время T (прекращение тока в цепи). Написать формулу, выражающую событие B через все события A_i.

3. Студентам восьми групп факультета предстоит пройти медосмотр. Сколькими способами можно составить график медосмотра, при условии, что в день проходят медосмотр студенты одной группы?

4. Сколько трехцветных узоров можно составить из цветов радуги?

5. Сколькими способами 85 студентов-первокурсников могут быть распределены по трем группам?

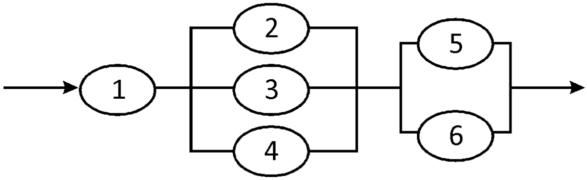
6. При перевозке ящика, в котором находилось 50 стандартных и 5 нестандартных деталей, была утеряна одна деталь. После перевозки из ящика извлекли одну деталь, она оказалась стандартной. Найти вероятность, что была утеряна нестандартная деталь.

7. Из ящика, содержащего 15 изделий первого сорта и 8 – второго, вынимают сразу 5 деталей. Найти вероятность того, что среди них будет две детали первого сорта.

Вариант 18

1. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть событие A заключается в том, то выбранный студент окажется девушкой; событие B – в том, что он не курит, а событие C – в том, что он не живет в общежитии. Описать событие $A\overline{BC}$. Когда справедливо включение $\overline{B} \subset A$?

2. Электрическая цепь состоит из элементов, соединенных по следующей схеме



Пусть событие A_i означает отказ элемента с номером $i(i=1,2,3,\ldots)$, а событие B – отказ цепи за время T (прекращение тока в цепи). Написать формулу, выражающую событие B через все события A_i.

3. Сколько четырехзначных чисел, делящихся на пять, можно составить из цифр 0, 1, 2, 5, при условии, что каждое число не содержит одинаковых цифр?

4. Сколькими способами 8 команд могут разыграть комплект медалей?

5. На плоскости нанесены 10 точек. Сколько можно построить различных пятиугольников?

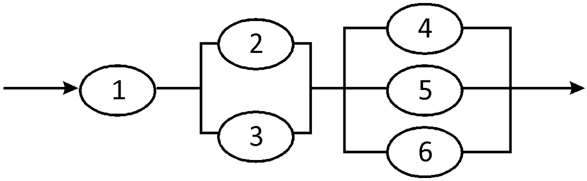
6. Какова вероятность максимального выигрыша ("джек-пот") в лотерею типа лото, если в лотерейный билет вносятся 12 чисел от 1 до 99 ("джек-пот" выигрывает билет, в котором оказались все двенадцать первых чисел, выданных машиной)?

7. В больницу поступило 14 больных: 5 – с заболевание «А», 6 – с заболеванием «Б», остальные – с заболевание «С». Через неделю половину из них выписали. Какова вероятность того, что среди них четверо с заболеванием «Б», двое с заболеванием «С».

Вариант 19

1. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть событие A заключается в том, то выбранный студент окажется девушкой; событие B – в том, что он не курит, а событие C – в том, что он не живет в общежитии. Описать событие $\overline{ACB}$. Когда справедливо включение $C \subset A$?

2. Электрическая цепь состоит из элементов, соединенных по следующей схеме



Пусть событие A_i означает отказ элемента с номером $i (i = 1,2,3,\ldots)$, а событие B – отказ цепи за время T (прекращение тока в цепи). Написать формулу, выражающую событие B через все события A_i.

3. Сколько пятизначных чисел, делящихся на три, можно составить из цифр 3, 4, 6, 7, 9 если каждое число не содержит одинаковых цифр?

4. На ипподроме 15 лошадей. Сколькими способами можно выбрать 5 лошадей для первого забега?

5. Сколько игровых пятерок можно составить из 22 хоккеистов?

6. Задумано двухзначное число, цифры которого различны. Найти вероятность того, что задуманным числом окажется случайно названное двузначное число.

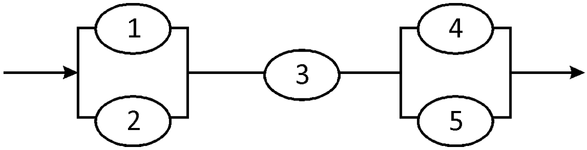
7. Устройство состоит из 7 элементов, два из которых изношены. При включении устройства включаются случайным образом четыре элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся три неизношенных элемента.

Вариант 20

1. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть событие A заключается в том, то выбранный студент окажется девушкой; событие B – в том, что он не курит, а событие C – в том, что он не живет в общежитии.

Описать событие $\overline{ABC}$. Когда справедливо равенство $\overline{AB} = B$?

2. Электрическая цепь состоит из элементов, соединенных по следующей схеме



Пусть событие A_i означает отказ элемента с номером $i(i = 1,2,3,\ldots)$, а событие B – отказ цепи за время T (прекращение тока в цепи). Написать формулу, выражающую событие B через все события A_i..

3. Номер автомобильного прицепа содержит 3 цифры и 2 буквы. Сколько номеров можно составить из цифр 3, 4, 7 и букв А и М, если буквы и цифры в записи номера использовались по одному разу?

4. Сколькими способами могут распределиться места, занятые членами команды из 5 человек, если в соревнованиях участвуют ещё 20 человек?

5. Разыгрывается лотерея 5 из 36. Сколько выигрышных комбинаций можно составить?

6. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 5 и произведение – 4.

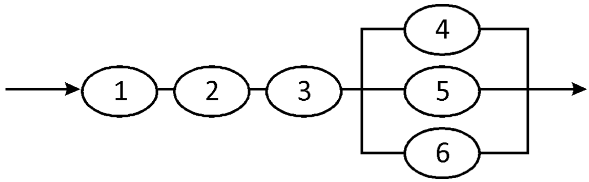
7. На складе фирмы 30 упаковок бумаги для ксерокса, причем 20 из них изготовлены в городе Краснокамске. Какова вероятность, что среди взятых наугад четырех пачек три будут с Краснокамской фабрики.

Вариант 21

1. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть

событие A заключается в том, то выбранный студент окажется юношей; событие B – в том, что он курит, а событие C – в том, что он не живет в общежитии. Описать событие $AB\overline{C}$. Когда справедливо равенство $AB\overline{C} = B$?

2. Электрическая цепь состоит из элементов, соединенных по следующей схеме



Пусть событие A_i означает отказ элемента с номером $i (i = 1,2,3, \ldots)$, а событие B – отказ цепи за время T (прекращение тока в цепи). Написать формулу, выражающую событие B через все события A_i..

3. Сколько чисел, меньших тысячи, можно составить из цифр 0, 1, 2, 3?

4. В автоколонне 20 водителей. Сколькими способами можно составить график выхода в рейс на неделю, если в рейс отправляется один водитель?

5. Из 10 роз и 8 пионов нужно составить букет, который содержит 2 розы и 3 пиона. Сколько можно составить различных букетов?

6. Монета брошена два раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появиться «герб».

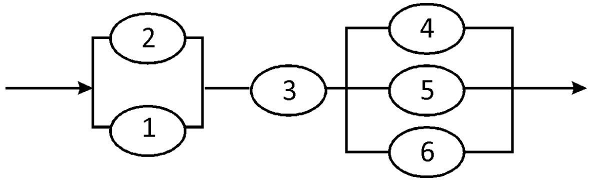
7. Из 40 винтовок 17 имеют оптический прицел. Для учений было выдано 30 винтовок. Найти вероятность, что будут выданы все винтовки с оптическим прицелом.

Вариант 22

1. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть событие A заключается в том, то выбранный студент

окажется юношей; событие B – в том, что он курит, а событие C – в том, что он не живет в общежитии. Описать событие $A\overline{B}C$. Когда справедливо включение $\overline{C} \subset B$?

2. Электрическая цепь состоит из элементов, соединенных по следующей схеме



Пусть событие A_i означает отказ элемента с номером $i (i = 1, 2, 3, \ldots)$, а событие B – отказ цепи за время T (прекращение тока в цепи). Написать формулу, выражающую событие B через все события A_i.

3. Сколькими способами могут быть поставлены оценки трем студентам, если все они получили разные оценки и никто из них не получил неудовлетворительные оценки?

4. В составе поезда 15 вагонов. Сколькими способами в этот состав можно посадить 10 человек так, чтобы все эти пассажиры оказались в разных вагонах?

5. Сколькими способами можно выделить караул из трех солдат и одного офицера, если в подразделении 60 солдат и 5 офицеров?

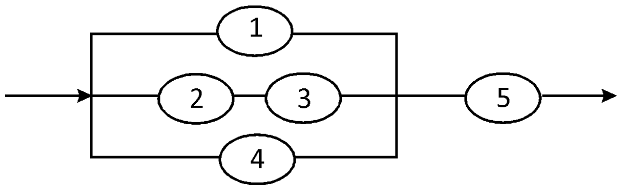
6. Брошены три игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна трем.

7. Грибники нашли в лесу 18 грибов, среди них 4 белых гриба, 6 – подосиновиков, остальные сыроежки. Какова вероятность, что среди случайно вынутых из корзины 9 грибов будет 2 белых и 3 подосиновикова?

Вариант 23

1. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть событие A заключается в том, то выбранный студент окажется юношей; событие B – в том, что он курит, а событие C – в том, что он не живет в общежитии. Описать событие $\overline{A}BC$. Когда справедливо равенство $\overline{A} = B$?

2. Электрическая цепь состоит из элементов, соединенных по следующей схеме



Пусть событие A_i означает отказ элемента с номером $i (i = 1,2,3,\ldots)$, а событие B – отказ цепи за время T (прекращение тока в цепи). Написать формулу, выражающую событие B через все события A_i.

3. Сколькими способами можно переставить буквы слова «**переэкзаменовка**», чтобы три буквы «**е**» не стояли вместе?

4. Сколько различных автомобильных номеров можно составить из 15 букв и 10 цифр, если этот номер должен содержать по 2 различные буквы и 3 различные цифры?

5. Имеется 6 цветов разных сортов. Сколькими способами можно составить букет из трех цветов?

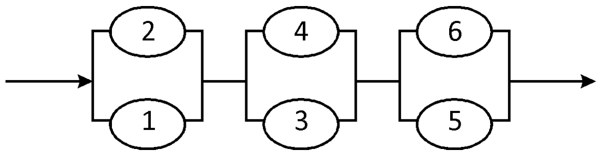
6. В ящике 210 деталей, среди которых 3 неокрашенных. Найти вероятность того, что три, наудачу извлеченных детали будут неокрашенными.

7. В альбоме 46 чистых и 14 гашеных марок. Из них наудачу извлекают 23 марки. Какова вероятность, что среди них будет 15 чистых?

Вариант 24

1. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть событие A заключается в том, то выбранный студент окажется юношей; событие B – в том, что он курит, а событие C – в том, что он не живет в общежитии. Описать событие $A\overline{B}\overline{C}$. Когда справедливо равенство $\overline{C} = B$?

2. Электрическая цепь состоит из элементов, соединенных по следующей схеме



Пусть событие A_i означает отказ элемента с номером $i (i = 1,2,3,\ldots)$, а событие B – отказ цепи за время T (прекращение тока в цепи). Написать формулу, выражающую событие B через все события A_i.

3. Сколькими способами можно составить трехцветный флаг, если имеется материал трех различных цветов и возможно как вертикальное, так и горизонтальное расположение полос?

4. Для участия в эстафете выбрали 12 человек. Сколькими способами их можно распределить по 8 этапам?

5. Разыгрывается лотерея 6 из 48. Сколько нужно купить лотерейных билетов, чтобы стать обладателем главного приза?

6. Какова вероятность, что студент сдаст экзамен, ответив на три предложенных вопроса, если он знает ответы на 27 из 34 вопросов.

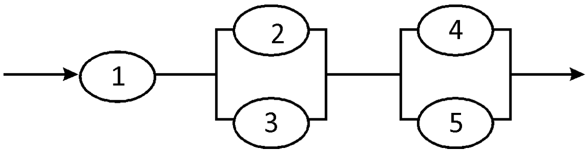
7. На складе имеется 60 детских панам. 30 из них розового цвета, 20 – голубого, остальные – зеленые. Найти

вероятность того, что среди взятых наугад 40 панамок 20 будут розовыми, 15 – голубыми.

Вариант 25

1. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть событие A заключается в том, то выбранный студент окажется юношей; событие B – в том, что он курит, а событие C – в том, что он не живет в общежитии. Описать событие $\overline{A}B\overline{C}$. Когда справедливо равенство $\overline{C} = A$?

2. Электрическая цепь состоит из элементов, соединенных по следующей схеме



Пусть событие A_i означает отказ элемента с номером $i (i = 1, 2, 3, \ldots)$, а событие B – отказ цепи за время T (прекращение тока в цепи). Написать формулу, выражающую событие B через все события A_i.

3. Сколько трехполосных флагов можно составить, если имеется материал белого, красного и зелёного цвета, так, чтобы полосы располагались по горизонтали и верхняя была бы белого цвета?

4. На предприятии 1500 работников. Могут ли все работники иметь разные инициалы?

5. Сколькими способами можно выбрать из чисел от 1 до 50 три числа так, чтобы их сумма делилась на пять?

6. В конверте среди 100 фотографий находится одна разыскиваемая. Найти вероятность того, что

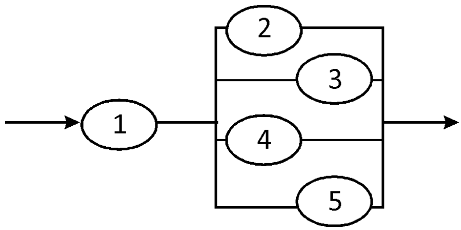
извлечённая наудачу фотография окажется разыскиваемой?

7. Из колоды в 38 карт вытаскивают наудачу 5 карт. Какова вероятность того, что будут вытащены 2 туза и 3 шестерки?

Вариант 26

1. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть событие A заключается в том, то выбранный студент окажется юношей; событие B – в том, что он курит, а событие C – в том, что он не живет в общежитии. Описать событие $A\overline{B}\overline{C}$. Когда справедливо равенство $\overline{B}=B$?

2. Электрическая цепь состоит из элементов, соединенных по следующей схеме



Пусть событие A_i означает отказ элемента с номером $i(i=1,2,3,\ldots)$, а событие B – отказ цепи за время T (прекращение тока в цепи). Написать формулу, выражающую событие B через все события A_i.

3. Преподаватель должен принять экзамен по математике у студентов шести групп. Сколькими способами он может составить график экзаменов?

4. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материал 6

цветов и возможно расположение полос по вертикали и горизонтали?

5. Сколько комбинаций кодового замка можно составить из 10 цифр, если замок открывается при одновременном нажатии трех кнопок?

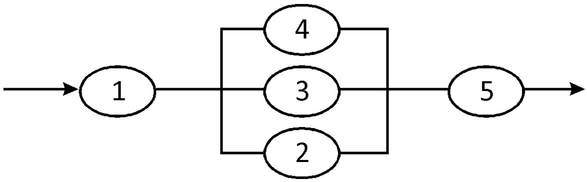
6. В пачке, содержащей 500 лотерейных билетов, находятся 350 выигрышных. Какова вероятность, что купленный билет окажется выигрышным?

7. Из 60 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент знает 50. Найти вероятность, что среди трех наугад выбранных вопросов студент знает два вопроса.

Вариант 27

1. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть событие A заключается в том, то выбранный студент окажется юношей; событие B – в том, что он курит, а событие C – в том, что он не живет в общежитии. Описать событие $\overline{AB}C$. Когда справедливо равенство $\overline{C} = C$?

2. Электрическая цепь состоит из элементов, соединенных по следующей схеме



Пусть событие A_i означает отказ элемента с номером $i (i = 1,2,3,\ldots)$, а событие B – отказ цепи за время T (прекращение тока в цепи). Написать формулу, выражающую событие B через все события A_i..

3. Сколько четырехполосных флагов можно составить, если имеется материал четырех различных цветов?

4. Сколько комбинаций кодового замка можно составить из 10 цифр, если замок открывается при последовательном нажатии трех кнопок?

5. На работу в дорожно-строительную компанию принято 8 человек со стажем работы до двух лет и четверо рабочих со стажем свыше пяти лет. Сколькими способами их можно разбить на три бригады по четыре человека во главе с бригадиром, если бригадиром может быть человек, со стажем работы свыше 5 лет?

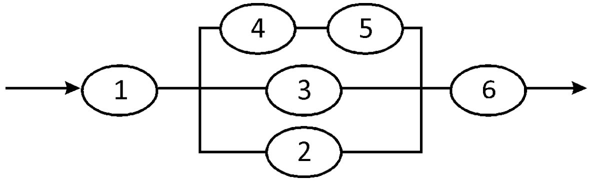
6. Открывая кодовый, замок человек забыл последнюю цифру и набрал её наугад. Какова вероятность, что замок откроется?

7. У мальчика имеется 7 фишек синего цвета и 9 - красного. 12 фишек он отдал младшему брату. Какова вероятность того, что половина из них будет красного цвета?

Вариант 28

1. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть событие A заключается в том, то выбранный студент окажется юношей; событие B – в том, что он курит, а событие C – в том, что он не живет в общежитии. Описать событие $A\overline{BC}$. Когда справедливо включение $\overline{B} \subset A$?

2. Электрическая цепь состоит из элементов, соединенных по следующей схеме



Пусть событие A_i означает отказ элемента с номером $i(i = 1,2,3,\ldots)$, а событие B – отказ цепи за время T (прекращение тока в цепи). Написать формулу, выражающую событие B через все события A_i.

3. Сколькими способами можно переставить буквы слова «**самосвал**» так, чтобы гласные и согласные буквы чередовались?

4. Сколькими способами можно поставить на доску две шашки – белую и черную так, чтобы белая шашка могла бить черную?

5. На ремонт в автосервис поступило 12 автомобилей. Сколькими способами их можно распределить поровну между тремя мастерами?

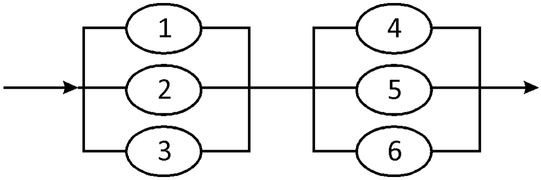
6. Устройство состоит из 5 элементов, 2 из которых изношены. При включении устройства случайным образом включаются 2 элемента. Найти вероятность, что они окажутся изношенными?

7. Из колоды в 36 карт наугад вынимают 2 карты. Найти вероятность, что среди них окажется хотя бы одна «дама».

Вариант 29

1. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть событие A заключается в том, то выбранный студент окажется юношей; событие B – в том, что он курит, а событие C – в том, что он не живет в общежитии. Описать событие $A\overline{CB}$. Когда справедливо включение $C \subset A$?

2. Электрическая цепь состоит из элементов, соединенных по следующей схеме



Пусть событие A_i означает отказ элемента с номером $i(i = 1,2,3,\ldots)$, а событие B – отказ цепи за время T (прекращение тока в цепи). Написать формулу, выражающую событие B через все события A_i..

3. Сколько различных пятизначных чисел, делящихся на 10 можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4? Каждую цифру можно использовать в записи только один раз.

4. Из 4 второкурсников, 5 третьекурсников и 6 пятикурсников надо выбрать трех студентов на конференцию. Сколькими способами можно осуществить этот выбор, если среди выбранных должны быть студенты разных курсов?

5. На предприятии имеется 36 строительно-дорожных машин и автобусов в одинаковом количестве. Сколькими способами можно выбрать один автобус и одну машину?

6. 10 работников цеха подали заявление на отпуск. Найти вероятность для каждого из них пойти в отпуск первым.

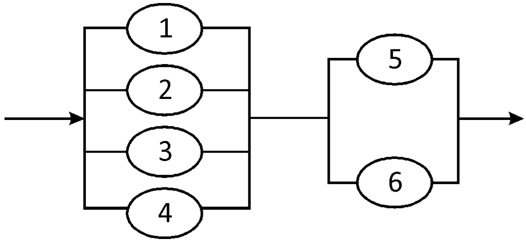
7. В оружейной из 53 пистолетов 35 пистолеты марки «Макарова». Для учений было выдано 42 пистолета. Найти вероятность, что будут среди выданных окажется 30 пистолетов марки «Макарова»?

Вариант 30

1. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть событие A заключается в том, то выбранный студент окажется юношей; событие B – в том, что он курит, а событие C – в том, что он не живет в общежитии.

Описать событие $\overline{ABC}$. Когда справедливо равенство $\overline{AB} = B$?

2. Электрическая цепь состоит из элементов, соединенных по следующей схеме



Пусть событие A_i означает отказ элемента с номером $i(i = 1,2,3,\ldots)$, а событие B – отказ цепи за время T (прекращение тока в цепи). Написать формулу, выражающую событие B через все события A_i

3. Сколькими способами можно расставить 6 книг на одной полке и 10 книг на другой?

4. Сколькими способами три награды могут быть распределены между 12 участниками соревнований?

5. Имеется шесть бульдозеров и четыре экскаватора. Сколькими способами можно выбрать для работы на объекте 2 бульдозера и 2 экскаватора?

6. Устройство состоит из 7 элементов, 4 из которых изношены. При включении устройства случайным образом включаются 3 элемента. Найти вероятность того, что они окажутся не изношенны?

7. На атомной электростанции 18 сменных инженеров, из них 5 женщины. В смену занято 4 человека. Найти вероятность того, что в случайно выбранную смену среди них не будет более трех женщин.

Литература

[1] Виленкин Н.Я., Потапов В.Г. Задачник-практикум по теории вероятностей с элементами комбинаторики и математической статистики. М.: Просвещение, 1979

[2] Теория вероятностей: учебник для вузов./ Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 456с.

[3] Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч.4: Учебное пособие для втузов/ Под общ. ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова – М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2003 – 432 с.

[4] Вербицкий Б.В., Милевский А.С. Решение задач по теории вероятностей М. МИИТ, 2009, 160 с.