федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования

**«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»**

КАФЕДРА «МАТЕМАТИКА»

М.В. Ишханян

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть 1

Учебное пособие

Москва – 2012

федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования

**«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»**

КАФЕДРА «МАТЕМАТИКА»

М.В. Ишханян

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть 1

Рекомендовано редакционно-издательским советом

университета в качестве учебного пособия

для студентов направления 080100.62 «Экономика»

Москва – 2012

УДК 517

И – 97

Ишханян М.В. Математический анализ. Часть 1.: Учебное пособие – М.: МИИТ, 2012. – 175 с.

Учебное пособие предназначено для студентов направления 080100.62 «Экономика», обучающихся по дисциплине «Математический анализ». Учебное пособие удовлетворяет требованиям ФГОС 3 поколения и написано в соответствие с примерной образовательной программой дисциплины «Математический анализ», одобренной УМО по классическому университетскому образованию. Пособие включает следующие разделы программы: «Функция», «Числовые последовательности», «Непрерывность функции», «Дифференциальное исчисление функции одной переменной», «Исследование функций и построение их графиков». Пособие состоит из 6 глав. Каждая глава разбита на параграфы, содержащие краткое изложение теории и примеры решения типовых задач. В каждой главе представлены задачи с ответами и задачи для самостоятельного решения. Предлагаемое пособие содержит 3100 задач и может быть полезно в процессе аудиторной и самостоятельной работы студентов, при проведении контрольных и зачетных работ.

Рецензенты:
О.А. Платонова, к.ф.-м.н., зав. кафедрой «Высшая математика» МИИТа;
Л.А. Климина, к.ф.-м.н.,с.н.с. НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова.

Глава 1. Функция

При изучении процессов, обусловленных деятельностью человека, приходится рассматривать изменение одной величины в зависимости от изменения другой, описывая эти изменения функциональными зависимостями.

В экономике наиболее часто используются следующие функции:

1. ***Функция полезности*** **–** зависимость полезности, т. е. результата, эффекта некоторого действия от уровня (интенсивности) этого действия.
2. ***Производственная функция*** **–** зависимость результата производственной деятельности от обусловивших его факторов.
3. ***Функция выпуска*** **–** зависимость объема производства от наличия или потребления ресурсов.
4. ***Функция издержек*** **–** зависимость издержек производства от объема продукции.
5. ***Функции спроса, потребления и предложения*** - зависимость объема спроса, потребления или предложения на отдельные товары или услуги от различных факторов (например, цены, дохода и т. п.) и другие.

1.1. Понятие множества

Понятие множества является одним из основных понятий математики. Под множеством понимают совокупность(класс, собрание, семейство…) некоторых объектов, объединенных по какому-либо признаку. Например, можно говорить о множестве студентов института. Объекты из которых состоит множество, называются его элементами.

Множества принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита, а их элементами – малыми буквами. Если элемент x принадлежит множеству X, то пишут $x \in X$. Если элемент x не принадлежит множеству X, то пишут $x \notin X$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается символом $\varnothing$.

Элементы множества записывают в фигурных скобках. Например, запись $A=\{1,7,8\}$ означает, что множество A состоит из трех чисел 1, 7 и 8; запись $A=\{x:-1\le x\le 1\}$ означает, что множество A состоит из всех действительных чисел, удовлетворяющих неравенству $-1\le x\le 1$.

В дальнейшем для сокращения записей мы будем использовать следующие логические символы:

$\forall$ - означает «для любого», «для всякого»;

$\exists$ - «существует», «найдется»;

$:$ - «имеет место», «такое что»;

Например, запись $\forall x\in A: p$ означает: «для всякого элемента x из множества A имеет место предположение p».

Множества, элементами которых являются числа, называются ***числовыми***. Примерами числовых множеств являются:

$\mathbb{N}=\{1;2;3;\ldots;n;\ldots\}$ – множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}_0=\{0;1;2;\ldots;n;\ldots\}$ – множество целых положительных чисел;

$\mathbb{Z}=\{0,\pm1;\pm2;\ldots;\pm n;\ldots\}$ – множество целых чисел;

$\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n}:m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}\}$ – множество рациональных чисел.

$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел.

Пусть a и b – действительные числа, причем $a<b$. Числовыми промежутками (интервалами) называются подмножествами всех действительных чисел, имеющих следующий вид:

Отрезок	$[a;b]=\{x:a\le x\le b\}$
Открытый интервал	$(a;b)=\{x:a<x<b\}$
Полуоткрытый Интервал	$[a;b)=\{x:a\le x<b\}$ $(a;b]=\{x:a<x\le b\}$

Бесконечные интервалы	$(-\infty;b]=\{x: x\le b\}$, $(-\infty;b)=\{x: x<b\}$, $[a;+\infty)=\{x: x\ge a\}$, $(a;+\infty)=\{x: x>a\}$ $(-\infty;+\infty)=\{x: -\infty<x<+\infty\}=\mathbb{R}$

Числа a и b называются соответственно левым и правым концами этих промежутков.

Окрестностью точки x_0 называется любой интервал $(a;b)$, содержащий точку x_0. В частности, интервал $(x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon)$, где $\varepsilon>0$, называется ε ***-окрестностью*** точки x_0.

Если $x\in(x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon)$, то выполняется неравенство $|x-x_0|<\varepsilon$.

Проколотой окрестностью точки x_0 называется любая окрестность точки x_0, без точки x_0. В частности, интервал $(x_0-\delta; x_0)\cup(x_0; x_0+\delta)$, где $\delta>0$, называется δ ***- окрестностью*** точки x_0.

Если $x\in(x_0-\delta; x_0)\cup(x_0; x_0+\delta)$, то выполняется неравенство $0<|x-x_0|<\delta$.

Задачи

Установите соответствие между заданными числами и множествами, которым они принадлежат:

1. $x=-10$ $\qquad$ $A=\{x\in\mathbb{Z}:-14<x<-9\}$

$x=\sqrt{14}$ $\qquad$ $B=\{x\in\mathbb{R}:2{,}1<x\le 4{,}85\}$

$x=6$ $\qquad$ $C=\{x\in\mathbb{N}:4\le x<7\}$

$x=-6{,}3$ $\qquad$ $D=\{x\in\mathbb{R}:-7{,}1\le x<-6{,}2\}$

$E=\{x\in\mathbb{N}:-10\le x<6\}$

2. $x=-15$ $\qquad$ $A=\{x\in\mathbb{Z}:-15<x<0\}$

$x=\sqrt{7}$ $\qquad$ $B=\{x\in\mathbb{R}:-3<x\le -2{,}5\}$

$x=6$ $\qquad$ $C=\{x\in\mathbb{N}:-15\le x<6\}$

$x=-2{,}7$ $\qquad$ $D=\{x\in\mathbb{R}:-1<x\le 3\}$

$E=\{x\in\mathbb{N}:1\le x<7\}$

Установите соответствие между списками двух множеств, заданных различным образом:

3. $A=\{x:x^2-2x-8=0\}$ $\qquad$ $I_1=(-\infty;-2]\cup[4;\infty)$

$B=\{x:x^2-2x-8>0\}$ $\qquad$ $I_2=[-2;4]$

$C=\{x:x^2-2x-8<0\}$ $\qquad$ $I_3=(-\infty;-2)\cup(4;\infty)$

$D=\{x:x^2-2x-8\le 0\}$ $\qquad$ $I_4=(-2;4)$

$I_5=\{-2;4\}$

4. $A=\{x:x^2+9x-22=0\}$ $\qquad$ $I_1=(-\infty;-11]\cup[2;\infty)$

$B=\{x:x^2+9x-22>0\}$ $\qquad$ $I_2=[-11;2]$

$C=\{x:x^2+9x-22<0\}$ $\qquad$ $I_3=(-\infty;-11)\cup(2;\infty)$

$D=\{x:x^2+9x-22\le 0\}$ $\qquad$ $I_4=(-11;2)$

$I_5=\{-11;2\}$

5. $A=\left\{x:6x^2-5x-1=0\right\}$ $\quad I_1=\left(-\infty;-\dfrac{1}{6}\right]\cup\left[1;\infty\right)$

$B=\left\{x:6x^2-5x-1>0\right\}$ $\quad I_2=\left[-\dfrac{1}{6};1\right]$

$C=\left\{x:6x^2-5x-1<0\right\}$ $\quad I_3=\left(-\infty;-\dfrac{1}{6}\right)\cup\left(1;\infty\right)$

$D=\left\{x:6x^2-5x-1\le 0\right\}$ $\quad I_4=\left(-\dfrac{1}{6};1\right)$

$I_5=\left\{-\dfrac{1}{6};1\right\}$

Укажите множества, являющиеся ε -окрестностью точки x_0:

6. $x_0=-2$, $I_1=\left(-4;0\right]\setminus\left[-3;-2\right]$, $I_2=\left(-3;0\right)\cup\left(-4;-1\right]$, $I_3=\left(-3;0\right)\cap\left(-4;-1\right]$, $I_4=\left[-3;0\right)\setminus\left[-2;1\right)$.

7. $x_0=2$, $I_1=\left(0;3\right]\cup\left[1;4\right)$, $I_2=\left(0;3\right)\cap\left(1;4\right)$, $I_3=\left(1;3\right)\setminus\left[-2;2\right]$, $I_4=\left(0;3\right)\setminus\left[2;3\right)$.

8. Найдите $A\cup B, A\cap B, A\cap C, B\cup C,\ \ A\cap B\cap C,\ (A\cup B)\cap C$ и изобразите эти множества на координатной прямой, если $A=\left[0;3\right];\ \ B=(1;5); C=\left(-2;0\right]$.

9. Найдите $A\cup B, A\cap B, A\cap C, B\cup C,\ \ A\cap B\cap C,\ (A\cup B)\cap C$ и изобразите эти множества на координатной прямой, если $A=\left[-\infty;1\right]$; $B=\left[1;+\infty\right]$; $C=(0;1)$.

1.2. Определение функции

Постоянной величиной называется величина, сохраняющая одно и то же значение.

Переменной называется величина, которая может принимать различные числовые значения.

Пусть даны два непустых множества X и Y. Если каждому значению переменной $x \in X$ ставится в соответствие одно и только одно значение $y \in Y$, то величина y называется ***функцией*** величины x и обозначается $y = f(x)$. При этом величина x называется ***независимой*** переменной (или ***аргументом),*** величина y – ***зависимой*** переменной (или ***функцией).***

Множество X называется ***областью определения*** функции f и обозначается $D(f)$. Множество всех $y \in Y$ называется ***множеством значений*** функции f и обозначается $E(f)$**.**

1.3. Способы задания функции

Существует несколько способов задания функции: аналитический, табличный и графический.

Аналитический способ. Функция задается в виде одной или нескольких формул или уравнений.

Аналитический способ задания функции является наиболее совершенным, так как к нему приложены методы математического анализа, позволяющие полностью исследовать функцию $y = f(x)$.

Табличный способ. Функция задается таблицей, содержащей значения аргумента и соответствующих им значений функции.

На практике часто приходится пользоваться таблицами значений функций, полученных опытным путем или в результате наблюдений.

Графический способ. На координатной плоскости изображается совокупность точек.

Часто графики строятся с помощью специальных пакетов математических программ. Значения функции y, соответствующие тем или иным значениям аргумента x, непосредственно находятся из этого графика. Преимуществом графического задания является его наглядность, недостатком – его неточность.

1.4. Формы задания функции

Явная функция. Функция называется ***явной,*** если она задана формулой, в которой правая часть не содержит зависимой переменной.

Например, функция $y=x^2+5x-6$.

Неявная функция. Функция y аргумента x называется ***неявной,*** если она задана уравнением $F(x,y)=0$, не разрешенным относительно зависимой переменной.

Например, $x\ln x+y\sin y=0$.

Сложная функция. Пусть функция $y=f(u)$ есть функция от переменной u, определенной на множестве U с областью значений Y, а переменная u, в свою очередь, является функцией $u=g(x)$ от переменной x, определенной на множестве X с областью значений U. Тогда заданная на множестве X функция $y=f(g(x))$ называется ***сложной функцией*** аргумента x.

Например, $y=lncosx$ – сложная функция.

Параметрическая функция. Если переменные x и y связаны через третью переменную t, то функция задана ***параметрически***.

Например, $x=3t, y=4t^2+1$

1.5. Основные характеристики функции

1. ***Область определения*** (или область допустимых значений) аргумента: множество $D(f)$.
2. ***Область изменения*** (или область значений) функции: множество $E(f)$.
3. ***Корни (нули) функции***. *Корнями функции* называются те значения аргумента, при которых функция обращается в нуль.

4. ***Четность.*** Функция $y=f(x)$ называется *четной,* если для любых значений x из области определения справедливо соотношение $f(-x)=f(x)$, и *нечетной,* если $f(-x)=-f(x)$. В противном случае функция $y=f(x)$ называется функцией общего вида. График четной функции симметричен относительно оси ординат, график нечетной симметричен относительно начала координат.

   Например, $y=\sqrt{1+x^2}, y=\ln|x|$ - четные функции; $y=\sin x, y=x^3$ – нечетные функции; $y=x+1, y=\sqrt{x}$ - функции общего вида.

5. ***Периодичность.*** Функция называется *периодической,* если существует такое число T, что для любого значения x, взятого из области определения, значения $x+T$ и $x-T$ также принадлежат области определения и выполняется равенство $f(x)=f(x+T)$. Число T называется *периодом функции.*

   Например, значение функции $y=\sin x$ не изменится, если к аргументу прибавлять любое число из множества $2\pi n$, где $n\in Z$. Наименьшее положительное из этих чисел 2π есть по определению – период функции.

6. ***Монотонность.*** Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей (убывающей)* на промежутке X, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции. Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными.* К монотонным функциям, наряду с возрастающими и убывающими, относятся неубывающие и невозрастающие функции.

7. ***Ограниченность***. Функцию $f(x)$, определенную на множестве D, называют ограниченной на этом множестве, если $\exists M>0$ такое, что $\forall x\in D \left|f(x)\right|\le M$.

1.6. Обратная функция

Пусть функция $y = f(x)$ задана на множестве D и пусть E - множество значений этой функции. Если каждому значению $y \in Y$ соответствует единственное значение $x \in X$, то определена функция $x = g(y)$ с областью определения E и множеством значений D. Такая функция $x = g(y)$ называется ***обратной*** к функции $f(x)$ и записывается в следующем виде: $x = g(y) = f^{-1}(y)$. Про функции $y = f(x)$ и $x = g(y)$ говорят, что они являются взаимно обратными.

Чтобы найти функцию $x = g(y)$, обратную к функции $y = f(x)$, достаточно решить уравнение $y = f(x)$ относительно x (если это возможно).

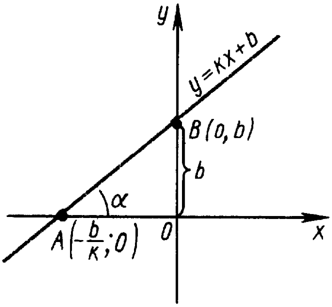
Например, для функции $y = \ln x$ обратной функцией является функция $x = e^y$.

1.7. Основные элементарные функции и их графики

Линейная функция

Линейной функцией называется функция вида $y = kx + b$, где k и b — числа. Функция определена при всех значения x. Графиком линейной функции является прямая. Этот график удобно строить по двум точкам: $A(0,b)$ и $B(-\frac{b}{k};0)$ (при $k \neq 0$) (см. рис.1.1, слева). Эти точки являются точками пересечения прямой с осями координат.

В случае $b=0$ прямая проходит через начало координат и для построения графика следует взять ещё одну точку, например, точку $C(1;k)$ (см. рис.1.2, справа). В случае $k=0$ прямая параллельна оси абсцисс.



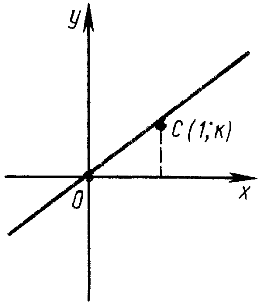


Рис. 1.1.

Значение коэффициента b определяет отрезок, отсекаемый графиком линейной функции на оси ординат, а коэффициент k является тангенсом угла α, образованного осью абсцисс и прямой (угол отсчитывается от положительного направления оси абсцисс против часовой стрелки).

Степенная функция

Степенной функцией называется функция вида $y=x^n$. рассмотрим вид графика степенной функции в зависимости от числа n.

(1) $n=k, k\geq 2, k\in\mathbb{N}$. Функция определена при $x\in(-\infty;+\infty)$. график функции проходит через точку $(1;1)$ и касается оси абсцисс в начале координат.

(2) $n=-k, k\in\mathbb{N}$.Функция определена при $x\in(-\infty;0)\cap(0;+\infty)$. График функции проходит через то $(1;1)$.

(3) $n=\dfrac{m}{k}$, где m и k - взаимно простые натуральные числа. Функция имеет нуль в начале координат, график функции проходит через точку $(1;1)$. При четном k функция определена при $x\in[0;+\infty)$, а при нечетном k - при $x\in(-\infty;+\infty)$.

(4) $n=\dfrac{m}{k}<0$, где m и k - взаимно простые целые числа, $k\neq-1$. При четном k функция определена при $x\in(0;+\infty)$, а при нечетном k - при $x\in(-\infty;0)\cap(0;+\infty)$. График функции проходит через точку $(1;1)$.

Примеры графиков степенных функций, соответствующих различным показателям степени, представлены на рис. 1.2. – 1.3.

Показательная функция

Показательной функцией называется функция вида $y=a^x$ $(a>0, a\neq1)$. Функция определена при всех значениях x, имеет положительные значения. График функции $y=a^x$ в зависимости от a представлен на рис.1.4,слева.

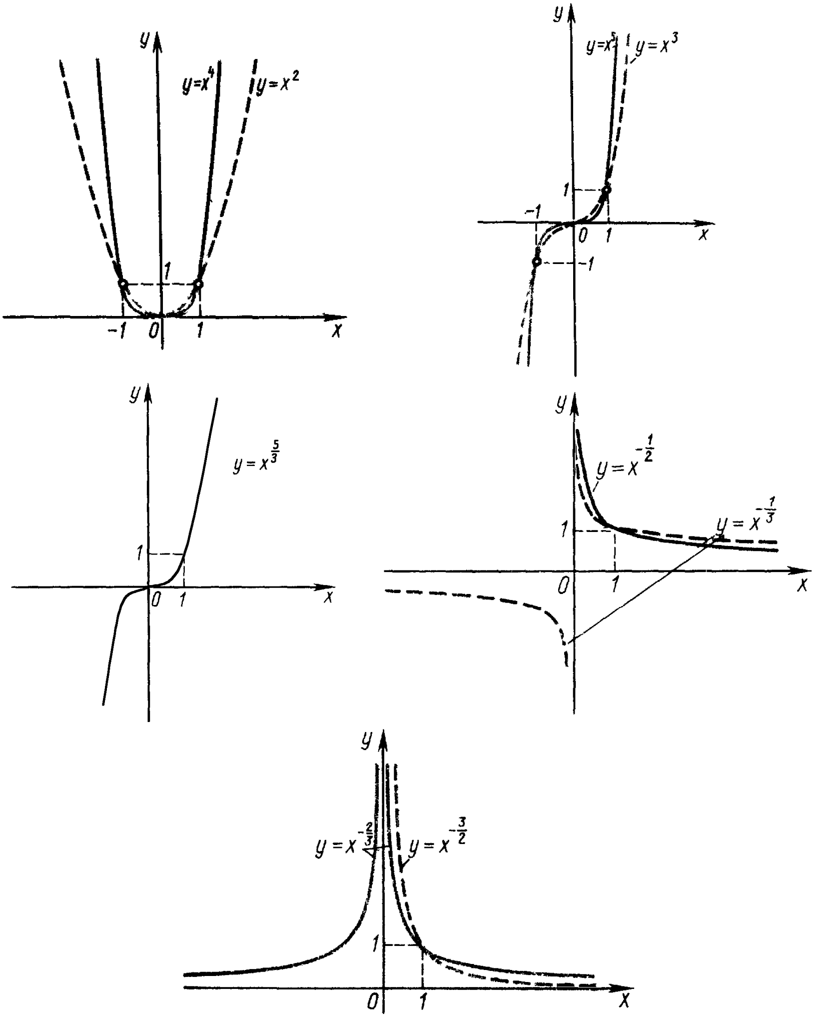

$y = x^4$
$y = x^2$
$y = x^5$
$y = x^3$
$y = x^{\frac{5}{3}}$
$y = x^{-\frac{1}{2}}$
$y = x^{-\frac{1}{3}}$
$y = x^{-\frac{2}{3}}$
$y = x^{-\frac{3}{2}}$

Рис. 1.2.

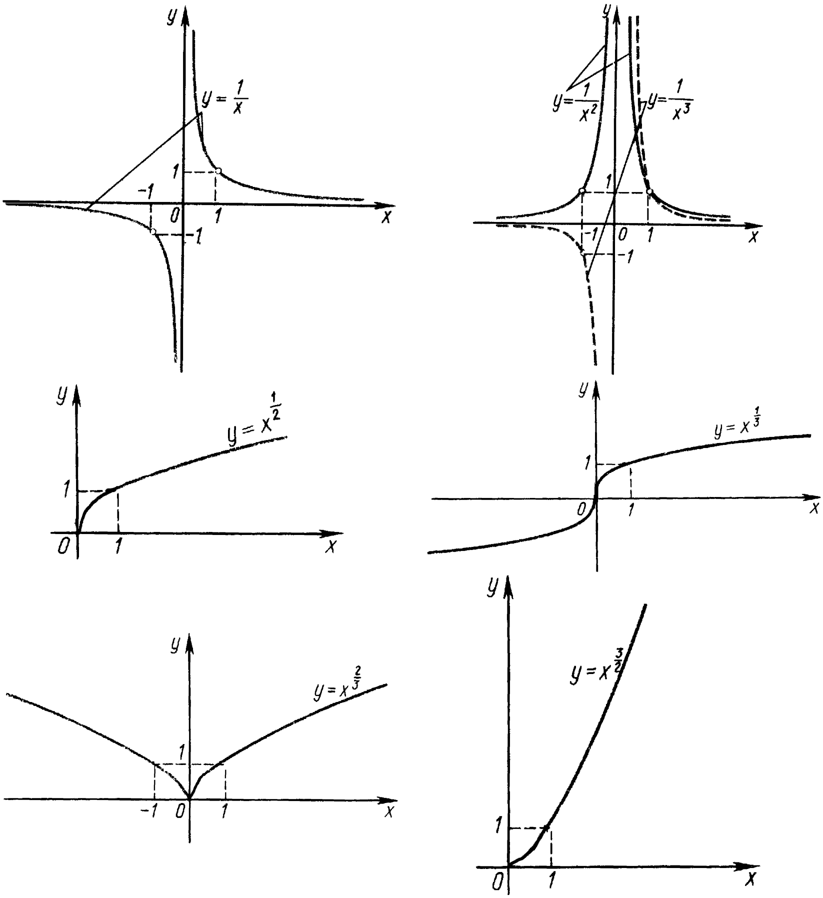


Рис 1.3.

Логарифмическая функция

Логарифмической функцией называется функция вида $y = \log_a x \ (a > 0, a \neq 1)$. Функция определена при $x \in (0; +\infty)$.

График функции в зависимости от a представлен на рис.1.4, справа.

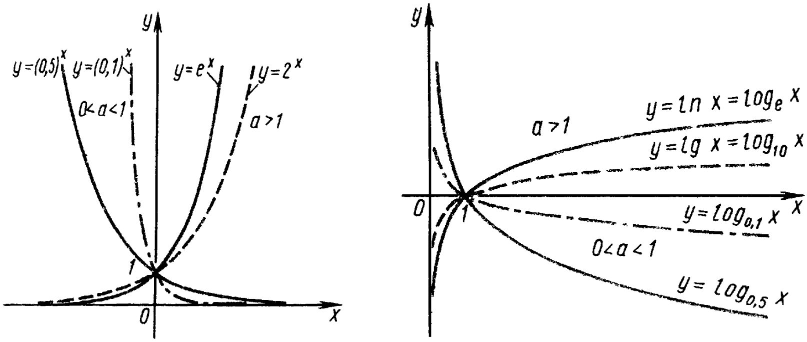


Рис. 1.4.

Тригонометрические функции

Тригонометрическими функциями называются функции $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=tg\,x$, $y=ctg\,x$.

(1) Функция $y=\sin x$ (синус) определена для всех значений x, является ограниченной ($|\sin x|\le 1$) и периодической, с периодом 2π. График функции служит синусоида (рис. 1.5.).

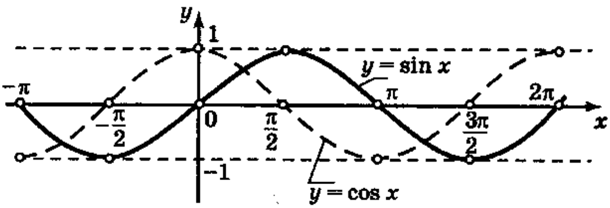


Рис. 1.5.

(2) Функция $y = \cos x$ (косинус) определена для всех значений x, является ограниченной ($|\cos x| \le 1$) и периодической, с периодом 2π. График функции служит косинусоида, представляющая собой синусоиду, сдвинутую влево на $\pi/2$ (рис. 1.5.).

(3) Функция $y = tg\, x$ (тангенс) определена при $x \ne \frac{2k+1}{2}\pi, k \in Z$. Является периодической функцией с периодом π. График функции служит тангенсоида (рис. 1.6.).

(4) Функция $y = ctg\, x$ (котангенс) определена при $x \ne k\pi, k \in Z$. Является периодической функцией с периодом π. График функции служит котангенсоида. (рис. 1.6.).

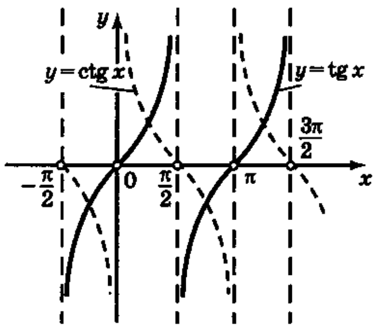


Рис. 1.6.

Обратные тригонометрические функции

Обратными тригонометрическими функциями называются функции $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = arctgx, y = arcctgx.$

(1) Функция $y = \arcsin x$ (арксинус) определена при $x \in [-1;1]$, график функции изображен на рис. 1.7., слева.

(2) Функция $y = arc\cos x$ (арккосинус) определена при $x \in [-1;1]$, график функции изображен на рис. 1.7., справа.

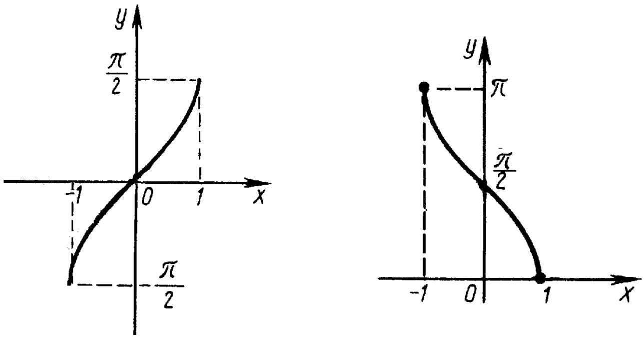


Рис. 1.7.

(3) Функция $y = arctg\, x$ (арктангенс) определена при всех значениях x. График функции изображен на рис. 1.8., слева.

(4) Функция $y = arcctg\, x$ (арккотангенс) определена при всех значениях x. График функции изображен на рис. 1.8., слева.

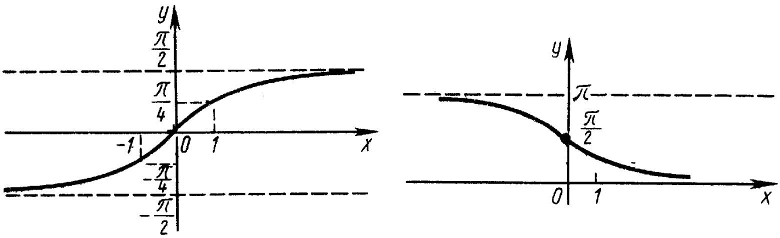


Рис. 1.8.

Пример 1 Найти область определения функции $y = \dfrac{x^2+1}{2x-1}$.

Решение При каждом значении x из интервала $(-\infty;+\infty)$ числитель и знаменатель являются вещественными числами. Их отношение есть также вещественное число при всех значениях, кроме $x=\frac{1}{2}$, при котором знаменатель обращается в нуль. значит областью определения функции является множество всех значений x, кроме $x=\frac{1}{2}$. Записывают это так:

$$D(y)=\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right).$$

Пример 2 Найти область определения функции $y=\sqrt{2x-3}$.

Решение Данная функция определена для таких значений x, при которых подкоренное выражение неотрицательно. Значит, функция определена при $2x-3\geq 0$, т.е. при $x\geq\frac{3}{2}$.

Таким образом, $D(y)=\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Пример 3 Найти область определения $y=\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{x^2-x+1}}$.

Решение Так как уравнение $x^2-x+1=0$ не имеет действительных корней, то знаменатель дроби определен при всех значениях x и не обращается в нуль.

Числитель $\operatorname{tg}x$ не определен при $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$.

Следовательно, область определения функции

$$D(y)=\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right),\text{ где } n\in\mathbb{Z}.$$

Пример 4 Найти область определения функции

$$y=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}.$$

Решение Область определения функции определяется следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} x-2\ge 0 \\ 4-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x\le 4 \end{cases}$$

Таким образом, область определения функции $D(y)=[2;4]$.

Пример 5 Найти область определения $y=\lg\left(x^2-9\right)$.

Решение Выражение $\lg\left(x^2-9\right)$ имеет смысл при $x^2-9>0$. Решая это неравенство, получим, что $x\in(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$. Таким образом, $D(y)=(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$.

Пример 6 Найти область определения функции

$$y=\arcsin\frac{2x}{1+x}.$$

Решение Область определения функции $y=\arcsin x$ определяется неравенством: $|x|\le 1$ (или $-1\le x\le 1$). Следовательно, нахождение области определения сводится к решению неравенства $\left|\frac{2x}{1+x}\right|\le 1$. Решая это неравенство, найдем, что область определения функции $D(y)=\left[-\frac{1}{3};1\right]$.

Пример 7 Найти область определения функции

$$y=\lg\left(\sin\left(\lg x\right)\right).$$

Решение Так как область определения функции $y=\lg x$ определяется неравенством $x>0$, то область определения функции $y=\lg\left(\sin\left(\lg x\right)\right)$ определяется системой неравенств:

$$\begin{cases} \sin(\lg x) > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi n < \lg x < \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10^{2\pi n} < x < 10^{\pi + 2\pi n}, n \in \mathbb{Z} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 10^{2\pi n} < x < 10^{\pi+2\pi n}, n \in \mathbb{Z}$$

Таким образом, область существования функции $D(y) = \left(10^{2\pi n}; 10^{\pi+2\pi n}\right)$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 8 Дана функция $f(x) = x^3 \cdot 2^x$. Найти:

$$f(1), f(2x), \frac{1}{f(x)}, f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Решение

$f(1) = 1^3 \cdot 2^1 = 2.$

$f(2x) = (2x)^3 \cdot 2^{(2x)} = 2^3 \cdot x^3 \cdot 2^{2x} = 8x^3 \cdot 4^x$

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^3 2^x} = \frac{2^{-x}}{x^3}.$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^3 2^{\frac{1}{x}} = \frac{2^{\frac{1}{x}}}{x^3}$$

Пример 9 Исследовать функцию на четность и нечетность:

а) $f(x) = x^4 - 5|x|$, б) $f(x) = e^x - 2e^{-x}$, в) $f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}$.

Решение а) Вычислим $f(-x)$:

$f(-x) = (-x)^4 - 5|-x| = x^4 - 5|x| = f(x)$.

Следовательно, функция четная.

б) $f(-x) = e^{-x} - 2e^x$. Так как $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, то данная функция общего положения.

в) $f(-x) = \ln\frac{1-(-x)}{1+(-x)} = \ln\frac{1+x}{1-x} = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1} = -\ln\frac{1-x}{1+x} = -f(x)$

Следовательно, функция нечетная.

Пример 10 Найти наименьший период функции:

а) $y=\sin 5x$, б) $y=\cos^2 5x$, в) $y=\sin 2x+2\sin 3x$

Решение а) Пусть T - наименьший период функции. Тогда для всех значений x имеем:

$$f(x+T)=\sin\left(5(x+T)\right)=\sin\left(5x+5T\right)=\sin 5x=f(x)$$

или

$$\sin\left(5x+5T\right)=\sin 5x \Leftrightarrow \sin\left(5x+5T\right)-\sin 5x\equiv 0 \Leftrightarrow$$

$$2\sin\frac{5x+5T-5x}{2}\cos\frac{5x+5T+5x}{2}\equiv 0 \Leftrightarrow$$

$$2\sin\frac{5T}{2}\cos\left(5x+\frac{5T}{2}\right)\equiv 0$$

Так как последнее равенство должно выполняться для любых значений x, то $\sin\frac{5T}{2}=0 \Leftrightarrow \frac{5T}{2}=\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$. $\Leftrightarrow T=\frac{2\pi k}{5}$, где $k\in\mathbb{Z}$. Отсюда получаем, что наименьший период функции $T=\frac{2\pi}{5}$.

б) Так как $\cos^2 5x=\frac{1-\cos 10x}{2}$, то наименьший период функции $y=\cos^2 5x$ совпадает с наименьшим периодом функции $y=\cos 10x$.

Пусть T - наименьший период функции $y=\cos 10x$. Тогда для всех значений x имеем:

$$f(x+T)=\cos\left(10(x+T)\right)=\cos\left(10x+10T\right)=\cos 10x=f(x)$$

или

$$\cos\left(10x+10T\right)=\cos 10x \Leftrightarrow \cos\left(10x+10T\right)-\cos 10x\equiv 0 \Leftrightarrow$$

$$2\sin\frac{10x+10T-10x}{2}\sin\frac{10x+10T+10x}{2}\equiv 0 \Leftrightarrow$$

$$2\sin 5T\cos\left(10x+5T\right)\equiv 0$$

Так как последнее равенство должно выполняться для любых значений x, то $\sin 5T = 0 \Leftrightarrow 5T = \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. $\Leftrightarrow T = \dfrac{\pi k}{5}$, где $k \in \mathbb{Z}$. Отсюда получаем, что наименьший период функции $T = \dfrac{\pi}{5}$.

в) Пусть T - наименьший период функции $y = \cos 10x$. Тогда для всех значений x имеем:

$$f\left(x+T\right) = \sin\left(2\left(x+T\right)\right) + 2\sin\left(3\left(x+T\right)\right) =$$
$$= \sin 2x + 2\sin 3x = f(x)$$

или

$$\sin\left(2x+2T\right) + 2\sin\left(3x+3T\right) - \sin 2x - 2\sin 3x \equiv 0$$

В частности, при $x = 0$ и $x = \pi$, получим соответственно уравнения, которым удовлетворяет период функции:

$$\begin{cases} \sin 2T + 2\cos 3T = 0 \\ \sin 2T - 2\sin 3T = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2T = 0 \\ \sin 3T = 0 \end{cases}$$

Решая последние равенства находим, что период T одновременно должен удовлетворять уравнениям:

$$T = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \text{ и } T = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

При $k = 2, n = 3$ получим значение $T = \pi$. Проверим является ли оно периодом функции:

$$f\left(x+\pi\right) = \sin\left(2x+2\pi\right) + 2\sin\left(3x+3\pi\right) =$$
$$= \sin 2x - 2\sin 3x \neq f(x)$$

Таким образом, $T = \pi$ не является периодом функции. следующее значение T, которое может быть периодом функции получается при $k = 4$ и $n = 6$: $T = 2\pi$. Проверяем является ли данное значение наименьшим периодом функции:

$$f\left(x+2\pi\right) = \sin\left(2x+4\pi\right) + 2\sin\left(3x+6\pi\right) =$$
$$= \sin 2x + 2\sin 3x = f(x)$$

Таким образом, $T = 2\pi$ - наименьший период функции.

Задачи

10. Даны функции $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$ и $g(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$. Найти:

$f(0); f(1); f(2); f(-2); f\left(-\dfrac{1}{2}\right); f(\sqrt{2}); g(0); g(1); g(2); g(4).$

11. Дано: $y=z^2, z=x+1$. Выразить y как функцию x.

Найти области определения следующих функций:

12. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-5x}}$.

13. $f(x)=\dfrac{tgx}{3x^2-2x-1}$, если $x\in[-\pi;\pi]$.

14. $f(x)=\log_{\frac{x+1}{2x}}(3+5x-2x^2)$.

15. $f(x)=2^{\frac{1}{x}}+\arcsin\dfrac{x+2}{3}$.

16. $f(x)=\dfrac{5}{\sqrt[3]{2x-x^2}}-7\cos 2x$.

17. $f(x)=\dfrac{\log_5\left(x^2+4x\right)}{\sqrt{25-x^2}}$.

Исследовать функцию на четность и нечетность:

18. $f(x)=\cos x+x\sin x$.

19. $f(x)=x\cdot 2^{-x}$.

20. $f(x)=3^{-x}-3^{x}$.

21. $f(x)=\left(x-2\right)^{\frac{2}{3}}+\left(x+2\right)^{\frac{2}{3}}$

22. $f(x)=2x\sin^2 x-3x^3$.

23. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

24. $f(x)=x\cdot 4^{-x^2}$.

25. $f(x)=5\log_2\left(x+1\right)$.

Найти наименьший период функции:

26. $y = \sin 4x$.

27. $y = tg\dfrac{x}{2}$.

28. $y = \sin x + \cos 2x$.

29. $y = \sin(3x+1)$.

30. $y = \sin^2 \dfrac{x}{3}$.

31. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

32. $y = \cos^2 3x$.

33. $y = |\sin x|$.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1

Найти область определения функции:

1.1. $y = \log_x \left(x^2 - x - 6\right)$

1.2. $y = \sqrt{2^x (x^2 - x - 12)}$

1.3. $y = \log_x \sqrt{x^2 + x + 1}$

1.4. $y = \arccos(x^2 - \dfrac{1}{4})$

1.5. $y = \arcsin(x^2 + \dfrac{1}{2})$

1.6. $y = \sqrt{\cos 2x}$

1.7. $y = \sqrt{1 + \log_2 \dfrac{x}{2}}$

1.8. $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3} + \dfrac{1}{x-5}$

1.9. $y = \lg \dfrac{x+2}{3-x}$

1.10. $y = \sqrt{5^x (2 + x - x^2)}$

1.11. $y = \sqrt{x - x^3}$

1.12. $y = \arccos(2 + x + x^2)$

1.13. $y = \sqrt{\sin 2x}$

1.14. $y = \sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$

1.15. $y = \log_x (4 - 4x + x^2)$

1.16. $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 8x + 7}}{x-4}$

1.17. $y = \sqrt{\log_x (3x-1)}$

1.18. $y = \arccos\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$

1.19. $y = \sqrt{\dfrac{\pi}{4} - \arccos x^2}$

1.20. $y=\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{2x-3}}$

1.21. $y=\sqrt{tg\,\pi x}$

1.22. $y=\log_2(x^3-x)$

1.23. $y=\frac{1}{\lg(x+1)+\lg(x-1)}$

1.24. $y=\sqrt{arctg\left(\frac{1}{x}\right)}$

1.25. $y=\log_{3+x}(x^2-1)$

1.26. $y=\arcsin\frac{4x}{x^2+3}$

1.27. $y=\frac{\log_{2x}3}{\arccos(2x-1)}$

1.28. $y=\log_x\cos\frac{x}{2}$

1.29. $y=\sqrt{3^x\left(-x^2+x+2\right)}$

1.30. $y=\arccos\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$

1.8. Элементарные преобразования графиков функций

Рассмотренные графики основных элементарных функций следует помнить. Пользуясь ими, можно легко строить большое количество графиков элементарных функций, представляя последние как преобразованные основные элементарные функции.

Пусть график функции $y=f(x)$ известен. приведем в виде таблицы *важнейшие преобразования* этого графика:

Функция	**Преобразование, которое следует провести с графиком функции** $y=f(x)$
$y=f(x)+b$	$b>0$ сдвиг вверх по оси Oy на b единиц
$b\neq 0$	$b<0$ сдвиг вниз по оси Oy на |b| единиц
$y=f\left(x+a\right)$	$a>0$ сдвиг влево по оси Ox на a единиц
$a\neq 0$	$a<0$ сдвиг вправо по оси Ox на |a| единиц

Функция	Преобразование, которое следует провести с графиком функции $y=f(x)$
$y=kf(x)$ $k>0, k\neq 1$	$k>1$ растяжение вдоль оси Oy относительно оси Ox в k раз
	$0<k<1$ сжатие вдоль оси Oy в $1/k$ раз
$y=f(kx)$ $k>0, k\neq 1$	$k>1$ сжатие вдоль оси Ox относительно оси Oy k раз
	$0<k<1$ растяжение в $1/k$ раз вдоль оси Ox
$f(-x)$	симметричное отражение графика относительно оси Oy
$-f(x)$	симметричное отражение графика относительно оси Ox
$\|f(x)\|$	(1) часть графика, расположенная выше оси Ox (включая точки на оси) остается; (2) часть графика, расположенная ниже оси Ox, симметрично отражается наверх.
$f(\|x\|)$	(1) часть графика, расположенная левее оси Oy, отбрасывается; (2) часть графика, расположенная правее оси Oy (включая точки на оси) остается; (3) часть графика, расположенная правее оси Oy (x>0) симметрично отобразить относительно оси Oy в область $x<0$.

Пример 11 Используя элементарные преобразования, построить эскиз графика функции $y=\sin(x)+1$.

Решение Воспользуемся правилом построения графика функции $y=f(x)+b$. Построим график функции $y_1=\sin(x)$ и сдвинем его на 1 единицу вверх по оси Oy (см. рис.1.9.)

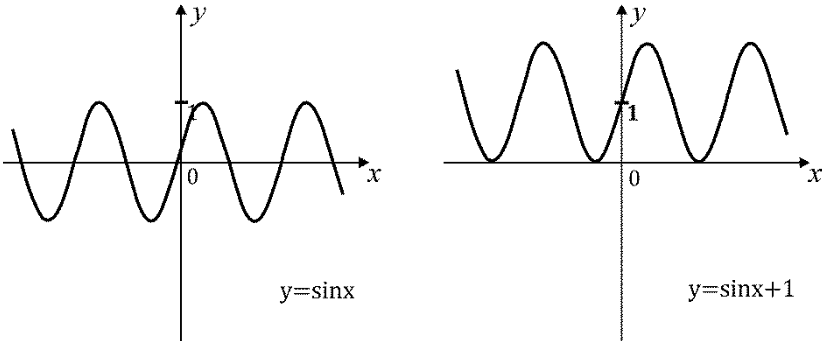


Рис. 1.9.

Пример 12 Используя элементарные преобразования, построить эскиз графика функции $y=(x-2)^2$.

Решение Воспользуемся правилом построения графика функции $y=f(x+a)$. Построим график функции $y_1=x^2$ и сдвинем его на 2 единицы вправо вдоль оси Ox (см. рис.1.10)

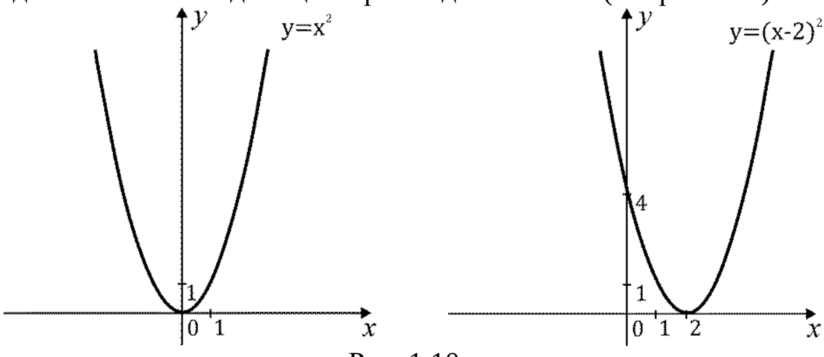


Рис. 1.10.

Пример 13 Используя элементарные преобразования, построить эскиз графика функции $y=3\log_2 x$.

Решение Воспользуемся правилом построения графика функции $y=kf(x)$. Построим график функции $y_1=\log_2(x)$ и сожмем его вдоль оси Oy относительно оси Ox в 3 раза.(см. рис.1.11)

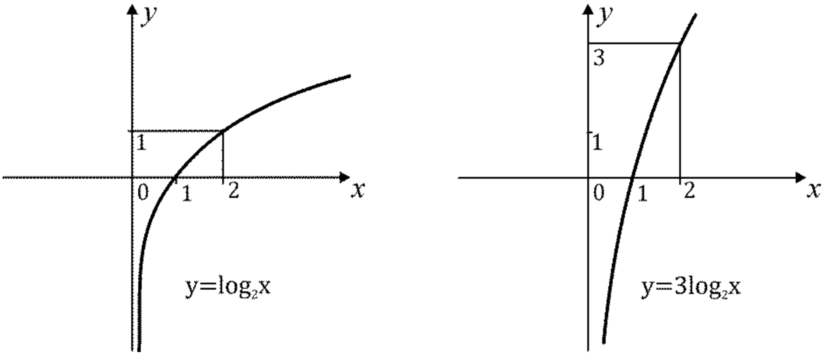


Рис. 1.11.

Пример 14 Используя элементарные преобразования, построить эскиз графика функции $y=\dfrac{1}{2}\log_{1/3}x$.

Решение Воспользуемся правилом построения графика функции $y=kf(x)$. Построим график функции $y_1=\log_{1/3}(x)$ и растянем его вдоль оси Oy относительно оси Ox в 2 раза.(см.рис.1.12)

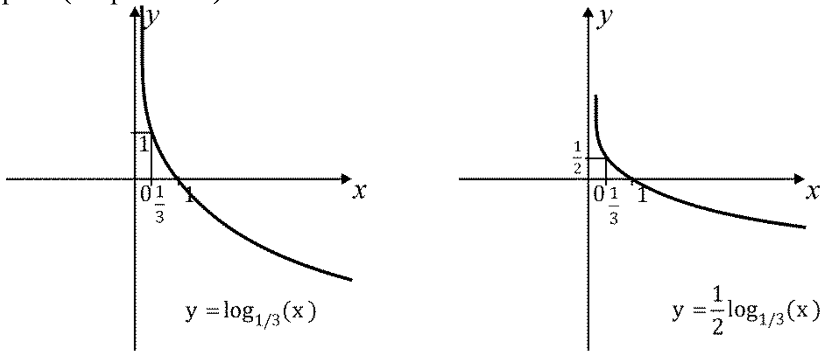


Рис. 1.12.

Пример 15 Используя элементарные преобразования, построить эскиз графика функции $y = \arcsin(2x)$

Решение Воспользуемся правилом построения графика функции $y = f(kx)$. Построим график функции $y_1 = \arcsin(x)$ и сожмем его вдоль оси Ox относительно оси Oy в 2 раза.(см.рис.1.13)

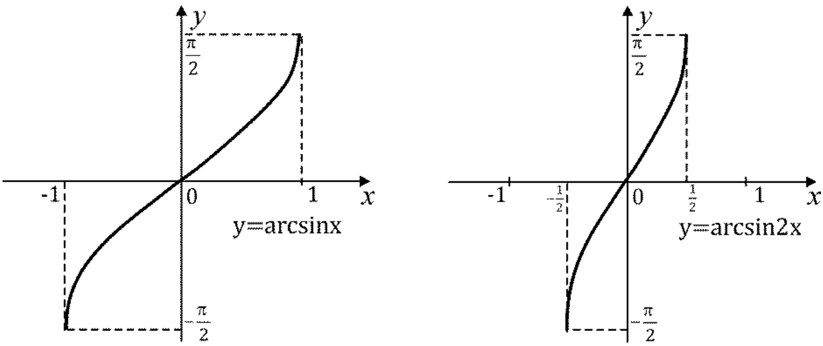


Рис. 1.13.

Пример 16 Используя элементарные преобразования, построить эскиз графика функции $y = \mathrm{arc}tg(0.5x)$

Решение Воспользуемся правилом построения графика функции $y = f(kx)$. Построим график функции $y_1 = \mathrm{arc}tg(x)$ и растянем его вдоль оси Ox относительно оси Oy в 2 раза.(см.рис.1.14)

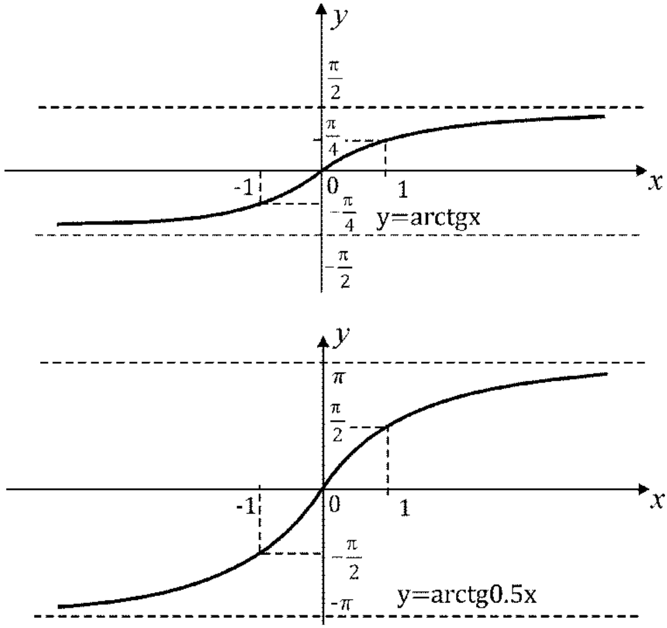


Рис. 1.14.

1.9. Построение графиков функций с помощью элементарных преобразований

Построение графика функции $y = cf\left(ax + b\right) + d$ сводится к ряду преобразований графика функции $y = f(x)$.

Представим функцию y в виде $y = cf\left(a\left(x + \frac{b}{a}\right)\right) + d$. Из такого представления y видно, что для построения графика этой функции достаточно построить график функции $y_1 = cf\left(a\left(x + \frac{b}{a}\right)\right)$.

Для построения графика функции y_1 достаточно построить график функции $y_2 = f\left(a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right)$. В свою очередь для построения графика функции y_2 достаточно построить график функции $y_3 = f(ax)$.

Итак, для построения графика функции $y = cf\left(a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right)+d$ необходимо с графиком функции $y = f(x)$ произвести следующие преобразования:

1. Сжать или растянуть график функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox, если $a > 0$; симметрично отобразить относительно оси Oy и сжать или растянуть вдоль оси Ox, если $a < 0$.
2. Сдвинуть по оси Ox полученный график функции $f(ax)$ на $\left|\frac{b}{a}\right|$ единиц : влево, если $\left|\frac{b}{a}\right| > 0$ и вправо, если $\left|\frac{b}{a}\right| < 0$.
3. Сжать или растянуть полученный график функции $f\left(a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right)$ вдоль оси Oy, если с > 0 ; симметрично отобразить относительно оси Oy и сжать или растянуть вдоль оси Ox, если $c < 0$.
4. Сдвинуть полученный график функции $cf\left(a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right)$ на d единиц вверх, если $d > 0$, и вниз на $|d|$ единиц, если $d < 0$.

Последовательность этих преобразований при построении графика функции $y = cf\left(a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right)+d$ можно представить символически в виде цепочки

$$f(x) \to f(ax) \to f\left(a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right) \equiv$$

$$\equiv f(ax+b) \to cf(ax+b) \to cf(ax+b)+d$$

На практике удобно начинать построение графика функции $y = cf\left(a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right)+d$ с написания цепочки

$$cf(ax+b)+d \leftarrow cf(ax+b) \leftarrow f(ax+b) \equiv$$

$$\equiv f\left(a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right) \leftarrow f(ax) \leftarrow f(x)$$

Пример 17 Используя элементарные преобразования, построить эскиз графика функции $y = \frac{1}{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)+1$.

Решение Напишем цепочку преобразований:

$$y = \frac{1}{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)+1 \leftarrow \frac{1}{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) \leftarrow \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) \equiv$$

$$\equiv \sin\left(3\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right) \leftarrow \sin 3x \leftarrow \sin x$$

Итак, построение графика функции $y = \frac{1}{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)+1$ начинается с построения графика функции $y_1 = \sin(x)$, затем сжатия полученного графика в 3 раза вдоль оси Ox, сдвига графика функции $y_2 = \sin(3x)$ на $\frac{\pi}{12}$ влево вдоль оси Ox, растяжения графика функции $y_3 = \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$ в 2 раза вдоль оси Oy и сдвигом его на 1 единицу вверх по оси Oy (см. рис.1.15).

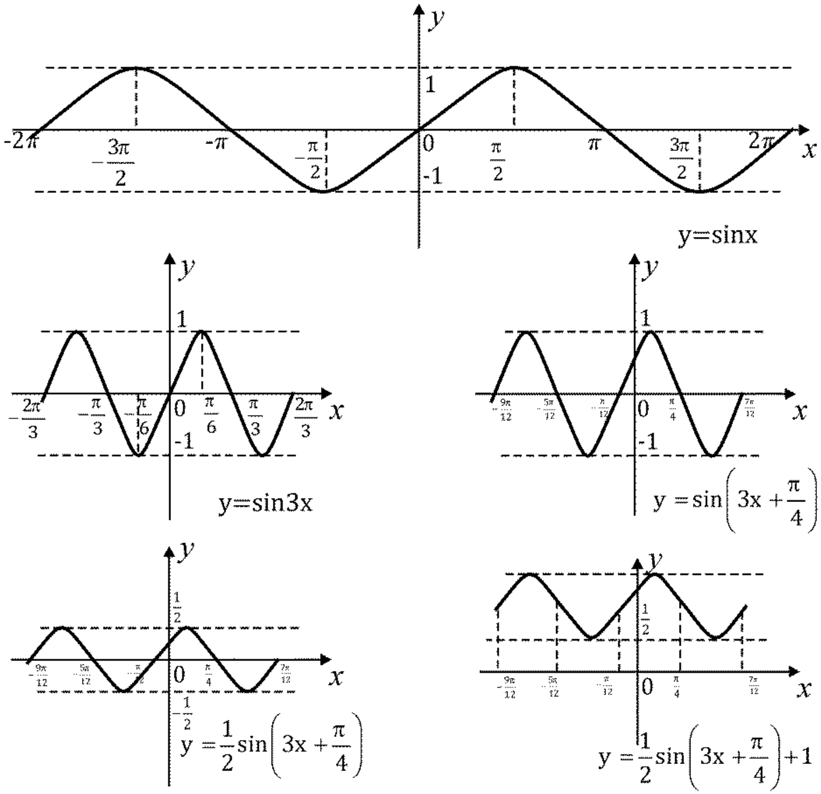


Рис. 1.15.

Пример 18 Используя элементарные преобразования, построить эскиз графика функции $y=\left|\log_3(2x+3)\right|$.

Решение Напишем цепочку преобразований:

$$y=\left|\log_3(2x+3)\right| \leftarrow \log_3(2x+3) \equiv \log_3\left(2\left(x+\frac{3}{2}\right)\right) \leftarrow \log_3(2x) \leftarrow \log_3(x)$$

Итак, построение графика функции $y=\left|\log_3(2x+3)\right|$ начинается с построения графика функции $y_1=\log_3(x)$, затем сжатия полученного графика в 2 раза вдоль оси Ox, сдвига графика функции $y_2 = \log_3(2x)$ на 3/2 влево вдоль оси Ox, и симметричного отображения части графика, расположенной ниже оси Ox наверх (см. рис. 1.16).

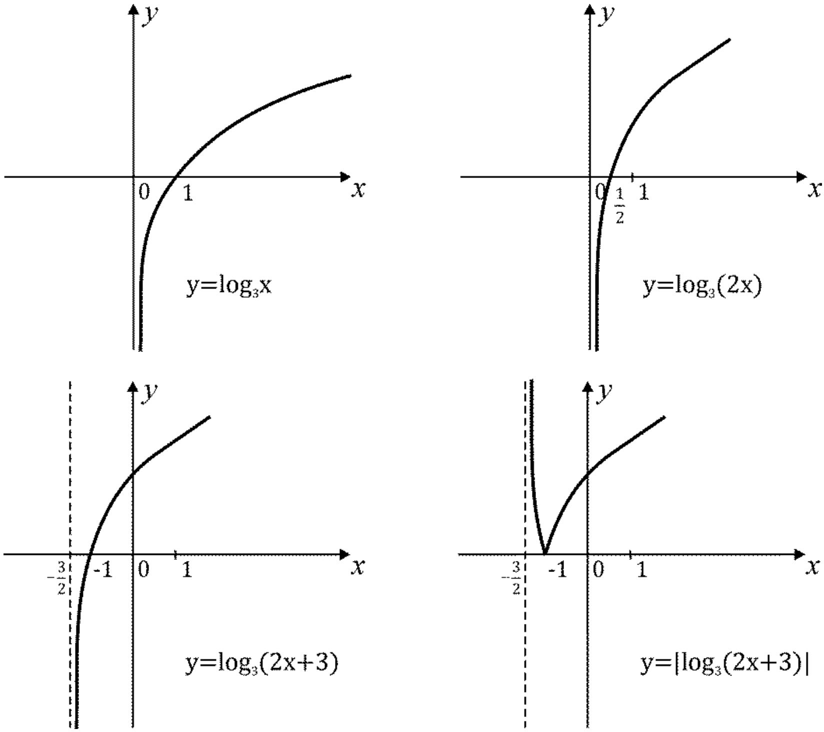


Рис. 1.16.

1.10. График дробно-линейной функции

Дробно-линейной называется функция вида

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, c \neq 0$$

Если числитель и знаменатель дробно-линейной функции имеют общий множитель $x-\alpha$, то функция всюду, кроме точки $x=-d/c$, есть постоянная a/c и график ее имеет вид, изображенный на рис.1.17.

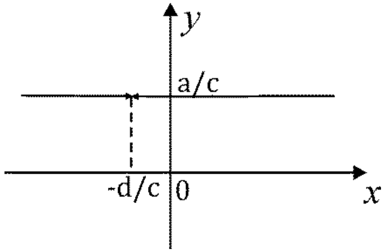


Рис. 1.17.

Если же рассматриваемая дробь несократима (т.е. $bc \neq ad$), то имеют место следующие преобразования

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}=\frac{a}{c}+\frac{k}{x+\frac{d}{c}}$$

Итак, график дробно-линейной функции – гипербола $y=k/x$, сдвинутая по оси Ox на $|d/c|$ единиц вправо или влево в зависимости от знака d/c и по оси Oy на $|a/c|$ единиц вверх или вниз в зависимости от знака a/c. Таким образом, чтобы построить эскиз графика дробно-линейной функции, достаточно знать ее асимптоты и расположение относительно них одной из ветви гиперболы.

Асимптотами являются прямые $x=-\frac{d}{c}$ и $y=\frac{a}{c}$, а положение одной из ветви определяется точкой пересечения гиперболы с осью абсцисс или осью ординат.

Пример 19 Построить эскиз графика функции $y=\frac{3x+1}{5x+2}$.

Решение Асимптотами являются прямые $x=-\frac{2}{5}$, $y=\frac{3}{5}$. Точкой пересечения гиперболы с осью ординат есть точка $A(0,\frac{1}{2})$. Эскиз графика функции изображен на рис.1.18.

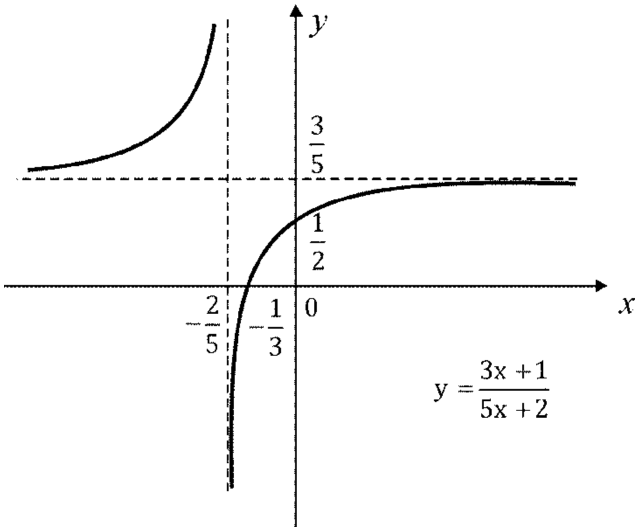


Рис. 1.18.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 2

Используя элементарные преобразования, построить эскизы графиков функций:

2.1. $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 2.2. $y=\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

2.3. $y=\frac{1}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$

2.4. $y=2\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$

2.5. $y=tg\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

2.6. $y=tg\left(\frac{2\pi}{3}-2x\right)$

2.7. $y=3\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$

2.8. $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

2.9. $y=-\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

2.10. $y=\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$

2.11. $y=2\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$

2.12. $y=4\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

2.13. $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

2.14. $y=4\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)$

2.15. $y=cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$

2.16. $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

2.17. $y=ctg\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

2.18. $y=-2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

2.19. $y=2\cos\left(-\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

2.20. $y=1+ctg\frac{x}{2}$

2.21. $y=1-\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$

2.22. $y=\frac{1}{2}-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

2.23. $y=\frac{1}{2}ctg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

2.24. $y=2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

2.25. $y=2\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$

2.26. $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

2.27. $y=-tg\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

2.28. $y=-\sqrt{3}ctg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$

2.29. $y=2\cos\left(-\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

2.30. $y=-\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

Задание 3

Используя элементарные преобразования, построить эскизы графиков функций:

3.1. $y=\dfrac{3x+7}{|x+1|}$

3.2. $y=\left|\dfrac{2x+1}{x-1}\right|$

3.3. $y=\left|\dfrac{2-3x}{2-x}\right|$

3.4. $y=\dfrac{|x|-1}{x-3}$

3.5. $y=\left|\dfrac{2-3x}{2+x}\right|$

3.6. $y=\dfrac{4|x|-1}{x-1}$

3.7. $y=\dfrac{2|x|+3}{x+3}$

3.8. $y=\dfrac{|x|-2}{x+2}$

3.9. $y=\left|\dfrac{3x+7}{x+1}\right|$

3.10. $y=\dfrac{4x+6}{|x+3|}$

3.11. $y=\dfrac{2x+1}{|x-1|}$

3.12. $y=\left|\dfrac{6-4x}{x-1}\right|$

3.13. $y=\dfrac{3|x|-11}{x-2}$

3.14. $y=\dfrac{3|x|+7}{x+1}$

3.15. $y=\left|\dfrac{8-x}{x-2}\right|$

3.16. $y=\left|\dfrac{5-3x}{x-1}\right|$

3.17. $y=\dfrac{|2-3x|}{2-x}$

3.18. $y=\left|\dfrac{2x+3}{x+3}\right|$

3.19. $y=\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|$

3.20. $y=\left|\dfrac{3x-11}{x-2}\right|$

3.21. $y=\dfrac{|4x-1|}{x-1}$

3.22. $y=\dfrac{5-3x}{|x-1|}$

3.23. $y=\left|\dfrac{7x+5}{5x+6}\right|$

3.24. $y=\left|\dfrac{4-x}{5+2x}\right|$

3.25. $y=\left|\dfrac{x}{3x+5}\right|$

3.26. $y=\dfrac{7x+5}{|5x+6|}$

3.27. $y=\dfrac{|x|}{3|x|+5}$

3.28. $y=\dfrac{4-x}{|5+2x|}$

3.29. $y=\dfrac{8-|x|}{|x|-2}$

3.30. $y=\dfrac{7|x|+5}{5x+6}$

Задание 4

Используя элементарные преобразования, построить эскизы графиков функций:

4.1. $y=\log_3\dfrac{9}{x-1}$

4.2. $y=\ln(2x+1)$

4.3. $y=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{3}{2-x}$

4.4. $y=\log_2\dfrac{4}{(x-2)^3}$

4.5. $y=\log_2\dfrac{8}{x+2}$

4.6. $y=\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{3-3x}$

4.7. $y=\log_3\dfrac{3}{x+1}$

4.8. $y=2\lg(1-x)$

4.9. $y=\lg\dfrac{2-x}{10}$

4.10. $y=\log_2\sqrt{1-2x}$

4.11. $y=2+\log_2(x-1)$

4.12. $y=2\log_9(3x-6)$

4.13. $y=\ln(2x-1)$

4.14. $y=\dfrac{1}{2}\log_4(8-4x)$

4.15. $y=\log_3(6-3x)$

4.16. $y=\log_8(4-4x)^3$

4.17. $y=2-3\lg(x+1)$

4.18. $y=1-\log_3(1-2x)$

4.19. $y=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{2}{1-x}$

4.20. $y=\log_3(5-x)+1$

4.21. $y=log_3\dfrac{x-3}{9}$

4.22. $y=\log_3\dfrac{3x-1}{9}$

4.23. $y=\log_{\frac{1}{2}}(1-x)+2$

4.24. $y=\log_2(2x+4)^3$

4.25. $y=\log_{\frac{1}{3}}(6+3x)$

4.26. $y=\log_3\dfrac{2-x}{9}$

4.27. $y=1+\ln(2x-3)$

4.28. $y=log_2\dfrac{2x-1}{4}$

4.29. $y=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{2}{1-x}$

4.30. $y=\log_2\sqrt{1-2x}$

Задание 5

Используя элементарные преобразования, построить эскизы графиков функций:

5.1. $y=\dfrac{\pi}{4}+2\arcsin\left(1+\dfrac{x}{4}\right)$

5.2. $y=\pi-3\arccos\dfrac{x+2}{2}$

5.3. $y=1+arctg(2x+1)$

5.4. $y=\dfrac{\pi}{2}+arcctg\left(\dfrac{2x}{5}+1\right)$

5.5. $y=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}\arcsin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$

5.6. $y=\arccos\left(2+\dfrac{3x}{4}\right)-\dfrac{\pi}{4}$

5.7. $y=\dfrac{1}{2}arctg\left(\dfrac{1}{4}+x\right)$

5.8. $y=\pi+arctg(x+1)$

5.9. $y=\dfrac{\pi}{2}-2\arcsin\left(1+\dfrac{x}{2}\right)$

5.10. $y=2\arcsin\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$

5.11. $y=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}\arcsin\left(1+\dfrac{x}{2}\right)$

5.12. $y=2\arcsin\left(1+\dfrac{x}{3}\right)-\dfrac{\pi}{2}$

5.13. $y=\dfrac{1}{2}arcctg(1+2x)-\dfrac{\pi}{8}$

5.14. $y=\dfrac{\pi}{2}-2\arccos\dfrac{x}{\sqrt{2}}$

5.15. $y = 2\arcsin\left(1+\frac{x}{2}\right)+\frac{\pi}{2}$

5.16. $y = 2arcctg(1+2x)-\frac{\pi}{2}$

5.17. $y = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arcsin\left(1+\frac{x}{3}\right)$

5.18. $y = \frac{\pi}{2}-2\arcsin\left(\frac{x}{2}-1\right)$

5.19. $y = \frac{\pi}{2}-2arctg\,(1+2x)$

5.20. $y = \frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\arcsin\left(1+\frac{x}{2}\right)$

5.21. $y = \frac{3\pi}{2}-2arcctg\,(2x-1)$

5.22. $y = 2arctg\left(1+\frac{x}{2}\right)-\frac{2\pi}{3}$

5.23. $y = \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{x}{2}-1\right)-\frac{\pi}{6}$

5.24. $y = \frac{\pi}{2}-2arctg\left(1+\frac{2x}{3}\right)$

5.25. $y = \frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}arcctg\,(1+2x)$

5.26. $y = -\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}arctg\,(1+2x)$

5.27. $y = \frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\arccos\left(1+\frac{x}{2}\right)$

5.28. $y = 2\arccos\left(1+\frac{x}{3}\right)-\frac{\pi}{2}$

5.29. $y = \frac{\pi}{2}+2arctg\,(1+4x)$

5.30. $y = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arcsin\left(1+\frac{x}{6}\right)$

Глава 2. Числовые последовательности

2.1. Понятие числовой последовательности

Под числовой последовательностью $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ понимается функция $a_n = f(n)$, заданная на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел.

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называют *членами* или *элементами* последовательности, a_n называют *общим членом* последовательности.

Последовательность обозначается так: $\{a_n\}$ или $a_n, n \in \mathbb{N}$.

Графиком последовательности является множество точек плоскости.

Пример 1 Даны последовательности:

(1) $a_n = \dfrac{1}{n}$ (2) $a_n = (-1)^n$ (3) $a_n = n - 1$

Изобразить первые пять членов на координатной плоскости.

Решение Придавая n значения 1,2,3,4,5, получим:

(1) $a_1 = \dfrac{1}{1} = 1, a_2 = \dfrac{1}{2}, a_3 = \dfrac{1}{3}, a_4 = \dfrac{1}{4}, a_5 = \dfrac{1}{5}$

(2) $a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -1, a_4 = 1, a_5 = -1$

(3) $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 4$

Графики этих последовательностей изображены на рис.2.1.

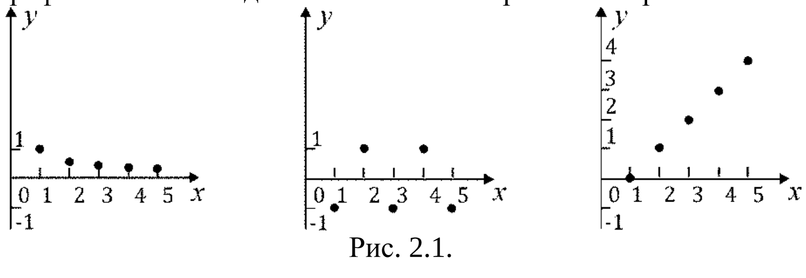


Рис. 2.1.

Если для последовательности $\{a_n\}$ справедливо неравенство $a_n \le a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то ее называют ***неубывающей*** последовательностью.

Если для последовательности $\{a_n\}$ справедливо неравенство $a_n < a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то ее называют ***возрастающей*** последовательностью.

Если для последовательности $\{a_n\}$ справедливо неравенство $a_n \ge a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то ее называют ***невозрастающей*** последовательностью.

Если для последовательности $\{a_n\}$ справедливо неравенство $a_n > a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то ее называют убывающей последовательностью.

Эти названия объединяют общим термином ***монотонная последовательность***.

Например, последовательность (3) из примера 1 является возрастающей.

Последовательность $\{a_n\}$ называется ***ограниченной сверху*** , если можно указать число M , такое, что $a_n \le M$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Последовательность $\{a_n\}$ называется ***ограниченной снизу*** , если можно указать число m , такое, что $m \le a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Последовательность $\{a_n\}$ называется ***ограниченной***, если она ограничена и сверху, и снизу, т.е. если существуют числа m и M , такие, что $m \le a_n \le M$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Геометрически это означает, что все точки, изображающие члены последовательности $\{a_n\}$, лежат на отрезке $[m; M]$.
Например, последовательность (2) из примера 1 является ограниченной.

2.2. Предел последовательности

Введем понятие предела последовательности.

Число a называется ***пределом числовой последовательности*** $\{a_n\}$, если для любого, сколь угодно малого, положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется такое число N (зависящее от $\varepsilon, N = N(\varepsilon)$), что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ верно неравенство

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Если данное условие выполняется, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ или $a_n \to a$ при $n \to \infty$.

С помощью логических символов определение предела последовательности выражается следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \ \forall n > N \ \ |a_n - a| < \varepsilon$$

Числовая последовательность имеет ***бесконечный предел***, если для любого, сколь угодно большого, положительного числа $\varepsilon > 0$, существует такое число N (зависящее от $\varepsilon, N = N(\varepsilon)$), что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ верно неравенство $|a_n| > \varepsilon$.

Если данное условие выполняется, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ или $a_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Последовательность, имеющая предел называется ***сходящейся***, иначе – ***расходящейся***.

Пример 2 Используя определение предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$. Найти номер члена последовательности, начиная с которого $\left|\dfrac{n+2}{2n+1} - \dfrac{1}{2}\right| < 0.001$

Решение Покажем, что для произвольного сколь угодно малого действительного числа $\varepsilon > 0$ можно указать порядковый номер N элемента последовательности $a_n = \dfrac{n+2}{2n+1}$, начиная с которого выполняется условие

$$\left|\frac{n+2}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

Имеем $\left|\dfrac{n+2-(2n+1)}{2(2n+1)}\right| = \left|\dfrac{3}{4n+2}\right|$. Так как $n > 0$, то $\dfrac{3}{4n+2} > 0$.

Следовательно, $\left|\dfrac{3}{4n+2}\right| = \dfrac{3}{4n+2}$.Получаем, что

$$\frac{3}{4n+2} < \varepsilon \Leftrightarrow 3 < \varepsilon(4n+2) \Leftrightarrow 4n+2 > \frac{3}{\varepsilon} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{4}\left(\frac{3}{\varepsilon} - 2\right) \Leftrightarrow n > \frac{3-2\varepsilon}{4\varepsilon}$$

Таким образом, начиная с номера $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{3-2\varepsilon}{4\varepsilon}\right] + 1$ (напомним, что запись $[x]$ обозначает целую часть числа. Например, $[5,46] = 5$.) выполняется условие $\left|\dfrac{n+2}{2n+1} - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$. То есть по определению предела числовой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$.

Найдем N , начиная с которого $\left|\dfrac{n+2}{2n+1} - \dfrac{1}{2}\right| < 0.001$:

$N(0.001)=\left[\dfrac{3-2\cdot 0.001}{4\cdot 0.001}\right]+1=[749.5]+1=750$. То есть начиная с a_{750}, все члены последовательности отличаются от $\dfrac{1}{2}$ менее, чем на 0.001.

Последовательность $\{a_n\}$ называется ***бесконечно малой***, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Последовательность $\{a_n\}$ называется ***бесконечно большой***, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Теорема 1. Пусть существуют конечные пределы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

1) Если $\exists$ порядковый номер N, такой что $\forall n > N$ выполняется условие $x_n < y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

2) Если $\exists$ порядковый номер N, такой что $\forall n > N$ выполняется условие $x_n = C, C = const$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n \pm y_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n \cdot y_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, где $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \ne 0,\ y_n \ne 0$.

Теорема 2. Всякая сходящаяся числовая последовательность ограничена.

Теорема 3. Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Теорема 4. Числовая последовательность $\{a_n\}$ с общим членом $a_n = \dfrac{1}{n^p}$ $(p > 0, p \in \mathbb{R})$ сходится и $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$.

Теорема 5. Если $|q| < 1$ $(q \in \mathbb{R})$, то последовательность с общим членом $a_n = q^n$ сходится и $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Задачи

34. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентным соотношением $a_{n+1} = 5a_n - 4, a_1 = 2$. Найти пятый член этой последовательности.

Написать первые десять членов последовательностей с общими членами:

35. $a_n = \dfrac{n}{n+2}$.

36. $a_n = \dfrac{2n}{3n-2}$.

37. $a_n = n!$.

38. $a_n = -2^{n}$.

39. $a_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$.

40. $a_n = \dfrac{1}{(3n-1)(3n+1)}$.

41. $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$.

42. $a_n = \dfrac{1}{2^n}$.

43. $a_n = \sin\dfrac{\pi n}{2}$.

Написать формулу общего члена последовательности по данным ее первым членам:

44. $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{12}, \dfrac{1}{15}, \ldots$

45. $\dfrac{1}{3\cdot 4}, \dfrac{1}{5\cdot 6}, \dfrac{1}{7\cdot 8}, \dfrac{1}{9\cdot 10}, \ldots$

46. $\dfrac{1}{6}, \dfrac{4}{11}, \dfrac{7}{16}, \dfrac{10}{21}, \dfrac{13}{26}, \ldots$

47. $\dfrac{3}{5}, \dfrac{7}{8}, \dfrac{11}{11}, \dfrac{15}{14}, \dfrac{19}{17}, \ldots$

48. $\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\frac{1}{81},\frac{1}{243},\frac{1}{729},...$ **49.** $0,\frac{1}{3},\frac{2}{4},\frac{3}{5},\frac{4}{6},\frac{5}{7},...;$

Задачи для самостоятельного решения

Задание 6*

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Определить для каждого $\varepsilon > 0$ число $N = N(\varepsilon)$.

Заполнить таблицу:

ε	0.1	0.02	0.003
$N(\varepsilon)$			

6.1. $a_n = \frac{3n-2}{2n-1}, a = \frac{3}{2}$

6.2. $a_n = -\frac{5n}{n+1}, a = -5$

6.3. $a_n = \frac{2n+1}{3n-5}, a = \frac{2}{3}$

6.4. $a_n = \frac{1-2n}{n+3}, a = -2$

6.5. $a_n = \frac{3n}{2-n}, a = -3$

6.6. $a_n = \frac{n}{3n-1}, a = \frac{1}{3}$

6.7. $a_n = \frac{3n}{n-1}, a = 3$

6.8. $a_n = \frac{4+2n}{1-3n}, a = -\frac{2}{3}$

6.9. $a_n = \frac{5n+15}{6-n}, a = -5$

6.10. $a_n = \frac{3-n}{1+2n}, a = -\frac{1}{2}$

6.11. $a_n = \frac{7n+4}{2n+1}, a = \frac{7}{2}$

6.12. $a_n = \frac{7n-1}{n+1}, a = 7$

6.13. $a_n = \frac{9-n}{1+2n}, a = -\frac{1}{2}$

6.14. $a_n = \frac{1-2n}{2+4n}, a = -\frac{1}{2}$

6.15. $a_n = \frac{4n-1}{2n+1}, a = 2$

6.16. $a_n = \frac{2n-5}{3n+1}, a = \frac{2}{3}$

6.17. $a_n = \dfrac{n-1}{1-2n}, a = -\dfrac{1}{2}$

6.18. $a_n = \dfrac{4n+1}{3n+2}, a = \dfrac{4}{3}$

6.19. $a_n = \dfrac{3n-1}{5n+1}, a = \dfrac{3}{5}$

6.20. $a_n = \dfrac{4n-3}{2n+1}, a = 2$

6.21. $a_n = \dfrac{5n+1}{10n-3}, a = \dfrac{1}{2}$

6.22. $a_n = \dfrac{2-2n}{3+4n}, a = -\dfrac{1}{2}$

6.23. $a_n = \dfrac{23-4n}{2-n}, a = 4$

6.24. $a_n = \dfrac{1+3n}{5-n}, a = -3$

6.25. $a_n = \dfrac{2n+3}{n+5}, a = 2$

6.26. $a_n = \dfrac{3n+2}{4n-1}, a = \dfrac{3}{4}$

6.27. $a_n = \dfrac{2-3n}{4+5n}, a = -\dfrac{3}{5}$

6.28. $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}, a = 1$

6.29. $a_n = \dfrac{4n-3}{2n+1}, a = 2$

6.30. $a_n = \dfrac{2n-1}{2-3n}, a = -\dfrac{2}{3}$

Глава 3. Предел функции

3.1. Понятие предела функции

Пусть функция $f(x)$ определена во всех точках интервала (a, b), за исключением, быть может, точки $x_0 \in (a, b)$. Число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ ***при*** $x \to x_0$**,** если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для любого x, удовлетворяющего неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, при этом пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Можно дать другое, равносильное приведенному, определение: число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ ***в точке*** x_0**,** если для любой последовательности чисел $\{x_n\} \subset (a; b)$, сходящейся к x_0, $x_n \neq x_0$, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$

Если $f(x)$ определена в интервале $(a, +\infty)$, то ***число*** A ***называется пределом*** $f(x)$ ***при*** $x \to +\infty$**,** если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $b > a$, такое, что неравенство $x > b$ влечет за собой неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

При этом пишут $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ или $f(+\infty) = A$.

Аналогично определяется $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

Число A ***называют пределом функции*** $f(x)$ ***в точке*** x_0 ***слева (справа)*** и пишут $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$ или $f(x_0 - 0) = A$ ($\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$, или $f(x_0 + 0) = A$), если для любого $\varepsilon > 0$

найдется $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ (для всех $x \in (x_0; x_0 + \delta)$) справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Число A является пределом $f(x)$ в точке x_0, если совпадают пределы $f(x)$ в этой точке слева и справа: $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$.

Если функция $f(x)$ определена в интервале $(a; x_0)$ (в интервале $(x_0; b)$) и для любого M существует $\delta > 0$ такое, что для любого $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ (для любого $x \in (x_0; x_0 + \delta)$) справедливо неравенство $f(x) > M$, то говорят, что левый (правый) предел функции $f(x)$ в точке x_0 равен $+\infty$, и при этом пишут $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty$ или $f(x_0 - 0) = +\infty$ ($\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = +\infty$ или $f(x_0 + 0) = +\infty$).

Аналогично, определяются $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = -\infty$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = -\infty$.

Пример 1 Доказать, что $\lim\limits_{x \to 3} (2x - 1) = 5$.

Решение Покажем, что для произвольного сколь угодно малого действительного числа $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для любого x, удовлетворяющего неравенству $0 < |x - 3| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - 5| < \varepsilon$.

Имеем $|f(x) - 5| = |2x - 1 - 5| = 2|x - 3| < \varepsilon$

То есть $|x - 3| < \varepsilon / 2$

Поэтому, если по данному $\varepsilon > 0$ взять $\delta = \varepsilon / 2$, то из неравенства $|x-3| < \delta = \varepsilon / 2$ будет следовать неравенство $|f(x)-5| < \varepsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 5$.

3.2. Свойства предела функции

Сформулируем основные теоремы о пределах.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0, то этот предел единственный.

Теорема 2. Если существуют конечные пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0, то

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(c\cdot f(x)\right) = c \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, где $c = const$

4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$

Теорема 3. Если $\lim\limits_{u\to b} f(u) = c$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$,то предел сложной функции $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = c$

Теорема 4. Если в некоторой окрестности точки x_0 $f(x) \le g(x)$,то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

Теорема 5. Если в некоторой окрестности точки x_0 $v(x) \le f(x) \le g(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$,то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$

Теорема 6. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A > 0, \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$,то

$$\lim_{x\to x_0} \left(f(x)\right)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \left(f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = A^B$$

Замечание Если предельные значения оказываются равными 0 или ∞, то могут возникнуть неопределенности разных видов. При вычислении пределов могут появляться неопределенности вида

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty\ ,0^0,\ (+\infty)^0,\ 1^\infty.$$

Пример 2 Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to -1}(x^3+5x^2+6x+1)$,б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-1}{x^2-4x+3}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x$,

г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} arctgx$, д) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 5^x$, е) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)^{\frac{x^2+1}{x+3}}$.

Решение а) Пользуясь утверждениями о пределе суммы и произведения получаем, что

$$\lim_{x\to -1}(x^3+5x^2+6x+1) = (-1)^3+5\cdot(-1)^2+6\cdot(-1)+1 = -1$$

б) Пользуясь утверждениями о пределе частного получаем, что $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-1}{x^2-4x+3} = \dfrac{-1-1}{1+4+3} = -\dfrac{2}{8} = -\dfrac{1}{4}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1$

г) $\lim\limits_{x\to+\infty} arctgx = +\dfrac{\pi}{2}, \lim\limits_{x\to-\infty} arctgx = -\dfrac{\pi}{2}$

д) $\lim\limits_{x\to+\infty} 5^x = +\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} 5^x = 0$

е) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)^{\frac{x^2+1}{x+3}} = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x+3}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{1/2} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

3.3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $f(x)$ называется ***бесконечно большой*** при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой*** при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Из определения бесконечно большой и бесконечно малых функций следует, что, если $f(x)$ бесконечно большая функций, то $\dfrac{1}{f(x)}$ бесконечно малая и наоборот.

Основные свойства бесконечно малых функций

1) Сумма двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция
2) Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функция есть бесконечно малая функция
3) Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Основные свойства бесконечно больших функций

1) Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) + g(x) \right) = \infty$

2) Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, то

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) + g(x) \right) = +\infty$$

3) Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \neq 0$, то

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = \infty$$

4) Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \neq 0$, $g(x) \neq 0$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

5) Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

Пример 3 Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 + 1)$, б) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+1}{x-2}$, в) $\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{c}tgx$, г) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} \pm 0} tgx$

Решение а) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 + 1) = +\infty + 1 = +\infty$

б) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+1}{x-2} = \left(\dfrac{6}{0} \right) = \infty$

в) $\lim\limits_{x \to 0} ctgx = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{\sin x} = \left(\dfrac{1}{0} \right) = \infty$

г) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} tgx = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} \dfrac{\sin x}{\cos x} = \left(\dfrac{1}{-0} \right) = -\infty$

3.4. Сравнение бесконечно малых

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые при $x \to x_0$.

(1) Если отношение $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ двух бесконечно малых величин само бесконечно мало, то $\alpha(x)$ называется ***величиной более высокого порядка малости***, чем $\beta(x)$. При этом $\beta(x)$ называется ***величиной более низкого порядка малости***, чем $\alpha(x)$.

(2) Если отношение $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ двух бесконечно малых величин стремится к конечному пределу, не равному нулю, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***бесконечно малыми одного порядка малости***. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***эквивалентными***. Обозначение: $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x)$ бесконечно малая при $x\to 0$. Тогда

$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$	$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$
$tg\alpha(x)\sim\alpha(x)$	$arctg\alpha(x)\sim\alpha(x)$
$\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$	$a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\cdot\ln a$
$1-\cos\alpha(x)\sim\left(\alpha(x)\right)^2/2$	$\left(1+\alpha(x)\right)^p-1\sim p\cdot\alpha(x)$

Первый и второй замечательный пределы

Имеют место равенства

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.$$

Правило замены эквивалентных

Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые при $x\to x_0$ и $\alpha(x)\sim\gamma(x),\ \beta(x)\sim\delta(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\gamma(x)}{\delta(x)}$

Пример 4 Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{arctgx^2}$.

Решение Функция $1-\cos x\sim x^2/2$, $arctgx^2\sim x^2$ при $x\to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{arctgx^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2/2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Пример 5 Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1-\sin 2x}-1\right)\left(e^{arctg^2 3x}-1\right)}{(1-\cos 2x)\ln(1+5x)}$.

Решение Так как $\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x=0$, то

$$\sqrt{1-\sin 2x}-1\sim-\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\sin 2x\sim 2x\Rightarrow\sqrt{1-\sin 2x}-1\sim-\frac{1}{2}2x=-x$$

Далее, $e^{arctg^2 3x}-1\sim(arctg3x)^2\sim(3x)^2=9x^2$;

$$1-\cos 2x\sim\frac{(2x)^2}{2}\sim 2x^2;$$

$$\ln(1+5x)\sim 5x.$$

Учитывая это, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1-\sin 2x}-1\right)\left(e^{arctg^2 3x}-1\right)}{\left(1-\cos 2x\right)\ln\left(1+5x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\cdot 9x^2}{2x^2\cdot 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{-9x^3}{10x^3}=-\frac{9}{10}$$

.

3.5. Вычисление пределов в случае неопределенности

Пример 6 Найти пределы:

$$\text{а)}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-3x+2}{3x^2+x+1}\right),\quad \text{б)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}.$$

Решение. а) Имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.Разделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень x, т.е. на x^2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+2}{3x^2+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x+2}{x^2}}{\frac{3x^2+x+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{2-3\cdot 0+2\cdot 0}{3+0+0}=\frac{2}{3};$$

б) Имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.Разделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень x, т.е. на x^4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^4-2}{x^4}}{\frac{\sqrt{x^8+3x+4}}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x^4}}{\sqrt{\frac{x^8+3x+4}{x^8}}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x^4}}{\sqrt{1+\frac{3}{x^7}+\frac{4}{x^8}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-0}{\sqrt{1+0+0}}=\frac{3}{1}=3;$$

Пример 7 Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^3-27}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

Решение а) При подстановке $x=3$ в числитель и знаменатель они обращаются в нуль. Следовательно, мы имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Разложим числитель и знаменатель на множители и перейдем к пределу

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^3-27}=\left|\begin{array}{c} ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2), \\ a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) \end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x^2+3x+9)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x^2+3x+9}=\frac{3-2}{9+9+9}=\frac{1}{27}$$

б) Имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Умножим числитель и знаменатель на произведение $\left(2+\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)$, получим

$$\lim_{x\to 4}\frac{\left(2-\sqrt{x}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}{\left(3-\sqrt{2x+1}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}{\left(2+\sqrt{x}\right)(9-2x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}{\left(2+\sqrt{x}\right)(8-2x)}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(3+\sqrt{2x-1}\right)}{2\left(2+\sqrt{x}\right)(4-x)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{3+\sqrt{2x+1}}{2\left(2+\sqrt{x}\right)}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

в) Имеем неопределенность $[\infty-\infty]$. Умножим числитель и знаменатель на $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0$$

.

Пример 8 Найти:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos 2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4^x-64}{x-3}$

Решение а) Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Воспользуемся соотношениями эквивалентности

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{tgx(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}$$

б) Имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Воспользуемся соотношениями эквивалентности

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(5x)^2/2}{(2x)^2/2}=\lim_{x\to 0}\frac{25x^2}{4x^2}=\frac{25}{4}$$

в) Имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Введем новую переменную $y=x-3$. Тогда $x=y+3$ и

$$\lim_{x\to 3}\frac{4^x-64}{x-3}=\lim_{y\to 0}\frac{4^{y+3}-64}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{64\cdot 4^y-64}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{64\cdot\left(4^y-1\right)}{y}$$

Теперь воспользуемся соотношениями эквивалентности

$$\lim_{y\to 0}\frac{64\cdot\left(4^y-1\right)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{64y\ln 4}{y}=64\ln 4=128\ln 2$$

Пример 9 Найти: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{2x}}$.

Решение а) Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{2x^2+5}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(8x^2+3\right)=\infty$, то имеем неопределенность вида $\left[1^\infty\right]$. Представим в виде

$$\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}=e^{\ln\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}}=e^{(8x^2+3)\ln\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)}=e^{(8x^2+3)\ln\left(1-\frac{2}{2x^2+5}\right)}$$

Вычислим $\lim\limits_{x\to\infty}(8x^2+3)\ln\left(1-\frac{2}{2x^2+5}\right)$.

Имеем неопределенность $\left[0\cdot\infty\right]$. Введем новую переменную $y=\dfrac{1}{x}$, тогда

$$\lim_{y\to 0}\frac{8+3y^2}{y^2}\ln\left(1-\frac{2y^2}{2+5y^2}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{8+3y^2}{y^2}\cdot\frac{-2y^2}{2+5y^2}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{-2(8+3y^2)}{2+5y^2}=-8$$

Отсюда окончательно получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}=e^{-8}.$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{2x}}=\left[1^{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{2x}\ln(1+\sin x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{2x}}=$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2x}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

Задачи

Найти пределы:

50. $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^3+5x^2+6x+1\right)$

51. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4}{x^2+x-3}$

52. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x+2}{x^2-1}$

53. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$

54. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2+x-3}$

55. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+4x-1}{3x^2+x+2}$

56. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5x^2}{1-x^2}+4^{\frac{1}{x}}\right)$.

57. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$.

58. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+2x}-1}$.

59. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x+4}$

60. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-4}{x-2}$

61. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$.

62. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+5x+1}{3+14x^2+2x}$.

63. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-7x}{1-2x^3}$

64. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-3}{x^2+2}$

65. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4}{x^2+5}$

66. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}-x}{3x+5}$

67. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(x^2+1\right)^{50}}{\left(x+1\right)^{100}}$.

68. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+1}{1-x^2}+4^{\frac{1}{x-1}}\right)$

69. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

70. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(3x)}{19x}$.

71. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(5x^2)}{7x^2+x}$.

72. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$

73. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(4x)}{x^2+x^3}$

74. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\cos x-\sin x}$;

75. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 10x}{\sin 9x}$.

76. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-3x+1}\right)$

77. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

78. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)$

79. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2-3x-4}\right)$

80. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$.

81. $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4}{x^2-4}\right)$.

82. $\lim\limits_{x\to\infty}5^{\frac{2x}{x+3}}$.

83. $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{1-2\sin x}{\pi/6-x}$.

84. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$.

85. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$.

86. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

87. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x^2-5}\right)^{x^2}$

88. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{2x^2}$

Определить при $x\to 0$ порядки малости бесконечно малых функций относительно бесконечно малой функции x:

89. $\dfrac{x^5}{x^7+1}\arcsin x$.

90. $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

91. $\left(2^x-1\right)\ln\left(1+\sin 5x\right)$

92. $\left(3^x-1\right)\ln\cos 2x$.

Пользуясь методом замены бесконечно малых эквивалентными, найти пределы:

93. $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{arctg(2x-1)}{4x^2-1}$

.

94. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\sqrt[5]{\cos 2x}-1}$.

95. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x}-1}{\arcsin x}$.

96. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{2^{\sin 3x}-1}$.

97. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{3x}+x\right)^{1/x}$.

98. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin 2x}{\sin 5x-\sin 4x}$

99. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{2x}$.

100. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-9}+4^{-\frac{1}{(x-3)^2}}\right)$

101. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{\dfrac{1}{\cos 2x}-1}$

102. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\sqrt{1-3x^2}-1}$

103. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt[5]{x}-1\right)\left(2^{x-1}-1\right)}{\cos\left(x-1\right)-1}$

104. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3tgx)^{\frac{2}{\sin x}}$.

105. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}$

106. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 3x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

Задачи для самостоятельного решения

Задание 7

Вычислите пределы:

7.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^5-4x^4+2}{3x^5-2x-1}$

7.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-4x^2+6}{3x^3+10x^2+5x}$

7.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-3x^2+2}{5x^4-3x-2}$

7.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+6}{2x^3+10x^2+5x}$

7.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+2}{5x^4+8x-6}$

7.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-3x^2+1}{3x^5-2x+3}$

7.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+6}{3x^3+10x^2+4x}$

7.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x-2}{5x^3+3x^2-1}$

7.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3+(x-1)^3}{x^3+1}$

7.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2}{x^8+3x+4}$

7.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x-4)(x+1)}{x^3+x^2+2}$

7.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^2-(x-2)^2}{x+2}$

7.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+3x}{2x^2-3x+5}$

7.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-3)^2-(x+3)^2}{(x+2)^2}$

7.15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-3x}{2x^2+6x-1}$

7.16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^4}{x^2+2}-x^2\right)$

7.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+x+4}$

7.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-2x+1}{2x^2+x-3}$

7.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-x^2-2x}{x^2+4x+1}$

7.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+1}{2x^4+x+5}$

7.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(5x-4)(2x+2)}{5x^3+2x^2+2}$

7.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+4}{2x^3+5x-1}$

7.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^4-4x^3-2}{5x^3+3x^2-1}$

7.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5-4x^2+1}{3x^5-9x+3}$

7.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^5-4x^2+1}{3x^5-x+3}$

7.26. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^4-3x^5+1}{4x^5-2x+3}$

7.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-2x+1}{2x^4+x^3-3}$

7.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^3-(x-1)^3}{x^3+1}$

7.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-4x^2-2}{3x^3+x^2+4x}$

7.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-4x^2+6}{x^3-4x^4+4x}$

Задание 8

Вычислите пределы:

8.1. $\lim\limits_{x\to2}\frac{2x^2-11x+5}{x^2-7x+10}$

8.2. $\lim\limits_{x\to2}\frac{2x^2-13x-7}{x^2-9x+14}$

8.3. $\lim\limits_{x\to2}\frac{3x^2-40x+128}{x-8}$

8.4. $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2-x-1}{3x^2+x-4}$

8.5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{5x^2-51x+10}{x-10}$

8.6. $\lim\limits_{x\to2}\frac{2x^2-5x-3}{x^2-5x+6}$

8.7. $\lim\limits_{x\to5}\frac{3x^2-14x-5}{x^2-6x+5}$

8.8. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{5}}\frac{2x^2-7x+3}{5x^2-16x+3}$

8.9. $\lim\limits_{x\to0,5}\frac{3x^2+5x-2}{2x^2+3x-2}$

8.10. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8}{2x-4}$

8.11. $\lim\limits_{x\to3}\frac{4x^2-8x+3}{2x^2-7x+3}$

8.12. $\lim\limits_{x\to5}\frac{5x^2-2x-39}{-x^2-2x+15}$

8.13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-12}{3x-9}$

8.14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+8}{x^2-4}$

8.15. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{3x-3}$

8.16. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-6x-7}$

8.17. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-12}{x^2+2x-8}$

8.18. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$

8.19. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}$

8.20. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-25}$

8.21. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-1}$

8.22. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-9}$

8.23. $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{2x^2-7x+3}{x-3}$

8.24. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+10x+12}$

8.25. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2+x-56}{x^2-49}$

8.26. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-2x+1}$

8.27. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-4x^2+3}{x-1}$

8.28. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3}$

8.29. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2+x-4}$

8.30. $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{x^2+4x-21}{x+7}$

Задание 9

Вычислите пределы:

9.1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x+4}-3}{\sqrt{2x-1}-1}$

9.2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$

9.3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

9.4. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{1+x}-3}{2-\sqrt[3]{x}}$

9.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$

9.6. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{2x-1}-3}$

9.7. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$

9.8. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1}$

9.9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{2x+1}}{x}$

9.10. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2}$

9.11. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+2x}{x+1}$

9.12. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$

9.13. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-5}-2}$

9.14. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$

9.15. $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{\sqrt{x-5}-1}{36-x^2}$

9.16. $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{x^2-49}$

9.17. $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$

9.18. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{1-\sqrt[3]{1+x}}$

9.19. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{x+4}-1}{x+3}$

9.20. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x+x^2-3}}{x^2-4}$

9.21. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{1-\sqrt{2-x}}$

9.22. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{1-x}-1}$

9.23. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x+5}-2}$

9.24. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x-1}-1}$

9.25. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{2-\sqrt[3]{8-x}}$

9.26. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3-\sqrt{7+x}}{x-2}$

9.27. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{2x-2}-2}$

9.28. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{x+11}-3}{x^2+2x}$

9.29. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$

9.30. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

Задание 10

Вычислите пределы:

10.1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg3x}{4x}$

10.2. $\lim\limits_{x\to 0}2x\cdot ctg5x$

10.3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{4x^2}$

10.4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{3x}$

10.5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2-5x}{\sin 3x}$

10.6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg8x}{2x}$

10.7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{xtg2x}$

10.8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$

10.9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}$

10.10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg5x}{\arcsin 4x}$

10.11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$

10.12. $\lim\limits_{x\to 0}3xctg9x$

10.13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 7x}{3x^2}$

10.14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin^2 3x}{tg^2 8x}$

10.15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$

10.16. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$

10.17. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{2xtg2x}$

10.18. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg^2 4x}{1-\cos 3x}$

10.19. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{1-\cos 4x}$

10.20. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$

10.21. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{\sin 5x}$

10.22. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$

10.23. $\lim\limits_{x\to 0}xctg\frac{5x}{2}$

10.24. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{x}$

10.25. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos\sqrt{x}}$

10.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{tgx^2}$

10.27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-1}{\sin^2 3x}$

10.28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$

10.29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$

10.30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot\sin x}{1-\cos x}$

Задание 11

Вычислите пределы:

11.1. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi^2-x^2}$

11.2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\dfrac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$

11.3. $\lim\limits_{x\to-\pi}\dfrac{\sin 2x}{x(\pi+x)}$

11.4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)tgx$

11.5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}$

11.6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{tg3x}{tgx}$

11.7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}tg\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)tg2x$

11.8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x}{\sin 3\pi x}$

11.9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\pi-2x}$

11.10. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{tg\pi x}{x+2}$

11.11. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\dfrac{x}{2}}{\pi-x}$

11.12. $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)ctg\dfrac{\pi x}{2}$

11.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-tgx}{\sin^3 x}$

11.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 6x}{\sin^2 5x}$

11.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x\sin 2x}$

11.16. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos 5x)\cdot ctg^2 3x$

11.17. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}}{x-\pi}$

11.18. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$

11.19. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\sqrt{1-\sin x}}{2x-\pi}$

11.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

11.21. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\dfrac{\pi x}{2}$

11.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin(\pi(x+2))}$

11.23. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{arctg(x+2)}{x^2-4}$

11.24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{\dfrac{1}{\cos x}-1}$

11.25. $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$

11.26. $\lim\limits_{x\to 0}ctgx^2(1-\cos x)$

11.27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-tg^2x}{x^4}$

11.28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$

11.29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{tg(2\pi(x+1/2))}$

11.30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{tg^2 3x}$

Задание 12

Вычислите пределы:

12.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x$

12.2. $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{3}{x^2-4}}$

12.3. $\lim\limits_{x\to 2}(7-3x)^{\frac{x}{2x-4}}$

12.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{2-x^2}$

12.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2+x}\right)^{-3x}$

12.6. $\lim\limits_{x\to -2}(5+2x)^{\frac{3}{x+2}}$

12.7. $\lim\limits_{x\to 3}(4x-11)^{\frac{5x}{x-3}}$

12.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{10x-3}{10x+1}\right)^{5x}$

12.9. $\lim\limits_{x\to -1}(2x+3)^{\frac{1}{x+1}}$

12.10. $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{4}{x-2}}$

12.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+7}{2x-3}\right)^{x+4}$

12.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-1}\right)^{2x^2}$

12.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{x+3}\right)^{x}$

12.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+1}\right)^{\frac{x-10}{2}}$

12.15. $\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{3}{x}}$

12.16. $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\frac{4x+5}{x-1}}$

12.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3-2x}{1-2x}\right)^{2x}$

12.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{13x+2}{13x-15}\right)^{x+7}$

12.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{5x+4}\right)^{x/2}$

12.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x-7}{6x+5}\right)^{3x-6}$

12.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x^2}\right)^{-3x}$

12.22. $\lim\limits_{x\to1}(7-6x)^{\frac{x+5}{2x-2}}$

12.23. $\lim\limits_{x\to2}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$

12.24. $\lim\limits_{x\to2}(3-x)^{\frac{4x}{x-2}}$

12.25. $\lim\limits_{x\to3}(3x-8)^{\frac{2x}{x^2-9}}$

12.26. $\lim\limits_{x\to2}(2x-3)^{\frac{x^2}{x-2}}$

12.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^{2x+3}$

12.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

12.29. $\lim\limits_{x\to-2}(4x+9)^{\frac{5-x}{2+x}}$

12.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2+8x-2}{5x^2+3x+3}\right)^{4x+1}$

Задание 13*

Вычислите пределы:

13.1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+tg\,2x}-1\right)\ln\left(1+\sin^2 3x\right)}{\left(1-\cos x\right)\left(2^{arctg\,4x}-1\right)}$$

13.2. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{tg^2 4x}-1\right)\left(\sqrt[3]{1-tg\,2x}-1\right)}{\left(1-\cos\left(\sin 2x\right)\right)\ln\left(1-tg\,\pi x\right)}$$

13.3. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left(6^{tg\,3x^2}-1\right)\left(1-\cos\left(\arcsin 4x\right)\right)}{\left(\sqrt[3]{1+\sin^2 4x}-1\right)\log_7\left(1+\arcsin^2 5x\right)}$$

13.4. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos 3x\right)\left(\sqrt{1-\mathrm{arc}\,tg\,x}-1\right)}{\left(e^{\sin^2 2x}-1\right)\ln\left(1-\arcsin 3x\right)}$$

13.5. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[6]{1+tg\left(\sin 2x^2\right)}-1\right)\ln\left(1+\arcsin 7x\right)}{\left(1-\cos 5x\right)\left(2^{arctg x 2}-1\right)}$$

13.6. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[4]{1+tg^2\sin 2x}-1\right)\left(e^{1-\cos 2x}-1\right)}{\arcsin^3 3x\cdot\ln\left(1-\sqrt{\sin\left(\sin x^2\right)}\right)}$$

13.7. $$\lim_{x\to 0}\frac{\log_2\left(1+tg^2 3x\right)\left(3^{\sin 4x}-1\right)}{\left(\sqrt[4]{1+\arcsin 2x}-1\right)\left(1-\cos 2x\right)}$$

13.8. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos\left(tg\,3x^2\right)\right)\left(3^{arctg\,2x}-1\right)}{\left(\sqrt[3]{1-\sin^2 2x^2}-1\right)\ln\left(1+\arcsin 8x\right)}$$

13.9. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos\left(2tgx^2\right)\right)\left(\sqrt[3]{1-\sin x^2}-1\right)}{\left(e^{\arcsin 2x^3}-1\right)\ln\left(1+\sqrt{arctg\,2x^2}\right)}$$

13.10. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{arctg\,5x^2}-1\right)\ln\left(1-\sin 4x\right)}{\left(\sqrt{1+tg\,6x}-1\right)\left(1-\cos 4x\right)}$$

13.11. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\pi^{\sin^2 4x}-1\right)\ln\left(1-arctg^2 x\right)}{\left(\sqrt[7]{1+tg\,2x^2}-1\right)\left(\cos 6x-1\right)}$$

13.12. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\pi^{tg^2(tg\,2x)}-1\right)\left(1-\cos 8x\right)}{\left(\sqrt[5]{1-\sin 3x^3}-1\right)\log_6\left(1+\sqrt{tgx^2}\right)}$$

13.13. $$\lim_{x\to 0}\frac{\log_3\left(1-\sin^3 2x\right)\left(\sqrt{1+\arcsin 3x}-1\right)}{\left(4^{tg^2 x}-1\right)\left(1-\cos 6x\right)}$$

13.14. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[8]{1-tg\left(\arcsin 3x^2\right)}-1\right)\log_3\left(1-arctg\,4x\right)}{\left(\cos 7x-1\right)\left(2^{\sin 6x}-1\right)}$$

13.15. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left(4^{\arcsin x^2}-1\right)\left(\sqrt[10]{1-arctg\,3x^2}-1\right)}{\left(1-\cos\left(tg\,6x\right)\right)\ln\left(1-\sqrt{\sin x^2}\right)}$$

13.16. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{arctg\,5x^2}-1\right)\ln\left(1-\sin 4x\right)}{\left(\sqrt{1+tg\,6x}-1\right)\left(1-\cos 4x\right)}$$

13.17. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{2\sin^2 3x}-1\right)\left(\sqrt{1-tg^3 2x}-1\right)}{\left(1-\cos 3x^2\right)\ln\left(1+\arcsin 10x\right)}$$

13.18. $$\lim_{x\to 0}\frac{(\cos(5\arcsin 2x)-1)\log_3\left(1+\sin(tg^2 4x)\right)}{\left(\sqrt{1-arctg^2 6x}-1\right)\left(5^{tg\,2x^2}-1\right)}$$

13.19. $$\lim_{x\to 0}\frac{\log_3\left(1-\sin^3 2x\right)\left(\sqrt{1+\arcsin 3x}-1\right)}{\left(4^{tg^2 x}-1\right)(1-\cos 6x)}$$

13.20. $$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(\sin 3x))\left(\sqrt[6]{1+arctg\,2x^2}-1\right)}{\log_5\left(1-\arcsin^2 4x\right)\left(2^{1-\cos x}-1\right)}$$

13.21. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[4]{1+tg\left(\sin^2 x\right)}-1\right)\ln\left(1-2tg\left(tgx^3\right)\right)}{\left(e^{\arcsin 4x}-4\right)\left(1-\cos\left(\sin^2 2x\right)\right)}$$

13.22. $$\lim_{x\to 0}\frac{(\cos 4x-1)\ln\left(1-\sin\left(tg\,2x\right)\right)}{\left(e^{3x^2}-1\right)\left(\sqrt[5]{1+arctg\,2x}-1\right)}$$

13.23. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left((1+\sin 2x)^{11}-1\right)\left(3^{\sin^2 4x}-1\right)}{(1-\cos 8x)\ln\left(1-\sin\left(\sin 3x\right)\right)}$$

13.24. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos\sqrt{tg\,4x^2}\right)\left(6^{\sin^2 3x}-1\right)}{\left(\sqrt[5]{1-\sin 3x^3}-1\right)\log_2\left(1+3\arcsin\left(tgx^2\right)\right)}$$

13.25. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[4]{1\arcsin 2x^2}-1\right)\ln(1+tg\,3x)}{(1-\cos 4x)\left(5^{4x}-1\right)}$$

13.26. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left(2^{tg\,5x}-1\right)^2\left(\sqrt{1-\sqrt{\arcsin x^2}}-1\right)}{\left(1-\cos\frac{5}{2}x\right)\log_4\left(1-\sin^2 2x\right)}$$

13.27. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+2\sin^2 3x}-1\right)\left(1-\cos 3x\right)}{\left(e^{tg^3 2x}-1\right)\ln\left(1+2\sin 7x\right)}$$

13.28. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos\left(\sin 2x\right)\right)\ln\left(1-actg\,4x\right)}{\left(\sqrt{1-\sin^2 2x}-1\right)\left(6^{5x}-1\right)}$$

13.29. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos 6x\right)^2\left(\sqrt{1+tg^2 2x^2}-1\right)}{\left(e^{\sin^2 x^3}-1\right)\ln\left(1-tg\sin^2 3x\right)}$$

13.30. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left(2^{6tg^2 x}-1\right)\left(\sqrt[7]{1-3\sin 5x}-1\right)}{\left(1-\cos\left(2\sin 3x\right)\right)\log_8\left(1-3arctg10x\right)}$$

Глава 4. Непрерывность функции

4.1. Определение непрерывности функции

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0 если:

1) $f(x)$ существует в точке x_0;

2) $f(x)$ имеет предел в точке x_0;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f\left(x_0\right)$.

Так как $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$, то равенство из п.3) можно переписать в следующем виде:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right).$$

Последнее равенство означает, что для непрерывной функции символы предела и функции можно менять местами.

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной на промежутке*** $(a;b)$, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

4.2. Свойства непрерывных функций

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки. Тогда:

(1) Если $f(x)$ непрерывна в окрестности точки x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то существует окрестность точки x_0, в которой функция не обращается в нуль и сохраняет свой знак (знак числа $f(x_0)$).

(2) Функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (при дополнительном условии $g(x) \neq 0$) непрерывны в точке x_0.

(3) Сложная функция $f(g(x))$ непрерывны в точке x_0, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim\limits_{x \to x_0} g(x)\right) = f(g(x_0))$.

Можно доказать, что все элементарные функции непрерывны в каждой точке своей области определения.

4.3. Точки разрыва функции. Классификация точек разрыва.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Согласно определению, непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0 выражается соотношением $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f\left(x_0\right)$. Пользуясь односторонними пределами функции, это равенство можно заменить равносильным ему равенством

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f\left(x_0 - 0\right) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f\left(x_0 + 0\right) = f\left(x_0\right)$$

Т.е. функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, тогда и только тогда, когда в этой точке существуют пределы справа и слева, они равны между собой и равны значению функции в точке x_0.

Если в точке x_0 функция $f(x)$ не является непрерывной, то говорят, что $f(x)$ ***разрывна*** в этой точке. Точку x_0 называют ***точкой разрыва*** функции $f(x)$, причем функция $f(x)$ может быть не определена в точке x_0.

Точки разрыва функции классифицируются в зависимости от того, какое условие непрерывности нарушено:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$, но $f(x_0)\neq A$ либо $f(x_0)$ не определено. В этом случае говорят, что x_0 – ***точка устранимого разрыва***;

(2) $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ – конечные, но не равные между собой пределы. Такая точка называется точкой неустранимого ***разрыва первого рода*** или точкой разрыва с конечным скачком функции (говорят, что $f(x)$ терпит в точке x_0 ***скачок***);

(3) Если в точке x_0 функция $f(x)$ имеет бесконечный предел справа или слева или один из этих пределов не существует, то точка x_0 называется ***точка разрыва второго рода***.

Пример 1 Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases} -x, & x\leq -1, \\ x^2, & -1< x\leq 2, \\ \sin\dfrac{\pi x}{4}, & x>2 \end{cases}$$

и построить её график.

Решение Так как функции $-x$, x^2 и $\sin\dfrac{\pi x}{4}$, входящие в определение $f(x)$, являются непрерывными элементарными функциями, то функция $f(x)$ непрерывна всюду кроме, может быть, точек «склейки» $x_1=-1$ и $x_2=2$. Исследуем поведение функции в окрестности этих точек:

а) Рассмотрим точку $x_1=-1$.

$f(-1-0)=\lim\limits_{x\to-1-0}(-x)=-(-1)=1;$

$f(-1+0)=\lim\limits_{x\to-1+0}x^2=(-1)^2=1;$

$f(-1)=-(-1)=1.$

Так как $f(-1-0)=f(-1+0)=f(-1)=1$, то функция непрерывна в точке $x_1=-1$.

б) Рассмотрим точку $x_2=2$.

$f(2-0)=\lim\limits_{x\to2-0}x^2=2^2=4;$

$f(2+0)=\lim\limits_{x\to2+0}\sin\frac{\pi x}{4}=\sin\frac{\pi\cdot2}{4}=\sin\frac{\pi}{2}=1;$

$f(2)=2^2=4.$

Так как $f(2-0)=f(2)=4\neq f(2+0)=1$, то $f(x)$ в точке $x_2=2$ терпит разрыв первого рода. Сделаем чертёж (рис.4.1).

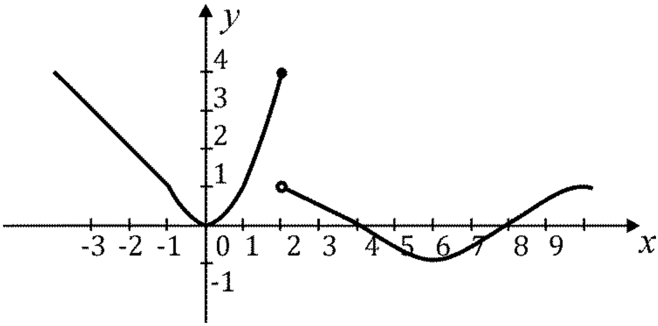


Рис. 4.1.

Пример 2 Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=2^{\frac{1}{x^2(x^2-1)}}$. Сделать эскиз графика.

Решение Функция является элементарной, поэтому непрерывна во всех точках, кроме точек $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$, в которых она не определена. Найдём характер разрыва в этих точках.

а) Рассмотрим точку $x_1 = -1$.

$$f(-1-0) = \lim_{x \to -1-0} 2^{\frac{1}{x^2(x^2-1)}} = \lim_{x \to -1-0} 2^{\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}} = +\infty;$$

$$f(-1+0) = \lim_{x \to -1+0} 2^{\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}} = +0$$

(+0 означает, что $f(x)$ стремится к 0, оставаясь больше 0).

Так как $f(-1-0) = +\infty$, $f(-1+0) = 0$, то $f(x)$ в точке $x_1 = -1$ терпит разрыв второго рода.

б) Рассмотрим точку $x_2 = 0$.

$$f(-0) = \lim_{x \to -0} 2^{\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}} = +0, \quad f(+0) = \lim_{x \to +0} 2^{\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}} = +0$$

Таким образом, $f(-0) = f(+0) = 0$, но $f(0)$ не определена, следовательно, $x_2 = 0$ является точкой устранимого разрыва.

в) Рассмотрим точку $x_3 = 1$.

$$f(1-0) = \lim_{x \to 1-0} 2^{\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}} = +0; \; f(1+0) = \lim_{x \to 1+0} 2^{\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}} = +\infty$$

Так как $f(1-0) = +0$, $f(1+0) = +\infty$, то $x_3 = 1$ является точкой разрыва второго рода.

Для построения эскиза графика исследуем поведение функции при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$:

$$f(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} 2^{\frac{1}{x^2(x^2-1)}} = \left[\begin{array}{l} 2^{\frac{1}{(-\infty)^2((-\infty)^2-1)}} = 2^{\frac{1}{(+\infty)(+\infty)}} = 2^{\frac{1}{+\infty}} = \\ = 2^{+0} = 1+0 \end{array} \right] = 1+0$$

,

$$f(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}2^{\frac{1}{x^2\left(x^2-1\right)}}=\left[\begin{array}{l}2^{\frac{1}{(+\infty)^2\left((+\infty)^2-1\right)}}=2^{\frac{1}{(+\infty)(+\infty)}}=2^{\frac{1}{+\infty}}=\\=2^{+0}=1+0\end{array}\right]=1+0$$

(выражение (1+0) означает, что $f(x)$ стремится к 1, оставаясь больше 1).

Опираясь на полученные данные, сделаем эскиз графика (рис. 4.2).

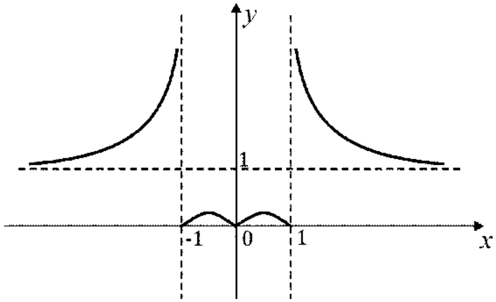


Рис. 4.2.

4.4. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Первая теорема Больцано – Коши (о нуле непрерывной функции). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на концах его имеет значения, противоположные по знаку, то $f(x)$ обращается в нуль по крайней мере в одной точке интервала $(a;b)$.

Вторая теорема Больцано – Коши (о промежуточных значениях непрерывной функции). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, причем $f(a)=A$, $f(b)=B$. Тогда, каким бы ни было число C, заключенное между числами A и B, на отрезке $[a;b]$ найдется по крайней мере одна точка c, такая, что $f(c)=C$.

Эти теоремы устанавливают, что, переходя от одного своего значения к другому, функция хотя бы одни раз принимает каждое свое промежуточное значение между ее значениями на концах отрезка.

Первая теорема Вейерштрасса (об ограниченности непрерывной на отрезке функции). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на нем сверху и снизу, т.е. существуют такие числа m и M, что для всех $x \in [a;b]$ справедливо неравенство $m \le f(x) \le M$.

Вторая теорема Вейерштрасса (о достижении непрерывной на отрезке функции своих верхней и нижней граней). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она достигает на этом отрезке свои наименьшее и наибольшее значения.

Задачи

Найти и классифицировать точки разрыва:

107. $y=-\dfrac{6}{x}$.

108. $y=2-\dfrac{|x|}{x}$.

109. $y=\dfrac{1}{1+2^{1/x}}$.

110. $y=\dfrac{x^3-x^2}{2|x-1|}$.

111. $y=\dfrac{4}{4-x^2}$.

112. $y=1-2^{1/x}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 14

Найти и классифицировать точки разрыва:

14.1. $y = e^{\frac{1}{x-7}}$

14.2. $y = \dfrac{\sqrt{3x+4}-1}{2x^2-5x-7}$

14.3. $y = \ln(x-8)$

14.4. $y = \dfrac{|x-4|}{x^2+x-20}$

14.5. $y = 5^{\frac{1}{11-x}}$

14.6. $y = arctg\left(\dfrac{1}{x+9}\right)$

14.7. $y = \dfrac{\sqrt{21+x}-5}{x^2-16}$

14.8. $y = x + \dfrac{x+3}{|x+3|}$

14.9. $y = arctg\,\dfrac{1}{3-x}$

14.10. $y = e^{\frac{1}{x+5}}$

14.11. $y = \dfrac{\sqrt{20+x}-5}{x^2-25}$

14.12. $y = \ln(x+7)$

14.13. $y = \dfrac{2-2x}{x^3-x^4}$

14.14. $y = x + \dfrac{x+2}{|x+2|}$

14.15. $y = e^{\frac{1}{x+1}}$

14.16. $y = \dfrac{x^2}{x-2}$

14.17. $y = \dfrac{x}{|x|}$

14.18. $y = \dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$

14.19. $y = arctg\,\dfrac{1}{x-2}$

14.20. $y = \dfrac{4x}{x+3}$

14.21. $y = \dfrac{|x+1|}{x^2+x^3}$

14.22. $y = \dfrac{|x|}{x-x^3}$

14.23. $y = \dfrac{x-1}{2x^2-x-1}$

14.24. $y = arctg\,\dfrac{1}{x}$

14.25. $y = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$.

14.26. $y = \ln(1+2x)$

14.27. $y = x + \dfrac{x-5}{|x-5|}$

14.28. $y = arctg\,\dfrac{1}{x-6}$

14.29. $y = 3^{\frac{1}{1-x}}$

14.30. $y=\dfrac{3}{x^2-2x}$

Задание 15

Дана кусочно-заданной функции $y=f\left(x\right)$. Найти:1) точки разрыва функции, если они существуют;2) скачок функции в каждой точке разрыва. Сделать схематический чертеж графика функции в окрестности каждой точки разрыва.

15.1. $y=\begin{cases} x+4, & x<-1, \\ x^2+2, & -1\le x<1, \\ 2x, & x\ge 1. \end{cases}$

15.2. $y=\begin{cases} \cos x, & x<0, \\ 1-x, & 0\le x\le 2, \\ x^2, & x>2. \end{cases}$

15.3. $y=\begin{cases} -x, & x\le 0, \\ -\left(x-1\right)^2, & 0<x<2, \\ x-3, & x\ge 2. \end{cases}$

15.4. $y=\begin{cases} \sin x, & x<0, \\ x^2, & 0\le x\le 2, \\ 0, & x>2. \end{cases}$

15.5. $y=\begin{cases} x+2, & x\le -1, \\ x^2+1, & -1<x\le 1, \\ -x+3, & x>1. \end{cases}$

15.6. $y=\begin{cases} -x^2, & x\le 0, \\ tgx, & 0<x\le \dfrac{\pi}{4}, \\ 2, & x>\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

15.7. $y=\begin{cases} x+1, & x\le 0, \\ \left(x+1\right)^2, & 0<x\le 2, \\ -x+4, & x>2. \end{cases}$

15.8. $y=\begin{cases} x, & x<0, \\ x^2+1, & 0\le x<1, \\ 3-x, & x\ge 1. \end{cases}$

15.9. $y=\begin{cases} -\sin x, & x<0, \\ x^2, & 0\le x<1, \\ 2x, & x\ge 1. \end{cases}$

15.10. $y=\begin{cases} x-1, & x<-1, \\ -2, & -1\le x<0, \\ \cos x, & x\ge 0. \end{cases}$

15.11. $y=\begin{cases} x+1, & x<-2, \\ -x^2+2, & -2\le x<1, \\ 2+x, & x\ge 1. \end{cases}$

15.12. $y=\begin{cases} 2x, & x\le 1, \\ (x-1)^2, & 1<x<3, \\ 2-2x, & x\ge 3. \end{cases}$

15.13. $y=\begin{cases} -x, & x\le -\frac{\pi}{4}, \\ tgx, & -\frac{\pi}{4}<x\le\frac{\pi}{4}, \\ x, & x>\frac{\pi}{4}. \end{cases}$

15.14. $y=\begin{cases} x-4, & x<-1, \\ x^2, & -1\le x<1, \\ x+4, & x\ge 1. \end{cases}$

15.15. $y=\begin{cases} \sin x, & x<-\pi, \\ \cos x, & -\pi\le x<\pi, \\ 1, & x\ge\pi. \end{cases}$

15.16. $y=\begin{cases} -x-1, & x<0, \\ (x+5)^2, & 0\le x<3, \\ 1-x, & x\ge 3. \end{cases}$

15.17. $y=\begin{cases} 4, & x<-\pi, \\ \cos x, & -\pi\le x<0, \\ 0, & x\ge 0. \end{cases}$

15.18. $y=\begin{cases} -x+3, & x<-2, \\ x^2-1, & -2\le x<1, \\ 2-4x, & x\ge 1. \end{cases}$

15.19. $y=\begin{cases} -1, & x\le -\frac{\pi}{4}, \\ tgx, & -\frac{\pi}{4}<x\le\frac{\pi}{4}, \\ x^2, & x>\frac{\pi}{4}. \end{cases}$

15.20. $y=\begin{cases} -4x, & x<-1, \\ -(x-1)^2, & -1\le x<1, \\ 4x, & x\ge 1. \end{cases}$

15.21. $y=\begin{cases} 1+x, & x<-1, \\ x^2, & -1\le x<0, \\ \sin x, & x\ge 0. \end{cases}$

15.22. $y=\begin{cases} 2x+4, & x<1, \\ 3x^2, & 1\le x<3, \\ x-2, & x\ge 3. \end{cases}$

15.23. $y=\begin{cases} x+3, & x<-\pi, \\ \sin x, & -\pi\le x<0, \\ 0, & x\ge 0. \end{cases}$

15.24. $y=\begin{cases} x-3, & x<0, \\ x^2-1, & 0\le x<1, \\ x+6, & x\ge 1. \end{cases}$

15.25. $y=\begin{cases} \cos x, & x<0, \\ x-1, & 0\le x<2, \\ 2, & x\ge 2. \end{cases}$

15.26. $y=\begin{cases} 4-x, & x\le 0, \\ (x+3)^2, & 0<x<2, \\ 2x, & x\ge 2. \end{cases}$

15.27. $y=\begin{cases} 2-x, & x\le -\dfrac{\pi}{4}, \\ tgx, & -\dfrac{\pi}{4}<x\le 0, \\ 0, & x>0. \end{cases}$

15.29. $y=\begin{cases} 0, & x<-\dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x, & -\dfrac{\pi}{2}\le x<\pi, \\ 2, & x\ge \pi. \end{cases}$

15.28. $y=\begin{cases} x-1 & x<-1, \\ x^2+3 & -1\le x<1, \\ -2x & x\ge 1. \end{cases}$

15.30. $y=\begin{cases} x+2, & x<0, \\ -x^2+1, & 0\le x\le 1, \\ x+5, & x>1. \end{cases}$

Задание 16

Исследуйте на непрерывность функцию $f(x)$, сделайте эскиз графика:

16.1. $f(x)=2^{\frac{1}{(x-2)^2(x^2+5x+4)}}$

16.2. $f(x)=4^{\frac{1}{(x-1)^2(x^2-5x+6)}}$

16.3. $f(x)=3^{\frac{1}{x^2(x^2-4x+3)}}$

16.4. $f(x)=-4^{\frac{1}{(x+1)^2(x^2-3x+2)}}$

16.5. $f(x)=-4^{\frac{1}{(x+2)^2(x^2-6x+2)}}$

16.6. $f(x)=2^{\frac{3}{(x-1)^2(4-x^2)}}$

16.7. $f(x)=e^{\frac{3}{(x-3)^2(x^2-4x)}}$

16.8. $f(x)=4^{\frac{1}{(x-2)^2(x^2-2x-3)}}$

16.9. $f(x)=5^{\frac{-2}{(x+1)^2(x^2+5x-6)}}$

16.10. $f(x)=-5^{\frac{-2}{(x+4)^2(x^2+5x)}}$

16.11. $f(x)=-2^{\frac{1}{(x-3)^2(x^2-2x)}}$

16.12. $f(x)=2^{\frac{2}{x(x+2)}}$

16.13. $f(x)=5^{\frac{1}{(x+3)^2(x^2+2x)}}$

16.14. $f(x)=2^{\frac{5}{(x-1)(x+2x)}}$

16.15. $f(x)=5^{\frac{1}{(x-2)^2(x^2-1)}}$

16.16. $f(x)=-3^{\frac{4}{(x-2)^2(x^2+x-2)}}$

16.17. $f(x)=8^{\frac{1}{(x+4)^2(x^2+11x+30)}}$

16.18. $f(x)=e^{\frac{1}{(x+3)^2(x^2+9x+20)}}$

16.19. $f(x)=3^{\frac{1}{(x+5)^2(x^2-4x+3)}}$

16.20. $f(x)=4^{\frac{-2}{(x-5)^2(x^2-8x+12)}}$

16.21. $f(x)=-5^{\frac{1}{(x-4)^2(x^2-13x+42)}}$

16.22. $f(x)=\pi^{\frac{1}{(x+2)^2(x^2+4x+3)}}$

16.23. $f(x)=e^{\frac{1}{(x-4)^2(x^2-4x-5)}}$

16.24. $f(x)=-3^{\frac{1}{x^2(x^2+6x+8)}}$

16.25. $f(x)=\frac{1}{2}^{\frac{1}{(x+2)^2(x^2+2x-3)}}$

16.26. $f(x)=2^{\frac{1}{(x+3)^2(x^2+3x-4)}}$

16.27. $f(x)=\pi^{\frac{-2}{(x-1)^2(x^2+8x+12)}}$

16.28. $f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{(x-5)^2(x^2-x-2)}}$

16.29. $f(x)=3^{\frac{1}{(x-3)^2(x^2-4x)}}$

16.30. $f(x)=2^{\frac{-2}{(x-4)^2(x^2-x)}}$

Глава 5. Производная и дифференциал функции

5.1. Понятие производной функции. Правила вычисления производной

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на интервале $(a;b)$.

Разность $\Delta x = x - x_0$, где $x, x_0 \in (a;b)$ называется ***приращением аргумента в точке*** x_0.

Разность $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется ***приращением функции*** y ***в точке*** x_0.

Если существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

то он называется ***производной функции*** y ***в точке*** x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Замечание. Для производной функции $y = f(x)$ используются следующие обозначения:

$$y',\ y'(x),\ f',\ f'(x),\ y'_x,\ f'_x,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{dy(x)}{dx},\ \frac{df}{dx},\ \frac{df(x)}{dx}.$$

Операция нахождения производной называется ***дифференцированием.***

Геометрический смысл производной

Для функции $y = f(x)$ ее производная $f'(x)$ для каждого значения x равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в соответствующей точке x.

Поскольку угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла наклона, то уравнение касательной $y = k \cdot x + b$ к кривой дифференцируемой функции $y = f(x)$ в точке x_0 можно записать следующим образом:

$$y = y'(x_0) \cdot x + b$$

Если касательную к кривой в некоторой точке провести нельзя, то это означает, что функция недифференцируема в этой точке.

Механический смысл производной

Для функции $y = f(x)$, меняющейся со временем x, производная $f'(x_0)$ есть скорость изменения $y = f(x)$ в момент времени x_0.

Пример 1 Найти по определению производной функции $y = \sin x$.

Решение Зафиксируем произвольную точку x_0. Так как $y(x) = \sin x$, то $y(x_0) = \sin x_0$ и $y\left(x_0 + \Delta x\right) = \sin\left(x_0 + \Delta x\right)$, поэтому $\Delta y\left(x_0\right) = y\left(x_0 + \Delta x\right) - y\left(x_0\right) = \sin\left(x_0 + \Delta x\right) - \sin x_0$.

Следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(x_0 + \Delta x\right) - \sin x_0}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$= 1 \cdot \cos x_0 = \cos x_0$$

Так как в качестве x_0 можно взять любое число, то для числа x

$$y'(x) = \left(\sin x\right)' = \cos x.$$

Пример 2 Функция $y=\dfrac{2x+1}{3x+1}$. Вычислить по определению производную при $x=1$.

Решение Зафиксируем произвольную точку x_0. Так как $y(x)=\dfrac{2x+1}{3x+1}$, то $y(x_0)=\dfrac{2x_0+1}{3x_0+1}$ и $y(x_0+\Delta x)=\dfrac{2(x_0+\Delta x)+1}{3(x_0+\Delta x)+1}$, поэтому

$$\Delta y(x_0)=y(x_0+\Delta x)-y(x_0)=\frac{2(x_0+\Delta x)+1}{3(x_0+\Delta x)+1}-\frac{2x_0+1}{3x_0+1}.$$

Следовательно,

$$y'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\dfrac{2(x_0+\Delta x)+1}{3(x_0+\Delta x)+1}-\dfrac{2x_0+1}{3x_0+1}}{\Delta x}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\big(2(x_0+\Delta x)+1\big)(3x_0+1)-\big(3(x_0+\Delta x)+1\big)(2x_0+1)}{\Delta x\big(3(x_0+\Delta x)+1\big)(3x_0+1)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2x_0+1)(3x_0+1)+2\Delta x(3x_0+1)-(2x_0+1)(3x_0+1)-3\Delta x(2x_0+1)}{\Delta x\big(3(x_0+\Delta x)+1\big)(3x_0+1)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x\big(3(x_0+\Delta x)+1\big)(3x_0+1)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{\big(3(x_0+\Delta x)+1\big)(3x_0+1)}=\frac{-1}{(3x_0+1)^2}$$

Таким образом, $y'(x)=-\dfrac{1}{(3x+1)^2}$; $y'(1)=-\dfrac{1}{16}$.

Производная суммы, разности, произведения и частного функций

Нахождение производной функции непосредственно по определению часто связано с определенными трудностями, поэтому на практике функции дифференцируют с помощью ряда правил и формул.

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ две дифференцируемые функции, тогда

(1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

(2) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;

(3) $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, где c -постоянная;

(4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u \cdot v' - u \cdot v'}{v^2}, v \neq 0$;

Производная сложной функции

Пусть функция $u = \varphi(x)$ имеет производную в некоторой точке $x = x_0$, а функция $y = f(u)$ имеет производную в точке $u_0 = \varphi(u_0)$. Тогда, сложная функция $f(\varphi(x))$ имеет производную в точке $x = x_0$, которая вычисляется по формуле

$$(f(\varphi(x_0)))' = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0).$$

Для краткости используется следующая запись этой формулы $f_x' = f_u' \cdot u_x'$.

5.2. Производные основных элементарных функций (таблица производных)

Приведем производные основных элементарных функций. Во всех перечисленных ниже формулах функция u считается функциями независимой переменной $x :. u = u(x)$ . .

Таблица производных

(1) $y = c$ (c -постоянная), $y' = 0$;

(2) $y = x$, $y' = 1$;

(3) $y = u^n$, $y' = nu^{n-1} \cdot u'$, где $n \in R$;

(4) $y = a^u$, $y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, где $a > 0, a \neq 1$;

(5) $y = e^u$, $y' = e^u \cdot u'$;

(6) $y = \log_a u$, $y' = \dfrac{u'}{u \ln a}$, где $a > 0, a \neq 1$, $x > 0$;

(7) $y = \ln u$, $y' = \dfrac{u'}{u}$;

(8) $y = \sin u$, $y' = \cos u \cdot u'$;

(9) $y = \cos u$, $y' = -\sin u \cdot u'$;

(10) $y = tg\ u$, $y' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$, где $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$;

(11) $y = ctg\ u$, $y' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$, где $x \neq \pi n, n \in Z$

(12) $y = \arcsin u$, $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$,где $|x| \leq 1$;

(13) $y = \arccos u$, $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$,где $|x| \leq 1$;

(14) $y = arctg\ u$, $y' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

(15) $y = arcctg\ u$, $y' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

Пример 3 Найти производные следующих функций :

$$y = 5,\ y = arcctg\ \ln 345,\ y = \log_5 x,\ y = 7^x.$$

Решение Производная числа равна нулю, поэтому $(5)' = 0$, $(arcctg\ \ln 345)' = 0$, так как 5 и $arcctg\ \ln 345$ - числа.

Для нахождения производных функций $y = \log_5 x$ и $y = 7^x$ воспользуемся табличными формулами для показательной функции (при $a = 7$) и логарифмической функции (при $a = 5$). Имеем: $(\log_5 x)' = \frac{1}{x \ln 5}$, $(7^x)' = 7^x \ln 7$.

Пример 4 Вычислить производные функций: $x^2, x^{2\pi - 3e + 1}$, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}, \sqrt[4]{x^3}$.

Решение Каждая из данных функций является степенной функцией, поэтому все производные находятся по формуле $y' = nu^{n-1} \cdot u'$.

Имеем:

$u = x \Rightarrow u' = 1;$

$(x^2)' = 2x;$

$(x^{2\pi-3e+1})' = (2\pi - 3e + 1)x^{2\pi - 3e};$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2};$

$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}};$

$$\left(\sqrt[4]{x^7}\right)' = \left(x^{\frac{7}{4}}\right)' = \frac{7}{4}x^{\frac{7}{4}-1} = \frac{7}{4}x^{\frac{3}{4}} = \frac{7}{4}\sqrt[4]{x^3}.$$

Пример 5 Найти производную функции $y = (1+7x)^4$.

Решение Данная функция является степенной, поэтому производная находятся по формуле $y' = nu^{n-1} \cdot u'$:

$$y' = \left((1+7x)^4\right)' = [u = 1+7x] = 4(1+7x)^3 \cdot (1+7x)' =$$

$$= 4(1+7x)^3 \cdot 7 = 28(1+7x)^3.$$

Пример 6 Найти производную функции $y = \operatorname{tg} 5x$.

Решение Применяя таблицу производных, находим

$$y' = (\operatorname{tg} 5x)' = [u = 5x] = \frac{1}{\cos^2 5x} \cdot (5x)' = \frac{5}{\cos^2 5x}.$$

Пример 7 Найти производную функции $y = \cos^2 x$.

Решение Применяя правило дифференцирования сложной функции и таблицу производных, находим

$$y' = (\cos^2 x)' = [u = \cos x] = 2\cos x(\cos x)' =$$

$$= 2\cos x(-\sin x) = -\sin 2x.$$

Пример 8 Найти производную функции $y = \left(2x^2 + x + 5\right)\cos x$.

Решение Применяя правило дифференцирования произведения функций и таблицу производных, находим

$$y' = \left(\left(2x^2 + x + 5\right) \cdot \cos x\right)' = \left(2x^2 + x + 5\right)' \cdot \cos x +$$

$$+\left(2x^2 + x + 5\right) \cdot \left(\cos x\right)' = (4x+1)\cos x - \left(2x^2 + x + 5\right)\sin x.$$

Пример 9 Найти производную функции $y = 3\ln x + 5\sqrt{x} \cdot \cos x + e^3$.

Решение Применяя правила дифференцирования и таблицу производных, находим

$$y' = \left(3\ln x + 5\sqrt{x}\cos x + e^3\right)' = 3(\ln x)' + 5\left(x^{\frac{1}{2}}\cos x\right)' + \left(e^3\right)' =$$

$$= 3\frac{1}{x} + 5\left(\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'\cos x + x^{\frac{1}{2}}(\cos x)'\right) + 0 =$$

$$= \frac{3}{x} + 5\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}\cos x + x^{\frac{1}{2}}(-\sin x)\right) = \frac{3}{x} + \frac{5\cos x}{2\sqrt{x}} - 5\sqrt{x}\cdot\sin x.$$

Пример 10 Найти производную функции $y = \dfrac{arc\,tgx}{x^3}$.

Решение Применяя правила дифференцирования частного функций и таблицу производных, находим

$$\left(\frac{arctgx}{x^3}\right)' = \frac{(arctgx)'\,x^3 - \left(x^3\right)'\,arctgx}{\left(x^3\right)^2} = \frac{\dfrac{x^3}{1+x^2} - 3x^2\cdot arctgx}{x^6} =$$

$$= \frac{1}{x^3\left(1+x^2\right)} - \frac{3\cdot arctgx}{x^4}.$$

Пример 11 Найти производную функции

$$y = \cos\log_6 5x - \cos\log_6 5$$

Решение

$$y' = \left(\cos\log_6 5x - \cos\log_6 5\right)' = \left(\cos\log_6 5x\right)' - \left(\cos\log_6 5\right)'$$

Так как выражение $\cos\log_6 5$ является числом, то

$\left(\cos\log_6 5\right)' = 0$. Получаем, что

$$y' = \left(\cos\log_6 5x\right)' - 0 = -\sin\log_6 5x\left(\log_6 5x\right)' =$$

$$= -\sin\log_6 5x\cdot\frac{1}{5x\cdot\ln 6}(5x)' = -\sin\log_6 5x\cdot\frac{1}{5x\ln 6}\cdot 5 = -\frac{\sin\log_6 5x}{x\ln 6}$$

Пример 12 Найти производную функции $y = arctg^2 e^{-x}$

Решение Применяя правила дифференцирования и таблицу производных, находим

$$y' = \left(\text{arctg}^2 e^{-x}\right)' = \left[u_1 = \text{arctg} e^{-x}\right] = 2\text{arctg} e^{-x} \cdot u_1';$$

$$u_1' = \left(\text{arctg} e^{-x}\right)' = \left[u_2 = e^{-x}\right] = \frac{1}{1+\left(e^{-x}\right)^2} \cdot u_2' = \frac{1}{1+e^{-2x}} \cdot u_2';$$

$$u_2' = \left(e^{-x}\right)' = [u_3 = -x] = e^{-x} \cdot u_3' = e^{-x} \cdot (-x)' = -e^{-x}.$$

Таким образом,

$$y' = 2\text{arctg } e^{-x} \cdot \frac{1}{1+e^{-2x}} \cdot \left(-e^{-x}\right) = -\frac{2e^{-x}\text{arctg } e^{-x}}{1+e^{-2x}}.$$

Пример 13 Найти производную функции

$$y = \left(\log_5 ctg \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^4 + 3^{arc\cos\left(x^2\sqrt{3-x}\right)};$$

Решение Представим функцию y в следующем виде

$$y = f + g, \text{где } f = \left(\log_5 ctg \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^4, g = 3^{arc\cos\left(x^2\sqrt{3-x}\right)}.$$

Тогда $y' = f' + g'$.

Найдем f':

$$f' = \left(\left(\log_5 ctg \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^4\right)' = \left[u_1 = \log_5 ctg \frac{1-x^2}{1+x^2}\right] = 4\left(\log_5 ctg \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^3 \cdot u_1';$$

$$u_1' = \left(\log_5 ctg \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \left[u_2 = ctg \frac{1-x^2}{1+x^2}\right] = \frac{1}{\ln 5 \cdot ctg \dfrac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot u_2';$$

$$u_2' = \left(ctg \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \left[u_3 = \frac{1-x^2}{1+x^2}\right] = -\frac{1}{\sin^2 \dfrac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot u_3';$$

$$u_3' = \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

Таким образом,

$$f' = 16\left(\log_5 ctg\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^3 \cdot \frac{1}{\ln 5\cdot ctg\dfrac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \frac{1}{\sin^2\dfrac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{16x}{\ln 5\cdot(1+x^2)^2}\left(\log_5 ctg\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^3 \cdot \frac{1}{\cos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\sin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}} =$$

$$= \frac{32x}{\ln 5\cdot(1+x^2)^2\sin\dfrac{2\left(1-x^2\right)}{1+x^2}}\left(\log_5 ctg\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^3.$$

Найдем g':

$$g' = \left(3^{arc\cos\left(x^2\sqrt{3-x}\right)}\right)' = \left[u_1 = arc\cos\left(x^2\sqrt{3-x}\right)\right] = 3^{arc\cos\left(x^2\sqrt{3-x}\right)}\cdot\ln 3\cdot u_1';$$

$$u_1' = \left(arc\cos\left(x^2\sqrt{3-x}\right)\right)' = \left[u_2 = x^2\sqrt{3-x}\right] = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(x^2\sqrt{3-x}\right)^2}}\cdot u_2';$$

$$u_2' = \left(x^2\sqrt{3-x}\right)' = \left(x^2\right)'\sqrt{3-x} + x^2\left(\sqrt{3-x}\right)' = 2x\sqrt{3-x} - \frac{x^2}{2\sqrt{3-x}}$$

Таким образом,

$$g' = 3^{\arccos\left(x^2\sqrt{3-x}\right)}\ln 3\frac{-1}{\sqrt{1-x^4\left(3-x\right)}}\left(2x\sqrt{3-x} - x^2\frac{1}{2\sqrt{3-x}}\right) =$$

$$= 3^{\arccos\left(x^2\sqrt{3-x}\right)}\ln 3\frac{-1}{\sqrt{1-x^4\left(3-x\right)}}\;\frac{2x(3-x)-x^2}{2\sqrt{3-x}} = \qquad .$$

$$= -3^{\arccos\left(x^2\sqrt{3-x}\right)}\ln 3\frac{6x-3x^2}{2\sqrt{3-x}\sqrt{1-x^4\left(3-x\right)}}$$

Получаем, что

$$y' = \frac{32x\left(\log_5 ctg\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^3}{\ln 5\cdot(1+x^2)^2\sin\frac{2\left(1-x^2\right)}{1+x^2}} - \frac{3\ln 3\cdot x(2-x)\cdot 3^{\arccos\left(x^2\sqrt{3-x}\right)}}{2\sqrt{3-x}\sqrt{1-x^4\left(3-x\right)}}.$$

Пример 14 Показать, что функция $y=\sqrt{2\ln\frac{1+e^x}{2}+1}$ удовлетворяет уравнению $\left(1+e^x\right)y\cdot y' = e^x$.

Решение Найдём производную функции

$$y' = \left(\left(2\ln\frac{1+e^x}{2}+1\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(2\ln\frac{1+e^x}{2}+1\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2\ln\frac{1+e^x}{2}+1\right)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\ln\frac{1+e^x}{2}+1}}\cdot\left(2\frac{2}{1+e^x}\;\frac{e^x}{2}\right) = \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)\sqrt{2\ln\frac{1+e^x}{2}+1}}.$$

Подставив это выражение в уравнение, получим

$$\left(1+e^x\right)\sqrt{2\ln\frac{1+e^x}{2}+1}\cdot\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)\sqrt{2\ln\frac{1+e^x}{2}+1}} = e^x, \text{ или } \; e^x = e^x.$$

Это доказывает, что наша функция удовлетворяет уравнению.

5.3. Производная степенно-показательной функции

Для вычисления производной функции вида $f(x)^{g(x)}$ существуют два способа.

Способ 1. Так как в соответствии с основным логарифмическим тождеством $f(x) = e^{\ln f(x)}$, то функцию $f(x)^{g(x)}$ можно представить в следующем виде

$$f(x)^{g(x)}=\left(e^{\ln f(x)}\right)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$$

Таким образом, нахождение производной сводится к дифференцированию сложной функции $e^{g(x)\ln f(x)}$.

Пример 15 Найти производную функции $y=x^x$.

Решение Данная функция не является ни функцией вида x^n, ни функцией вида a^x, поэтому будет ошибкой вычислять производной данной функций одним из следующих способов:

$$(x^x)'=x\cdot x^{x-1},\ \ (x^x)=x^x\cdot\ln x.$$

Представим функцию $y=x^x$ в виде $y=e^{x\ln x}$.

$$y'=\left(e^{x\ln x}\right)'=e^{x\ln x}\cdot\left(x\ln x\right)'=e^{x\ln x}\cdot\left(1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)=e^{x\ln x}\left(\ln x+1\right).$$

Пример 16 Найти производную функции $y=\left(\sin x\right)^{\ln x}$.

Решение

$$y'=\left(\left(\sin x\right)^{\ln x}\right)'=\left(e^{\ln x\ln\sin x}\right)'=e^{\ln x\ln\sin x}\cdot\left(\ln x\cdot\ln\sin x\right)'=$$

$$=\left(\sin x\right)^{\ln x}\cdot\left(\ln x\cdot\ln\sin x\right)'=$$

$$=\left(\sin x\right)^{\ln x}\cdot\left(\left(\ln x\right)'\ln\sin x+\ln x\left(\ln\sin x\right)'\right)=$$

$$=\left(\sin x\right)^{\ln x}\cdot\left(\frac{1}{x}\ln\sin x+\ln x\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\left(\sin x\right)'\right)=$$

$$=\left(\sin x\right)^{\ln x}\cdot\left(\frac{\ln\sin x}{x}+\ln x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

Способ 2. Данный способ связан с так называемой ***логарифмической производной*** функции, т.е. производной от логарифма этой функции: $\left(\ln\ f(x)\right)'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}\Rightarrow f'(x)=f(x)\cdot\left(\ln\ f(x)\right)'$.

В частности, $\left(f(x)^{g(x)}\right)' = f(x)^{g(x)} \cdot \left(g(x) \cdot \ln f(x)\right)'$.

Пример 17 Найти производную функции $y = (x+1)^{arctgx}$.

Решение Предварительно прологарифмируем обе части равенства $y = (x+1)^{arctgx}$, имеем $\ln y = (arctgx)\ln(x+1)$.

Продифференцируем обе части последнего равенства:

$$(\ln y)' = \frac{1}{1+x^2}\ln(x+1) + \frac{arctgx}{x+1};$$

Так как $y' = y \cdot (\ln y)'$, то $y' = y\left(\frac{\ln(x+1)}{1+x^2} + \frac{arctgx}{x+1}\right)$.

Подставив $y = (x+1)^{arctgx}$, получим

$$y' = (x+1)^{arctgx}\left(\frac{\ln(x+1)}{1+x^2} + \frac{arctgx}{x+1}\right).$$

Пример 18 Найти производную функции

$$y = \frac{x^{\sin x} \cdot \sqrt[3]{x-1} \cdot \cos^2 x}{\left(1+x^2\right)\sqrt{(x+2)^3}}.$$

Решение Действуя так же, находим

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x + \frac{1}{3}\ln(x-1) + 2\ln|\cos x| - \ln\left(1+x^2\right) - \frac{3}{2}\ln|x+2|;$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{3(x-1)} + \frac{2(-\sin x)}{\cos x} - \frac{2x}{1+x^2} - \frac{3}{2(x+2)};$$

$$y' = y\left[\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{3(x-1)} - 2tgx - \frac{2x}{1+x^2} - \frac{3}{2(x+2)}\right] =$$

$$=\frac{x^{\sin x}\cdot\sqrt[3]{x-1}\cdot\cos^2 x}{\left(1+x^2\right)\sqrt{\left(x+2\right)^3}}\left[\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}+\frac{1}{3\left(x-1\right)}-\right.$$

$$\left.-2tgx-\frac{2x}{1+x^2}-\frac{3}{2\left(x+2\right)}\right].$$

Задачи

113. Найти по определению производные функций:

а) $y=x^2$; б) $y=x^4$; в) $y=\frac{1}{x^2}$; г) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$; д) $y=\cos\frac{x}{2}$;

е) $y=\frac{1}{3x+4}$; ж) $y=\sqrt{1+x^2}$; з) $y=x\cdot\sin x$.

Найти производную функции:

114. $y=x^4+3x^2-2x+1$

115. $y=7x^7+3x^2-4x+1$

116. $y=3\sqrt{x}+4\cos x-2tgx+3$

117. $y=4x^2+\sin x+\ln x+\frac{1}{x^2}$

118. $y=x\cdot\sin x$

119. $y=\ln tg\frac{2x+1}{4}$

120. $y=\sin 2x-\cos^2 x$

121. $y=\sqrt{3x+\cos 3x}$

122. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2-3}\right)$

123. $y=3^{\cos^2 x}$

124. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}$

125. $y=\frac{1}{6\sqrt{2}}\arcsin\frac{x^3}{\sqrt{8}}$

126. $y=\ln\frac{x^2}{1-x^2}$

127. $y=\ln\left(3x^2+\sqrt{9x^4+1}\right)$

128. $y=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)$

129. $y=\frac{1}{2}e^{x^2}\left(\sin 2x+\cos 2x\right)$

130. $y=\frac{2^x}{\ln 2}\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)$

131. $y=tg^3\frac{x}{3}$

132. $y=2^{3x^2}+\ln\sin x$

133. $y=\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$

134. $y=\ln\sin(3x+2)$

135. $y=\dfrac{e^{-x^2}}{x-3}$

137. $y=\ln\operatorname{arc\,tg}\sqrt{1+x^2}$

136. $y=\arcsin\sqrt{2x+1}$

138. $y=\sqrt[3]{\ln^5\sin\left(\dfrac{3}{5}x\right)}$

Указание. В примерах 24. – 27. прежде чем вычислять производную, целесообразно выполнить логарифмирование.

139. $y=\left(3x^2+3x-1\right)^x$

140. $y=(x+1)^{\ln x}$

141. $y=\dfrac{2^x\sqrt{4x+1}}{\left(2x-1\right)^3\sqrt[3]{x^3+2}}$

142. $y=\dfrac{\left(x^2-1\right)^3\arcsin\sqrt{x}}{x^4\left(3x+2\right)}$

Задачи для самостоятельного решения

Задание 17

Исходя из определения производной (не пользуясь формулами дифференцирования), найти производную функции:

17.1 $y=2x^3+5x^2-7x-4$

17.2 $y=-\operatorname{ctg}x-x$

17.3 $y=\sqrt[3]{x^2}$

17.4 $y=5(\operatorname{tg}x-x)$

17.5 $y=\sqrt{x}$

17.6 $y=\dfrac{1}{x^3}$

17.7 $y=\dfrac{1}{e^x+1}$

17.8 $y=\dfrac{1}{x^2+x-6}$

17.9 $y=3x^2+3x-5$

17.10 $y=\sin 3x-x$

17.11 $y=x+\cos 2x$

17.12 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$

17.13 $y=\sqrt{x-1}$

17.14 $y=\dfrac{2}{(x-2)^2}$

17.15 $y=\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{(x+1)^2}$

17.16 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-2x$

17.17 $y=\mathrm{tg}\,2x-5$

17.18 $y=\sqrt{4x+1}$

17.19 $y=3+\mathrm{ctg}\,2x$

17.20 $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

17.21 $y=x+3x^2-\dfrac{x^3}{3}$

17.22 $y=3\sqrt[3]{x}+4$

17.23 $y=\dfrac{2x}{x+3}$

17.24 $y=\dfrac{1}{\sin x}$

17.25 $y=\dfrac{1}{\cos x}$

17.26 $y=\sqrt[3]{x^2-1}$

17.27 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$

17.28 $y=\sqrt{x^2+3}+4$

17.29 $y=2x-\cos 3x$

17.30 $y=\dfrac{x}{x^2-1}$

Задание 18

Найти производную:

18.1. $y=3x^2+\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{x^2}+3$

18.2. $y=4x^5-\sqrt[4]{x^3}+\dfrac{1}{x^3}-\sqrt[3]{3}$

18.3. $y=x^{10}-2\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}+\sqrt[4]{2}$

18.4. $y=7x^4-\sqrt[7]{x^2}-\dfrac{1}{x^4}+\sqrt{7}$

18.5. $y=8x^3-3\sqrt[5]{x^4}-\dfrac{1}{x^2}+\sqrt[3]{3}$

18.6. $y=x^{10}-3\sqrt[3]{x^7}+\dfrac{1}{x^2}-\sqrt[3]{10}$

18.7. $y=10x^5-\dfrac{1}{4x^4}$

18.8. $y=7x^5-2\sqrt[3]{x}+\sqrt{2}$

18.9. $y=3x^{12}+4\sqrt[3]{x^7}-\dfrac{1}{x^2}+\sqrt[4]{10}$

18.10. $y=7x^3+\dfrac{1}{2x^2}+\sqrt{x+\sqrt[3]{5}}$

18.11. $y=5x^7+\sqrt[6]{x^5}-\dfrac{1}{x^3}+\sqrt[3]{3}$

18.12. $y=4x^9-\sqrt[7]{x^3}+\dfrac{1}{x^4}-\sqrt[7]{2}$

18.13. $y=9x^5-7\sqrt[3]{x^8}+\dfrac{3}{x^8}-2\sqrt[4]{5}$

18.14. $y=-7x^3+2\sqrt[5]{x^3}+\dfrac{4}{x^8}-3\sqrt[3]{4}$

18.15. $y=-5x^4-3\sqrt[4]{x^5}+\dfrac{5}{x^7}-\sqrt[5]{6}$

18.16. $y = -3x^6 + 5\sqrt[4]{x^3} - \frac{2}{x^7} - \sqrt[5]{6}$

18.17. $y = -6x^8 - 4\sqrt[9]{x^5} - \frac{7}{x^6} + 3\sqrt[8]{3}$

18.18. $y = 8x^3 - \sqrt[5]{x^6} + \frac{6}{x^9} - 4\sqrt[9]{5}$

18.19. $y = -12x^4 + 2\sqrt[6]{x^7} - \frac{3}{x^7} + 7\sqrt[3]{2}$

18.20. $y = -4x^7 + 3\sqrt[7]{x^3} + \frac{4}{x^3} - 2\sqrt[5]{3}$

18.21. $y = x^7 - 3\sqrt[4]{x^7} + \frac{1}{x^5} - \sqrt[3]{13}$

18.22. $y = 12x^6 - \frac{2}{3x^3}$

18.23. $y = 7x^8 - 6\sqrt[4]{x} + 7$

18.24. $y = 4x^{17} + 4\sqrt[5]{x^8} - \frac{1}{x^9} + \sqrt[4]{19}$

18.25. $y = 3x^7 + \frac{1}{3x^4} + \sqrt{2x + \sqrt[3]{5}}$

18.26. $y = x^{15} - 3\sqrt[5]{x^2} + \frac{6}{x^5} - \sqrt{34}$

18.27. $y = 7x^5 - \frac{1}{2x} + \sqrt{3}$

18.28. $y = 5x^7 - 3\sqrt[5]{x} + \sqrt{7}$

18.29. $y = 7x^{19} + 2\sqrt[3]{x^5} - \frac{1}{x^7} + \sqrt[5]{16}$

18.30. $y = x^7 + \frac{1}{9x^3} + \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{5}}$

Задание 19

Найти производную:

19.1. $y = (\frac{1}{\sqrt{x}} + 2)tgx$

19.2. $y = (\sqrt{x} - 4)\cos x$

19.3. $y = \sqrt[3]{x^2}\ tgx$

19.4. $y = 5^x(1 - \frac{6}{\sqrt[13]{x^8}})$

19.5. $y = 2^x arctg4x$

19.6. $y = \cos x(1 + \frac{6}{\sqrt{x^3}})$

19.7. $y = (\sqrt{x^3} - 7)tgx$

19.8. $y = 2\cos x(x^2 - 1)$

19.9. $y = \sqrt[5]{x}\sin x$

19.10. $y = 4^x arctgx$

19.11. $y = \arccos x\ ctgx$

19.12. $y = \sin x \arcsin x$

19.13. $y = arcctgx\ \log_3 x$

19.14. $y = \sqrt[5]{x}\log_2 x$

19.15. $y = \sin x \log_7 x$

19.16. $y = e^x arcctgx$

19.17. $y = e^x ctgx$

19.18. $y = \sqrt{x}\cos x$

19.19. $y=6^x arctgx$

19.20. $y=(\sqrt[3]{x}+1)arctgx$

19.21. $y=(x^3+1)\sin x$

19.22. $y=(\sqrt{x}-4)\sin x$

19.23. $y=\sqrt[3]{x}\cos x$

19.24. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\sin x$

19.25. $y=e^x \arcsin x$

19.26. $y=xarctgx$

19.27. $y=\sqrt{x}\sin x$

19.28. $y=\sin x\cdot arctg\ x$

19.29. $y=2^x tgx$

19.30. $y=3^x ctgx$

Задание 20

Найти производную:

20.1. $y=\dfrac{2\left(3x^3+4x^2-x-2\right)}{15\sqrt{1+x}}$

20.2. $y=\dfrac{\left(2x^2-1\right)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$

20.3. $y=\dfrac{x^4-8x^2}{2\left(x^2-4\right)}$

20.4. $y=\dfrac{2x^2-x-1}{3\sqrt{2+4x}}$

20.5. $y=\dfrac{\left(1+x^8\right)\sqrt{1+x^8}}{12x^{12}}$

20.6. $y=\dfrac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$

20.7. $y=\dfrac{\left(x^2-6\right)\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}{120x^5}$

20.8. $y=\dfrac{\left(x^2-8\right)\sqrt{x^2-8}}{6x^3}$

20.9. $y=\dfrac{4+3x^3}{x\sqrt[3]{\left(2+x^3\right)^2}}$

20.10. $y=\sqrt[3]{\dfrac{\left(1+x^{3/4}\right)^2}{x^{3/2}}}$

20.11. $y=\dfrac{x^6+x^3-2}{\sqrt{1-x^3}}$

20.12. $y=\dfrac{\left(x^2-2\right)\sqrt{4+x^2}}{24x^3}$

20.13. $y=\dfrac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$

20.14. $y=\dfrac{\sqrt{x-1}\left(3x+2\right)}{4x^2}$

20.15. $y=\dfrac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}{3x^3}$

20.16. $y=\dfrac{x^6+8x^3-128}{\sqrt{8-x^3}}$

20.17. $y=\dfrac{\sqrt{2x+3}\left(x-2\right)}{x^2}$

20.18. $y=\left(1-x^2\right)\sqrt[5]{x^3+\frac{1}{x}}$

20.19. $y=\frac{\left(2x^2+3\right)\sqrt{x^2-3}}{9x^3}$

20.20. $y=\frac{x-1}{\left(x^2+5\right)\sqrt{x^2+5}}$

20.21. $y=\frac{(2x+1)\sqrt{x^2-x}}{x^2}$

20.22. $y=2\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$

20.23. $y=\frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+5}}$

20.24. $y=3\frac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x+1}$

20.25. $y=3\cdot\sqrt[3]{\frac{(x+1)}{(x-1)^2}}$

20.26. $y=\frac{x+7}{6\sqrt{x^2+2x+7}}$

20.27. $y=\frac{x\sqrt{x+1}}{x^2+x+1}$

20.28. $y=\frac{x^2+2}{2\sqrt{1-x^4}}$

20.29. $y=\frac{(x+3)\sqrt{2x-1}}{2x+7}$

20.30. $y=\frac{3x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+2}}$

Задание 21

Найти производную:

21.1. $y=\sin\sqrt{3}+\frac{1}{3}\frac{\sin^2 3x}{\cos 6x}$

21.2. $y=\cos\ln 2-\frac{1}{3}\frac{\cos^2 3x}{\sin 6x}$

21.3. $y=\operatorname{tg}\lg\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\frac{\sin^2 4x}{\cos 8x}$

21.4. $y=\operatorname{ctg}\sqrt[3]{5}-\frac{1}{8}\frac{\cos^2 4x}{\sin 8x}$

21.5. $y=\frac{\cos\sin 5\cdot\sin^2 2x}{2\cos 4x}$

21.6. $y=\frac{\sin\cos 3\cdot\cos^2 2x}{4\sin 4x}$

21.7. $y=\dfrac{\cos\ln 7\cdot\sin^2 7x}{7\cos 14x}$

21.8. $y=\cos(\operatorname{ctg}2)-\dfrac{1}{16}\dfrac{\cos^2 8x}{\sin 16x}$

21.9. $y=\operatorname{ctg}(\cos 2)+\dfrac{1}{6}\dfrac{\sin^2 6x}{\cos 12x}$

21.10. $y=\sqrt[3]{\operatorname{ctg}2}-\dfrac{1}{20}\dfrac{\cos^2 10x}{\sin 20x}$

21.11. $y=\dfrac{1}{3}\cos\left(\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{10}\dfrac{\sin^2 10x}{\cos 20x}.$

21.12. $y=\ln\sin\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{24}\dfrac{\cos^2 12x}{\sin 24x}$

21.13. $y=8\sin(\operatorname{ctg}3)+\dfrac{1}{5}\dfrac{\sin^2 5x}{\cos 10x}$

21.14. $y=\dfrac{\cos(\operatorname{ctg}3)\cdot\cos^2 14x}{28\sin 28x}$

21.15. $y=\dfrac{\cos\left(\operatorname{tg}\dfrac{1}{3}\right)\cdot\sin^2 15x}{15\cos 30x}$

21.16. $y=\dfrac{\sin\left(\operatorname{tg}\dfrac{1}{7}\right)\cdot\cos^2 16x}{32\sin 32x}$

21.17. $y=\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\sin\dfrac{1}{3}\right)\cdot\sin^2 17x}{17\cos 34x}$

21.18. $y=\dfrac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg}2}\cdot\cos^2 18x}{36\sin 36x}$

21.19. $y=\dfrac{\operatorname{tg}(\ln 2)\cdot\sin^2 19x}{19\cos 38x}$

21.20. $y=\operatorname{ctg}(\cos 5)-\dfrac{1}{40}\dfrac{\cos^2 20x}{\sin 40x}$

21.21. $y=\sqrt{\operatorname{tg} 4}+\dfrac{\sin^2 21x}{21\cos 42x}$

21.22. $y=\cos(\ln 13)-\dfrac{1}{44}\dfrac{\cos^2 22x}{\sin 44x}$

21.23. $y=\ln\cos\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sin^2 23x}{23\cos 46x}$

21.24. $y=\operatorname{ctg}\left(\sin\dfrac{1}{13}\right)-\dfrac{1}{48}\dfrac{\cos^2 24x}{\sin 48x}$

21.25. $y=\sin\ln 2+\dfrac{\sin^2 25x}{25\cos 50x}$

21.26. $y=\sqrt[3]{\cos\sqrt{2}}-\dfrac{1}{52}\dfrac{\cos^2 26x}{\sin 52x}$

21.27. $y=\sqrt[7]{\operatorname{tg}(\cos 2)}+\dfrac{\sin^2 27x}{27\cos 54x}$

21.28. $y=\sin\sqrt[3]{\operatorname{tg} 2}-\dfrac{\cos^2 28x}{56\sin 56x}$

21.29. $y=\cos^2\sin 3+\dfrac{\sin^2 29x}{29\cos 58x}.$

21.30. $y=\sin^3\cos 2-\dfrac{\cos^2 30x}{60\sin 60x}$

Задание 22

Применяя метод логарифмического дифференцирования, найдите производные функций:

22.1. $y=(\operatorname{arctg} x)^{(1/2)\ln(\operatorname{arctg} x)}$

22.2. $y=\left(\sin\sqrt{x}\right)^{\ln\left(\sin\sqrt{x}\right)}$

22.3. $y=(\sin x)^{5e^x}$

22.4. $y=(\arcsin x)^{e^x}$

22.5. $y=(\ln x)^{3^x}$

22.6. $y=x^{\arcsin x}$

22.7. $y=(\operatorname{ctg}3x)^{2e^x}$

22.8. $y=x^{e^{\operatorname{tg}x}}$

22.9. $y=(\operatorname{tg}x)^{4e^x}$

22.10. $y=(\cos 5x)^{e^x}$

22.11. $y=(x\sin x)^{8\ln(x\sin x)}$

22.12. $y=(x-5)^{\cos x}$

22.13. $y=(x^3+4)^{\operatorname{tg}x}$

22.14. $y=x^{\sin x^3}$

22.15. $y=(x^2-1)^{\sin x}$

22.16. $y=(x^4+5)^{\operatorname{ctg}x}$

22.17. $y=(\sin x)^{5x/2}$

22.18. $y=(x^2+1)^{\cos x}$

22.19. $y=19^{x^{19}}x^{19}$

22.20. $y=x^{3^x}\cdot 2^x$

22.21. $y=\left(\sin\sqrt{x}\right)^{e^{1/x}}$

22.22. $y=x^{e^{\operatorname{ctg}x}}$

22.23. $y=x^{e^{\cos x}}$

22.24. $y=x^{2^x}\cdot 5^x$

22.25. $y=x^{e^{\sin x}}$

22.26. $y=(\operatorname{tg}x)^{\ln(\operatorname{tg}x)/4}$

22.27. $y=x^{e^{\operatorname{arctg}x}}$

22.28. $y=x^{29^x}\cdot 29^x$

22.29. $y=(\cos 2x)^{\ln(\cos 2x)/4}$

22.30. $y=x^{e^x}x^9$

Задание 23

Проверьте, что данная функция удовлетворяет дифференциальному уравнению:

23.1. $y=\ln\dfrac{1}{1+x}$, $xy'+1=e^y$

23.2. $y=C\sqrt{1+e^{2x}}$, $ye^{2x}-\left(1+e^{2x}\right)y'=0$

23.3. $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\left(1-x^2\right)y'-xy=1$

23.4. $y=\ln\dfrac{1}{C-e^x}$, $y'=e^{x+y}$

23.5. $y=x+\ln x$, $x^2(1-\ln x)y''+xy'-y=0$

23.6. $y=1-\ln|x|$, $x-y+xy'=0$

23.7. $y=\sqrt{x^2-x}$, $x^2+y^2-2xyy'=0$

23.8. $y=(1+x)e^{-x}-2$, $y''-2y'+y=-2$

23.9. $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{x}$, $xy''+2y'-xy=0$

23.10. $y=x\ln 2x$, $y'x=x+y$

23.11. $y=xe^{2x+1}$, $y'x=y(\ln y-\ln x)$

23.12. $y=\ln(3+e^x)$, $y'=e^{x-y}$

23.13. $y=e^{\frac{\pi}{4}-arctgx}$, $(1+x^2)y'+y=0$

23.14. $y=\arccos e^{4x}$, $\ln\cos y+xy'tgy=0$

23.15. $2^x-2^y=\dfrac{3}{32}$, $y'=2^{x-y}$

23.16. $y=\ln tge^x$, $y'=e^{x+y}+e^{x-y}$

23.17. $y=x\arcsin x$, $xy'-y=xtg\dfrac{y}{x}$

23.18. $y=Ce^{\sqrt{1-x^2}}$, $xy+\sqrt{1-x^2}\cdot y'=0$

23.19. $y=tgx-1+e^{-tgx}$, $y'\cos^2 x+y=tgx$

23.20. $y=x\sin x$, $xy'-y=x^2\cos x$

23.21. $y=\dfrac{1}{2}x^2e^{-x^2}$, $y'+2xy=xe^{-x^2}$

23.22. $y=\dfrac{x\cos x}{1+\sin x}$, $y'\cos x+y=1-\sin x$

23.23. $y=\dfrac{4(x-1)}{x^3}$, $y'+\dfrac{3}{x}y=\dfrac{4}{x^3}$

23.24. $y=arctgx-1+e^{-arctgx}$, $(1+x^2)y'+y=arctgx$

23.25. $y=\frac{1}{2}x^2\ln x$, $y'-\frac{y}{x\ln x}=x\ln x$

23.26. $y=e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^x+1\right)^2$, $y'+y=\sqrt{y}\cdot e^{\frac{x}{2}}$

23.27. $y=e^{-\arcsin x}+\arcsin x-1$, $y'\sqrt{1-x^2}+y=\arcsin x$

23.28. $y=(x+1)(x-arctgx)$, $y-y'=y^2+xy'$

23.29. $y=\frac{1}{4}x^4e^{-2x^2}$, $y'+4xy=2xe^{-x^2}\sqrt{y}$

23.30. $y=-\frac{1}{\cos x\cdot\sqrt[3]{3tgx}}$, $y'=y\left(y^3\cos x+tgx\right)$

5.4. Производные высших порядков

Производную от производной $f'(x)$ называют второй производной от функции f(x) и обозначают $f''(x)$: $f''(x)=\left(f'(x)\right)'$. Производную от $f''(x)$ называют третьей производной функции f(x) и обозначают $f'''(x)$. Таким образом,

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)',\quad f'''(x)=\left(f''(x)\right)',\ \ldots,\ f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)',\ \ldots$$

Общепринятыми являются и другие обозначения производной *n*-го порядка функции y = f(x): $\frac{d^ny}{dx^n}$ или $\frac{d^nf(x)}{dx^n}$.

Пример 19 Найти y'', y''', если $y=\ln(\sin x)$.

Решение

$$y''=\left(\ln(\sin x)\right)''=\left(\left(\ln(\sin x)\right)'\right)'=\left(\frac{1}{\sin x}\cos x\right)'=(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$y''' = \left(\ln(\sin x)\right)''' = \left(\left(\ln(\sin x)\right)''\right)' = \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)' = -\left((\sin x)^{-2}\right)' =$$

$$= -(-2)(\sin x)^{-3}\cos x = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}$$

Задачи

Найти производные второго порядка:

143. $y = tgx$

144. $y = \frac{1}{5}x^5(5\ln x - 1)$

145. $y = \sqrt{1+x^2}\,arctgx$

Найти производные третьего порядка:

146. $y = x\ln x$

147. $y = \arcsin x$

148. $y = xe^{-x}$

Задачи для самостоятельного решения

Задание 24

Найти производную второго порядка:

24.1. $y = \ln tgx$

24.2. $y = \ln\sin(2x+5)$

24.3. $y = \ln ctg 2x$

24.4. $y = 2^{x^2}$

24.5. $y = \sin^3\frac{x}{2}$

24.6. $y = \ln\left(x^2+5\right)$

24.7. $y = \ln tg\frac{x}{2}$

24.8. $y = \sqrt{1-3x^2}$

24.9. $y = e^{\sqrt{2x}}\left(\sqrt{2x}-1\right)$

24.10. $y = \sin^2\frac{x}{2}$

24.11. $y = \cos^3\frac{x}{3}$

24.12. $y = \sqrt{2x^2+1}$

24.13. $y = \ln ctg\frac{x}{2}$

24.14. $y = tg\,\dfrac{3}{x^3}$

24.15. $y = \arcsin\sqrt{2x}$

24.16. $y = arctg\sqrt{3x}$

24.17. $y = ctg\,\dfrac{1}{x^2}$

24.18. $y = ctg\sqrt{\dfrac{x}{2}}$

24.19. $y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin 2x}}$

24.20. $y = \dfrac{1}{\sqrt{\cos 3x}}$

24.21. $y = \ln\cos 2x$

24.22. $y = \cos\dfrac{2}{x^2}$

24.23. $y = \ln\cos\dfrac{x}{2}$

24.24. $y = \arccos\sqrt{x}$

24.25. $y = arcctg\sqrt{2x}$

24.26. $y = tg^2\,\dfrac{x}{2}$

24.27. $y = ctg^3\,\dfrac{x}{3}$

24.28. $y = arctge^{2x}$

24.29. $y = 3^{x^3}$

24.30. $y = e^{\frac{1}{x^2}}$.

5.5. Производная функции, заданной параметрически

Производная первого порядка

Пусть даны две функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ одной независимой переменной t, определенные и непрерывные на некотором промежутке. Предположим теперь, что функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ имеют производные, причем $x(t) \neq 0$ на этом промежутке. Тогда y можно рассматривать как функцию, зависящую от переменной x посредством переменной t, называемой параметром. В этом случае говорят, что функция y от x задана параметрически.

Производная функции y по переменной x вычисляется по формуле

$$y'_x(t)=\frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}.$$

Производная второго порядка

Вторая производная функции y, заданной параметрически, по переменной x находится по следующей формуле:

$$y''_{xx}(t)=\frac{y''_{tt}(t)x'_t(t)-x''_{tt}(t)y'_t(t)}{\left(x'_t(t)\right)^3}$$

Пример 20 Найти $y'_x(t)$ и $y''_{xx}(t)$ функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2}, \\ y=1/t, \qquad t\in(-1;0)\cup(0;1). \end{cases}$$

Решение Находим производные $x'_t(t)$ и $y'_t(t)$:

$$x'_t=\left(\sqrt{1-t^2}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}(-2t)=-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}};$$

$$y'_t=\left(\frac{1}{t}\right)'=-\frac{1}{t^2};$$

Таким образом, в точках, в которых $x'_t(t)\neq 0$, имеем

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=-\frac{1}{t^2}:\left(-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)=\frac{\sqrt{1-t^2}}{t^3};$$

Для нахождения производной $y''_{xx}(t)$ вычислим производные $x''_{tt}(t),\ y''_{tt}(t)$:

$$x''_{tt}(t)=\left(x'_t\right)'=\left(-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)'=-\frac{\sqrt{1-t^2}-t\left(\sqrt{1-t^2}\right)'}{1-t^2}=-\frac{\sqrt{1-t^2}+\dfrac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}}{1-t^2}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{\left(1-t^2\right)^3}}$$

$$y''_{tt}=\left(-\frac{1}{t^2}\right)'=\frac{2}{t^3}$$

Подставляя найденные производные в формулу , получаем:

$$y''_{xx}(t)=\frac{y''_{tt}(t)x'_t(t)-x''_{tt}(t)y'_t(t)}{\left(x'_t(t)\right)^3}=\frac{\frac{2}{t^3}\left(-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)+\frac{1}{\sqrt{\left(1-t^2\right)^3}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{\left(-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^3}=$$

$$=\frac{-\frac{2}{t^2\sqrt{1-t^2}}-\frac{1}{t^2\sqrt{\left(1-t^2\right)^3}}}{\left(-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^3}=-\frac{\left(2\left(1-t^2\right)+1\right)\sqrt{\left(1-t^2\right)^3}}{t^2\sqrt{\left(1-t^2\right)^3}\left(-t\right)^3}=\frac{3-2t^2}{t^5}$$

Задачи

Найти $y'_x(t)$ и $y''_{xx}(t)$ функции, заданной параметрически:

149. $x(t)=3\cos t,\ y(t)=-2\sin t$

150. $x(t)=t^2,\ y(t)=\frac{t^3}{3}-t$

151. $x(t)=e^{2t},\ y(t)=e^{3t}$

152. $x(t)=t^2,\ y(t)=t^3+t$

153. $x(t)=4\cos^3 t,\ y(t)=4\sin^3 t$

154. $x(t)=\frac{1-t}{\left(t+1\right)^2},\ y(t)=\frac{t\left(1-t\right)}{\left(t+1\right)^2}$

155. $x(t)=\frac{t}{t^2+1},\ y(t)=\frac{t^2}{t^2+1}$

Задачи для самостоятельного решения

Задание 25

Найти $y'_x(t)$ функции, заданной параметрически:

25.1. $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$

25.2. $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$

25.3. $\begin{cases} x = 2t^3 + t, \\ y = \ln t. \end{cases}$

25.4. $\begin{cases} x = 7(t - \sin t), \\ y = 7(1 - \cos t). \end{cases}$

25.5. $\begin{cases} x = 2t - t^3, \\ y = 2t^2. \end{cases}$

25.6. $\begin{cases} x = \ln \dfrac{t^2 - 1}{4} \\ y = \sin t \end{cases}$

25.7. $\begin{cases} x = arctg\, t \\ y = \sqrt{t^2 + 1} \end{cases}$

25.8. $\begin{cases} x = \ln \dfrac{\sin t - 1}{2} \\ y = \arcsin t \end{cases}$

25.9. $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \dfrac{1}{t^2 - 5} \end{cases}$

25.10. $\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = \ln \sin t \end{cases}$

25.11. $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = t - arctgt \end{cases}$

25.12. $\begin{cases} x = e^{-t} \sin t \\ y = e^{t} \cos t \end{cases}$

25.13. $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^2 - \sin t \end{cases}$

25.14. $\begin{cases} x = \ln t + \sin t \\ y = t^2 \cos t \end{cases}$

25.15. $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = tarcctg\ t \end{cases}$

25.16. $\begin{cases} x = \sin t + \cos t \\ y = 2^t \end{cases}$

25.17. $\begin{cases} x = t^2 \cos t \\ y = t^2 \sin t \end{cases}$

25.18. $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$

25.19. $\begin{cases} x = \sin t \cos^2 t \\ y = -\cos^3 t \end{cases}$

25.20. $\begin{cases} x = \sin^3 t \\ y = \cos^3 t \end{cases}$

25.21. $\begin{cases} x = \dfrac{t + 1}{t^4} \\ y = \dfrac{4}{t^2} + \dfrac{1}{3t} \end{cases}$

25.22. $\begin{cases} x = e^{t} \cos t \\ y = e^{-t} \sin t \end{cases}$

25.23. $\begin{cases} x = \sin t + t \\ y = \sqrt{t^3 + 1} \end{cases}$

25.24. $\begin{cases} x = \sqrt[3]{t} \\ y = arctgt \end{cases}$

25.25. $\begin{cases} x = \ln^3 t \\ y = \sin(t+1) \end{cases}$

25.26. $\begin{cases} x = \ln(\cos t + 1) \\ y = \sin t + t \end{cases}$

25.27. $\begin{cases} x = \arccos t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$

25.28. $\begin{cases} x = arcctgt \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$

25.29. $\begin{cases} x = tg\, t + 1 \\ y = \sin^2(t-4) \end{cases}$

25.30. $\begin{cases} x = ctgt \\ y = t\cos t + \sin t \end{cases}$

5.6. Производная функции, заданной неявно

Пусть функция $y = f(x)$ задана уравнением $F(x, y) = 0$. Это означает, что $F(x, f(x)) \equiv 0$ на некотором интервале. Тогда функция $y = f(x)$ называется неявно заданной функцией.

Для нахождения производной функции $y = f(x)$, заданной неявно, следует продифференцировать обе части равенства $F(x, y) = 0$, считая y функцией от x. Затем полученное уравнение, в которое будут входить x, y и y', следует разрешить относительно y'. Для нахождения y'' равенство (2) дифференцируется дважды, в результате чего получается уравнение, содержащее x, y, y', y'', которое следует разрешить относительно y'', затем вместо y' подставить функцию от x и y, найденную указанным выше способом.

Пример 21 Найти значения y', y'', если функция у задана неявно уравнением $x^2 + y^2 = 5xy^3$.

Решение Пусть $y = f(x)$, тогда $x^2 + \left(f(x)\right)^2 = 5x\left(f(x)\right)^3$.

Продифференцируем обе части данного равенства:

$\left(x^2 + \left(f(x)\right)^2\right)' = \left(5x\left(f(x)\right)^3\right)' \Leftrightarrow$

$$2x+2f(x)f'(x)=5\left(f(x)\right)^3+15x\left(f(x)\right)^2 f'(x) \Leftrightarrow$$

$$f'(x)=\frac{2x-5\left(f(x)\right)^3}{15x\left(f(x)\right)^2-2f(x)}$$

Отсюда находим, что $y'=\dfrac{2x-5y^3}{15xy^2-2y}$.

Найдём y''. Имеем, что

$$y''=\left(f'(x)\right)'=\left(\frac{2x-5f^3(x)}{15xf^2(x)-2f(x)}\right)'=$$

$$=\frac{\left(2-15f^2(x)f'(x)\right)\left(15xf^2(x)-2f(x)\right)}{\left(15xf^2(x)-2f(x)\right)^2}-$$

$$-\frac{\left(2x-5f^3(x)\right)\left(15\left(f(x)\right)^2+2xf(x)f'(x)-2f'(x)\right)}{\left(15xf^2(x)-2f(x)\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(20f^3(x)-75xf^4(x)-60x^2f(x)+4x\right)f'(x)-4f(x)+75f^5(x)}{\left(15xf^2(x)-2f(x)\right)^2}$$

Подставив в последнем равенстве значение $f'(x)$, окончательно получаем

$$f''(x)=\frac{1500xf^6(x)-120x^3+150x^2f^3(x)-250f^5(x)}{\left(15xf^2(x)-2\right)^3 f^2(x)},$$

Итак, $y'=\dfrac{2x-5y^3}{15xy^2-2y}$, $y''=\dfrac{1500xy^6-120x^3+150x^2y^3-250y^5}{\left(15xy^2-2\right)^3 y^2}$.

Задачи

Найти производные неявно заданных функций:

156. $x^2y^4+10=3x^4y^3+x^5-5$

157. $x^3+x^2y-4=2x^2y^2-6x+1$

158. $e^{xy}=\ln\left(y^2+x^2\right)$

159. $\arcsin y = x^2 y^3 - 7yx^2$

Задачи для самостоятельного решения

Задание 26

Найти производные неявно заданных функций:

26.1. $\arccos^2 xy + \sin y = 1$

26.2. $ctg(y+6) = x^5 + 2y^2$

26.3. $ctgy + x^2 - y = 9$

26.4. $2^x + 2^y = 2^{x+y}$

26.5. $x^4 + y^4 = e^{x+y}$

26.6. $xtgy = x + y^2$

26.7. $\cos\frac{x}{y} + 3^{4y} = 0$

26.8. $\cos(y+5) = 2x + y^3$

26.9. $\arccos x - 4y^2 = 5$

26.10. $x^4 - 3y + 2^y = 6$

26.11. $\frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} = 0$

26.12. $x^2 + y^2 \ln x - 4 = 0$

26.13. $\sin(y - x^2) - 3 = 0$

26.14. $y^2 + 5x = 5^x - \sin y$

26.15. $e^{xy} - y^2 = 0$

26.16. $y\ arctg\ y - \arcsin x = 0$

26.17. $x^4 - 6x^2y^2 + 9y^4 + 15y^2 = 0$

26.18. $x^2 \sin y + 2x - y + 1 = 0$

26.19. $x + \ln y - x^2 e^y = 0$

26.20. $e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0$

26.21. $x^2 y^2 - ctgy + 3 = 0$

26.22. $arctgy = xy$

26.23. $\cos x + e^{4y} = 9$

26.24. $tg(y-1) = x + y^2$

26.25. $x - 3y + e^y = 5$

26.26. $2x^2 + x = y^3$

26.27. $e^{x+y} = xy$

26.28. $\sin xy = x^2 y$

26.29. $x^3 + y^2 - 3xy = 0$

26.30. $\sin y = x + 3y$

5.7. Дифференциал функции. Правила вычисления дифференциала

Придадим аргументу x в точке x_0 приращение $\vartriangle x$, тогда функция $y = f(x)$ получит приращение

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Если существует число A, такое, что $\Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$, то говорят, что $f(x)$ ***дифференцируемая в точке*** x_0. Линейная часть $A \cdot \Delta x$ приращения функции называется ***дифференциалом функции в точке*** x_0 и обозначается df или dy.

Если x – независимое переменное (т.е. не зависит от других переменных), то полагают $dx = \Delta x$.

Вычисление дифференциала

Правила дифференцировании функций аналогичны правилам нахождения производных. Для функций u, v и f справедливы свойства:

$$d(u+v) = du + dv; \qquad d(u-v) = du - dv;$$

$$d(uv) = udv + vdu; \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{udv - vdu}{v^2}, v \neq 0;$$

Теорема1. Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 в том и только в том случае, если $f(x)$ имеет производную в этой точке. При этом $df = f'(x_0)dx$.

Пример 22 Найти дифференциал функции $f = x^3$

Решение Дифференциал df функции $f(x)$ находится по формуле $df = f'(x)dx$, поэтому

$$df = \left(x^3\right)' dx = 3x^2 dx.$$

Пример 23 Найти дифференциал функции $f = 5\cos 3x$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Решение По правилу нахождения дифференциала функции в точке, имеем

$$df = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)dx.$$

Находим, $f'(x) = -15\sin 3x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -15\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 15$.

Следовательно, дифференциал df функции $f = 5\cos 3x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$ равен $15dx$:

$$df = 15dx.$$

Пример 24 Найти дифференциал функции $f = x\sin^2 x^3$.

Решение

$$df = f'dx = \left(x\sin^2 x^3\right)' dx =$$
$$= \left(\sin^2 x^3 + x \cdot 2\sin x^3 \cos x^3 \cdot 3x^2\right)dx =$$
$$= \left(\sin^2 x^3 + 3x^3 \sin^2 2x^3\right)dx$$

Если в равенстве $\Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$ отбросить бесконечно малую величину $o(\Delta x)$, то получим приближённое равенство $\Delta f \approx df$, которое применяется для нахождения приближённого значения функции.

Пример 25 Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенно значение x, если $g(-5) = -3$, $g(x) = -2{,}96$ и $g'(-5) = 2$.

Решение По определению приращение функции g(x): $\Delta g = g(x) - g(x_0)$. Заменим приращение функции дифференциалом, т.е. будем считать, что $\Delta g \approx dg$.

Тогда, $dg = g(x) - g(x_0)$.

Дифференциал dg функции $g(x)$ находится по формуле $dg = g'(x)dx$, поэтому

$$g'(x_0)dx = g(x) - g(x_0).$$

Учитывая, что $dx = \Delta x = x - x_0$, получаем

$$g'(x_0)\cdot(x - x_0) = g(x) - g(x_0) \Rightarrow 2\cdot\left(x-(-5)\right) = -2,96-(-3)$$

Т.е.

$$2\cdot(x+5) = 0,02 \Leftrightarrow 2x+10 = 0,02$$

$$\Leftrightarrow 2x = -9,88 \Leftrightarrow x = -4,98$$

Пример 26 Найти приближённое значение $\sqrt{15,75}$.

Решение Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x}$. Положим $x_0 = 16$, тогда $\Delta x = 15,75 - 16 = -0.25$.

Имеем, $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df$, где $f(x_0) = \sqrt{16} = 4$,

$df = f'(x_0)dx$, $dx = \Delta x = -1/4$,

$f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = 1/\left(2\sqrt{x}\right)$, $f'(x_0) = 1/\left(2\sqrt{16}\right) = 1/8$.

Таким образом, $df = \dfrac{1}{8}\left(-\dfrac{1}{4}\right) = -1/32$.

Окончательно находим

$\sqrt{15,75} \approx 4 - 1/32 = 127/32 = 3,96875 \approx 3,97$.

5.8. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора

Дифференциалом второго порядка $d^2 f$ функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала df, где df рассматривается как функция от x: $d^2 f = d(df)$.

Дифференциалом третьего порядка d^3f называется дифференциал от второго дифференциала: $d^3 f = d\left(d^2 f\right)$ и т.д.

Если переменная x является независимой, то $d^2 x = d^3 x = \ldots = d^n x = \ldots = 0$. В этом случае

$$d^2 f = f''(x)(dx)^2, \qquad d^3 f = f'''(x)(dx)^3, ...,$$
$$d^n f = f^{(n)}(x)(dx)^n, \ldots$$

Для краткости вместо $(dx)^n$ принято писать dx^n, т.е. $d^n f = f^{(n)}(x)dx^n$.

Пример 27 Найти дифференциал d^3y функции $y = x^4 - 3x^2 + 4$.

Решение Последовательно дифференцируя, получаем

$$y'(x) = 4x^3 - 6x, \; y''(x) = 12x^2 - 6, \; y'''(x) = 24x.$$

Следовательно, $d^3y = y'''(x)dx^3 = 24xdx^3$.

Если функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и в этой окрестности имеет производные до $(n+1)$-го порядка включительно (т.е. дифференцируема $(n+1)$ раз), то справедлива ***формула Тейлора***

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x)$ – остаточный член, являющийся бесконечно малой величиной при $x \to x_0$.

Остаточный член обычно записывают в виде

$$R_{n+1}(x) = o\left((x - x_0)^n\right) \text{ (в форме Пеано)}$$

или в виде

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \text{ (в форме Лагранжа),}$$

где c – некоторое число между x_0 и x.

Формула Тейлора допускает и другую запись через дифференциалы

$$\Delta f = \frac{df}{1!} + \frac{d^2 f}{2!} + \frac{d^3 f}{3!} + \cdots + \frac{d^n f}{n!} + R_{n+1}(x)$$

.

Формулу Тейлора применяют для приближенных вычислений.

Пример 28 Функцию $f(x) = e^{\sin x}$ в окрестности точки $x = 0$ приближенно замените многочленом третьей степени.

Решение Положив в формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано $x_0 = 0$, получим

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3),$$

Последовательно дифференцируя $f(x)$, получаем

$$f'(x) = \left(e^{\sin x}\right)' = \cos x \cdot e^{\sin x} \Rightarrow f'(0) = \cos 0 \cdot e^{\sin 0} = 1;$$

$$f''(x) = \left(\cos x e^{\sin x}\right)' = -\sin x \cdot e^{\sin x} + \cos^2 x \cdot e^{\sin x} \Rightarrow$$

$$f''(0) = 0 + \cos^2 0 \cdot e^{\sin 0} = 1;$$

$$f'''(x) = \left(\left(-\sin x + \cos^2 x\right)e^{\sin x}\right)' =$$

$$= \left(-\cos x - 2\cos x \sin x\right) \cdot e^{\sin x} + \left(-\sin x + \cos^2 x\right)\cos x \cdot e^{\sin x} \Rightarrow$$

$$f'''(0) = (-1 - 0) \cdot 1 + (-0 + 1) \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

Учитывая, что $f(0) = 1$, имеем

$$f(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + R_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)$$

Пример 29 С помощью формулы Тейлора найти приближённое значение sin 1 с точностью до 0,001.

Решение Введём в рассмотрение функцию $f(x)=\sin(x)$. Положив $x_0=0$, получим

$$f(1)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}+\frac{f''(0)}{2!}+\frac{f'''(0)}{3!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

,

где $0<c<1$ (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа).

Имеем

$f(0)=\sin 0=0$, $f'(0)=\cos 0=1$, $f''(0)=-\sin 0=0$,

$f'''(0)=-\cos 0=-1$, $f^{IV}(0)=\sin 0=0$, …,

$$|R_{n+1}|=\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\right|\le\frac{1}{(n+1)!}.$$

Для вычисления требуемого значения нужно взять n таким, чтобы $|R_{n+1}|<0{,}001$, или $\dfrac{1}{(n+1)!}<\dfrac{1}{1000}$; $(n+1)!>1000$.

Это неравенство достигается при $n=6$, так как $6!=720<1000$, а $7!=5040>1000$. Поэтому

$$\sin 1\approx 1-\frac{1}{6}+\frac{1}{120}=\frac{101}{120}\approx 0{,}8417\approx 0{,}842$$

Пример 30 Напишите разложение многочлена четвертой степени $P(x)$ по степеням $x-10$, используя формулу Тейлора. Найдите $P''(10)$, если $P(10)=4$, $P'(10)=1$, $P'''(10)=18$, $P^{(4)}(10)=48$ и $P(11)=11$.

Решение Положив в формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа $x_0=10$, получим

$$P(x)=P(10)+\frac{P'(0)}{1!}(x-10)+\frac{P''(0)}{2!}(x-10)^2+$$

$$+\frac{P'''(0)}{3!}(x-10)^3+\frac{P^{(4)}(0)}{4!}(x-10)^4+\frac{P^{(5)}(c)}{5!},$$

где $0<c<1$.

Учитывая, что по условию задачи степень многочлена равна четырем, а $P(10)=4$, $P'(10)=1$, $P'''(10)=18$, $P^{(4)}(10)=48$, имеем

$$P(x)=4+\frac{1}{1!}(x-10)+\frac{P''(0)}{2!}(x-10)^2+\frac{18}{3!}(x-10)^3+\frac{48}{4!}(x-10)^4=$$

$$=4+(x-10)+\frac{P''(0)}{2}(x-10)^2+\frac{18}{6}(x-10)^3+\frac{48}{24}(x-10)^4=$$

$$=x-6+\frac{P''(0)}{2}(x-10)^2+3(x-10)^3+2(x-10)^4$$

Так же нам известно, что $P(11)=11$. С другой стороны, по формуле Тейлора

$$P(11)=11-6+\frac{P''(0)}{2}(11-10)^2+3(11-10)^3+2(11-10)^4 \Rightarrow$$

$$P(11)=\frac{P''(0)}{2}+11-6+3+2 \Rightarrow$$

$$P(11)=\frac{P''(0)}{2}+10$$

Получаем, что $\dfrac{P''(10)}{2}+10=11 \Rightarrow \dfrac{P''(10)}{2}=1 \Rightarrow P''(10)=2$.

Задачи

Найти дифференциал функции:

160. $y=x^5$

161. $y=tgx$

162. $y=\sin^3 2x$

163. $y=\ln x$

164. $y=\ln\left(\sin\sqrt{x}\right)$

165. $y=e^{-\frac{1}{\cos x}}$

166. $y=2^{-x^2}$

Найти дифференциал функции в точке x_0:

167. $y=x^{-4}, x_0=-1$

168. $y=x^3-3x^2+3x, x_0=0$

169. $y=\sqrt{1+x^2}, x_0=-3$

170. $y=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}, x_0=2$

171. $y = \ln\cos x, x_0 = \dfrac{\pi}{4}$

172. $y = e^{-2x}, x_0 = -\dfrac{1}{2}$

173. $y = \sqrt{x} + 1, x_0 = 4$

174. $y = arctg\sqrt{4x-1}, x_0 = 3$

Найти дифференциал второго порядка:

175. $y = ctgx$

176. $y = \cos^2 x$

177. $y = \ln(2x-3)$

Найти дифференциал третьего порядка:

178. $y = e^x \cos x$

179. $y = x\ln x$

180. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенно значение x, если $g(5) = 2$, $g(x) = 2{,}04$ и $g'(5) = -4$.

181. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенно значение x, если $g(-5) = 2$, $g(x) = 2{,}04$ и $g'(-5) = -4$.

182. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенно значение x, если $g(-3) = 5$, $g(x) = 5{,}04$ и $g'(-3) = -2$.

183. Напишите разложение функции $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ по степеням $x-1$ до члена четвертого порядка включительно.

184. Найдите три члена разложения функции $f(x) = \sqrt{x}$ по степеням разности $x-1$.

185. Функцию $f(x) = e^{2x-x^2}$ в окрестности точки $x = 0$ приближенно замените многочленом третьей степени.

186. Напишите разложение многочлена четвертой степени $P(x)$ по степеням $x-11$, используя формулу Тейлора. Найдите $P'''(11)$, если $P(11) = 5$, $P'(11) = 4$, $P''(11) = 6$, $P^{(4)}(11) = 72$ и $P(10) = 5$.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 27

Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

27.1. $\sqrt[5]{32,16}$

27.2. $\ln(1,003)$

27.3. $\sqrt[3]{7,97}$

27.4. $\sqrt{9,03}$

27.5. $\ln(0,99)$

27.6. $\sqrt[4]{15,96}$

27.7. $\sqrt{8,76}$

27.8. $\sqrt[4]{80,73}$

27.9. $\cos 61^0$

27.10. $\arcsin 0,08$

27.11. $\sqrt[3]{124,98}$

27.12. $\sqrt{25,12}$

27.13. $ctg\left(\frac{\pi}{4}-0,017\right)$

27.14. $\sqrt[5]{32,11}$

27.15. $\ln 1,03$

27.16. $\sqrt{36,06}$

27.17. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+0,001\right)$

27.18. $e^{0,01}$

27.19. $\sqrt[3]{27,03}$

27.20. $tg\left(\pi+0,001\right)$

27.21. $\sqrt[4]{16,04}$

27.22. $\sqrt{1,005}$

27.23. $\ln 0,97$

27.24. $(1,03)^5$

27.25. $\arcsin 0,51$

27.26. $\sqrt[4]{15,8}$

27.27. $arctg 1,05$

27.28. $\ln 1,1$

27.29. $\arcsin 0,04$

27.30. $\sin 32^0$

5.9. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя

Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$.

Первое правило Лопиталя

Будем говорить, что отношение двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to a$ есть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0.$$

Раскрыть неопределенность – значит вычислить предел $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, если он существует, или установить, что он не существует.

Сформулируем ***первое правило Лопиталя***. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a. Пусть, далее,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0 \text{ и } g'(x) \neq 0$$

в указанной окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a. Тогда, если существует предел отношения производных $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный), то существует и предел $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, причем справедлива формула

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Замечание. Формула (правило Лопиталя) остается верной и в случае, когда $x \to a-0, x \to a+0, x \to \infty, x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

Пример 1 Найти предел $\lim_{x \to 4} \frac{x^2-16}{x^2-5x+4}$.

Решение

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-5x+4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{\left(x^2-16\right)'}{\left(x^2-5x+4\right)'}=\lim_{x\to 4}\frac{2x}{2x-5}=\frac{8}{3}.$$

Пример 2 Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=\lim_{x\to 0}e^x=1.$$

Пример 3 Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(e-x)+x-1}$.

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(e-x)+x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)'}{\left(\ln(e-x)+x-1\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{-\dfrac{1}{e-x}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{1+1}{-\dfrac{1}{e}+1}=\frac{2e}{e-1}.$$

Замечание. Если производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и сами функции $f(x)$ и $g(x)$, то правило Лопиталя можно применить повторно. При этом получаем:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Пример 4 Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Напомним, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ и по первому замечательному пределу.

Пример 5 Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{6}.$$

Раскрытие неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Второе правило Лопиталя

Будем говорить, что отношение двух функций $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x\to a$ есть неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, если

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\infty,\ +\infty \text{ или } -\infty .$$

Сформулируем ***второе правило Лопиталя***. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a. Пусть, далее,

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\infty \text{ и } g'(x)\neq 0$$

в указанной окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a. Тогда, если существует предел отношения производных $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный), то существует и предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, причем справедлива формула

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Замечание. Приведенное правило раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ аналогично правилу раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Замечания, относящиеся к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ остаются в силе и для всех других неопределенностей.

Пример 6 Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2-11}{5x^2+4}$.

Решение $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2-11}{5x^2+4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(6x^2-11\right)'}{\left(5x^2+4\right)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x}{10x}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$.

Пример 7 Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$.

Решение $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$.

Раскрытие неопределенностей вида $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$

Неопределенности вида $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$ можно свести к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 8 Найти предел $\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x$.

Решение Имеем неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Так как $x \ln x = \dfrac{\ln x}{1/x}$, то получаем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Применяя второе правило Лопиталя, имеем

$$\lim_{x\to 0+0} x\ln x = \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \lim_{x\to 0+0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+0} x = 0.$$

Пример 9 Найти предел $\lim\limits_{x\to 0+0} \sqrt{x} \ln x$.

Решение

$$\lim_{x\to 0+0} \sqrt{x}\ln x = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{x^{-1/2}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{(\ln x)'}{\left(x^{-1/2}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{1/x}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{-2x^{3/2}}{x} = -2 \lim_{x\to 0+0} x^{1/2} = 0.$$

Пример 9 Найти предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{1}{\cos x} - tgx\right)$.

Решение Имеем неопределенность вида $\infty - \infty$. Так как

$$\frac{1}{\cos x} - tgx = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1-\sin x}{\cos x},$$

то при том же условии $x \to \dfrac{\pi}{2}$ получаем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Воспользуемся первым правилом Лопиталя

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - tgx\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin x)'}{(\cos x)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} = 0.$$

Пример 10 Найти предел $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$.

Решение

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x-1-\ln x\right)'}{\left((x-1)\cdot\ln x\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{1-1/x}{\ln x+(x-1)/x}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{x-1}{x}}{\dfrac{x\ln x+x-1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x-1\right)'}{\left(x\ln x+x-1\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+1+1}=\frac{1}{2}.$$

Раскрытие неопределенностей вида $0^0, 1^\infty$ и ∞^0

Неопределенности вида $0^0, 1^\infty$ и ∞^0 имеют место при рассмотрении функций вида $y=f(x)^{g(x)}$, если при $x\to a$ функция $f(x)$ стремится к 0,1 и ∞ , а функций $g(x)$ - соответственно к 0, ∞ и 0.

Эти неопределенности сводятся к неопределенности вида $0\cdot\infty$ с помощью тождества $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$.

Пример 11 Найти $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x$.

Решение Имеем неопределенности вида 0^0 . Так как $x^x=e^{x\ln x}$, то в показатели степени получена неопределенность вида $0\cdot\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0+0} x^x = \lim\limits_{x\to 0+0} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x} =$ (см. п.6.3., пример 8) $= e^0 = 1$.

Пример 12 Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{e^x-1-x}}$.

Решение Имеем неопределенности вида 1^∞ . Так как

$$\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{e^x-1-x}}=e^{\frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x}},$$

то в показателе степени получена неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Применяя первое правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{e^x-1-x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\left(1+x^2\right)\left(e^x-1\right)}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{2x\left(e^x-1\right)+\left(1+x^2\right)e^x}=\frac{2}{1}=2.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{e^x-1-x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{e^x-1-x}}=e^2.$

Пример 13 Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tgx\right)^{2\cos x}$

Решение Имеем неопределенности вида ∞^0. Так как

$$\left(tgx\right)^{2\cos x}=e^{2\cos x\ln tgx}=e^{\frac{2\ln tgx}{1/\cos x}}$$

то в показатели степени получена неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Применяя второе правило Лопиталя, имеем

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\ln tgx}{1/\cos x}=2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\ln tgx\right)'}{\left(1/\cos x\right)'}=2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\left(-\sin x\right)}=$$

$$=2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{tgx\cdot\sin x}=2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x\cdot\sin x}=2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^2 x}=2\cdot\frac{0}{1}=0$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tgx\right)^{2\cos x}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}2\cos x\ln tgx}=e^0=1.$

Задачи

Используя правило Лопиталя, вычислите пределы:

187. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 2x)}{\sin 2x}$

188. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-arctg\,x}{x^3}$

189. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\arcsin 2x}$

190. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{2x}-2}$

191. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{tg\,3x}{tg\,x}$

192. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^5}{e^{x/100}}$

193. $\lim\limits_{x\to 1-0}\ln x\,\ln(1-x)$

194. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 7x}{tg 5x}$

195. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\sin 3x}{x^3}$

196. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x-\sin x}$

197. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{tgx-1}{\sin 4x}$

198. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-1+\cos 3x}{e^x-e^{-x}}$

199. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{\sin x-x}$

200. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-3x}-e^{\sin x}}{x}$

201. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{\ln x}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

202. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

203. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

204. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+x^2}{(1+x)^5-1+x^2}$

205. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}$

206. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^2}{2}-x-1}{\cos x+\dfrac{x^2}{2}-1}$

207. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1-x\ln 2}{(1-x)^{10}-1+10x}$

Глава 6. Исследование функции. Построение графика функции

6.1. Возрастание и убывание функции. Точки экстремума

Говорят, что функция $y = f(x)$ ***возрастает (убывает) на интервале*** $(a;b)$, если для любых различных точек x_1, x_2 из $(a;b)$ справедливо неравенство $\left(f(x_2) - f(x_1)\right)\left(x_2 - x_1\right) > 0$ $\left(\left(f(x_2) - f(x_1)\right)\left(x_2 - x_1\right) < 0\right)$, т.е. если большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции.

Теорема 1 Если функция $f(x)$ дифференцируема на $(a;b)$ и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для любого $x \in (a;b)$, то $f(x)$ возрастает (убывает) на $(a;b)$.

Точка x_0 называется ***точкой максимума (минимума)*** функции $f(x)$, определённой в некоторой окрестности x_0, если существует некоторая окрестность $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ этой точки, такая, что для любого $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta), x \neq x_0$ справедливо неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$); при этом $f(x_0)$ называют ***максимумом (минимумом) функции***. Точки максимума и точки минимума называют ***точками экстремума***.

Теорема 2 (необходимое условие экстремума) Если функция $f(x)$ дифференцируема в промежутке $(a;b)$ и $x_0 \in (a;b)$ является точкой экстремума $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$.

Точки, в которых $f'(x_0)=0$, называются ***стационарными точками*** $f(x)$. Не всякая стационарная точка является точкой экстремума.

Точкой экстремума $f(x)$ может оказаться и точка, в которой $f'(x)$ не определена. Стационарные точки и точки, в которых $f'(x)$ не определена, называют ***критическими точками*** функции.

Теорема 3 (достаточное условие экстремума) Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в окрестности стационарной точки x_0. Если при переходе через точку x_0 производная функции $f'(x)$ меняет свой знак, то x_0 является точкой экстремума. А именно, если при переходе через точку x_0:

1) если $f'(x)$ меняет свой знак с минуса на плюс (т.е. $f'(x)(x-x_0)>0$ при достаточно малых значениях $|x-x_0|$, $x \neq x_0$), то x_0 является точкой минимума;

2) если $f'(x)$ меняет свой знак с плюса на минус (т.е. $f'(x)(x-x_0)<0$ при достаточно малых значениях $|x-x_0|$, $x \neq x_0$), то x_0 является точкой максимума функции;

3) если $f'(x)$ не меняет своего знака, то x_0 не является точкой экстремума.

Иногда удобно пользоваться другим достаточным условием экстремума.

Теорема 4 (достаточное условие экстремума) Пусть x_0 – стационарная точка функции $f(x)$, дважды дифференцируемой в точке x_0. Если $f''(x_0) \neq 0$, то x_0 является точкой экстремума. А именно, если:

1) $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка минимума;
2) $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимума.

Пример 1 Найти точки экстремума функции $f(x) = x^3 - 3x$.
Решение Найдем производную:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3\left(x^2 - 1\right) = 3(x+1)(x-1)$$

Производная определена при всех *x*. Найдём стационарные точки. Для этого решим уравнение

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x+1)(x-1) = 0$$

Стационарными точками являются $x_1 = 1, x_2 = -1$. При переходе через точку $x = 1$ (слева направо) производная $f'(x)$ меняет свой знак с «–» на «+», следовательно, $x = 1$ – точка минимума. При переходе через точку $x = -1$ производная $f'(x)$ меняет свой знак с «+» на «-», следовательно, $x = 1$ – точка максимума. Далее находим значения функции в точках экстремума:

$$f_{\min} = f(1) = -2, f_{\max} = f(-1) = 2.$$

Пример 2 Найти точки экстремума функции $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4}$.

Решение Найдем производную:

$$f'(x) = x^2 - x^3 = x^2(1-x)$$

Производная определена при всех *x*. Найдём стационарные точки. Для этого решим уравнение

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2(1-x) = 0$$

Таким образом, возможными точками экстремума являются точки: $x = 0, x = 1$. Рассмотрим знаки производной на интервалах $(-\infty;0), (0;1)$ и $(1;+\infty)$:

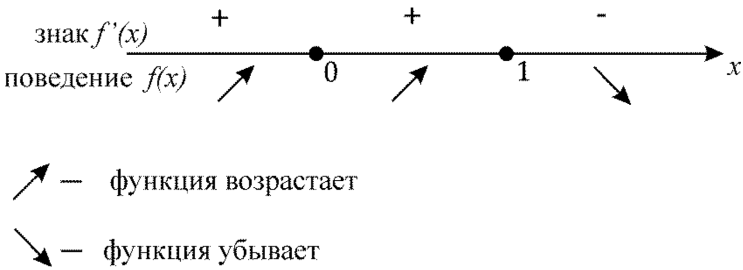


Рис. 6.1.

При переходе через критическую точку $x=0$ (слева направо) производная $f'(x)$ не меняет свой знак, следовательно, точка $x=0$ не является ни точкой минимума, ни точкой максимума.

При переходе через точку $x=1$ (слева направо) производная $f'(x)$ меняет свой знак с «+» на «-», следовательно, $x=1$ – точка максимума.

Находим значения функции в точках экстремума:

$$f_{\max} = f(1) = \frac{1}{12}.$$

Пример 3 Найти точки экстремума функции $f(x) = x - \sqrt[3]{x^2}$.

Решение Найдем производную:

$$f' = \left(x - \sqrt[3]{x^2}\right)' = 1 - \frac{2}{3}x^{-1/3} = 1 - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{3\sqrt[3]{x} - 2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Находим критические точки функции:

$$f' = 0 \Rightarrow \frac{3\sqrt[3]{x} - 2}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3\sqrt[3]{x} - 2 = 0 \\ \sqrt[3]{x} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\sqrt[3]{x} = 2 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x} = \dfrac{2}{3} \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{8}{27} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Рассмотрим знаки производной на интервалах(см. рис. 6.2.):

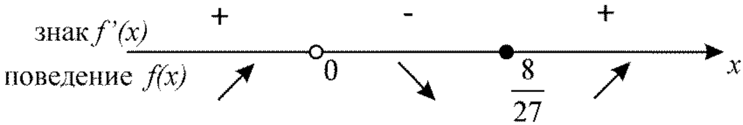


Рис. 6.2.

Отсюда получаем, что точка $x = 0$ - точка максимума, а точка $x = \frac{8}{27}$ - точка минимума.

Находим значения функции в точках экстремума:

$$f_{\min} = f\left(\frac{8}{27}\right) = \frac{8}{27} - \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{8}{27} - \left(\sqrt[3]{\frac{8}{27}}\right)^2 = \frac{8}{27} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{4}{27}$$

$$f_{\max} = f(0) = 0.$$

Пример 4 Найти интервалы монотонности и исследовать на экстремум функцию $y = x^3 - 9x^2 + 24x$.

Решение 1. Находим критические точки:

1. $y' = 3x^2 - 18x + 24 = 3\left(x^2 - 6x + 8\right) = 3(x-2)(x-4)$;
2. $y' = 0 \Rightarrow 3(x-2)(x-4) = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 4$;

Производная определена всюду, следовательно, других критических точек нет.

3. Изменение знака производной, поведение функции и точки экстремума изображены на рис.6.3:

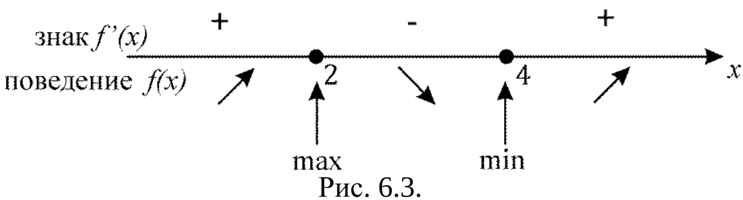


Рис. 6.3.

4.Находим значение функции в точках экстремума:

$$f_{\min} = f(4) = 16, \; f_{\max} = f(2) = 20.$$

5.Эскиз графика функции изображен на рис.6.4.

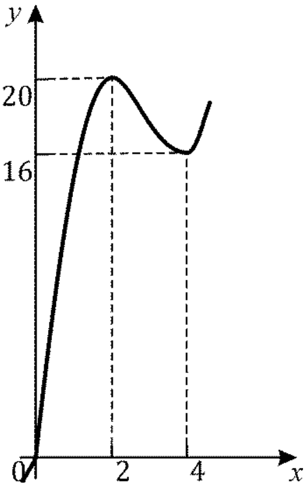


Рис. 6.4.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[a, b]$ находят значения функции в критических точках, принадлежащих этому отрезку, и на концах отрезка, после чего сравнивают эти значения и выбирают наибольшее и наименьшее.

Пример 5 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4 - 8x^2$ на отрезке [–1; 3].

Решение 1. Найдем производную:

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x-2)(x+2).$$

2.Производная существует при всех x. Найдем стацилнарные точки:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -2.$$

Отрезку [–1; 3] принадлежат точки $x_1 = 0, x_2 = 2$.

3.Вычисляем значения функции в точках $x = -1, x = 0$, $x = 2, x = 3$:

$$f(-1) = -7;\ f(0) = 0;\ f(2) = -16;\ f(3) = 9.$$

Сравнив полученные значения, находим:

$$\max_{x\in[-1;\,3]} f(x) = f(3) = 9, \quad \min_{x\in[-1;\,3]} f(x) = f(2) = -16.$$

Задачи

Найти наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке:

208. $y = 2x - 1, [0;1]$

209. $y = x^2 - 6x + 8, [1;4]$

210. $y = 3x^3 - 4x + 8, [-1;1]$

211. $y = 3x^4 + 4x^3 + 1, [0;1]$

212. $y = 3x^4 + 4x^3 + 1, [-2;1]$

213. $y = \sin x + 2x, [-\pi;\pi]$

214. $y = \sin^2 x, \left[\frac{\pi}{4};\frac{2\pi}{3}\right]$

215. $y = \sin x - x - \frac{x^3}{3}, [0;\pi]$

216. $y = x + \frac{1}{x}, [0{,}1;10]$

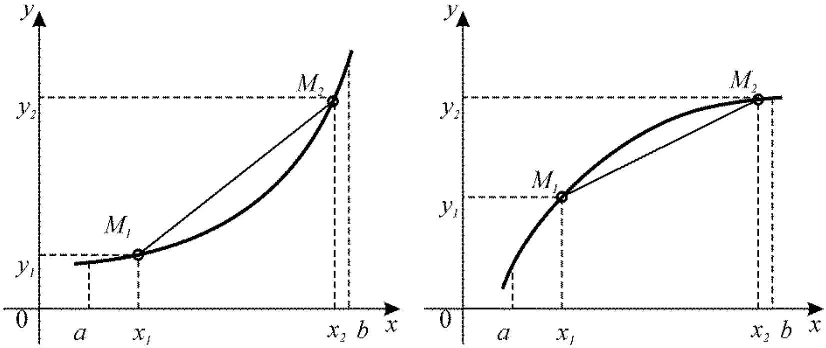
217. $y = -\frac{x}{x^2 - x + 1}, [-2;2]$

218. $y = x\ln x - x, \left[\frac{1}{e};e\right]$

6.2. Интервалы выпуклости функции. Точки перегиба

Дифференцируемая функция $y = f(x)$ называется ***выпуклой (вогнутой) или выпуклой вверх (вниз) на интервале*** $(a;b)$, если она удовлетворяет следующему условию: для любых различных точек $x_1, x_2 \in (a;b)$ часть графика функции $y = f(x)$, соответствующая интервалу $(x_1;x_2)$, расположена выше (ниже) отрезка M_1M_2, где $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ (см. рис.6.5.).

Точка графика функции, разделяющая выпуклый и вогнутый участки графика, называется ***точкой перегиба*** (часто точкой перегиба называют абсциссу этой точки графика функции).



(a) функция выпукла вниз на отрезке (b) функция выпукла вверх на отрезке

Рис. 6.5.

Теорема 5 Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале $(a;b)$. Тогда, если $f''(x)<0$ ($f''(x)>0$) для всех $x\in(a;b)$, то функция $f(x)$ является выпуклой (вогнутой) на $(a;b)$.

Теорема 6 Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на $(a;b)$. Точка $x_0\in(a;b)$ является точкой перегиба в том и только в том случае, если одновременно выполняются два условия:

(1) $f''(x_0)=0$;

(2) при переходе через точку x_0 $f''(x)$ меняет свой знак.

В последней теореме при условии трижды дифференцируемости функции условие (2) можно заменить на $f'''(x_0)\neq 0$.

Пример 6 Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $y=\dfrac{1}{x^2+1}$.

Решение 1.Находим вторую производную:

$$y''=\left(y'\right)'=\frac{2\left(3x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^3}.$$

2.Вторая производная определена при любом x, и обращается в нуль при $x_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}, x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3.Проверим являются ли найденные точки – точками перегиба графика функции. Для этого определим знак второй производной на получившихся интервалах: $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$. Рисуем схему (см. рис.6.6.).

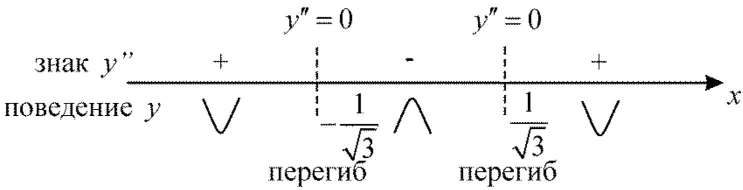


Рис. 6.6.

На интервалах $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$ функция выпукла вниз, на интервале $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ - выпукла вверх. В точках $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}, x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ функция имеет перегибы.

4.Находим ординаты точек перегиба: $y\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{3}{4}$.

6.3. Асимптоты

Прямая $x=x_0$ называется ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y=f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

Прямая $y = kx + b$ называется ***наклонной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - (kx+b)\right) = 0$.

Прямая $y = kx + b$ называется ***наклонной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$, если $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x) - (kx+b)\right) = 0$.

Прямая $y = kx + b$ называется ***наклонной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - (kx+b)\right) = 0$.

При $k = 0$ наклонная асимптота называется ***горизонтальной***.

Нахождение горизонтальных и наклонных асимптот

1. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Если этот предел существует и равен числу b, то $y = b$ - горизонтальная асимптота. Если предел не существует или равен бесконечности, то перейти к п.2.
2. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Если этот предел не существует или равен бесконечности, то наклонной асимптоты нет. Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = k$, то перейти к п.3.
3. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right)$. Если этот предел не сущесвует или равен бесконечности, то асимптоты нет. Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right) = b$, то перейти к п.4.
4. Записать уравнение наклонной асимптоты $y = kx + b$.

***Замечание* .** данный алгоритм позволяет найти прямую, являющуюся асимптотой при $x \to \infty$, то есть и при $x \to -\infty$, и при $x \to +\infty$. На практике функция может иметь разные асимптоты при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$, или иметь асимптоту только в одном из случаев.

Поэтому на практике искать асимптоты не при $x \to \infty$, а при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$, применяя данный алгоритм.

Пример 7 Найти асимптоты графика функции $y = x + \frac{1}{x}$.

Решение Положим $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

1.Точка $x = 0$ является точкой разрыва данной функции. Найдем пределы $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to 0-} f(x)$. Имеем

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-}\left(x + \frac{1}{x}\right) = -\infty, \lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+}\left(x + \frac{1}{x}\right) = +\infty.$$

Т.е. прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой.

2. Найдем наклонные асимптоты.

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(x + \frac{1}{x}\right) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(x + \frac{1}{x}\right) = -\infty$

Следовательно, горизонтальных асимптот нет.

2) $k = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(\dfrac{x + \frac{1}{x}}{x}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(\dfrac{x^2 + 1}{x^2}\right) = 1$

$b = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(x + \frac{1}{x} - x\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

Следовательно, прямая $y = x$ - наклонная асимптота графика функции и при $x \to -\infty$.

3) $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+\dfrac{1}{x}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)=1$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Следовательно, прямая $y=x$ - наклонная асимптота графика функции при $x\to+\infty$.

Пример 8 Найти асимптоты графика функции $f(x)=\dfrac{|x|(x-1)}{x+1}$.

Решение

1. Точка $x=-1$ является точкой разрыва данной функции. Найдем пределы $\lim\limits_{x\to1+}f(x)$ и $\lim\limits_{x\to1-}f(x)$. Имеем

$$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}\left(\frac{|x|(x-1)}{x+1}\right)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}\left(\frac{|x|(x-1)}{x+1}\right)=+\infty.$$

Т.е. прямая $x=-1$ является вертикальной асимптотой.

2. Найдем наклонные асимптоты.

Напомним, что $|x|=\begin{cases}x, x\ge 0\\ -x, x<0\end{cases}$.

Поэтому, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x-1)}{x+1}, x\ge 0\\ \dfrac{-x(x-1)}{x+1}, x<0\end{cases}$.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x(x-1)}{x+1}\right)=+\infty$,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{x(x-1)}{x+1}\right)=-\infty$$

Следовательно, горизонтальных асимптот нет.

2) $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x(x-1)}{x(x+1)}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=1$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x(x-1)}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-x^2-x}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x+1}=-2$$

Следовательно, прямая $y=x-2$ - наклонная асимптота графика функции при $x\to+\infty$.

3) $k=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-x(x-1)}{x(x+1)}\right)=\lim\limits_{x\to=\infty}\left(-\dfrac{x-1}{x+1}\right)=-1$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x(x-1)}{x+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+x+x^2+x}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x+1}=2$$

Таким образом, прямая $y=-x+2$ - наклонная асимптота графика функции при $x\to-\infty$.

Задачи

Найти асимптоты графика функции:

219. $y=1-\dfrac{4}{x^2}$

220. $y=\dfrac{x^2}{x^2+2}$

221. $y=\dfrac{2}{|x|}-1$

222. $y=\dfrac{1-4x}{1+2x}$

223. $y=\dfrac{x^2+x}{x}$

224. $y=\dfrac{x^2}{x+1}$

225. $y=\dfrac{x^2-x-1}{x}$

226. $y=\dfrac{3-5x}{7x+4}$

227. $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$

228. $y=\dfrac{4x-x^3}{x^2+4}$

229. $y=\dfrac{1}{x^2}-x$

230. $y=\dfrac{x^4+1}{3x^2+1}$

231. $y=\dfrac{x-4}{2x+4}$

232. $y=\dfrac{x^2}{2-2x}$

233. $y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$

234. $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$

6.4. Полное исследование функции и построение ее графика

График функции, заданной формулой $y=f(x)$, строится по точкам, которые затем соединяются линией. Но если брать точки, как попало, то можно допустить грубую ошибку, пропустив какие-то выжные особенности графика.

Чтобы построить график с помощью небольшого числа точек, полезно предварительно выяснить его характерные особенности по следующей общепринятой схеме:

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функции на периодичность.
3. Исследовать функцию на четность.
4. Найти точки пересечния графика с осями координат.
5. Найти точки разрыва.
6. Исследовать поведение функции на границах области определения. Найти асимптоты.
7. Найти промежутки возростания и убыванию функции, точки экстремума.
8. Исследовать направление выпуклости графика функции, найти точки перегиба.

9. Вычислить значения функции для некоторых значений ее аргумента.
10. Используя все полученные результаты, построить график функции

Пример 9 Построить график функции $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4x - 32}$.

Решение

1. Область определния функции:
$$D(f) = (-\infty; -4) \cup (-4; 8) \cup (8; +\infty)$$
2. Функция не является периодической.
3. $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2 - 4(-x) - 32} = \dfrac{-x^3}{x^2 + 4x - 32} \Rightarrow f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$. Следовательно, функция является функцией общего положения.
4. Найдем точки пересечения функции с осями координат и определим интервалы знакопостоянства функции. Для того, чтобы найти точки пересечения с осью 0х, приравняем функцию к нулю. Получим $\dfrac{x^3}{x^2 - 4x - 32} = 0 \Rightarrow x = 0$. Для нахождения общей точки графика функции и оси 0у следует найти $f(0)$: $f(0) = \dfrac{0}{-32} = 0$.
5. Функция непрерывна всюду, за исключением нулей знаменателя: $x = -4$ и x = 8. Найдём левые и правые пределы в этих точках.
Для точки $x = -4$:
$$\lim_{x \to -4-0} f(x) = \lim_{x \to -4-0} \frac{x^3}{(x+4)(x-8)} = -\infty;$$
$$\lim_{x \to -4+0} f(x) = \lim_{x \to -4+0} \frac{x^3}{(x+4)(x-8)} = +\infty.$$

Отсюда получаем, что $x = -4$ является точкой разрыва второго рода.

Для точки $x = 8$:

$$\lim_{x\to 8-0} f(x) = \lim_{x\to 8-0} \frac{x^3}{(x+4)(x-8)} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 8+0} f(x) = \lim_{x\to 8+0} \frac{x^3}{(x+4)(x-8)} = +\infty.$$

Поэтому $x = 8$ является точкой разрыва второго рода.

6. Из п.5. получаем, что $x = -4$ и $x = 8$ - вретикальные асимптоты графика функции.
   Найдем наклонные асимптоты.
   1) При $x \to -\infty$:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2-4x-32} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-4x-32} - x \right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2-32x}{x^2-4x-32} = 4.$$

Таким образом, прямая $y = x + 4$ является наклонной асимптотой при $x \to -\infty$.

2) Аналогично, получаем, что при $x \to +\infty$ прямая $y = x + 4$ так же является наклонной асимптотой.

7. Найдем производную y'. Имеем

$$y' = \left(\frac{x^3}{x^2-4x-32} \right)' = \frac{x^2\left(x^2-8x-96\right)}{(x+4)^2(x-8)^2} =$$

$$= \frac{x^2\left(x-4+4\sqrt{7}\right)\left(x-4-4\sqrt{7}\right)}{(x+4)^2(x-8)^2}.$$

Приравнивая производную к нулю, находим критические точки:

$$\frac{x^2\left(x-4+4\sqrt{7}\right)\left(x-4-4\sqrt{7}\right)}{(x+4)^2(x-8)^2}=0,$$

откуда $x_1=4-4\sqrt{7}$, $x_2=4+4\sqrt{7}$, $x_3=0$, $x_4=-4$, $x_5=8$.

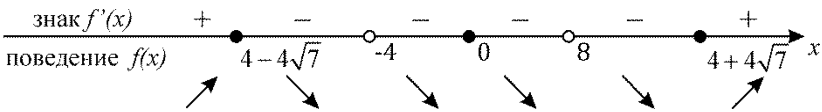


Рис. 6.7.

Из схемы (рис.6.7.) следует, что функция возрастает на промежутках $\left(-\infty; 4-4\sqrt{7}\right)$ и $\left(4+4\sqrt{7}; +\infty\right)$ и убывает на промежутках $\left(4-4\sqrt{7}; -4\right)$, $(-4; 8)$, $\left(8; 4+4\sqrt{7}\right)$. Следовательно, точка $x=4-4\sqrt{7}$ является точкой максимума, а точка $x=4+4\sqrt{7}$ – точкой минимума. Найдем ординаты экстремальных точек:

$y_{\max}=f(4-4\sqrt{7})=-7,57$; $y_{\min}=f(4+4\sqrt{7})=25,35$.

8. Найдем вторую производную:

$$y''=(y')'=\frac{96x\left(x^2+8x+64\right)}{(x+4)^3(x-8)^3}.$$

Вторую производная равна нулю при x=0.

Из схемы (рис.6.8.) следует, что функция выпукла в интервалах (–∞; –4) и (0; 8) и вогнута в интервалах (–4; 0) и (8; +∞).

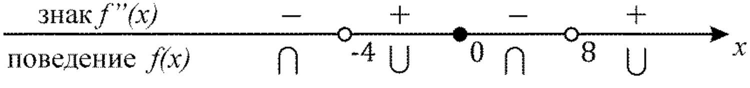


Рис. 6.8.

При переходе через точки – 4, 8, 0 y'' меняет свой знак. Поэтому точка x = 0 является точкой перегиба (в точках x = – 4, x = 8 функция не определена).

9. Сгруппируем все полученные данные в виде таблицы и построим график функции:

x	$\left(-\infty; 4-4\sqrt{7}\right)$	$4-4\sqrt{7}$	$\left(4-4\sqrt{7}; -4\right)$	-4	$(-4;0)$
y'	+	0	-	не сущ	-
y''	-	-	-	не сущ	+
y	$\uparrow\cap$	$y_{\max}=-7,57$	$\downarrow\cap$	не сущ	$\downarrow\cup$

x	0	$(0;8)$	8	$\left(8; 4+4\sqrt{7}\right)$	$4+4\sqrt{7}$	$\left(4+4\sqrt{7}; +\infty\right)$
y'	0	-	не сущ	-	0	+
y''	0	-	не сущ	+	+	+
y	0, пере-гиб	$\downarrow\cap$	не сущ	$\downarrow\cup$	$y_{\min}=25,35$	$\uparrow\cup$

Пример 10 Построить график функции $y=e^{-(x-2)^2}$.

Решение

1. Область определения $D(f)=(-\infty;+\infty)$.
2. Функция не является периодической.
3. $f(-x)=e^{(-x-2)^2}=e^{(x+2)^2} \Rightarrow f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$. Следовательно, функция является функцией общего положения.

Найдем точки пересечения функции с осями координат и определим интервалы знакопостоянства функции. Для того, чтобы найти точки пересечения с осью 0, приравняем функцию к нулю. Получим $e^{-(x-2)^2}=0$.

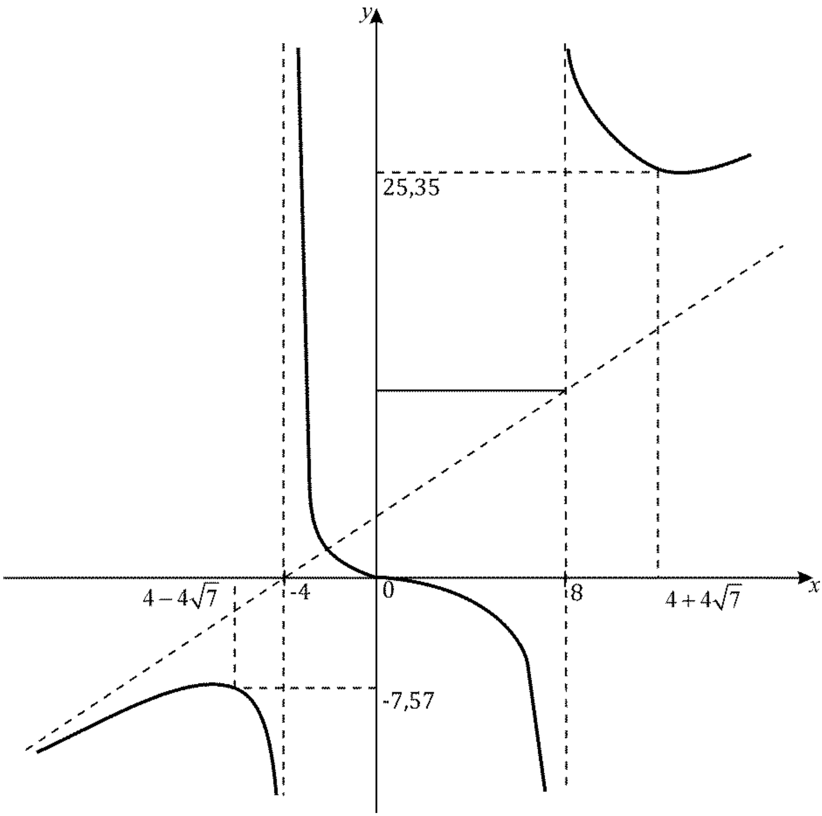


Рис. 6.9.

Данное уравнение корней не имеет, следовательно функция не имеет общих точек с осью 0x. Для нахождения общей точки графика функции и оси 0y следует найти $f(0)$: $f(0)=e^{-4}\approx 0{,}0183$.

4. Функция является суперпозицией непрерывных функций, поэтому она непрерывна на всей числовой оси.
5. Из п.5. следует, что вертикальных асимптот нет. Найдем наклонные асимптоты:

   1)При $x\to-\infty$:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-(x-2)^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{xe^{(x-2)^2}} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to-\infty} e^{-(x-2)^2} = 0.$$

Таким образом, прямая $y=0$ является наклонной асимптотой функции при $x \to -\infty$.

2)Аналогично, получаем, что при $x \to +\infty$ прямая $y=0$ так же является наклонной асимптотой.

6. Найдем производную y'. Имеем

$$y' = \left(e^{-(x-2)^2}\right)' = -2(x-2)e^{-(x-2)^2}.$$

Приравнивая производную к нулю, находим критические точки: $x=2$.

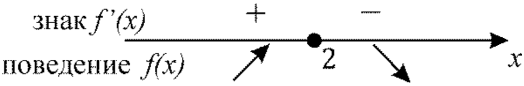


Рис. 6.10.

Из схемы (рис.6.10.) следует, что функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке (–∞; 2) и убывает на промежутке (2; +∞), точка $x=2$ является точкой максимума. Максимум функции равен $f(2)=1$.

7. Найдем вторую производную:

$$y'' = (y')' = 2\left(2x^2 - 8x + 7\right)e^{-(x-2)^2}.$$

Функция y'' имеет нули $x = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. Из схемы (рис.6.11.) следует, что функция выпукла на интервале

$\left(2-\dfrac{\sqrt{2}}{2};2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и вогнута на интервалах $\left(-\infty;2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(2+\dfrac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$.

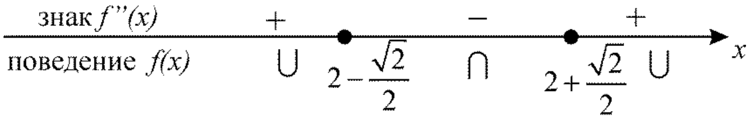


Рис. 6.11.

Точки $x=2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, x=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ являются точками перегиба. Вычислим значение функции в точках перегиба: $f\left(2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=f\left(2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=e^{-0,5}\approx 0,61$

8. Сгруппируем все полученные данные в виде таблицы и построим график функции:

x	$\left(-\infty;2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(2-\dfrac{\sqrt{2}}{2};2\right)$	2
y'	+	+	+	0
y''	+	0	-	-
y	↑∪	0,61: перегиб	↑∩	$y_{\max}=1$

x	$\left(2;2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(2+\dfrac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$
y'	-	-	-
y''	-	0	+
y	↓∩	0,61: перегиб	↓∪

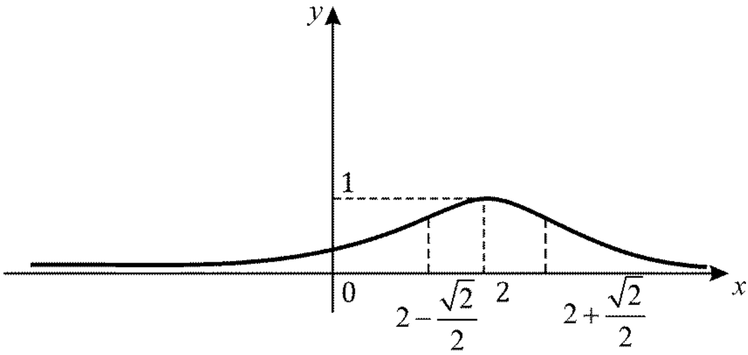


Рис. 6.12.

Задачи

Проведя необходимое исследование, постройте графики следующих функций:

235. $y=\dfrac{x}{x^2+1}$

236. $y=\dfrac{5}{x^6}-\dfrac{6}{x^5}$

237. $y=\dfrac{4x^2+3x}{2x+2}$

238. $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$

239. $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$

240. $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$

241. $y=\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

242. $y=\dfrac{27-2x^3}{6x^2}$

243. $y=\dfrac{x^2}{(x+4)^2}$

244. $y=\dfrac{2x^2+3x-5}{x-4}$

245. $y=\dfrac{x^2-3x-18}{x-9}$

246. $y=\dfrac{x^4}{(x+1)^3}$

247. $y=\dfrac{x^3-x^2}{(x+1)^2}$

248. $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

249. $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

250. $y=e^{2x-x^2}$

251. $y=xe^{-x}$

252. $y=\dfrac{e^x}{x+1}$

253. $y=(x+1)e^{\frac{1}{x}}$

254. $y=(x-2)e^{\frac{9}{x}}$

255. $y=x^2\,e^{\frac{1}{x}}$

256. $y=xe^{-x^2}$

257. $y=x^2\,e^{-x^2}$

258. $y=x\ln x$

259. $y=x^2\ln x$

260. $y=\dfrac{\ln x}{x}$

261. $y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$

262. $y=x+arctg(x)$

263. $y=x-arctg(2x)$

Задачи для самостоятельного решения

Задание 28

Исследовать функцию и построить ее график:

28.1. $y=\dfrac{x}{(x-1)^2}$

28.2. $y=\dfrac{x^3+16}{x}$

28.3. $y=\dfrac{x^3-1}{4x^2}$

28.4. $y=\dfrac{x-1}{x^2-2x}$

28.5. $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$

28.6. $y=\dfrac{x^2+1}{x}$

28.7. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$

28.8. $y=\dfrac{4x^2}{x^3-1}$

28.9. $y=\dfrac{x}{3+x^2}$

28.10. $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$

28.11. $y=\dfrac{x^3+3}{x}$

28.12. $y=\dfrac{x^2+4}{x}$

28.13. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$

28.14. $y = \dfrac{x}{x^2 + 5}$

28.15. $y = \dfrac{2x - 8}{(x - 3)^3}$

28.16. $y = \dfrac{2x}{(x - 2)^2}$

28.17. $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$

28.18. $y = \dfrac{x + 3}{2(x + 2)^2}$

28.19. $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

28.20. $y = \dfrac{16x^2}{x - 4}$

28.21. $y = \dfrac{2x + 1}{(x + 1)^2}$

28.22. $y = \dfrac{x}{3 - x^2}$

28.23. $y = \dfrac{x}{x^2 + 2}$

28.24. $y = \dfrac{x^3}{3 - x}$

28.25. $y = \dfrac{x}{3 + x^2}$

28.26. $y = \dfrac{2x^3}{x - 2}$

28.27. $y = \dfrac{(x - 1)^2}{x^2 + 1}$

28.28. $y = \dfrac{x - 1}{x^2 + 2}$

28.29. $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$

28.30. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Ответы

12. $(-\infty;0)\cup(5;+\infty)$.

13. $\left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2};-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3};1\right)\cup\left(1;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

14. $(0;1)\cup(1;3)$.

15. $[-5;0)\cup(0;1]$

16. $(-\infty;0)\cup(0;2)\cup(2;+\infty)$

17. $(-5;-4)\cup(0;5)$.

18. Функция четная.
19. Функция не является ни четной, ни нечетной.
20. Функция нечетная.
21. Функция четная.
22. Функция нечетная.
23. Функция четная.
24. Функция нечетная.
25. Функция не является ни четной, ни нечетной.

26. $\frac{\pi}{2}$.
27. 2π.
28. 2π.
29. π.
30. 3π.
31. $\frac{\pi}{2}$.
32. $\frac{\pi}{3}$.
33. π.
44. $a_n = \frac{1}{3n}$.

45. $a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$.
46. $a_n = \frac{3n-2}{5n+1}$.
47. $a_n = \frac{4n-1}{3n+2}$.
48. $a_n = \frac{1}{3^n}$.
49. $a_n = \frac{n-1}{n+1}$.
50. -1.
51. -5.
52. ∞
53. 10.
54. 0.

55. $\frac{2}{3}$
56. -4.
57. -12.
58. 0.
59. 0.
60. 3.
61. 3
62. $\frac{1}{2}$.
63. $-\frac{5}{2}$
64. 0.
65. ∞
66. $\frac{1}{3}$

67. 1.
68. -2.
69. 1.
70. $\frac{3}{19}$.
71. 0.
72. $\frac{2}{3}$.
73. 8.
74. $-\sqrt{2}$.
75. $-\frac{10}{9}$.
76. $-\frac{3}{2}$.
77. $\frac{15}{2}$.
78. 0.
79. 3.
80. $\frac{1}{2}$.

81. $-\frac{1}{4}$.
82. 25.
83. $\sqrt{3}$.
84. $\frac{5}{3}$.
85. e^2 .
86. e .
87. e^{10}
88. e^{-2}
89. 6.
90. 1.
91. 2.
92. 3.
93. $\frac{1}{2}$.
94. $\frac{5}{12}$.

95. -2.
96. $\frac{1}{3\ln 2}$.
97. e^4 .
98. 1.
99. $\frac{1}{2}$.
100. $\frac{1}{6}$.
101. 1.
102. -6.
103. $-\frac{2\ln 2}{5}$
104. e^8.
105. e^{-1}.
106. e^4

107. 0 – разрыв второго рода.
108. 0 – разрыв первого рода (скачок).
109. 0 – разрыв первого рода (скачок).
110. 1- разрыв первого рода (устранимый разрыв)
111. -2,2 – разрывы второго рода.
112. 0 – разрыв второго рода.
114. $4x^4+6x-2$
115. $49x^6+6x-4$
116. $\frac{3}{2\sqrt{x}}-4\sin x-\frac{2}{\cos^2 x}$
117. $6x+\cos x+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}$
118. $\sin x + x\cos x$.
119. $\frac{1}{\sin\frac{2x+1}{2}}$.
121. $\frac{3}{2}\frac{1-\sin 3x}{\sqrt{3x+\cos 3x}}$.
120. $2\cos 2x-\sin 2x$.

122. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3}}$.

123. $-\sin 2x\cdot 3^{\cos^2 x}\ln 3$.

124. $\dfrac{1}{2+x^2}$.

125. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\dfrac{x^2}{\sqrt{8-x^6}}$.

126. $\dfrac{2}{x\left(1-x^2\right)}$.

127. $\dfrac{6x}{\sqrt{9x^4+1}}$.

128. $\sqrt{1-x^2}$.

129. $e^{x^2}\left((x-1)\sin 2x+(x+1)\cos 2x\right)$.

130. $2^x\left(\ln x-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\ln 2}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)\right)$

131. $\dfrac{tg^2\dfrac{x}{3}}{\cos^2\dfrac{x}{3}}$.

132. $6x\cdot 2^{3x^2}\ln 2+ctgx$.

133. $\dfrac{e^{\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$.

134. $3ctg\left(3x+2\right)$.

135. $-e^{-x^2}\dfrac{(2x-1)(x-1)}{(x-3)^2}$.

136. $\dfrac{1}{\sqrt{-4x^2-2x}}$.

137. $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}(2+x^2)arctg\sqrt{1+x^2}}$.

138. $ctg\dfrac{3x}{5}\cdot\sqrt[3]{\ln^2\sin\dfrac{3x}{5}}$.

139. $\left(3x^2+3x-1\right)^x\ln\left(3x^2+3x-1\right)+\left(3x^2+3x-1\right)^{x-1}\left(6x^2+3x\right)$

140. $(x+1)^{\ln x}\left(\dfrac{\ln(x+1)}{x}+\dfrac{\ln x}{x+1}\right)$.

141. $\dfrac{2^x\sqrt{4x+1}}{\left(2x-1\right)^3\sqrt[3]{x^3+2}}\left(\ln 2+\dfrac{1}{4x+1}-\dfrac{6}{2x-1}-\dfrac{x^2}{x^2+2}\right)$.

142. $\dfrac{\left(x^2-1\right)^3\arcsin\sqrt{x}}{x^4\left(3x+2\right)}\left(\dfrac{6x}{x^2-1}+\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}\arcsin\sqrt{x}}-\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{3x+2}\right)$

143. $\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$.

144. $5x^3\left(4\ln x+1\right)$

145. $\dfrac{xarctgx+1}{\sqrt{1+x^2}}$

146. $-\dfrac{1}{x^2}$

147. $\dfrac{1+2x^2}{\left(1-x^2\right)^{5/2}}.$

148. $e^{-x}\left(3-x\right)$

149. $\dfrac{2}{3}\text{ctg } t;\dfrac{2}{9\sin^3 t}.$

150. $\dfrac{t^2-1}{2t};\dfrac{1+t^2}{4t^3}.$

151. $\dfrac{3}{2}e^t;\dfrac{3}{4}e^{-t}.$

152. $\dfrac{3t^2+1}{2t};\dfrac{3t^2-1}{4t^3}.$

153. $-\text{tg } t;\dfrac{1}{12\cos^4 t\sin t}.$

154. $\dfrac{1-3t}{t-3};\dfrac{8\left(t+1\right)^2}{\left(t-3\right)^3}.$

155. $\dfrac{t\left(2-t^3\right)}{1-2t^3};\dfrac{2\left(t^3+1\right)^4}{\left(1-2t^3\right)^3}.$

156. $\dfrac{12xy^3-2y^4-5x^2}{4y^3-9x^2y^2}$

157. $\dfrac{4xy^2-3x^2-2xy-6}{x^2-4x^2y}$

158. $-\dfrac{2x-\left(x^2y+y^3\right)e^{yx}}{2y-\left(x^3+xy^2\right)e^{yx}}$

159. $\dfrac{\left(2xy^3-14xy\right)\sqrt{1-y^2}}{\left(7x^2-3x^2y^2\right)\sqrt{1-y^2}+1}$

160. $5x^4dx$

161. $\dfrac{dx}{\cos^2 x}$

162. $3\sin 2x\sin 4xdx$

163. $\dfrac{dx}{x}$

164. $\dfrac{ctg\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$

165. $-\dfrac{tgx\cdot e^{-\frac{1}{\cos x}}}{\cos x}dx$

166. $-2x\cdot 2^{-x^2}\ln 2dx$

167. $4dx$

168. $3dx$

169. $-\dfrac{3}{\sqrt{10}}dx$

170. 0

171. $-dx$

172. $-2edx$

173. $\dfrac{1}{4}dx$

174. $\dfrac{dx}{6\sqrt{11}}$

175. $\dfrac{2\cos x}{\sin^3 x}dx^2$

176. $-2\cos 2xdx^2$

177. $\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}dx^2$

178. $-2e^x\left(\cos x+\sin x\right)dx^3$

179. $-\frac{1}{x^2}dx^3$

180. 4,99.

181. -5,01.

182. -3,02.

183. $f(x)=-1-(x-1)-(x-1)^2-(x-1)^3-(x-1)^4+o((x-1)^4)$

184. $f(x)=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+o((x-1)^2)$

185. $f(x)=1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3+o(x^3)$.

186. $P'''(11)=12$.

187. 0

188. 1/3

189. 3/2

190. 3/2

191. 1/3

192. 0

193. 0

194. $-\frac{7}{5}$

195. 4,5

196. 3

197. -0,5

198. 0,5

199. -2

200. -4

201. 1

202. 0,5

203. $\frac{1}{6}$

204. $-\frac{1}{5}$

205. $\frac{1}{128}$

206. 1

207. $\frac{\ln^2 2}{90}$

208. $y_{\min}=y(0)=-1, y_{\max}=y(1)=1$

209. $y_{\min}=y(3)=-1, y_{\max}=y(1)=3$

210. $y_{\min}=y\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{56}{9}, y_{\max}=y\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{88}{9}$

211. $y_{\min}=y(0)=1, y_{\max}=y(1)=8$

212. $y_{\min}=y(-1)=0, y_{\max}=y(-2)=17$

213. $y_{\min}=y(-\pi)=-2\pi, y_{\max}=y(\pi)=2\pi$

214. $y_{\min}=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}, y_{\max}=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

215. $y_{\min}=y(\pi)=-\frac{\pi\left(\pi^2+3\right)}{3}, y_{\max}=y(0)=0$

216. $y_{\min} = y(1) = 2, y_{\max} = y(0,1) = 10,1$

217. $y_{\min} = y(1) = -1, y_{\max} = y(-1) = \frac{1}{3}$

218. $y_{\min} = y(1) = -1, y_{\max} = y(e) = 0$

219. $x = 0, y = 1$

220. $y = 1$

221. $x = 0, y = -1$

222. $x = -\frac{1}{2}, y = -2$

223. $x = 0, y = x$

224. $x = -1, y = x - 1$

225. $x = 0, y = x - 1$

226. $x = -\frac{4}{7}, y = -\frac{5}{7}$

227. $y = x$

228. Асимптот нет

229. $x = 0, y = -x$

230. Асимптот нет.

231. $x = -2, y = \frac{1}{2}$

232. $x = 1, y = -\frac{x+1}{2}$

233. $x = 2, x = -2, y = 1$

234. $x = 1, x = -1, y = -x$

235. $y = 0$ - горизонтальная асимптота, $y' = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, $y'' = \frac{-2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$, $x_{\min} = -1$, $x_{\max} = 1$, точки перегиба: $x = \pm\sqrt{3}$, $x = 0$.

236. $y = 0$ - горизонтальная асимптота, $x = 0$ - вертикальная асимптота, $y' = 30\frac{x-1}{x^7}$, $y'' = 30\frac{7-6x}{x^8}$, $x_{\min} = 1$, точка перегиба: $x = \frac{7}{6}$.

237. $y = 2x - \frac{1}{2}$ - наклонная асимптота,

$y' = \frac{4x^2+8x+3}{2(x+1)^2}$, $y'' = \frac{1}{(x+1)^3}$, $x_{\min} = -\frac{1}{2}$, $x_{\max} = -\frac{3}{2}$.

238. $y=x$ - наклонная асимптота, $x=0$ - вертикальная асимптота, $y'=\dfrac{x^3-8}{x^3}$, $y''=\dfrac{24}{x^4}$, $x_{\min}=2$.

239. $y=x$ - наклонная асимптота, $x=\pm 2$ - вертикальные асимптоты, $y'=\dfrac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$, $y''=\dfrac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$, $x_{\min}=2\sqrt{3}$, $x_{\max}=-2\sqrt{3}$, $x=0$ - точка перегиба.

240. $y=x$ - наклонная асимптота, $y'=\dfrac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$, $y''=\dfrac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$, $x=0;\pm\sqrt{3}$ - точки перегиба.

241. $y=x+4$ - наклонная асимптота, $x=2$ - вертикальная асимптота, $y'=\dfrac{x^2(x-6)}{(x-2)^3}$, $y''=\dfrac{24x}{(x-2)^4}$, $x_{\min}=6$, $x=0$ - точка перегиба.

242. $y=-\dfrac{1}{3}x$ - наклонная асимптота, $x=0$ - вертикальная асимптота, $y'=\dfrac{-x^3-27}{3x^3}$, $y''=\dfrac{27}{x^4}$, $x_{\min}=-3$.

243. $y=1$ - горизонтальная асимптота, $x=-4$ - вертикальная асимптота, $y'=\dfrac{8x}{(x+4)^3}$, $y''=\dfrac{16(2-x)}{(x+4)^4}$, $x_{\min}=0$, $x=2$ - точка перегиба.

244. $y=2x+11$ - наклонная асимптота, $x=4$ - вертикальная асимптота, $y'=\dfrac{2x^2-16x-7}{(x-4)^2}$, $y''=\dfrac{78}{(x-4)^3}$,

$x_{\min}=\dfrac{8+\sqrt{78}}{2}$, $x_{\max}=\dfrac{8-\sqrt{78}}{2}$.

245. $y = x + 6$ - наклонная асимптота, $x = 9$ - вертикальная асимптота, $y' = \dfrac{x^2 - 18x + 45}{(x-9)^2}$, $y'' = \dfrac{72}{(x-9)^3}$, $x_{\min} = 15$, $x_{\max} = 3$.

246. $y = x - 3$ - наклонная асимптота, $x = -1$ - вертикальная асимптота, $y' = \dfrac{x^3(x+4)}{(x+1)^4}$, $y'' = \dfrac{12x^2}{(x+1)^5}$, $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = -4$.

247. $y = x - 3$ - наклонная асимптота, $x = -1$ - вертикальная асимптота, $y' = \dfrac{x(x^2 + 3x - 2)}{(x+1)^3}$, $y'' = \dfrac{10x - 2}{(x+1)^4}$, $x_{\min} = \dfrac{-3 + \sqrt{17}}{2}$, $x_{\max} = 0$, $x_{\max} = \dfrac{-3 - \sqrt{17}}{2}$, точка перегиба: $x = \dfrac{1}{5}$.

248. $y = x + 5$ - наклонная асимптота, $x = 1$ - вертикальная асимптота, $y' = \dfrac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$, $y'' = \dfrac{24(x+1)}{(x-1)^4}$, $x_{\min} = 5$, $x = -1$ - точка перегиба.

249. $x = \pm 1$ - вертикальные асимптоты, $y' = \dfrac{x^2 - 3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$, $y'' = \dfrac{2x(9 - x^2)}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^7}}$, $x_{\min} = \sqrt{3}$, $x_{\max} = -\sqrt{3}$, точки перегиба: $x = 0; \pm 3$.

250. $y = 0$ - горизонтальная асимптота, $y' = 2(1 - x)e^{2x - x^2}$, $y'' = 2(2x^2 - 4x + 1)e^{2x - x^2}$, $x_{\max} = 1$, точки перегиба: $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$.

251. $y = 0$ - горизонтальная асимптота при $x \to +\infty$, $y' = (1 - x)e^{-x}$, $y'' = (x - 2)e^{-x}$, $x_{\max} = 1$, точка перегиба: $x = 2$.

252. $y=0$ - горизонтальная асимптота при $x\to-\infty$, $x=-1$ - вертикальная асимптота, $y'=\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$, $y''=\dfrac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^3}$, $x_{\min}=0$.

253. $y=x+2$ - наклонная асимптота, $x=0$ - вертикальная асимптота при $x\to 0+0$, $y'=\left(\dfrac{x^2-x-1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$, $y''=\left(\dfrac{3x+1}{x^4}\right)e^{\frac{1}{x}}$, $x_{\min}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_{\max}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, точка перегиба: $x=-\dfrac{1}{3}$.

254. $y=x+7$ - наклонная асимптота, $x=0$ - вертикальная асимптота при $x\to 0+0$, $y'=\left(\dfrac{x^2-9x+18}{x^2}\right)e^{\frac{9}{x}}$, $y''=\left(\dfrac{45x-144}{x^4}\right)e^{\frac{9}{x}}$, $x_{\min}=6$, $x_{\max}=3$, точка перегиба: $x=3,2$.

255. $x=0$ - вертикальная асимптота при $x\to 0+0$, $y'=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$, $y''=\left(\dfrac{2x^2-2x+1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$, $x_{\min}=\dfrac{1}{2}$.

256. $y=0$ - горизонтальная асимптота, $y'=(1-2x^2)e^{-x^2}$, $y''=(4x^3-6x^2)e^{-x^2}$, $x_{\min}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x_{\max}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, точки перегиба: $x=0;\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

257. $y=0$ - горизонтальная асимптота, $y'=2(x-x^3)e^{-x^2}$, $y''=2(2x^4-5x^2+1)e^{-x^2}$,

$x_{\min}=0$, $x_{\max}=\pm1$, точки перегиба: $x=\pm\sqrt{\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{4}}$.

258. $y' = \ln x + 1$, $y'' = \dfrac{1}{x}$, $x_{\min} = \dfrac{1}{e}$.

259. $y' = x(2\ln x + 1)$, $y'' = 2\ln x + 3$, $x_{\min} = e^{-\frac{1}{2}}$, точка перегиба: $x = e^{-\frac{3}{2}}$.

260. $y = 0$ - горизонтальная асимптота при $x \to +\infty$, $x = 0$ - вертикальная асимптота при $x \to 0 + 0$, $y' = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$, $x_{\max} = e$, точка перегиба: $x = e^{\frac{3}{2}}$.

261. $y' = \dfrac{5x - 2}{3\sqrt[3]{x}}$, $y'' = \dfrac{10x + 2}{9\sqrt[3]{x^4}}$, $x_{\min} = \dfrac{2}{5}$, $x_{\max} = 0$, точка перегиба: $x = -\dfrac{1}{5}$.

262. $y = x + \dfrac{\pi}{4}$ - наклонная асимптота при $x \to +\infty$, $y = x - \dfrac{\pi}{4}$ - наклонная асимптота при $x \to -\infty$, $y' = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$, $y'' = -\dfrac{2x}{(x^2 + 1)^2}$, точка перегиба: $x = 0$.

263. $y = x - \dfrac{\pi}{4}$ - наклонная асимптота при $x \to +\infty$, $y = x + \dfrac{\pi}{4}$ - наклонная асимптота при $x \to -\infty$, $y' = \dfrac{4x^2 - 1}{4x^2 + 1}$, $y'' = \dfrac{16x}{(4x^2 + 1)^2}$, $x_{\min} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x_{\max} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, точка перегиба: $x = 0$.

Литература

[1] Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа // СПб.: «Профессия», 2007 г.

[2] Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу.Часть 1. // М.: Дрофа, 2001 г.

[3] Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике //СПб.: «Лань», 2005 г.

[4] Малугин В.А. Математика для экономистов: Математический анализ. Курс лекций // М.: «Эксмо», 2005 г.

[5] Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике // М.: Издательство Физико-математической литературы, 2009 г.

[6] Сборник задач по высшей математике для экономистов под редакцией В.И. Ермакова// М.: ИНФА-М, 2003с

[7] Шипачев В.С. Высшая математика // М.: «Высшая школа», 1990 г.

Оглавление

Св. план 2012г,   поз.158

Ишханян Маргарита Владимировна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ Часть I.
Учебное пособие для направления 080100.62 «Экономика»

Подписано в печать   Формат 60 X 84 / 16

Заказ №   Усл. - печ. л. -

Тираж -150 экз.