ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

**«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»**

КАФЕДРА «МАТЕМАТИКА»

М.В. Ишханян

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть 2

Учебное пособие

Москва – 2013

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

**«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»**

КАФЕДРА «МАТЕМАТИКА»

М.В. Ишханян

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть 2

Рекомендовано редакционно-издательским советом

университета в качестве учебного пособия

для студентов направления 080100.62 «Экономика»

Москва – 2013

УДК 517

И – 97

Ишханян М.В. Математический анализ. Часть 2.: Учебное пособие – М.: МИИТ, 2013. – 270 с.

Учебное пособие предназначено для студентов направления 080100.62 «Экономика», обучающихся по дисциплине «Математический анализ». Учебное пособие удовлетворяет требованиям ФГОС 3 поколения и написано в соответствие с примерной образовательной программой дисциплины «Математический анализ», одобренной УМО по классическому университетскому образованию. Пособие включает следующие разделы программы: «Функции нескольких переменных», «Интегрирование». Пособие состоит из 4 глав. Каждая глава разбита на параграфы, содержащие краткое изложение теории и примеры решения типовых задач. В каждой главе представлены задачи с ответами и задачи для самостоятельного решения. Предлагаемое пособие содержит 1200 задач и может быть полезно в процессе аудиторной и самостоятельной работы студентов, при проведении контрольных и зачетных работ.

Рецензенты:

В.Н. Деснянский, к.ф.-м.н., зав. кафедрой «Математический анализ» МИИТа;

Л.А. Климина, к.ф.-м.н.,с.н.с. НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова.

Глава 5. Функции нескольких переменных

5.1. Понятие функции нескольких переменных

Переменная z называется ***функцией двух переменных*** x и y, если по некоторому закону каждой паре (x, y) из некоторого множества ставится в соответствие вполне определенное значение z. Соответствующая зависимость записывается в виде $z = f(x, y)$ или $z = z(x, y)$. Переменные x и y называются независимыми переменными или аргументами.

Если имеется n переменных величин $x_1, x_2, \dots, x_n$, то функциональная зависимость имеет вид $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области D на плоскости xOy. Каждой точке (x, y) на плоскости будет соответствовать точка $M(x, y, z)$ трехмерного пространства. Множество таких точек $M(x, y, z)$ в трехмерной декартовой системе координат представляет собой некоторую поверхность и называется графиком функции $z = f(x, y)$. Приведем примеры графиков некоторых функций:

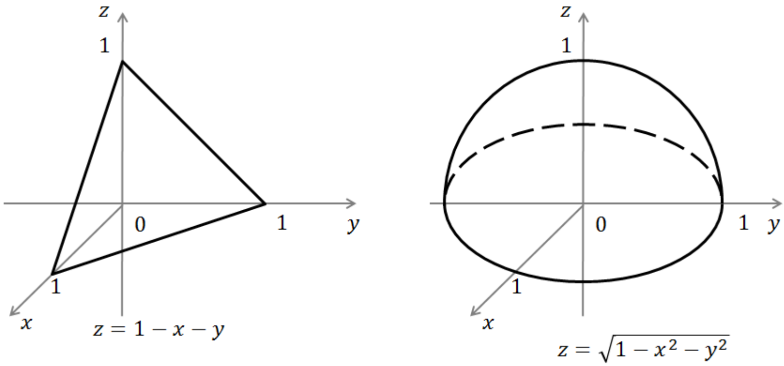


Рис. 5.1

Среди функций нескольких переменных перечислим следующие:

1. Линейная функция
$$z = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b$$
2. Квадратическая функция
$$z = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \cdots + a_{nn}x_n^2$$
3. Функция Кобба-Дугласа

$$z = ax_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$$

Для двух переменных функция Кобба-Дугласа принимает вид

$$z = ax_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2}$$

С помощью функции Кобба-Дугласа строят производственные функции, выражающие результат производственной деятельности в зависимости от различных факторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Пример 1. Найти область определения функции

$$z = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{y^2-1}\,.$$

Решение. Областью определения функции $z = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{y^2-1}$ является множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ y^2-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 1 \\ y^2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1;1] \\ y \in (-\infty;-1] \cup [1;+\infty) \end{cases}$$

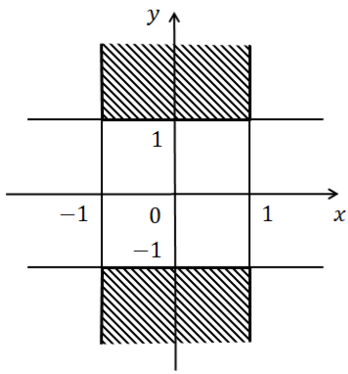


Рис. 5.2

Пример 2. Найти область определения функции $z = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

Решение. Областью определения функции $z = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ является множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству:

$$1-x^2-y^2 > 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 < 1$$

Данное неравенство описывает внутреннюю часть круга радиуса 1 с центром в начале координат (рис. 5.3). Граница круга в область определения функции не входит, поэтому она изображена пунктирной линией.

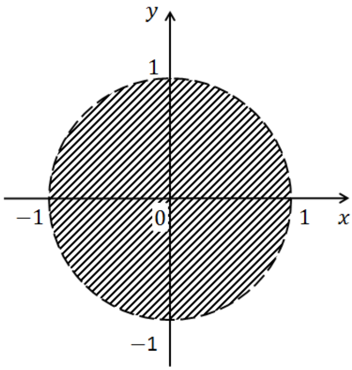


Рис. 5.3

Пример 3. Найти область определения функции

$$z = \sqrt{x - y} + \sqrt{x + y}.$$

Решение. Областью определения функции $z = \sqrt{x - y} + \sqrt{x + y}$ является множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq x \\ y \geq -x \end{cases}$$

Уравнения $y = \pm x$ определяют две прямые – биссектрисы координатных четвертей. Неравенству $y \leq x$ соответствует нижняя относительно прямой $y = x$ полуплоскость.Неравенству $y \geq -x$

соответствует верхняя относительно прямой $y = -x$ полуплоскость (рис. 5.4).

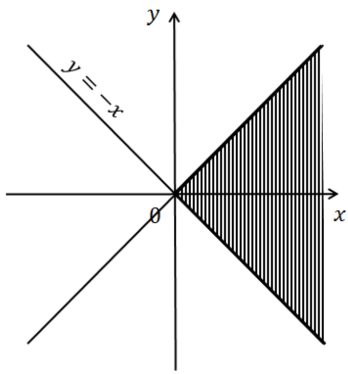


Рис. 5.4

Пример 4. Найти область определения функции

$$z = \ln\left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}\right)$$

Решение. Областью определения функции $u = \ln\left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}\right)$ определяется решением неравенства:

$$1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1$$

Данное неравенство описывает внутреннюю часть эллипса с полуосями 2 и 3, с центром в начале координат (рис. 5.5). Граница эллипса в область определения функции не входит, поэтому она изображена пунктирной линией.

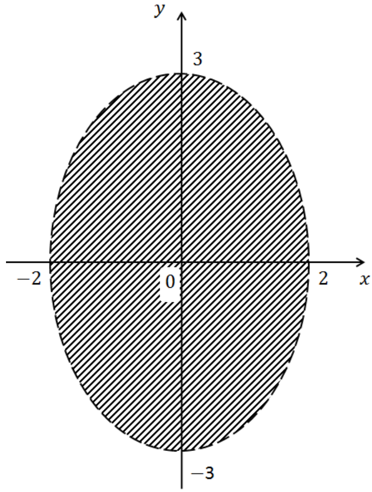


Рис. 5.5

Пример 5. Найти область определения функции

$$z = \arcsin\frac{x}{y^2} + \arccos(1 - y).$$

Решение. Областью определения функции $u = \arcsin\frac{x}{y^2} + \arccos(1 - y)$ описывается следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} \left|\frac{x}{y^2}\right| \le 1 \\ |1 - y| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le \frac{x}{y^2} \le 1 \\ -1 \le 1 - y \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y^2 \le x \\ y^2 \ge x \\ 0 < y \le 2 \end{cases}$$

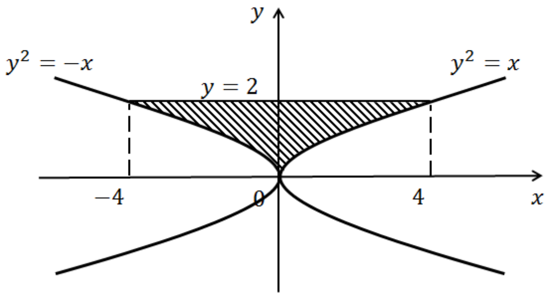


Рис. 5.6

Задачи

Найти и изобразить область определения заданных функций:

1. $z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-9}}$
2. $z=\arcsin(x+y)$
3. $z=\sqrt{xy}+\arcsin\frac{x}{2}$
4. $z=\ln(4-x^2-y^2)$
5. $z=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$
6. $z=\frac{\ln(x-4)}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1

Найти и изобразить область определения заданных функций:

1.1. $z=\dfrac{\sqrt{6x+5y-30}}{2x^2-y}$

1.2. $z=\dfrac{\ln(2x+5y-10)}{3x^2-y}$

$$1.3.\ z=\frac{\ln(9-x^2-y^2)}{\sqrt{7x+2y-14}}$$

$$1.4.\ z=\frac{\ln(2y^2-x)}{\sqrt{5-x}}$$

$$1.5.\ z=\frac{\sqrt{3x-2y-12}}{x^2+y^2-36}$$

$$1.6.\ z=\frac{\ln(2-y)}{\sqrt{x^2+y^2-16}}$$

$$1.7.\ z=\frac{\sqrt{25-x^2-y^2}}{x^2+y^2-9}$$

$$1.8.\ z=\frac{\ln(x^2+y^2-16)}{\sqrt{x+y-4}}$$

$$1.9.\ z=\frac{\ln(3y^2-x)}{\sqrt{x+7y-7}}$$

$$1.10.\ z=\frac{\ln(81-x^2-y^2)}{(x+6)(y-5)}$$

$$1.11.\ z=\frac{\ln(4-x)}{\sqrt{x^2+y^2-81}}$$

$$1.12.\ z=\frac{\sqrt{4x+3y+12}}{3y^2-x}$$

$$1.13.\ z=\frac{\ln(x-2y^2)}{\sqrt{10-2x+5y}}$$

$$1.14.\ z=\frac{\sqrt{x^2+y^2-64}}{x^2-16}$$

$$1.15.\ z=\frac{\ln(x^2+y^2-49)}{\sqrt{x+7y-7}}$$

$$1.16.\ z=\frac{\ln(64-x^2-y^2)}{(x+2)(y-7)}$$

$$1.17.\ z=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{x-8y-16}$$

$$1.18.\ z=\frac{\ln(x-4y^2)}{\sqrt{x-7}}$$

$$1.19.\ z=\frac{\ln(3x-5y-15)}{\sqrt{x^2+y^2-81}}$$

$$1.20.\ z=\frac{\sqrt{49-x^2-y^2}}{x^2-4}$$

$$1.21.\ z=\frac{\ln(y+3)}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$$

$$1.22.\ z=\frac{\ln(y+4x^2)}{y+5}$$

1.23. $z = \dfrac{\ln(16 - x^2 - y^2)}{y^2 - 9}$

1.24. $z = \dfrac{\sqrt{7x - 3y + 21}}{x^2 + y^2 - 16}$

1.25. $z = \dfrac{\ln(x + 2y^2)}{(y - 3)(y + 4)}$

1.26. $z = \dfrac{\sqrt{36 - x^2 - y^2}}{(x - 3)(y + 4)}$

1.27. $z = \dfrac{\ln(x + 4)}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$

1.28. $z = \dfrac{\ln(x^2 + y^2 - 25)}{\sqrt{x + y - 5}}$

1.29. $z = \dfrac{\ln(x - 5y^2)}{\sqrt{x + 8y - 8}}$

1.30. $z = \dfrac{\ln(x - 3y^2)}{\sqrt{12 - 4x + 3y}}$

5.2. Поверхности и линии уровня

Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называется такая линия $f(x, y) = C$ на плоскости xOy, в точках которой функция принимает постоянное значение $z = C$.

Пример 6. Найти линии уровня функции $u = x^2 - y^2$.

Решение. Линии уровня определяются уравнениями

$$x^2 - y^2 = c = const$$

При $c = 0$ получаем пару прямых $y = x$ и $y = -x$.

При $c \neq 0$ получаем семейство гипербол $x^2 - y^2 = c$.

Поверхностью уровня функции $u = u(x, y, z)$ называется поверхность, на которой эта функция сохраняет постоянное значение $u(x, y, z) = C$.

Задачи

Постройте линии уровня функций:

7. $z = \frac{y}{x}$

8. $z = x^2 + y^2$

9. $z = \frac{1}{x^2+2y^2}$

10. $z = \sqrt{xy}$

11. $z = x^2y + y$

5.3. Предел функции нескольких переменных. Непрерывность

δ-окрестностью точки $M(x_0, y_0)$ называется круг радиуса δ, содержащий точку M внутри себя.

Для функции трех переменных -окрестностью точки $M(x_0, y_0, z_0)$ называется шар радиуса δ, содержащий точку M внутри себя.

В общем случае функции n переменных -окрестностью точки $M(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ называется n-мерный шар радиусом δ с точкой M внутри.

На плоскости xOy введем расстояние между точками $M(x_0, y_0)$ и $N(x, y)$:

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Тогда условием нахождения точки N внутри круга радиуса δ является выполнение условия $\rho < \delta$.

Число a называется ***пределом функции*** $z = f(x, y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$ (или в точке $(x_0; y_0)$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, такое, что для всех точек $N(x.y)$, отличных от точки $M(x_0; y_0)$ и отстоящих от этой точки на расстояние ρ $(0 < \rho < \delta)$, выполняется неравенство $|f(x, y) - a| < \varepsilon$.

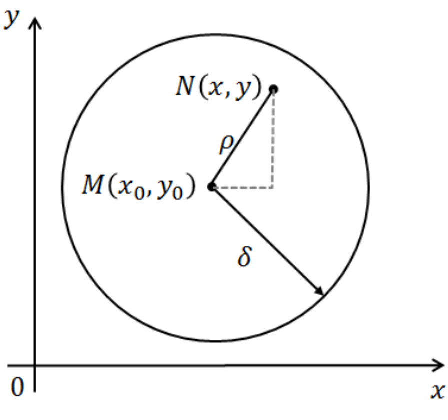


Рис.5.7

Математическое обозначение:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = \lim_{N \to M} f(x, y) = a$$

Дадим геометрическую интерпретацию понятия предела в трехмерном пространстве.

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, определенную на всей плоскости xOy, причем $f(x_0; y_0) = a$. Покажем, что предел этой функции в точке $M(x_0; y_0)$ равен a. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда условие $|f(x, y) - a| < \varepsilon$ выполнено для всех точек на плоскости xOy, которые лежат между изображенными на рисунке линиями уровня (рис.5.8).

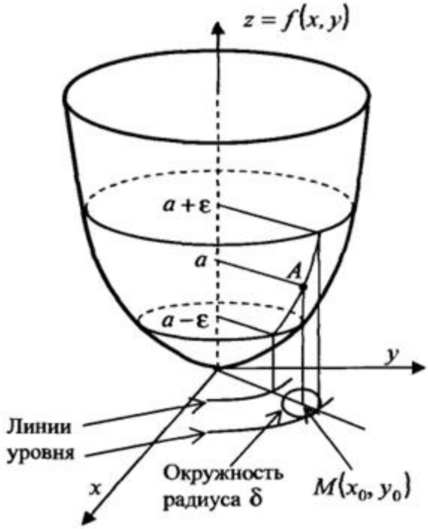


Рис.5.8

Спроектируем точку A, лежащую на графике функции $z = f(x, y)$, на плоскость xOy. Соответствующую точку $M(x_0; y_0)$ на плоскости выберем центром такого радиуса δ, все точки которого будут находится между линиями уровня. Тогда для всех точек $N(x; y)$ этого круга, отличных от точки $M(x_0; y_0)$ и отстоящих от этой точки на расстояние $0 < \rho < \delta$, выполняется неравенство $|f(x, y) - a| < \varepsilon$.

Замечание. Вычисление пределов функции двух переменных является более сложно задачей по сравнению с вычислением пределов функции одно переменной. Это связано с тем, что точка N может стремиться к точке M по любому направлению на плоскости в отличие от функции одной переменной, где переменная x может стремиться к числу x_0 на числовой прямой только справа или слева. Получающиеся при этом многочисленные пределы функции двух переменных должны совпадать друг с другом. Легче доказать отсутствие предела функции $z = f(x, y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$. Достаточно выбрать два таких направления, движение по которым приводит к различным пределам.

Пример 7. Найти предел функции

$$f(x, y) = \frac{\sin xy}{y}$$

при $x \to 0, y \to 0$.

Решение. Функция $f(x, y)$ определена всюду, кроме линии $y = 0$. Функция в точке $(0,0)$ не определена. При нахождении предела следует умножить числитель и знаменатель на x, сделать замену $xy = \rho$, а затем воспользоваться первым замечательным пределом:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sin xy}{y} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x \sin xy}{xy} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ \rho \to 0}} \frac{x \sin \rho}{\rho} = 0$$

Теорема 1. Предел суммы двух функций в точке (x_0, y_0) равен сумме пределов этих функций в той же точке.

Теорема 2. Предел произведения двух функций в точке (x_0, y_0) равен произведению пределов этих функций в той же точке.

Теорема 3. Предел частного двух функций в точке (x_0, y_0) равен частному пределов этих функций в той же точке (при условии, что ни значение функции – делителя в окрестности этой точки, ни значение предела этой функции не равны нулю).

Функция $f(x, y)$ называется ***непрерывной*** в точке (x_0, y_0), если она:

1) определена в точке (x_0, y_0);
2) имеет конечный предел при $x \to x_0$, $y \to y_0$;
3) $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

Определение непрерывности можно сформулировать на языке $(\varepsilon - \delta)$-окрестностей:

Функция $f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M(x_0, y_0)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, такое, что для всех точек $N(x, y)$, отстоящих от точки $M(x_0, y_0)$ на расстояние $\rho < \delta$, выполняется неравенство $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$.

Функция называется непрерывной в области определения, если она непрерывна в каждой точке области. Точки, в которых функция не является непрерывной, называются ***точками разрыва***. Эти точки могут быть как изолированными, так и составлять ***линии разрыва***.

5.4. Частные производные первого порядка

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$. Зафиксируем значение переменной y, положив $y = y_0$.

Тогда $z = f(x, y)$ будет функцией одной переменной x, для которой производная в точке x_0 имеет обычный смысл:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$$

где $\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ – частное приращение функции $z = f(x, y)$.

Этот предел, если он существует и конечен, называется ***частной производной функции*** $z = f(x, y)$ ***по переменной*** x в точке (x_0, y_0) и обозначается

$$f'_{x_0}(x_0, y_0) = z'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

В различных точках плоскости частная производная по x имеет, вообще говоря, разные значения, т.е. сама является функцией двух переменных и обозначается

$f'_x(x, y)$, или $z'_x(x, y)$, или $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, или $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Аналогично определяют частное приращение и частную производную по переменной y:

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$$

Способы нахождения частных производных не отличаются от нахождения производных в случае функции одной переменной. Нужно только помнить, что, если, например, мы находим частную производную по x, то y следует рассматривать как постоянную величину.

Пример 8. Найти частные производные функции

$$z = x^2y^3 + 4x^3y^2 + 5x - 4y + 1$$

Решение. При вычислении $\frac{\partial z}{\partial x}$ переменная y считается постоянной величиной:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= (x^2y^3 + 4x^3y^2 + 5x - 4y + 1)'_x \\ &= (x^2y^3)'_x + (4x^3y^2)'_x + (5x)'_x - (4y)'_x + (1)'_x \\ &= y^3(x^2)'_x + 4y^2(x^3)'_x + 5(x)'_x - 4y(1)'_x + (1)'_x \\ &= 2xy^3 + 12x^2y^2 + 5 - 0 + 0 \\ &= 2xy^3 + 12x^2y^2 + 5\end{aligned}$$

При вычислении $\frac{\partial z}{\partial y}$ переменная x считается постоянной величиной:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= (x^2y^3 + 4x^3y^2 + 5x - 4y + 1)'_y \\ &= (x^2y^3)'_y + (4x^3y^2)'_y + (5x)'_y - (4y)'_y + (1)'_y \\ &= x^2(y^3)'_y + 4x^3(y^2)'_y + 5x(1)'_y - 4(y)'_x + (1)'_y \\ &= 3x^2y^2 + 8x^3y + 0 - 4 + 0 \\ &= 3x^2y^2 + 8x^3y - 4\end{aligned}$$

Пример 9. Найти частные производные функции

$$u = \sin(3x + 5y - 4z)$$

Решение. При вычислении $\frac{\partial u}{\partial x}$ переменные y и z считается постоянными величинами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = (\sin(3x + 5y - 4z))'_x \\ = \cos(3x + 5y - 4z) \cdot (3x + 5y - 4z)'_x \\ = 3\cos(3x + 5y - 4z) \end{aligned}$$

При вычислении $\frac{\partial u}{\partial y}$ переменные x и z считается постоянными величинами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} = (\sin(3x + 5y - 4z))'_y \\ = \cos(3x + 5y - 4z) \cdot (3x + 5y - 4z)'_y \\ = 5\cos(3x + 5y - 4z) \end{aligned}$$

При вычислении $\frac{\partial u}{\partial z}$ переменные x и y считается постоянными величинами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} = (\sin(3x + 5y - 4z))'_z \\ = \cos(3x + 5y - 4z) \cdot (3x + 5y - 4z)'_z \\ = -4\cos(3x + 5y - 4z) \end{aligned}$$

Пример 10. Найти частные производные функции

$$u = x\ln(1 - y^3) \ + \arcsin z$$

Решение. При вычислении $\frac{\partial u}{\partial x}$ переменные y и z считается постоянными величинами:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x\ln(1-y^3)\ +\arcsin z)'_x = (x\ln(1-y^3)\ )'_x + (\arcsin z)'_x$$
$$= \ln(1-y^3) + 0 = \ln(1-y^3)$$

При вычислении $\frac{\partial u}{\partial y}$ переменные x и z считается постоянными величинами:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (x\ln(1-y^3)\ +\arcsin z)'_y = (x\ln(1-y^3)\ )'_y + (\arcsin z)'_y$$

$$= x(\ln(1-y^3))'_y + 0 = \frac{x}{1-y^3}\cdot(1-y^3)'_y = -\frac{3xy^2}{1-y^3}$$

При вычислении $\frac{\partial u}{\partial z}$ переменные x и y считается постоянными величинами:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x\ln(1-y^3)\ +\arcsin z)'_z = (x\ln(1-y^3)\ )'_z + (\arcsin z)'_z$$

$$= 0 + \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Пример 11. Найти частные производные функции

$$z = e^{\frac{x}{y}}$$

Решение. При вычислении $\frac{\partial z}{\partial x}$ переменная y считается постоянной величиной:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^{\frac{x}{y}}\right)'_x = e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}$$

При вычислении $\frac{\partial z}{\partial y}$ переменная x считается постоянной величиной:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(e^{\frac{x}{y}}\right)'_y = e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_y = -\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}$$

Пример 12. Найти частные производные функции

$$z = (x^2 + y^2)e^{xy}$$

Решение. При вычислении $\frac{\partial z}{\partial x}$ переменная y считается постоянной величиной:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} = \left((x^2 + y^2)e^{xy}\right)'_x = (x^2 + y^2)'_x e^{xy} + (x^2 + y^2)(e^{xy})'_x \\ = 2xe^{xy} + (x^2 + y^2)e^{xy}y = (2x + x^2y + y^3)e^{xy}\end{aligned}$$

При вычислении $\frac{\partial z}{\partial y}$ переменная x считается постоянной величиной:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} = \left((x^2 + y^2)e^{xy}\right)'_y = (x^2 + y^2)'_y e^{xy} + (x^2 + y^2)(e^{xy})'_y \\ = 2ye^{xy} + (x^2 + y^2)e^{xy}x = (2y + xy^2 + x^3)e^{xy}\end{aligned}$$

Пример 13. Найти частные производные функции

$$u = x^2 \ln(2yz + 4x)$$

Решение. При вычислении $\frac{\partial u}{\partial x}$ переменные y и z считается постоянными величинами:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= (x^2 \ln(2yz + 4x))'_x \\ &= (x^2)'_x \ln(2yz + 4x) + x^2(\ln(2yz + 4x))'_x \\ &= 2x \ln(2yz + 4x) + \frac{x^2}{2yz + 4x} \cdot (2yz + 4x)'_x \\ &= 2x \ln(2yz + 4x) + \frac{4x^2}{2yz + 4x} \\ &= 2x \ln(2yz + 4x) + \frac{2x^2}{yz + 2x}.\end{aligned}$$

При вычислении $\frac{\partial u}{\partial y}$ переменные x и z считается постоянными величинами:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= (x^2 \ln(2yz + 4x))'_y = x^2(\ln(2yz + 4x))'_y \\ &= \frac{x^2}{2yz + 4x} \cdot (2yz + 4x)'_y = \frac{x^2 z}{yz + 2x}\end{aligned}$$

При вычислении $\frac{\partial u}{\partial z}$ переменные x и y считается постоянными величинами:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (x^2\ \ln(2yz + 4x)\ )'_z = x^2(\ln(2yz + 4x)\ )'_z$$
$$= \frac{x^2}{2yz + 4x} \cdot (2yz + 4x)'_z = \frac{x^2 y}{yz + 2x}$$

Пример 14. Найти частные производные функции $z = x^y$

Решение. Функция $z = x^y$ является степенной относительно переменной x и показательной относительно переменной y:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^y)'_x = yx^{y-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^y)'_y = x^y \ln x$$

Пример 15. Найти частные производные функции $z = \sin(x^2 y)$

Решение. При вычислении $\frac{\partial z}{\partial x}$ переменная y считается постоянной величиной:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (\sin(x^2 y))'_x = \cos(x^2 y) \cdot (x^2 y)'_x = 2xy \cos(x^2 y)$$

При вычислении $\frac{\partial z}{\partial y}$ переменная x считается постоянной величиной:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (\sin(x^2 y))'_y = \cos(x^2 y) \cdot (x^2 y)'_y = x^2 \cos(x^2 y)$$

Пример 16. Доказать, что функция $z = y^2 \sin(x^2 - y^2)$ удовлетворяет уравнению $y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2 \cos(x^2 - y^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y \sin(x^2 - y^2) - 2y^3 \cos(x^2 - y^2)$$

Умножая обе части первого равенства на y^2, а второго – на xy и почленно складывая, получим

$$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy^4 \cos(x^2 - y^2) + 2xy^2 \sin(x^2 - y^2) \\ - 2xy^4 \cos(x^2 - y^2) = 2xy^2 \sin(x^2 - y^2) = 2xz$$

Таким образом, $y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz$ ч.т.д.

Задачи

Найдите частные производные первого порядка следующих функций:

12. $z = x^3 + 2y^3 - 7x^2y^4$

13. $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

14. $z = x^{10} + y^{10}$

15. $z = \cos(2x + 3y)$

16. $z = y \sin x + \sin y$

17. $z = x^{\sin y}$

18. $u = z^{xy}$

19. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

20. $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$

21. $z = e^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$

22. $u = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

23. $z = \frac{xy}{x+y}$

24. $z = \frac{x^2}{y} + \frac{y}{x^2}$

25. $z = \sqrt{2xy + y^2}$

26. $z = x\sqrt[3]{y} + \frac{y}{\sqrt{x}}$

27. $z = \sqrt{x}e^{\frac{y}{x}}$

28. $z = x\, e^{-xy}$

29. $z = xy\, e^{x+2y}$

30. $z = 2^{3x^2+2y^2-xy}$

31. $u = yx^3 + xz^2 + y^2z$

32. $u = \sin(x + 2y) + 2\sqrt{xyz}$

33. $u = x^2 - \operatorname{arctg}(y + z^3)$

34. $u = x^3y^2z + 3x - 5y + z + 2$

35. Доказать, что функция $z = \ln(x^2 + y^2)$ удовлетворяет уравнению $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

36. Доказать, что функция $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

37. Проверьте, что функция $z = \sqrt{x}\sin\frac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 2

Найти все частные производные первого порядка от заданных функций:

2.1. $u = 4\ln(3 + x^2) - 8xyz$

2.2. $u = x\sqrt{y} + (y + z)\sqrt{x}$

2.3. $u = x\sqrt{y} + y\sqrt{z}$

2.4. $u = \sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}$

$2.5.\ u = 2\ln(x^2 - 5) - 4xyz$

$2.6.\ u = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$

$2.7.\ u = \frac{1}{4}x^2y - \sqrt{x^2 + 5z^2}$

$2.8.\ u = \ln(1 + x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + z^2}$

$2.9.\ u = xz^2 - \sqrt[3]{x^2y}$

$2.10.\ u = xy + \ln(x^2 - y^2)$

$2.11.\ u = x\sqrt{y} - yz^2$

$2.12.\ u = x^2y - \sqrt{xy + z}$

$2.13.\ u = \ln(x^2 + y^2) - 4xyz$

$2.14.\ u = x(\ln y - \operatorname{arctg} z)$

$2.15.\ u = arctg\frac{y}{x} + xz$

$2.16.\ u = \sin(x + 2y) + \sqrt{xyz}$

$2.17.\ u = \ln(1 + x^2) - xy\sqrt{z}$

$2.18.\ u = x^2 + \sqrt{z^2 + y^2}$

$2.19.\ u = \sqrt{x^2 + y^2} - z$

$2.20.\ u = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2}$

$2.21.\ u = z^2 + \operatorname{arctg}(x - y)$

$2.22.\ u = x^2y^2z - \ln(z - x)$

$2.23.\ u = xy - \frac{x}{z}$

$2.24.\ u = \frac{\sqrt{x}}{y} - \frac{yz}{x + \sqrt{y}}$

$2.25.\ u = x^2 + \operatorname{arctg}(x + y)$

$2.26.\ u = 2\sqrt{x + y} + y\operatorname{arctg} z$

$2.27.\, u = xy + \ln(z^2 + x^2)$

$2.28.\, u = \ln(y^2 + x^2) + xyz$

$2.29.\, u = xy^2z + \ln(3 - x^2)$

$2.30.\, u = \ln\left(x + \sqrt{y^2 + z^2}\right)$

5.5. Полный дифференциал

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f\,(x, \mathrm{y})$, заданную в некоторой области. Пусть $A(x_0, \mathrm{y}_0)$ – точка этой области. Найдем изменение этой функции при переходе из точки $A(x_0, y_0)$ в точку $B(x, y)$ той же области.

Разность значений функции в точках B и A называется ***полным приращением*** функции $z = f\,(x, \mathrm{y})$ (обозначается Δz или $\Delta f\,(x, \mathrm{y})$):

$$\Delta z = f\,(B) — f\,(A) = f\,(x, y) - f\,(x_0, y_0).$$

Обозначим приращения аргументов x и y при переходе из точки А в точку B через Δx и Δy:

$$\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0.$$

Тогда $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$.

Функция $z = f(x, y)$ называется ***дифференцируемой*** в точке $A(x_0, y_0)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A_1\Delta x + A_2\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

где A_1, A_2 – не зависящие от Δx и Δy константы, а α и β — бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Если хотя бы одно из чисел A_1, A_2, отлично от нуля, то сумма $L = A_1\Delta x + A_2\Delta y$ – главная линейная относительно Δx и Δy часть полного приращения дифференцируемой функции.

Теорема 4. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $A(x_0; y_0)$, то она имеет в этой точке частные производные по x и y.

При условии существования частных производных $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ в окрестности точки A и их непрерывности в самой точке A, полное приращение может быть представлено в виде:

$$\Delta z = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

Линейная относительно Δx и Δy часть полного приращения называется ***полным дифференциалом*** в точке $A(x, y)$ и обозначается dz:

$$dz = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y$$

Учитывая, что дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, т.е. $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$, получаем, что

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$$

Вычисление полного дифференциала функции значительно проще, чем вычисление ее полного приращения. Поэтому при приближенных вычислениях используется именно полный дифференциал.

Теорема 5. Если функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в данной точке, то она непрерывна в этой точке.

Замечание. Для функции *одной* переменной $y = f(x)$ существование производной равносильно дифференцируемости. Однако для функции *нескольких* переменных аналогичное утверждение, вообще говоря, не верно. Из существования частных производных по всем аргументам не следует, что функция дифференцируема, и даже не следует, что она непрерывна. Таким образом, существование частных производных не является достаточным условием для дифференцируемости функции нескольких переменных.

Теорема 6. Если функция $z = f(x,y)$ имеет частные производные $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$в некоторой окрестности точки M и эти производные непрерывны в точке M, то данная функция дифференцируема в точке M.

Пример 17. Найти полное приращение Δu и полный дифференциал du функции $u(x,y) = 3x^2 + xy - y^2 + 1$.

Решение.

$$\begin{aligned}\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) \\ &= 3(x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x)(y+\Delta y) - (y+\Delta y)^2 \\ &+ 1 - (3x^2 + xy - y^2 + 1);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta u = \underline{3x^2} + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + \underline{\underline{xy}} + y\Delta x + x\Delta y + \Delta x \cdot \Delta y - \underline{\underline{\underline{y^2}}} \\ &- 2y\Delta y - (\Delta y)^2 + \underline{\underline{1}} - \underline{3x^2} - \underline{\underline{xy}} + \underline{\underline{\underline{y^2}}} - \underline{\underline{1}};\end{aligned}$$

$$\Delta u = 6x\underline{\Delta x} + 3(\Delta x)^2 + y\underline{\Delta x} + x\underline{\underline{\Delta y}} + \Delta x \cdot \Delta y - 2y\underline{\underline{\Delta y}} - (\Delta y)^2;$$

$$\Delta u = \underbrace{(6x + y)\Delta x + (x - 2y)\Delta y}_{du} + \underbrace{3(\Delta x)^2 + \Delta x \cdot \Delta y - (\Delta y)^2}_{\substack{\text{бесконечно малые функции} \\ \text{при} \Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0}}$$

Так как $\frac{\partial u}{\partial x} = 6x + y$, а $\frac{\partial u}{\partial y} = x - 2y$, то

$$du = (6x + y)dx + (x - 2y)dy$$

Пример 18. Найти полный дифференциал функции

$$z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

Решение. Полный дифференциал функции находится по формуле:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Найдем $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Поэтому

$$dz = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{y}{\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)\sqrt{x^2 + y^2}} dy$$

Пример 19. Найти полный дифференциал функции $u = \frac{x^2}{y^3 z^2}$ в точке $M_0(-2; 1; 2)$.

Решение. Полный дифференциал функции находится по формуле:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y^3 z^2}; \ \frac{\partial u}{\partial y} = -3 \frac{x^2}{y^4 z^2}; \ \frac{\partial u}{\partial z} = -2 \frac{x^2}{y^3 z^3}$$

Подставляя координаты точки M_0 получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = -\frac{4}{4} = -1;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(M_0) = -3 \cdot \frac{4}{4} = -3;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -2 \cdot \frac{4}{8} = -1$$

Таким образом, $du = -dx - 3dy - dz$.

Пример 20. Вычислить приближенно значение $(1{,}1)^{3{,}2}$, исходя из значения функции $z = x^y$ в точке $A(1; 3)$.

Решение. Значение $(1{,}1)^{3{,}2}$ найдем из соотношения:

$$(1{,}1)^{3{,}2} = (1)^3 + dz = 1 + dz,$$

где dz вычисляется как приращение функции z, обусловленное приращением аргументов x и y: $\Delta x = 1{,}1 - 1 = 0{,}1; \Delta y = 3{,}2 - 3 = 0{,}2$. Имеем:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = yx^{y-1}dx + x^y \ln x\, dy;$$

$$dz(A) = 3 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}2 = 0{,}3$$

Тогда

$$(1{,}1)^{3{,}2} = 1 + 0{,}3 = 1{,}3$$

Задачи

Найдите полный дифференциал функций:

38. $z = \frac{2y-3x}{3y-2x}$

39. $z = x + ye^{\frac{x}{y}}$

40. $z = e^{x^2 y}$

41. $z = \ln(3x + 2y)$

42. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

43. $u = \frac{\operatorname{arctg} y}{1+x^2}$

44. $u = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{y}$

45. $u = \arcsin\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

46. $u = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{z}{y}}$

47. Вычислить приближенно $\ln(8{,}001 + 0{,}99^3)$, исходя из значения функции $z = \ln(x^2 + y^3)$ при $x = 2, y = 1$.

48. Вычислить приближенно $\sqrt[3]{3{,}61 - 0{,}05^2}$, исходя из значения функции $z = \sqrt[3]{x^2 - y^2}$ при $x = 2, y = 0$.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 3

Найти полный дифференциал функции u в точке M_0:

3.1. $u = \dfrac{yz^2}{x^2}, M_0(1; 2; 1)$

3.2. $u = \dfrac{yz^2}{x}, M_0(2; 2; 1)$

3.3. $u = x^2yz^3, M_0(-1; 2; 1)$

3.4. $u = \dfrac{yz^2}{x}, M_0(-1; -2; -1)$

3.5. $u = \dfrac{z^3}{xy^2}, M_0(-1; -2; 1)$

3.6. $u = \dfrac{xy^2}{z^2}, M_0(1; 2; -1)$

3.7. $u = \dfrac{z}{x^3y^2}, M_0(1; 2; -2)$

3.8. $u = \dfrac{x^3y^2}{z}, M_0(-1; 2; -1)$

3.9. $u = \dfrac{x^2}{yz^2}, M_0(2; -1; -1)$

3.10. $u = \dfrac{1}{x^2yz}, M_0(1; 2; -1)$

3.11. $u = \dfrac{z^2}{xy^2}, M_0(2; 1; 1)$

3.12. $u = \dfrac{x^2}{y^2z^3}, M_0(1; -2; -1)$

3.13. $u = xy^2z^2, M_0(1; 1; 2)$

3.14. $u = x^2yz^3, M_0(2; -1; 1)$

3.15. $u = \dfrac{y^3}{x^2z}, M_0(-1; 1; 2)$

3.16. $u = \dfrac{yz^2}{x^2}, M_0(2; 1; -1)$

3.17. $u = x^2y^2z$, $M_0(1; -1; 2)$

3.18. $u = \frac{1}{xy^2z}$, $M_0(-2; -1; 1)$

3.19. $u = \frac{x}{yz^2}$, $M_0(1; 1; -2)$

3.20. $u = \frac{1}{xyz}$, $M_0(2; -1; -1)$

3.21. $u = \frac{y^2z^3}{x^2}$, $M_0(-1; -1; 2)$

3.22. $u = \frac{x}{y^2z^3}$, $M_0(1; -1; -2)$

3.23. $u = \frac{y^2z^3}{x}$, $M_0(1; -1; -2)$

3.24. $u = x^2yz$, $M_0(-2; 1; -1)$

3.25. $u = \frac{y}{xz^2}$, $M_0(-1; 1; -2)$

3.26. $u = \frac{y^2z^3}{x^2}$, $M_0(2; 2; 1)$

3.27. $u = \frac{yz^2}{x}$, $M_0(-1; -1; -2)$

3.28. $u = \frac{x^2z}{y^3}$, $M_0(2; 2; -1)$

3.29. $u = \frac{x^2}{y^2z^2}$, $M_0(2; 1; 1)$

3.30. $u = \frac{x}{yz^2}$, $M_0(-2; 2; -1)$

5.6. Дифференцирование сложной и неявной функций

Дифференцирование сложной функции

Рассмотрим функцию $z = f(u, v)$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ являются функциями независимой переменной x. Тогда функция z является функцией x и называется ***сложной функцией аргумента*** x.

Производная от функции z по независимой переменной x вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$$

Вычисленная по данной формуле производная называется ***полной производной от функции z по независимой переменной x.***

Аналогично, если $z = f(u, v, w)$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$ являются функциями x, то

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dx}$$

Если $z = f(x, u, v)$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ являются функциями x, то

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$$

Если $z = f(u, v)$ – функция от двух переменных u и v, где каждая из функций в свою очередь является функцией двух независимых переменных x и y, то и z есть функция независимых переменных x и y, а ее частные производные по переменным x и y вычисляются по формулам:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

Пример 21. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z = \sin(3u + 2v - 4w)$, $u = 2x^3$, $v = 3x^2$, $w = x^4$.

Решение. Здесь следует воспользоваться следующей формулой:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dx}$$

Определим производные, входящие в эту формулу:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = (\sin(3u + 2v - 4w))'_u = 3\cos(3u + 2v - 4w)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = (\sin(3u + 2v - 4w))'_v = 2\cos(3u + 2v - 4w)$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = (\sin(3u + 2v - 4w))'_w = -4\cos(3u + 2v - 4w)$$

$$\frac{du}{dx} = (2x^3)' = 6x^2;\ \frac{dv}{dx} = (3x^2)' = 6x; \frac{dw}{dx} = (x^4)' = 4x^3$$

Подставляя найденные производную в исходную формулу, получим

$$\frac{dz}{dx} = 3\cos(3u + 2v - 4w) \cdot 6x^2 + 2\cos(3u + 2v - 4w) \cdot 6x \\ - 4\cos(3u + 2v - 4w) \cdot 4x^3.$$

Вынося в правой части за скобку $\cos(3u + 2v - 4w)$ и заменяя под знаком косинуса u, v и w их выражениями через x, получим окончательно

$$\frac{dz}{dx} = (18x^2 + 12x - 16x^3) \cdot \cos(6x^3 + 6x^2 - 4x^4).$$

Пример 22. Найти полную производную функции

$$u = e^{5x}(y - z), y = 5\sin x\,, z = \cos x.$$

Решение. Функция u, зависит от переменной x и функций y и z, т.е. $u = u(x, y, z)$. Здесь следует воспользоваться следующей формулой:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx}$$

Определим производные, входящие в правую часть данной формулы:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 5e^{5x}(y - z); \frac{\partial u}{\partial y} = e^{5x}; \frac{\partial u}{\partial z} = -e^{5x};$$

$$\frac{dy}{dx} = 5\cos x\,; \frac{dz}{dx} = -\sin x.$$

Получаем, что

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} = 5e^{5x}(y - z) + 5e^{5x}\cos x + e^{5x}\sin x = \begin{pmatrix} y = 5\sin x \\ z = \cos x \end{pmatrix} \\ = 5e^{5x}(5\sin x - \cos x) + 5e^{5x}\cos x + e^{5x}\sin x \\ = 25e^{5x}\sin x - 5e^{5x}\cos x + 5e^{5x}\cos x \\ + e^{5x}\sin x = 26e^{5x}\sin x.\end{aligned}$$

Пример 23. Найти $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{\partial z}{\partial x}$, если $z = x^y, y = \ln x$

Решение. Так как $z = z(x, y)$, то

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \ ;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}; \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x \, ; \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

Получаем, что

$$\frac{dz}{dx} = y \cdot x^{y-1} + x^y \ln x \cdot \frac{1}{x} = x^y \left(\frac{y}{x} + \frac{\ln x}{x}\right).$$

Пример 24. Найти полную производную функции z, если $z = \operatorname{arctg}(x + 2y)$, $x = t^2$, $y = t^3$.

Решение. Так как $z = z(x(t), y(t)) = z(t)$, то

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

Вычислим производные, входящие в правую часть формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + (x + 2y)^2}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{1 + (x + 2y)^2}; \frac{dx}{dt} = 2t; \frac{dy}{dt} = 3t^2.$$

Следовательно,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{1 + (x + 2y)^2} \cdot 2t + \frac{2}{1 + (x + 2y)^2} \cdot 3t^2 = \frac{2t + 6t^2}{1 + (x + 2y)^2}$$

Заменяя x и y их выражениями через е, окончательно получим

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2t(1+3t)}{1+(t^2+2t^3)^2} = \frac{2t(1+3t)}{1+t^4(1+2t)^2}.$$

Пример 25. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \ln(u^2+v^2)$, $u = x\cos y$, $v = y\sin x$.

Решение. Следует воспользоваться формулами

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

Определим частные производные, входящие в эти формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u}{u^2+v^2};\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2v}{u^2+v^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos y\,;\frac{\partial v}{\partial x} = y\cos x\,;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x\sin y\,;\frac{\partial v}{\partial y} = \sin x.$$

Подставляя полученные производные в формулы, получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u}{u^2+v^2}\cdot\cos y + \frac{2v}{u^2+v^2}y\cos x \\ = \frac{2}{u^2+v^2}(u\cos y + vy\cos x) \\ = \frac{2}{x^2\cos^2 y + y^2\sin^2 x}(x\cos^2 y + y^2\sin x\cos x)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2u}{u^2+v^2}\cdot x\sin y + \frac{2v}{u^2+v^2}\sin x$$
$$= \frac{2}{u^2+v^2}(v\sin x - ux\sin y)$$
$$= \frac{2}{x^2\cos^2 y + y^2\sin^2 x}(y\sin^2 x - x^2\sin y\cos y)$$

Дифференцирование неявной функции

Если независимая переменная x и функция $y = y(x)$ связаны уравнением $f(x, y) = 0$, неразрешенным относительно y, то говорят, что y есть ***неявная функция*** x (или функция y от x задана неявно).

Для того, чтобы не решая уравнение $f(x, y) = 0$ относительно y, найти производную от y по x, пользуются формулой

$$y' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Чтобы определить производную y'', надо переписать формулу для y' в виде $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y' = 0$. Продифференцировать полученное уравнение по x. Заменить y' найденным до этого выражением. Точно так же определяется y''' и т.д.

Пример 26. Определить y' и y'', если функция y от x задана неявно уравнением $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Решение. Обозначим левую часть этого уравнения через $f(x, y)$ и найдем частные производные от функции f:

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y; \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x.$$

Подставляя в формулу для y', получаем:

$$y' = -\frac{3x^2 - 3y}{3y^2 - 3x} = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x}.$$

Чтобы определить y'', перепишем последнее равенство в таком виде:

$$x^2 - y + (y^2 - x)y' = 0.$$

Продифференцируем его по x, помня, что y есть функция от x. Получим

$$(x^2 - y + (y^2 - x)y')' = 0$$

или

$$2x - y' + (y^2 - x)' \cdot y' + (y^2 - x) \cdot y'' = 0$$

или

$$2x - y' + (2y \cdot y' - 1) \cdot y' + (y^2 - x) \cdot y'' = 0$$

или

$$2x - y' + 2y \cdot (y')^2 - y' + (y^2 - x) \cdot y'' = 0$$

или

$$2x - 2y' + 2y \cdot (y')^2 + (y^2 - x) \cdot y'' = 0.$$

Подставляя сюда вместо y' его значение, получим

$$2x - 2\left(-\frac{x^2 - y}{y^2 - x}\right) + 2y \cdot \left(-\frac{x^2 - y}{y^2 - x}\right)^2 + (y^2 - x) \cdot y'' = 0$$

Отсюда

$$y'' = -\frac{2x - 2\left(-\frac{x^2 - y}{y^2 - x}\right) + 2y \cdot \left(-\frac{x^2 - y}{y^2 - x}\right)^2}{y^2 - x}$$

или

$$y'' = -2\frac{x + \frac{x^2 - y}{y^2 - x} + y \cdot \left(\frac{x^2 - y}{y^2 - x}\right)^2}{y^2 - x}$$

или

$$y'' = -2\frac{x(y^2 - x)^2 + (x^2 - y)(y^2 - x) + y \cdot (x^2 - y)^2}{(y^2 - x)^3}$$

Раскроем в числителе скобки и приведем подобные слагаемые

$$y'' = -2\frac{xy^4 + x^4y - 3x^2y^2 + xy}{(y^2 - x)^3} = -2\frac{xy(x^3 + y^3 - 3xy + 1)}{(y^2 - x)^3}$$

По условию $x^3 + y^3 - 3xy = 0$, следовательно,

$$y'' = -2\frac{xy}{(y^2 - x)^3} = -\frac{2xy}{(y^2 - x)^3}$$

Пример 27. Определить y', y'', y''' при $x = 2, y = 0$, если функция y от x задана неявно уравнением $x^2 - 3xy + 4y^2 - 2x + 3y + 2 = 0$.

Решение. Обозначим левую часть этого уравнения через $f(x, y)$ и найдем частные производные от функции f:

$$f(x, y) = x^2 - 3xy + 4y^2 - 2x + 3y + 2;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3y - 2; \frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 8y + 3.$$

Подставляя в формулу для y', получаем:

$$y' = -\frac{2x - 3y - 2}{-3x + 8y + 3}.$$

Подставляя вместо x и y их значения, имеем

$$y'(2; 0) = -\frac{2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 - 2}{-3 \cdot 2 + 8 \cdot 0 + 3} = \frac{2}{3}$$

Чтобы определить y'', перепишем равенство для y' в таком виде:

$$2x - 3y - 2 - (3x - 8y - 3)y' = 0.$$

Продифференцируем его по x, помня, что y есть функция от x. Получим

$$2 - 3y' - (3 - 8y')y' - (3x - 8y - 3)y'' = 0$$

Подставляя сюда вместо x и y их значения, а вместо y', найденное выше значение, имеем

$$2 - 3 \cdot \frac{2}{3} - \left(3 - 8 \cdot \frac{2}{3}\right)\frac{2}{3} - (3 \cdot 2 - 8 \cdot 0 - 3)y'' = 0,$$

Откуда

$$y'' = \frac{14}{27}.$$

Чтобы определить y''', продифференцируем равенство для y'' по x:

$$-3y'' - (-8y'')y' - (3 - 8y)y'' - (3 - 8y)y'' \\ - (3x - 8y - 3)y''' = 0$$

Подставляя сюда вместо x и y их значения, а вместо y' и y'', найденное выше значение, имеем

$$y''' = \frac{98}{81}.$$

Задачи

49. Найдите полную производную $\frac{dz}{dt}$ функции $z = \sin\frac{x}{y}$, где $x = e^t, y = t^2$.

50. Определить полную производную $\frac{du}{dx}$ функции $u = z^2 + y^2 + zy,\ z = \sin x\,,\ y = e^x$.

51. Определить полную производную $\frac{du}{dx}$ функции $u = v^2 + vy,\ v = \ln x\,,\ y = e^x$.

52. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = x^2y^2,\ x = u + v, y = \frac{u}{v}$.

53. Найти y', если $x \sin y - \cos y + \cos 2y = 0$.

54. Найти $y'''(1,1)$, если $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$

Задачи для самостоятельного решения

Задание 4

Найти полную производную $\frac{du}{dt}$ функции u:

4.1. $u = e^{x-2y}, \qquad x = sin\, t\,, \qquad y = t^3$

4.2. $u = ln(e^x + e^{-y})\,, \qquad x = t^2, \qquad y = t^3$

4.3. $u = y^x, x = ln(t-1)\,, y = e^{\frac{t}{2}}$

4.4. $u = e^{y-2x+2}, x = sin\, t\,, y = cos\, t$

4.5. $u = x^2e^y, \qquad x = cos\, t\,, \qquad y = sin\, t$

4.6. $u = ln(e^x + e^y)\,, \qquad x = cos\, t\,, y = sin\, t$

4.7. $u = x^y, \qquad x = e^t, y = ln\, t$

4.8. $u = x^2e^{-y}, x = sin\, t\,, y = sin^2 t$

4.9. $u = ln(e^{-x} + e^y)\,, x = t^2, y = t^3$

4.10. $u = e^{x-2y}, \qquad x = sin\, t\,, y = t^3$

4.11. $u = e^{y-2x-1}, x = \cos t\,, y = \sin t$

4.12. $u = \arcsin\dfrac{x}{y}, x = \sin t\,, y = \cos t$

4.13. $u = \arccos\dfrac{2x}{y}, x = \sin t\,, y = \cos t$

4.14. $u = \dfrac{x^2}{y+1}, x = 1 = 2t, y = arctg\ t$

4.15. $u = \sqrt{x + y^2 + 3}, x = \ln t\,, y = t^2$

4.16. $u = \arcsin\dfrac{x^2}{y}, x = \sin t\,, y = \cos t$

4.17. $u = \dfrac{y^2}{x}, x = 1 - 2t, y = 1 + arctg\ y$

4.18. $u = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}, x = \sin t\,, y = \cos t$

4.19. $u = \sqrt{x^2 + y + 3}, x = \ln t\,, y = t^2$

4.20. $u = \arcsin\dfrac{x}{2y}, x = \sin t\,, y = \cos t$

4.21. $u = \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}, x = \sin(2t)\,, y = tg^2 t$

4.22. $u = \sqrt{x + y + 3}, x = \ln t\,, y = t^2$

4.23. $u=\dfrac{y}{x}, x=e^{t}\,, y=1-e^{2t}$

4.24. $u=arcsin\dfrac{2x}{y}, x=sin\,t\,, y=cos\,t$

4.25. $u=arctg(x+y)\,, x=t+3, y=e^{t}$

4.26. $u=\sqrt{x^2+y^2+3}, x=ln\,t\,, y=t^3$

4.27. $u=arctg\,(xy), x=t+3, y=e^{t}$

4.28. $u=\frac{y^2}{x-1}, x=2-3t, y=\operatorname{arctg} t$

4.29. $u=\sqrt{x^2+y+8}, x=\ln t\,, y=t^2$

4.30. $u=e^{2x+3y-1}, x=\cos(3t)\,, y=\sin(3t)$

5.7. Частные производные высших порядков

Частными производными *второго порядка* называются частные производные от частных производных первого порядка. Обозначения:

$$(z'_x)'_x=z''_{xx}=f''_{xx}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(z'_x)'_y = z''_{xy} = f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$\left(z'_y\right)'_x = z''_{yx} = f''_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$\left(z'_y\right)'_y = z''_{yy} = f''_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Расположение индексов x и y или символов $\partial x, \partial y$ соответствует порядку дифференцирования. Производные третьего порядка обозначаются так:

$$(z''_{xx})'_x = z'''_{xxx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$$

$$\left(z''_{yx}\right)'_y = z'''_{yxy} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$$

и.т.д.

Частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ называются *смешанными частными производными*.

Теорема 7. Если частные производные второго порядка функции $z = f(x,y)$ непрерывны в точке $(x_0; y_0)$, то в этой точке $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Замечание. Обычно функции, используемые в экономике, имеют непрерывные частные производные второго порядка.

Пример 28. Найти вторые частные производные функции $z = y\ln(xy^2)$. Найти $z''_{xy}\ (1;-1)$, $z''_{yy}\ (1;-1)$.

Решение. Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{xy^2} \cdot y^2 = \frac{y}{x},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \ln(xy^2) + \frac{y}{xy^2} \cdot 2yx = \ln(xy^2) + 2$$

Найдем производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (z'_x)'_y = \left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{x}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (\ln(xy^2) + 2)'_y = \frac{1}{xy^2} \cdot 2yx = \frac{1}{y}$$

Следовательно,

$$z''_{xy}(1;-1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$z''_{yy}(1;-1) = \frac{1}{-1} = -1$$

Пример 29. Найти $z''_{xx} + z''_{yy}$, если $z = e^x(x\cos y - y\sin y)$.

Решение.

$z'_x = e^x(x\cos y - y\sin y) + e^x\cos y = e^x(x\cos y\ - y\sin y + \cos y)$,

$z'_y = e^x(-x\sin y - \sin y - y\cos y)$,

$z''_{xx} = e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y) + e^x\cos y = e^x(x\cos y - y\sin y + 2\cos y)$,

$z''_{yy} = e^x(-x\cos y - \cos y - \cos y + y\sin y) = e^x(-x\cos y - 2\cos y + y\sin y)$.

Подставляя полученные выражения и приводя подобные слагаемые, получаем, что $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$.

Пример 30. Найти частные производные третьего порядка функции $z = x^4 + 3x^3y - 4x^2y^2 + 5xy^3 - y^4$.

Решение. Вычислим производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 9x^2y - 8xy + 5y^3$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^3 - 8x^2y + 15xy^2 - 4y^3$$

Вычислим производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (z'_x)'_x = (4x^3 + 9x^2y - 8xy^2 + 5y^3)'_x = 12x^2 + 18xy - 8y^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (z'_x)'_y = (4x^3 + 9x^2y - 8xy^2 + 5y^3)'_y = 9x^2 - 16xy + 15y^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(z'_y\right)'_y = (3x^3 - 8x^2y + 15xy^2 - 4y^3)'_y$$
$$= -8x^2 + 30xy - 12y^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(z'_y\right)'_x = (3x^3 - 8x^2y + 15xy^2 - 4y^3)'_x$$
$$= 9x^2 - 16xy + 15y^2$$

Заметим, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Вычислим производные третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = (z''_{xx})'_x = (12x^2 + 18xy - 8y^2)'_x = 24x + 18y$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = (z''_{xx})'_y = (12x^2 + 18xy - 8y^2)'_y = 18x - 16y$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \left(z''_{xy}\right)'_x = (9x^2 - 16xy + 15y^2)'_x = 18x - 16y$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\, \underbrace{\partial y \partial y}_{\substack{\text{обозна}\\ \text{чается}\\ \partial y^2}}} = \left(z''_{xy}\right)'_y = (9x^2 - 16xy + 15y^2)'_y = -16x + 30y$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \left(z''_{yy}\right)'_y = (-8x^2 + 30xy - 12y^2)'_y = 30x - 24y$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \left(z''_{yy}\right)'_x = (-8x^2 + 30xy - 12y^2)'_x = -16x + 30y$$

Учитывая, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, получаем

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \underbrace{\partial x \partial x}_{\partial x^2}} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = 18x - 16y$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -16x + 30y$$

Оказалось, что выполняются следующие равенства

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$$

Эти совпадения не являются случайными.

Теорема 8. Если частные производные непрерывны, то их значения не зависят от порядка дифференцирования.

Пример 31. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ для функции $u = \sin(xyz)$.

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz \cdot \cos(xyz)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = z\cos(xyz) - xyz^2 \cdot \sin(xyz)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \cos(xyz) - xyz \cdot \sin(xyz) - 2xyz \cdot \sin(xyz) - x^2y^2z^2\cos(xyz) = (1 - x^2y^2z^2)\cos(xyz) - 3xyz \cdot \sin(xyz)$$

Задачи

Найдите частные производные второго порядка от заданных функций:

55. $z = xy$
56. $z = e^{5x+3y}$
57. $z = \ln(x^2 + y^2)$
58. $z = e^{xy}$
59. $u = e^{xyz}$
60. $u = \sin\left(\frac{xy}{z}\right)$
61. $z = \arcsin(x + y)$
62. $z = \ln \operatorname{tg}\frac{x+y}{x-y}$
63. $z = x\sin(xy) + y\cos(xy)$
64. $z = x^2\ln(x + y)$
65. $z = x^2\sin\sqrt{y}$
66. $z = x^y$

Задачи для самостоятельного решения

Задание 5

Найти все частные производные второго порядка:

5.1. $z = xy^2 - x^2y$

5.2. $z = xy + \cos(x + y)$

5.3. $z = x^2y + xy^2$

5.4. $z = xy - \sin(x + y)$

5.5. $z = xy^3 - x^3y$

5.6. $z = xy^3 + x^3y$

5.7. $z = \cos x \cdot \sin y$

5.8. $z = xy - \cos(x + y)$

5.9. $z = xy + \sin(x + y)$

5.10. $z = y \ln x$

5.11. $z = x \ln y$

5.12. $z = x \sin(xy)$

5.13. $z = x^2y^3$

5.14. $z = \sin x \cos y$

5.15. $z = \sin x \sin y$

5.16. $z = \cos x \sin y$

5.17. $z = y \cos(xy)$

5.18. $z = y \sin(xy)$

5.19. $z = xe^{xy}$

5.20. $z = y\, e^{xy}$

5.21. $z = x \cos y$

5.22. $z = x^3y^3 + x^3 + y^3$

5.23. $z = e^{xy}$

5.24. $z = x^2 + y^2 + x^2y^2$

5.25. $z = x \cos(x + 2y)$

5.26. $z = y \cos(2x + y)$

5.27. $z = y \cos(2x + y)$

5.28. $z = 3^{x-y}$

5.29. $z = 2^{x+y}$

5.30. $z = x \sin(x + 2y)$

Задание 6

Найти частные производные указанного порядка от заданных функций:

6.1. $z = x\ln(xy)\,, \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = ?$

6.3. $z = e^{x^2 y}, \dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = ?$

6.5. $z = \frac{x+y}{x-y}, \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = ?$

6.7. $z = xy\, e^{x+y}, \dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = ?$

6.9. $z = e^{xy^2}, \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = ?$

6.11. $z = \frac{x-y}{x+y}, \dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = ?$

6.13. $z = \sqrt{x}\operatorname{arctg} y, \dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = ?$

6.14. $z = y\ln(xy)\,, \dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = ?$

6.15. $z = xy\sin(x+y)\,, \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = ?$

6.16.$z = \sin(x^2 + y^2)\,, \dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = ?$

6.17. $z = xy\cos(x+y)\,, \dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = ?$

6.18. $z = x^2 y + \frac{x^3}{y}, \dfrac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = ?$

6.2. $z = \sin\frac{y}{x}, \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = ?$

6.4. $z = e^{\frac{y}{x}}, \dfrac{\partial^4 z}{\partial y^3 \partial x} = ?$

6.6. $z = 2^{x^2 y}, \dfrac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} = ?$

6.8. $z = \cos\frac{x}{y}\,, \dfrac{\partial^4 z}{\partial y^3 \partial x} = ?$

6.10. $z = 2^{xy^3}, \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = ?$

6.12. $z = e^{\frac{x}{y}}, \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = ?$

6.19. $z = xy\cos(x-y)\,, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = ?$

6.20. $z = \ln(x+y^2)\,, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = ?$

6.21. $z = \arcsin\frac{x}{y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = ?$

6.22. $z = \arcsin\frac{y}{x}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = ?$

6.23. $z = xy^2 + \frac{y^3}{x}, \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = ?$

6.24. $z = \ln(x^2+y), \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = ?$

6.25. $z = y^3 \sin x + x^3 \cos y\,, \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} = ?$

6.26. $z = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = ?$

6.27.$z = \mathrm{arctg}\frac{x}{y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = ?$

6.28. $z = \cos(x^2+y^2)\,, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = ?$

6.29. $z = x^3 \sin y + y^3 \cos x\,, \frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = ?$

6.30. $z = 2^{x^3 y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = ?$

5.8. Производная по направлению. Градиент

Мы познакомились с частными производными $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. Каждая из них представляет приращение функции вдоль соответствующей оси (x или y) при неизменной второй переменой.

Однако во многих приложениях, включая экономические, требуется определять изменение функции не только вдоль оси x или y, но и вдоль любого направления на координатной плоскости xOy.

Пусть $z = f(x, y)$ - функция, определенная в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$; l – некоторый луч с началом в точке M_0; $M(x, y)$ – точка на этом луче, принадлежащая рассматриваемой окрестности точки M_0; Δl – длина отрезка M_0M (рис. 5.9).

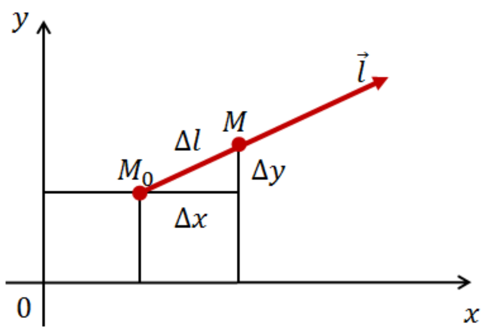


Рис.5.9

Предел

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{f(\mathrm{M}) - f(M_0)}{\Delta l}$$

называется ***производной функции z по направлению l в точке M_0.***

В частности, частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ есть производная функции z по положительному направлению оси Ox, а $\frac{\partial z}{\partial \mathrm{y}}$ - производная функции z по положительному направлению оси Oу.

Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что l – единичный вектор с координаторами $(\cos\alpha\,,\sin\alpha)$ или, что то же самое, $(\cos\alpha\,;\cos\beta)$. Здесь α, β – углы между l и положительными направлениями осей Ox, Oy соответственно (рис. 5.10).

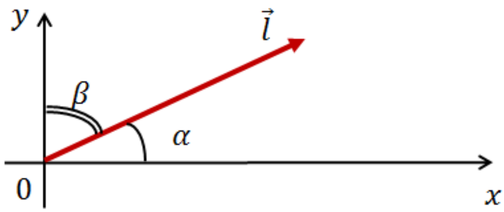


Рис.5.10

Теорема 9. Если функция $u = f(x; y)$ дифференцируема в точке $M(x; y)$, то производная в данном направлении l вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ — направляющие косинусы вектора $l = (l_x, l_y)$, которые находятся по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{l_x}{|l|}; \cos\beta = \frac{l_y}{|l|}; |l| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2}.$$

Производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial l}(M)$ является скоростью изменения функции u в точке M по направлению вектора l. В этом состоит механический смысл производно по направлению.

Геометрический смысл производной по направлению состоит в том, что она выражает величину наклона функции в направлении. В экономическом смысле производная по направлению от производственной функции есть количество продукции, приходящейся на единицу определенной линейной комбинации факторов.

Для функции $u = f(x; y; z)$ производная по направлению l определяется аналогично, и вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $l = (l_x, l_y, l_z)$, которые находят по формулам

$$\cos\alpha = \frac{l_x}{|l|}; \cos\beta = \frac{l_y}{|l|}; \cos\gamma = \frac{l_z}{|l|}; |l| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}.$$

Пример 32. Найти производную функции $u = x^3y^2z$ в точке $A(1; -1; 3)$ по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, если точка B имеет координаты $(0; 1; 1)$.

Решение. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, его длину и направляющие косинусы:

$$\overrightarrow{AB} = (-1,2,-2);\ |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3;$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{3}; \cos\beta = \frac{2}{3}; \cos\gamma = -\frac{2}{3}.$$

Частные производные функции u имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y^2z;\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2x^3yz;\ \frac{\partial u}{\partial z} = x^3y^2,$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(A) = 9; \frac{\partial u}{\partial y}(A) = -6; \frac{\partial u}{\partial z}(A) = 1.$$

Производная функции u по направлению $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$ в точке A равна:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$
$$= 9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + (-6) \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -7\frac{2}{3}.$$

Пример 33. Найти производную функции $z = \ln(e^x + e^y)$ в начале координат по направлению вектора $\overrightarrow{OM}$, если точка M имеет координаты $(1; 1)$.

Решение. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{OM}$, его длину и направляющие косинусы:

$$\overrightarrow{OM} = (1,1);\ |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2};$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}; \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Частные производные функции z имеют вид:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^y};\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^y}{e^x + e^y},$$

Следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M) = \frac{1}{2}; \frac{\partial z}{\partial y}(M) = \frac{1}{2}.$$

Производная функции z по направлению $\vec{l} = \overrightarrow{OM}$ в точке M равна:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Пример 34. Найти производную функции $z = x^2 + xy + y^2 + 2x + 2y$ в точке $M(1; 1)$по направлению вектора $l = (3; 4)$.

Решение. Найдем длину вектора l и направляющие косинусы:

$$|l| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\cos\alpha = \frac{l_x}{|l|} = \frac{3}{5}; \cos\beta = \frac{l_y}{|l|} = \frac{4}{5}$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y + 2; \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y + 2$$

Вычислим их значения в точке M:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M) = 5; \frac{\partial z}{\partial y}(M) = 5$$

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 5 \cdot \frac{3}{5} + 5 \cdot \frac{4}{5} = 7$$

Градиент функции

Градиентом функции $u = f(x; y)$ в данной точке $M(x; y)$ называется вектор, с началом в точке $M(x; y)$, имеющий своими координатами частные производные функции u:

$$\mathrm{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{j}$$

Градиент функции и производная по направлению вектора l связаны формулой

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \text{пр}_l \text{grad} u$$

В случае пространственного скалярного поля $u = f(x; y; z)$ градиент функции равен

$$\text{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\text{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\text{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\text{k}$$

Свойства градиента

1. Градиент направлен по нормали к поверхности уровня (или к линии уровня, если поле плоское).
2. Градиент направлен в сторону возрастания функции поля.
3. Модуль градиента равен наибольшей производной по направлению в данной точке поля.

Из свойств градиента следует, что вектор $\text{grad}\, u$ указывает направление и величину наибыстрейшего роста функции u в данной точке.

Производная $\frac{\partial u}{\partial l}$ в направлении градиента имеет наибольшее значение, равное

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\text{grad}\, u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

Пример 35. Найти градиент функции $u = x^2 + 3xy^2 - z^3 y$ в точке $M(-2; 3; -1)$.

Решение. Находим частные производные данной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 3y^2; \frac{\partial u}{\partial y} = 6xy - z^3; \frac{\partial u}{\partial z} = 2z^2 y.$$

Вычисляем значения этих производных в точке $M(-2; 3; -1)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M) = 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 3^2 = 23;$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(M) = 6 \cdot (-2) \cdot 3 - (-1)^3 = -35;$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}(M) = -3 \cdot (-1)^2 \cdot 3 = -9$$

Окончательно получаем, что $\operatorname{grad} u(M) = (23; -35; -9)$

Пример 36. Найти величину градиента функции $z = arctg\frac{x}{y}$ в произвольной точке $(p; q)$.

Решение.

$$\operatorname{grad} z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{\frac{y^2 + x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y^2}{(y^2 + x^2)y} = \frac{y}{y^2 + x^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{xy^2}{(x^2 + y^2)y^2} = -\frac{x}{x^2 + y^2};$$

Следовательно,

$$\operatorname{grad} z(p; q) = \left(\frac{q}{q^2 + p^2}; -\frac{p}{q^2 + p^2}\right)$$

$$|\operatorname{grad} z(p;q)| = \sqrt{\left(\frac{q}{q^2+p^2}\right)^2 + \left(\frac{-p}{q^2+p^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{q^2+p^2}{(q^2+p^2)^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{q^2+p^2}}$$

Задачи

Найдите производные приведенных функций по направлению вектора l в заданной точке:

67. $z = x^3y - 5xy^2 + 8$, $l = (1;1)$ в точке $M(1;1)$.
68. $z = \ln\frac{x^2+y^2}{xy}$, $l = (6;8)$ в точке $M(1;2)$.
69. $z = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $l = (2;1;2)$ в точке $M_0(1;1;1)$

70. Найти производную функции $u = xy - \frac{x}{z}$ в точке $A(-4;3;-1)$ по направлению $\overline{AB}$, где $B(1;4;-2)$.

71. Найти производную функции $u = x + \ln(z^2 + y^2)$ в точке $A(2;1;1)$ по направлению $\overline{AB}$, где $B(0;2;0)$.

72. Найти производную функции $u = x^2y - \ln(xy + z^2)$ в точке $A(1;5;-2)$ по направлению $\overline{AB}$, где $B(1;7;-4)$.

73. Найдите производную функции $z = 3x^4 + y^3 + xy$ в точке $M(1;2)$ по направлению луча, образующего с осью абсцисс угол 135^0.

74. Найдите единичный вектор l, по направлению которого производная функции $z = x^2 - xy + y^2$ в точке $M(-1;2)$ достигает наибольшего значения.

75. Найдите единичный вектор l, по направлению которого производная функции $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$ в точке $M(3; 1)$ достигает наибольшего значения.

76. Найдите единичный вектор l, по направлению которого производная функции $u = xz^y$ в точке $M(-3; 2; 1)$ достигает наибольшего значения.

77. Дана функция $z = 3x^2y + x + y^3$, точка $A(1; 2)$ и вектор $l = ai + 30j$. При каком значении параметра a производная функции в точке A по направлению l будет максимальна?

Найти $|\text{grad}\, u(M_0)|$:

78. $u = x^2 + y^2 - z^2$ в точке $M_0(2; 0; 3)$;
79. $u = 4 - x^2 - y^2 - z^2$ в точке $M_0(3; 2; 1)$;
80. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в точке $M_0(3; -1; 2)$.
81. $u = xyz$ в точке $M_0(3; -1; 2)$

Задачи для самостоятельного решения

Задание 7

Найти производную функции $z = f(x, y)$ в точке А по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$.

7.1. $z = \arcsin\frac{x}{x+y}$, $A(1; 1)$, $B(3; 4)$
7.2. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $A(3; 4)$, $B(-1; 2)$
7.3. $z = \ln(x^2 + 4y^2)$, $A(2; 1)$, $B(-2; -1)$
7.4. $z = \ln\left(x + \frac{1}{y}\right)$, $A(2; -1)$, $B(5; 3)$

7.5. $z = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$, $A(2;1)$, $B(-2;-2)$

7.6. $z = \sqrt{(x^2 + y^2)^3}$, $A(2;-1)$, $B(-2;1)$

7.7. $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $A(1;1)$, $B(4;5)$

7.8. $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, $A(1;3)$, $B(-2;4)$

7.9. $z = x^y$, $A(2;2)$, $B(-4;-6)$

7.10. $z = 2x\sqrt{y} + \frac{3y}{\sqrt[3]{x}}$, $A(1;4)$, $B(-3;1)$

7.11. $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$, $A(3;4)$, $B(1;-2)$

7.12. $z = e^{-xy}$, $A(-2;1)$, $B(3;-4)$

7.13. $z = e^{-\frac{x}{y}}$, $A\left(1;\frac{1}{2}\right)$, $B\left(3;\frac{3}{2}\right)$

7.14. $z = \ln\left(x + \frac{y}{2x}\right)$, $A(2;1)$, $B(3;-3)$

7.15. $z = (1 + xy)^y$, $A(1;1)$, $B(3;-2)$

7.16. $z = \ln(x + ln\,y)$, $A(1;1)$, $B(4;2)$

7.17. $z = \ln(x^2 + 2y^2 + 2)$, $A(1;-1)$, $B(-2;-4)$

7.18. $z = e^{-2xy}$, $A(1;1)$, $B(-2;2)$

7.19. $z = xy\ln(x + y)$, $A(2;-1)$, $B(3;2)$

7.20. $z = \operatorname{arctg}(xy)$, $A(1;1)$, $B(-2;-2)$

7.21. $z = \operatorname{arctg}\sqrt{xy}$, $A(2;2)$, $B(6;5)$

7.22. $z = \arcsin\sqrt{xy}$, $A\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$, $B\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$

7.23. $z = \operatorname{arctg}(x - y)^2$, $A(2;1)$, $B(0;-4)$

7.24. $z = \frac{\sqrt{x}}{y} - \frac{y}{\sqrt{x}}$, $A(4;1)$, $B(2;-4)$.

7.25. $z = \ln\left(1 + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$, $A(4;3)$, $B(1;-1)$

7.26. $z = \ln(x^2 - 3) - 4xy$, $A(2;1)$, $B(-2;-4)$

7.27. $z = xe^{x+y}$, $A(2;-1)$, $B(3;5)$

7.28. $z = 3y - \sqrt{xy}$, $A(2;2)$, $B(-4;-3)$

7.29. $z = ye^{x-y}$, $A(-1;2)$, $B(5;3)$

7.30. $z = \arcsin(xy)$, $A(1{,}5;0{,}5)$, $B(0{,}5;1{,}5)$

Задание 8

Найти производную функции $u = \varphi(x, y, z)$ в точке A по направлению вектора $\vec{s}$.

8.1. $u = x^2 + 9y^2 + 6z^2, \quad A(1;1;1), \quad \vec{s} = (2;-6;3)$
8.2. $u = x^2 + 3y^2 - 2yz^2, \quad A(8;-4;2), \quad \vec{s} = (1;-2;2)$
8.3. $u = x^2 + y^2 - 3xz^2, \quad A(1;2;3), \quad \vec{s} = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$
8.4. $u = 3x^2 + y^2 + 2z^2, \quad A(1;-2;3), \quad \vec{s} = (1;1;1)$
8.5. $u = x^3 + 3x^2z + 6xy - y^2, \quad A(1;-1;1), \quad \vec{s} = (6;-2;-3)$
8.6. $u = x^3 + y^3 - 3xz, \quad A(-1;-1;2), \quad \vec{s} = (-3;2;6)$
8.7. $u = x^2 + y^2 - 2xyz^2, \quad A(-1;-2;3), \quad \vec{s} = (2;-1;2)$
8.8. $u = x^2yz^2, \quad A(1;1;1), \quad \vec{s} = (2;-2;-1)$
8.9. $u = y^2z - x^2y, \quad A(2;1;1), \quad \vec{s} = (3;2;-6)$
8.10. $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y}, \quad A(1;1;1), \quad \vec{s} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
8.11. $u = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{xz^2}, \quad A\left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \vec{s} = (1;-1;2)$
8.12. $u = 9\sqrt{2}x^3y - \frac{y^3}{2\sqrt{z}} - \frac{4z}{\sqrt{3}}, \quad A\left(\frac{1}{3}; 2; \sqrt{\frac{3}{2}}\right), \quad \vec{s} = (1;-1;1)$
8.13. $u = \frac{4\sqrt{6}}{xy} - \frac{\sqrt{6}}{9yz} + \frac{3}{xz}, \quad A\left(2; \frac{1}{3}; \sqrt{\frac{3}{2}}\right), \quad \vec{s} = (-1;-1;5)$
8.14. $u = 9y^3z + \frac{x^3}{2y} + 3\sqrt{6}z^3, \quad A\left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \vec{s} = (1;1;2)$
8.15. $u = \frac{3}{x^2} + \frac{4}{yz} - \frac{1}{\sqrt{6z}}, \quad A\left(1; 2; \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \quad \vec{s} = (-1;-1;2)$
8.16. $u = 3\sqrt{2}x^2z + \frac{y^2}{\sqrt{2x}} - 3\sqrt{2}z^2, A\left(\frac{1}{3}; 2; \sqrt{\frac{2}{3}}\right), \vec{s} = (2;-1;-1)$
8.17. $u = 6\sqrt{6}(x^3y - y^3) + 2z^3 \quad , \quad A(1;-1;2), \quad \vec{s} = (1;-1;2)$
8.18. $u = \frac{2}{x^3} + \frac{2}{yz} - \frac{3}{\sqrt{6}yz}, \quad A(-2;3;4), \quad \vec{s} = (2;-2;1)$
8.19. $u = 3\sqrt{2}x^2y + \frac{y^2z}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2, A\left(\frac{1}{3}; 2; \sqrt{\frac{2}{3}}\right), \vec{s} = (3;-6;2)$
8.20. $u = \frac{3}{xz} + \frac{4}{y^2} - \frac{1}{\sqrt{6}yz}, \ A\left(1; 2; \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \vec{s} = (-2;-2;1)$
8.21. $u = xy^2 + z^3 - xyz, \ A(\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{2}), \vec{s} = (2;2;1)$

8.22. $u = x(y+z),\ A(-2;-1;0), \vec{s} = (6;3;-2)$
8.23. $u = x^2 + y^2 z - xyz^2,\ A(1;-1;-1),\ \vec{s} = (-2;-1;-2)$
8.24. $u = y^3 z^2 + y^2 z - xyz^2,\ A(1;-1;-1),\ \vec{s} = (-2;-1;-2)$
8.25. $u = \frac{1}{\sqrt{xy}} - \frac{2}{y^3 z} - \frac{3x}{yz},\ A(1;1;1),\ \vec{s} = (2;2;-3)$
8.26. $u = y^2 - 3xy + 2z^2,\ A(-1;-2;-3),\ \vec{s} = (3;2;-2)$
8.27. $u = xy^2 + xy - 2xz,\ A(1;0;-2),\ \vec{s} = (2;-2;-1)$
8.28. $u = xz - 4z + 5yz,\ A(1;-1;-1),\ \vec{s} = (-2;-1;-2)$
8.29. $u = 3xyz - 2yz - z^2, A(2;2;-1),\ \vec{s} = (3;2;-4)$
8.30. $u = xz - 4xyz + x^3 z,\ A(1;-1;-1), \vec{s} = (-2;-1;-2)$

Задание 9

Найти направление наискорейшего возрастания функции $u = \varphi(x,y)$ в точке А и скорость ее возрастания в этом направлении.

9.1. $u = \ln(x+y),\quad A(-1;2)$
9.2. $u = xy + 2\sqrt{xy},\quad A\left(8;\frac{1}{2}\right)$
9.3. $u = arctg\,\sqrt{xy},\quad A\left(\frac{1}{2};8\right)$
9.4. $u = e^{-\frac{x}{y}},\quad A\left(-1;\frac{1}{4}\right)$
9.5. $u = arctg\,(x-y)^2,\quad A(1;2)$
9.6. $u = (1+xy)^x,\quad A(1;1)$
9.7. $u = \ln\left(2 + \sqrt{x^2+y^2}\right),\quad A(4;3)$
9.8. $u = \ln(x + \ln x),\quad A(1;1)$
9.9. $u = ye^{x+y},\quad A(-1;2)$
9.10. $u = \ln\left(x + \frac{y}{2x}\right),\quad A(2;-1)$
9.11. $u = ye^{x-y},\quad A(2;-1)$
9.12. $u = \ln(2x^2 + y^2 + 2),\quad A(1;-1)$
9.13. $u = \ln(y + \ln x),\quad A(1;1)$
9.14. $u = e^{-2xy},\quad A(-1;1)$

9.15. $u = \operatorname{arctg}(xy)$, $A(1;1)$
9.16. $u = \arcsin\frac{x}{x+y}$, $A(1;1)$
9.17. $u = \arcsin\sqrt{xy}$, $A\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$
9.18. $u = \ln(x^2 + 4y^2)$, $A(2;1)$
9.19. $u = \frac{\sqrt{x}}{y} - \frac{y}{\sqrt{x}}$, $A(4;1)$
9.20. $u = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$, $A(2;1)$
9.21. $u = \ln(x^2 - 3) - 4xy$, $A(2;1)$
9.22. $u = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $A(1;4)$
9.23. $u = 3y - \sqrt{xy}$, $A(2;8)$
9.24. $u = x^y$, $A(2;2)$
9.25. $u = \arcsin(xy)$, $A\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$
9.26. $u = x - 3y + \sqrt{3xy}$, $A(3;4)$
9.27. $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, $A(4;3)$
9.28. $u = e^{-2xy}$, $A(1;-2)$
9.29. $u = \ln\left(x + \frac{1}{y}\right)$, $A(2;-1)$
9.30. $u = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, $A(1;-3)$

5.9. Экстремум функции двух переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области

Экстремум функции

Окрестностью радиуса $\boldsymbol{\delta}$ ***($\boldsymbol{\delta}$-окрестностью) точки*** $\boldsymbol{M_0(x_0;y_0)}$ называется множество всех точек $M(x,y)$, удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$, т.е. множество точек, лежащих внутри круга радиуса δ с центром в точке $M_0(x_0; y_0)$.

Точка $M_0(x_0; y_0)$ называется ***точкой максимума*** функции $z = f\,(x, y)$, если существует такая -окрестность этой точки, что$f(x_0; y_0) \geq f(x; y)$ для всех точек (x, y) из этой окрестности.

Точка $M_0(x_0; y_0)$ называется ***точкой минимума*** функции $z = f\,(x, y)$, если существует такая δ - окрестность этой точки, что $f(x_0; y_0) \leq f(x; y)$ для всех точек (x, y) из этой окрестности.

Точки, в которых частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ равны нулю или не существуют, называются ***критическими.***

Теорема 10 (Необходимое условие экстремума). Если функция имеет точки экстремума, то они находятся среди критических точек.

Замечание. Однако обратное утверждение неверно. То есть из того, что точка является критической, не следует, что она обязательно является точкой экстремума.

Теорема 11 (Достаточные условия экстремума). Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет в некоторой окрестности ки $M_0(x_0; y_0)$ непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно, причем в точке M_0 выполняются необходимые условия экстремума. Тогда:

Если $\Delta = AC - B^2 > 0$, где $A = z''_{xx}(M_0), B = z''_{xy}(M_0),\ C = z''_{yy}(M_0)$, то функция имеет максимум в точке M_0 при $A < 0$, и минимум при $A > 0$.

Если $\Delta < 0$, то экстремума нет.

Если же $\Delta = 0$, то имеет место сомнительный случай, и для заключения об экстремуме надо привлечь к рассмотрению частные производные порядка выше второго

Пример 37. Исследовать на экстремум функцию $z = 8x^3 + y^3 - 6xy + 10$.

Решение. Прежде всего вычислим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 24x^2 - 6y; \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 6x$$

Найдем критические точки функции. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

которая в нашем случае запишется следующим образом:

$$\begin{cases} 24x^2 - 6y = 0 \\ 3y^2 - 6x = 0 \end{cases}$$

После сокращения на 6 первого уравнения и на 3 второго имеем

$$\begin{cases} 4x^2 - y = 0 \\ y^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения $y = 4x^2$. Подставляя во второе уравнение, получим $16x^4 - 2x = 0$, или $8x^4 - x = 0$, которое перепишем так:

$$x(8x^3 - 1) = 0$$

Разлагая на множители выражение в скобках, получим уравнение

$$x(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) = 0$$

Отсюда следует, что $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, а остальные два корня = комплексные, поэтому они нас не интересуют (корни уравнения $4x^2 + 2x + 1 = 0$).

Подставляя найденные значения x в равенство $y = \frac{x^2}{6}$, получаем, что $y_1 = 0$, $y_2 = 1$.

Таким образом, имеются две критические точки $M_1(0; 0)$, $M_2\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Определим число Δ, для чего найдем $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

Получаем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 48x;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Для точки M_1 получаем:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_1) = 48 \cdot 0 = 0;\ B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(\mathrm{M}_1) = -6;$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_1) = 6 \cdot 0 = 0,$$

$$\Delta = \mathrm{AC} - \mathrm{B}^2 = -36 < 0$$

Следовательно, в точке M_1 экстремума нет.

Для точки M_2:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_2) = 48 \cdot \frac{1}{2} = 24;\ B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(\mathrm{M}_2) = -6;$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_2) = 6 \cdot 1 = 6,$$

$$\Delta = \mathrm{AC} - \mathrm{B}^2 = 108 > 0$$

Так как $\Delta > 0$, $A > 0$, то в точке M_2 - минимум.

$$z_{min} = 9$$

Пример 38. Исследовать на экстремум функцию $z = 14x^3 + 27xy^2 - 69x - 54y$

Решение. Вычисляем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 42x^2 + 27y^2 - 69;\ \frac{\partial z}{\partial y} = 54xy - 54$$

Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 42x^2 + 27y^2 - 69 = 0 \\ 54xy - 54 = 0 \end{cases}$$

После очевидных сокращений данная система запишется следующим образом:

$$\begin{cases} 14x^2 + 9y^2 = 23 \\ xy = 1 \end{cases}$$

Решая данную систему, получаем следующие критические точки

$$M_1(1;1), M_2\left(\frac{3}{\sqrt{14}};\frac{\sqrt{14}}{3}\right), M_3(-1;-1), M_4\left(-\frac{3}{\sqrt{14}};-\frac{\sqrt{14}}{3}\right)$$

Определим точки экстремума.

Вычисляем вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 84x;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 54y; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 54x.$$

Для каждой точки определяем значения A, B, C и число Δ.

Для точки $M_1(1;1)$:

$$A = 84; B = 54; C = 54; \Delta = 84 \cdot 54 - 54^2 > 0$$

Так как $\Delta > 0,\ A > 0$, то M_1 – точка минимума,

$$z_{min} = 14 \cdot 1 + 27 \cdot 1 \cdot 1 - 69 - 54 = -82$$

Для точки $M_2\left(\frac{3}{\sqrt{14}}; \frac{\sqrt{14}}{3}\right)$:

$$A = \frac{252}{\sqrt{14}}; B = 18\sqrt{14}; C = \frac{162}{\sqrt{14}}; \Delta = \frac{252 \cdot 162}{14} - \left(18\sqrt{14}\right)^2 < 0$$

Так как $\Delta < 0$, то экстремума нет.

Для точки $M_3(-1; -1)$:

$$A = -84; B = -54; C = -54; \Delta = 84 \cdot 54 - 54^2 > 0$$

Так как $\Delta > 0$, $A < 0$, то M_3 – точка максимума,

$$z_{max} = 82$$

Для точки $M_4\left(-\frac{3}{\sqrt{14}}; -\frac{\sqrt{14}}{3}\right)$:

$$A = -\frac{252}{\sqrt{14}}; B = -18\sqrt{14}; C = -\frac{162}{\sqrt{14}};$$

$$\Delta = \frac{252 \cdot 162}{14} - \left(18\sqrt{14}\right)^2 < 0$$

Так как $\Delta < 0$, то экстремума нет.

Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области

Для того, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции $z = f\ (x, y)$ в ограниченной замкнутой области D, можно руководствоваться следующим правилом:

1) Найти критические точки, лежащие внутри области D, и вычислить значения функции в этих точках (при этом можно не вдаваться в исследование, есть в них экстремум или нет);
2) Найти наибольшее и наименьшее значение функции на границе области D;
3) Из полученных в пп. 1 и 2 значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Замечание. Определение наибольшего и наименьшего значения функции $z = f\ (x, y)$ на границе области D сводится к решению нескольких задач (по числу кривых, ограничивающих область D) на наибольшее и наименьшее значение функции одной переменной.

Пример 39. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = 2x^2 - 4xy + 3y^2 + 4x - 8y + 5$ в замкнутой области (D), заданной неравенствами $x \geq -1; y \geq -2; x + y \leq 4$.

Решение. Изобразим область (D); она представляет собой треугольник с вершинами $A(-1; -2), B(-1; 5), C(6; -2)$ (рис.5.11).

Найдём стационарные точки:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x - 4y + 4; \frac{\partial u}{\partial y} = -4x + 6y - 8$$

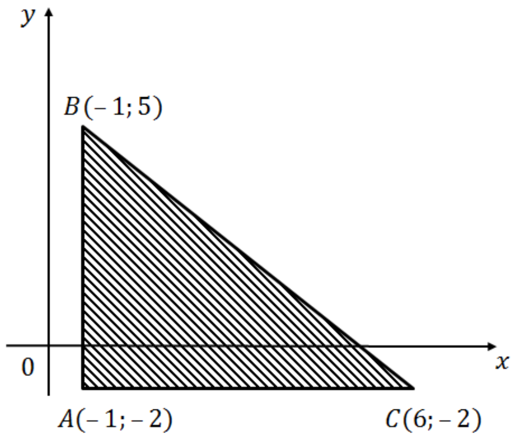


Рис.5.11

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x - 4y + 4 = 0 \\ -4x + 6y - 8 = 0 \end{cases}$$

Решением этой системы является $x = 1, y = 2$. То есть, имеется одна стационарная точка $M(1; 2)$. Причем точка M принадлежит области (D), так как её координаты удовлетворяют всем трём неравенствам, задающим треугольник (D).

Найдём значение функции в этой точке:

$$u(M) = 2 - 8 + 12 + 4 - 16 + 5 = -1.$$

Исследуем функцию на границе (Γ) области (D).

Граница (Γ) представляет собой объединение трёх отрезков:

- отрезка BC: $(l_1) = \{(x, y): -1 \le x \le 6; y = 4 - x\}$
- отрезка AB: $(l_2) = \{(x, y): x = -1; -2 \le y \le 5\}$
- отрезка AC: $(l_3) = \{(x, y): -1 \le x \le 6; y = 4 - x\}$

1)Рассмотрим границу (l_1). На данной границе функция u принимает следующий вид:

$$u|_{l_1} = 2x^2 - 4x(4 - x) + 3(4 - x)^2 + 4x - 8(4 - x) + 5 = 2x^2 - 16x + 4x^2 + 3(16 - 8x + x^2) + 4x - 32 + 8x + 5 = 9x^2 - 28x + 21.$$

Найдём наибольшее и наименьшее значения функции

$\varphi_1(x) = 9x^2 - 28x + 21$ на отрезке $[-1;\ 6]$.

Имеем $\varphi_1'(x) = 18x - 28$; $x = 14/9$ – стационарная точка функции $\varphi_1(x)$,

$14/9 \in [-1;\ 6]$. Обозначим $N_1\left(\frac{14}{9};\ 4 - \frac{14}{9}\right)$ или $N_1\left(\frac{14}{9}; \frac{22}{9}\right)$.

$$u(N_1) = \varphi_1(14/9) = 196/9 - 392/9 + 21 = -34/9.$$

Найдём значения $\varphi_1(x)$ на концах отрезка $[-1;\ 6]$:

$\varphi_1(-1) = \varphi_1(B) = 58$; $\varphi_1(6) = u(C) = 177$.

Наибольшим из этих значений является $u(C) = 177$, наименьшим – $u(N_1) = -34/9$.

2)Рассмотрим границу (l_2). На данной границе функция u принимает следующий вид:

$$u|_{l_2} = 2 + 4y + 3y^2 - 4 - 8y + 5 = 3y^2 - 4y + 3.$$

Найдём наибольшее и наименьшее значения функции $\varphi_2(y) = 3y^2 - 4y + 3$ на отрезке $[-2;\ 5]$:

$\varphi_2{}'(y) = 6y - 4$; $y = 2/3$ – стационарная точка функции $\varphi_2(y)$, принадлежащая отрезку $[-2;\ 5]$. Обозначим $N_2\left(-1; \frac{2}{3}\right)$. $u(N_2) = \varphi_2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} + 3 = \frac{5}{3}$.

Найдём значения функции $\varphi_2(y)$ на концах отрезка $[-2;\ 5]$:

$$\varphi_2(-2) = u(A) = 23;\ \varphi_2(5) = u(B) = 58.$$

3) Рассмотрим границу (l_3). На данной границе функция u принимает следующий вид:

$$u|_{l_3} = 2x^2 + 8x + 12 + 4x + 16 + 5 = 2x^2 + 12x + 33.$$

Обозначим $\varphi_3(x) = 2x^2 + 12x + 33$.

Найдём наибольшее и наименьшее значения функции $\varphi_3(x)$ на отрезке $[-1; 6]$:

$\varphi_3'(x) = 4x + 12$ – стационарная точка $x = -3$ не принадлежит отрезку $[-1;\ 6]$, поэтому она нас не интересует. Значения $\varphi_3(x)$ на концах отрезка $[-1; 6]$ были найдены ранее: $\varphi_3(-1) = u(A) = 23$, $\varphi_3(6) = u(C) = 177$.

Сравнивая все полученные значения, находим

$$\max_D u(x, y) = u(C) = u(6;\ -2) = 177$$

$$\min_D u(x,y) = u(M) = u(1;\ 2) = -1$$

Пример 40. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \leq 4$.

Решение. Найдем стационарные точки, координаты которых являются решением следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y = 0 \end{cases}$$

Таким образом, имеется одна стационарная точка $M(0;0)$. Найдём значение функции в этой точке: $z(M) = 0 - 0 = 0$.

Переходим к анализу значений функции на границе области. Граница (Г) представляет собой окружность $x^2 + y^2 = 4$, с центром в начале координат и радиусом 2. То есть

$$(\Gamma) = \{(x,y): x^2 + y^2 = 4\} = \{(x,y): y^2 = 4 - x^2, -2 \leq x \leq 2\}$$

Исходная функция u принимает вид

$$z|_\Gamma = x^2 - (4 - x^2) = 2x^2 - 4$$

Обозначим $\varphi(x) = 2x^2 - 4x$.

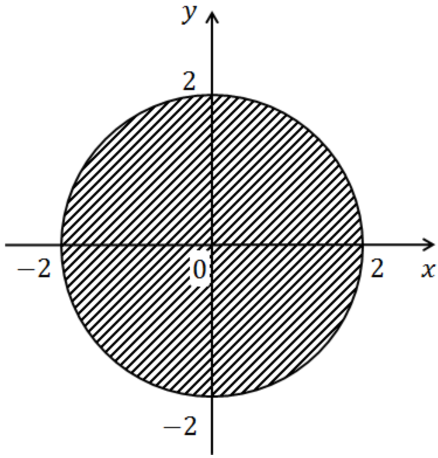


Рис. 5.12

Найдём наибольшее и наименьшее значения функции $\varphi(x)$ на отрезке $[-2; 2]$:

$\varphi'(x) = 4x = 0; x = 0$ – стационарная точка, $\varphi(0) = z(0; 2) = z(0; -2) = -4$. На границах отрезка: $\varphi(-2) = z(-2; 0) = 4$; $\varphi(2) = z(2; 0) = 4$.

Сравнивая все полученные значения, находим

$$\max_D z(x, y) = \text{z}(-2; 0) = z(2; 0) = 4$$

$$\min_D z(x, y) = \text{z}(0; -2) = \text{z}(0; 2) = -4$$

Задачи

Найдите экстремумы функций:

82. $z = 2x + 8y - x^2 - 2y^2$
83. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$
84. $z = x^3 - 2y^2 - 3x + 8y$
85. $z = x^2 - 2xy + 4y^3$
86. $z = y^3 - 3x^2 - 27y + 12x$
87. $z = x^2 - 4xy + 8y^3$
88. $z = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$
89. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$
90. $z = xy^2 - xy - xy^3$ $(x > 0; y > 0)$
91. $z = 3x^2 - x^3 + 3y2 + 4y$
92. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$
93. $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$
94. $z = 4 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$

95. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = 5x^2 - 4xy + 2y^2$ в области, задаваемой неравенство $x^2 + y^2 \leq 5$.

96. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x + 2y$ в области, задаваемой неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.

97. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = 4xy + 3y^2$ в области, задаваемой неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.

98. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - y^2$ в области, задаваемой неравенством $x^2 + y^2 \leq 2x$.

99. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 5$ в области, ограниченной осями координат и прямой $x + y - 4 = 0$.

100. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в области, ограниченной осями координат и прямой $x + y + 3 = 0$.

101. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy - 4x$ в области, ограниченной осями координат и прямой $2x + 3y - 12 = 0$.

102. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy + x + y$ в области, ограниченной прямыми $x = 1, x = 2, y = 2, y = 3$.

103. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в области $0 \le x \le 2, -1 \le y \le 2$.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 10

Найдите экстремумы функции:

10.1. $z = 10 + 2xy - x^2$

10.2. $z = 4x + 2y + 4x^2 + y^2 + 6$

10.3. $z = 4x^2 + 9y^2 - 4x - 6y + 3$

10.4. $z = 2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x + 6$

10.5. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$

10.6. $z = 2x^2 + y^2 - xy + 3x - 2$

10.7. $z = 3x^2 - y^2 + 8xy + 4y - 5$

10.8. $z = x^2 + 4y^2 + 2x + 4y + 6$

10.9. $z = 2x^2 - 3y^2 - xy + 5x + y$

10.10. $z = 5x^2 - 4xy + 2y^2 - 8x + 6$

10.11. $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x - 2$

10.12. $z = 3 + 4x + 6y - 4x^2 - 9y^2$

10.13. $z = x^2 + y^2 - 2y + 5$

10.14. $z = 9x^2 + 4y^2 - 6x - 4y + 3$

10.15. $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$

10.16. $z = x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y$

10.17. $z = 8x^2 - 3xy - 3y^2 - y + x$

10.18. $z = x^2 - 3xy + 5y^2 + 4$

10.19. $z = 2x^2 + xy + 5x + y^2$

10.20. $z = 3xy - 5x^2 - y^2 - 4$

10.21. $z = y^2 - xy + 8x$

10.22. $z = x^2 - 2xy - 10$

10.23. $z = 3x^2 - 2xy + 2y^2 - 10$

10.24. $z = 2xy - 2x^2 - 3y^2 + 4x + 4y$

10.25. $z = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3$

10.26. $z = 4xy - 3x^2 - 12y^2 + 4x + 8y - 5$

10.27. $z = 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y$

10.28. $z = 3x^2 + 3y^2 - 2xy - 4x - 4y - 4$

10.29. $z = 5x^2 - 8xy + 5y^2 - 18x + 18y$

10.30. $z = 4xy - 12x^2 - 3y^2 + 8x + 4y$

Глава 6. Неопределенный интеграл

6.1. Первообразная функции. Основные свойства неопределённого интеграла. Непосредственное интегрирование

Интегральное исчисление – это раздел математического анализа, в котором изучаются интегралы, их свойства, способы вычисления и приложения. Вместе с дифференциальным исчислением оно составляет основу аппарата математического анализа.

Интегральное исчисление возникло из рассмотрения большого числа задач естествознания и математики. Важнейшие из них – физическая задача определения пройденного за данное время пути по известной, но, быть может, переменной скорости движения и значительно более древняя задача вычисления площадей и объемов геометрических фигур.

Центральным в интегральном исчислении является понятие интеграла, которое, однако, имеет две различные трактовки, приводящие соответственно к понятию неопределенного и определенного интегралов. Рассматриваемая в интегральном исчислении математическая операция называется интегрированием.

Первообразная функции

Интегрирование функции $f(x)$ – это операция отыскания (для данной функции $f(x)$) так называемой ***первообразной функции***.

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на (a, b), если для любого $x \in (a, b)$: $F'(x) = f(x)$.

Пример 1. Для функции $f(x) = 2x^2 - 5x$ первообразной будет функция $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2$, точнее, семейство первообразных $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная.

Действительно, легко убедится, что

$$\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \mathrm{C}\right)' = 2x^2 - 5x$$

Переход $f(x) \to [F(x) + C]$ есть ***операция интегрирования*** функции $f(x)$.

Множество всех первообразных для функции $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом*** и обозначается

$$\int \underbrace{f(x)dx}_{\substack{\text{подынтегральное} \\ \text{выражение}}} = \underbrace{F(x) + C}_{\substack{\text{Множество} \\ \text{первообразных}}}$$

Знак интеграла $\int$ есть вытянутый символ S, от латинского Summa. Введен Лейбницем. Термин «интеграл» введен Якобом Бернулли от латинского слова integralis (целостный) или, по другому предположению, от integro (восстанавливать).

Пример 2. Пусть $f(x) = x^2$. Функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$ есть первообразная для функции $f(x) = x^2$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$, так как $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{3x^2}{3} = x^2$. Поэтому

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

Пример 3. Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$. Функция $F(x) = \ln x$ есть первообразная для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на промежутке $(0; +\infty)$, а $F(x) = \ln(-x)$ – на промежутке $(-\infty; 0)$. Поэтому функция $F(x) = \ln|x|$ есть первообразная для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на любом промежутке, не содержащем 0. Поэтому

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

Геометрически неопределенный интеграл представляет семейство плоских кривых, смещенных друг относительно друга вдоль вертикальной оси.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d \int f(x)dx = f(x)dx$$

2. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен функции плюс произвольная постоянная:

$$\int df(x) = \int f'(x)dx = f(x) + C$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла или вносить под знак интеграла:

$$\int A \cdot f(x)dx = A \cdot \int f(x)dx$$

5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен такой же алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций:

$$\int [f(x) + g(x) - h(x)]\, dx$$
$$= \int f(x)dx + \int g(x)dx - \int h(x)dx$$

6. Если $\int f(x)\, dx = F(x) + C$, то и $\int f(u)du = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$ – произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

Таблица основных неопределенных интегралов

(1) Интегралы от алгебраических функций

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \qquad \left(\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + C\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \qquad \left(\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \qquad \left(\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln \left|x + \sqrt{x^2 + k}\right| + C$$

(2) Интегралы от показательных функций

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

(3) Интегралы от тригонометрических функций

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$$

$$\int \mathrm{tg}\, x \, dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \mathrm{ctg}\, x dx = \ln|\sin x| + C$$

(4) Интегралы от гиперболических функций

$$\int \mathrm{sh}\, x dx = \mathrm{ch}\, x + C$$

$$\int \mathrm{ch}\, x dx = \mathrm{sh}\, x + C$$

$$\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\, x + C$$

$$\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\, x + C$$

Вычисление интегралов, основанное на применении правил интегрирования и таблицы интегралов, называется ***непосредственным интегрированием***.

Пример 4. Вычислить интегралы:

а) $\int x^3 dx$; б) $\int x^5 dx$; в) $\int \sqrt{x} dx$; г) $\int \sqrt[3]{x^2} dx$.

Решение. Применяя формулу интегрирования

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

находим:

$$\text{а) } \int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C\,;$$

$$\text{б) } \int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C;$$

$$\text{в) } \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$$

$$\text{г) } \int \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} + C = x\sqrt[3]{x^2} + C$$

Пример 5. Вычислить интегралы:

а) $\int 7x^5dx$; б)$\int 3\sqrt[4]{x^3}dx$; в)$\int \frac{6}{x^2}dx$; г) $\int 5dx$.

Решение. а) Вынесем постоянный множитель 7 за знак интеграла (*свойство 4*) и воспользуемся формулой $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$:

$$\int 7x^5dx = 7\int x^5dx = 7\cdot\frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{7x^6}{6} + C$$

$$б)\int 3\sqrt[4]{x^3}dx = 3\int \sqrt[4]{x^3}dx = 3\cdot\frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + C = \frac{12x^{\frac{7}{4}}}{7} + C$$

$$в)\int \frac{6}{x^2}dx = 6\cdot\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = 6\cdot\frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{6}{x} + C$$

$$г)\int 5dx = 5\int dx = 5x + C$$

Пример 6. Найти интегралы:

а)$\int 3^x dx$; б) $\int \left(\sqrt{2}\right)^x dx$; в) $\int 4^{-x}dx$;

г) $\int e^{-x}dx$; д) $\int 2^{3x}dx$; е) $\int e^{5x}dx$.

Решение. Для решения примеров а) и б) воспользуемся формулой интегрирования:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Получим

$$\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

$$\int \left(\sqrt{2}\right)^x dx = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^x}{\ln\sqrt{2}} + C = \frac{2\left(\sqrt{2}\right)^x}{\ln 2} + C \ \left(\ln\sqrt{2} = \ln 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln 2\right)$$

в)-г) Учитывая, что

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ и } \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

получим

$$\int 4^{-x} dx = \int \frac{1}{4^x} dx = \int \left(\frac{1}{4}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^x}{\ln\frac{1}{4}} + C = -\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^x}{\ln 4} + C$$
$$= -\frac{4^{-x}}{\ln 4} + C;$$

$$\int e^{-x} dx = \int \frac{1}{e^x} dx = \int \left(\frac{1}{e}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^x}{\ln\frac{1}{e}} + C = -\frac{\left(\frac{1}{e}\right)^x}{\ln e} + C$$
$$= -\left(\frac{1}{e}\right)^x + C = -e^{-x} + C\ .$$

д)-е) Учитывая, что

$$a^{n\cdot m} = (a^n)^m = (a^m)^n,$$

получим

$$\int 2^{3x}dx = \int (2^3)^x dx = \int 8^x dx = \frac{8^x}{\ln 8} + C = \frac{8^x}{3\ln 2} + C;$$

$$\int e^{5x}dx = \frac{e^{5x}}{\ln e^5} + C = \frac{e^{5x}}{5} + C$$

Пример 7. Найти интегралы:

$$\text{а)} \int \frac{dx}{x^2+7}; \ \text{б)} \int \frac{dx}{10+x^2}; \ \text{в)} \int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}; \text{г)} \int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$$

Решение. а) Здесь $a^2 = 7$, следовательно, $a = \sqrt{7}$, и по формуле $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$, получаем

$$\int \frac{dx}{x^2+7} = \int \frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{7}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{7}} + C$$

б) В данном примере $a^2 = 10$, следовательно, $a = \sqrt{10}$, получаем

$$\int \frac{dx}{10+x^2} = \int \frac{dx}{x^2+10} = \int \frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{10}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{10}} + C$$

в) Здесь сразу же можно применить формулу $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$, полагая, что $a^2 = 25; a = 5$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}} = \arcsin\frac{x}{5} + C$$

г) В данном примере может быть применена также формула $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

Пример 8. Найти интеграл

$$I = \int \frac{x^4 - 3x^2 + 5\sqrt[3]{x} - 7x + 6}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

Решение. Для вычисления интеграла следует разделить многочлен в числите, на знаменатель:

$$I = \int \left(\frac{x^4}{\sqrt[3]{x}} - 3\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} + 5\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} - 7\frac{x}{\sqrt[3]{x}} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$$

Далее, так как

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \text{то}$$

$$I = \int \left(x^{4-\frac{1}{3}} - 3x^{2-\frac{1}{3}} + 5 - 7x^{1-\frac{1}{3}} + 6x^{-\frac{1}{3}} \right) dx$$
$$= \int \left(x^{\frac{11}{3}} - 3x^{\frac{5}{3}} + 5 - 7x^{\frac{2}{3}} + 6x^{-\frac{1}{3}} \right) dx$$

Согласно *свойству 5* интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен такой же алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций:

$$I=\int x^{\frac{11}{3}}dx-\int 3x^{\frac{5}{3}}dx+\int 5dx-\int 7x^{\frac{2}{3}}dx+\int 6x^{-\frac{1}{3}}dx$$

Вынесем постоянные множители за знаки иинтегралов (*свойство 4*):

$$I=\int x^{\frac{11}{3}}dx-3\int x^{\frac{5}{3}}dx+5\int dx-7\int x^{\frac{2}{3}}dx+6\int x^{-\frac{1}{3}}dx$$

Интегрируя, получаем

$$I=\frac{3}{14}x^{\frac{14}{3}}-\frac{9}{8}x^{\frac{8}{3}}+5x-\frac{21}{5}x^{\frac{5}{3}}+9x^{\frac{2}{3}}+C$$

Пример 9. Найти

$$\int\left(4\sqrt{x}-\frac{2}{x^5}-\frac{6}{x}+7\sin x+\frac{5}{\sqrt{9-x^2}}-3\right)dx$$

Решение.

$$\int\left(4x^{\frac{1}{2}}-2x^{-5}-\frac{6}{x}+7\sin x+\frac{5}{\sqrt{9-x^2}}-3\right)dx=$$

$$=4\int x^{\frac{1}{2}}\,dx-2\int x^{-5}dx-6\int\frac{dx}{x}+7\int\sin x\ dx+$$

$$+5\int\frac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}}-3\int dx=4\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-2\cdot\frac{x^{-5+1}}{-5+1}-$$

$$-6\ln|x|-7\cos x+5\arcsin\frac{x}{3}-3x+C=$$

$$=\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2x^4}-6\ln|x|-7\cos x+5\arcsin\frac{x}{3}-3x+C$$

Задачи

Вычислить интегралы:

104. $\int(x^3-3x^2+5x-4)dx$

105. $\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{x^3}-\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx$

106. $\int\left(\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}-\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt[7]{x^6}}\right)dx$

107. $\int\left(\frac{3}{x^5}-\frac{2}{x^4}+\frac{1}{x^3}\right)dx$

108. $\int\frac{x^6+3x^5-7x^4+5\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}}dx$

109. $\int\left(4\sin x+8x^3-\frac{11}{\cos^2 x}\right)dx$

110. $\int\frac{x-4}{x^3}dx$

111. $\int\frac{\left(x^2+1\right)^2}{x^3}dx$

112. $\int\frac{dx}{x^2+8}$

113. $\int\frac{dx}{x^2-5}$

114. $\int\frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$

115. $\int\frac{dx}{\sqrt{12-x^2}}$

116. $\int 2^x e^x dx$

117. $\int 3{,}32x^{-0{,}17}dx$

118. $\int\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)dx$

119. $\int\frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx$

120. $\int\frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{2^x}dx$

121. $\int\left(\frac{1-u}{u}\right)^2du$

122. $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2dx$

Задачи для самостоятельного решения

Задание 11

Найдите интегралы:

11.1. $\int\left(10+\frac{4}{\sqrt{16-x^2}}-\frac{7}{x^4}-3\sqrt[3]{x^2}+\cos x\right)dx$;

11.2. $\int\left(3^x-\frac{5}{\cos^2 x}-\frac{8}{x^3}-10\sqrt[5]{x^3}-4\right)dx$;

11.3. $\int\left(\frac{6}{\sin^2 x}+\frac{9}{\sqrt{x^2-4}}-\frac{5}{x}+e^x-\sqrt[4]{x^3}\right)dx$;

11.4. $\int\left(15\sin x-\frac{1}{x^2+9}+\frac{8}{\sqrt[3]{x}}+13\cdot 4^x-6\right)dx$;

11.5. $\int\left(2\cdot 5^x-3\cos x+\frac{1}{x}-\frac{4}{\sqrt[6]{x^5}}+3\right)dx$;

11.6. $\int\left(\frac{10}{16+x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{3}{x}-\sqrt[5]{x^4}+3\right)dx$;

11.7. $\int\left(\frac{15}{\sqrt{x^2-25}}+\frac{4}{\cos^2 x}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+2^{-x}\right)dx$;

11.8. $\int\left(\frac{9}{4+x^2}-3^x+\sqrt[4]{x^3}-7\cos x+3\right)dx$;

11.9. $\int\left(6^x-5+3\sin x+\frac{8}{x^2+4}-2\sqrt[7]{x^5}\right)dx$;

11.10. $\int\left(2-\frac{10}{\sqrt{4+x^2}}+\frac{3}{\sin^2 x}-15^x-\frac{5}{x}\right)dx$;

11.11. $\int \left(12x^5 - \frac{9}{\cos^2 x} + \frac{3}{x} + 8\sqrt[3]{x^2} - 4\sin x\right)dx;$

11.12. $\int \left(\frac{7}{x} - \frac{5}{25 + x^2} - \frac{2}{\sin^2 x} + 10^x - 15\sqrt{x}\right)dx;$

11.13. $\int \left(8\cos x - \frac{2}{x} + \frac{3}{\cos^2 x} - 5^x + 4\sqrt[5]{x^3}\right)dx\,;$

11.14. $\int \left(3\sqrt[6]{x^{11}} + \frac{5}{x} - \frac{2}{\sin^2 x} + \sin x - 13\right)dx\,;$

11.15. $\int \left(5\sqrt{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{\sqrt{16 + x^2}} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx\,;$

11.16. $\int \left(\frac{15}{\sqrt[3]{x^5}} - \frac{5}{\cos^2 x} - 4\cos x + \frac{2}{x} + 8\right)dx;$

11.17. $\int \left(6\sin x - \frac{4}{25 + x^2} - 3\sqrt[6]{x^{13}} + \frac{2}{\sin^2 x} - 4\right)dx;$

11.18. $\int \left(\frac{7}{x} - 8\sqrt[15]{x^8} - \frac{4}{\sqrt{25 - x^2}} + \frac{14}{49 + x^2} - 6^x\right)dx;$

11.19. $\int \left(15^x + 3\sqrt{x} - 8\sin x + \frac{10}{\cos^2 x} - \frac{2}{1 + x^2}\right)dx;$

11.20. $\int \left(8\sqrt[4]{x^7} - 9\cos x + \frac{13}{\sin^2 x} + 6^x - \frac{7}{x}\right)dx;$

11.21. $\int \left(5x^{11} - \frac{10}{x^2} + \frac{2}{36 + x^2} + \frac{1}{\sqrt{49 - x^2}} + 3\right)dx\,;$

11.22. $\displaystyle\int\left(13x^{25}-\frac{5}{\sqrt{64-x^2}}+3\sin x+\frac{4}{\cos^2 x}-1\right)dx\,;$

11.23. $\displaystyle\int\left(\frac{7^x}{2}-\frac{9}{x}+\frac{18}{9+x^2}-2\sqrt[7]{x^{15}}-4\cos x\right)dx\,;$

11.24. $\displaystyle\int\left(3^x+\frac{9}{\sqrt{81-x^2}}+\frac{2}{\sqrt{x^2-16}}-6\sin x\right)dx\,;$

11.25. $\displaystyle\int\left(\left(\frac{1}{5}\right)^x-9\sqrt[6]{x^5}+\frac{8}{x}-\frac{14}{36+x^2}+5\right)dx\,;$

11.26. $\displaystyle\int\left(\frac{5}{\cos^2 x}-\frac{7}{\sqrt[8]{x^5}}+\frac{3}{\sqrt{x^2+49}}+8\sin x-\frac{3}{x}\right)dx\,;$

11.27. $\displaystyle\int\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x-\frac{3}{\sin^2 x}+\frac{10}{\sqrt{4-x^2}}+6\sqrt[5]{x^{14}}-7\right)dx\,;$

11.28. $\displaystyle\int\left(\frac{1}{64+x^2}-\frac{4}{\cos^2 x}+3\sin x+15\sqrt[6]{x^{13}}+\frac{2}{x}\right)dx;$

11.29. $\displaystyle\int\left(\frac{2}{\sqrt{x^2-49}}+\frac{3}{\sqrt[5]{x^{16}}}+\left(\frac{3}{4}\right)^x-8\cos x+\frac{4}{\sin^2 x}\right)dx\,;$

11.30. $\displaystyle\int\left(\frac{12}{\sqrt[6]{x^5}}-5\sin x+\frac{3}{x}-\frac{4}{\sqrt{64-x^2}}+\frac{6}{\sin^2 x}\right)dx.$

6.2. Интегрирование методом подстановки (замены переменного)

Один из наиболее распространенных методов, применяемых при вычислении неопределенных интегралов – метод замены переменных. В его основе лежат следующие правило интегрирования:

Пусть $x = \varphi(t)$, где функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$, а между переменными x и t существует взаимно однозначное соответствие. Тогда $dx = \varphi'(t)dt$ и на основании свойства инвариантности формулы интегрирования неопределенного интеграла(*свойство 6*) получаем ***формулу интегрирования подстановкой:***

$$\int f(x)dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt$$

Данная формула также называется ***формулой замены переменных в неопределенном интеграле***. После нахождения интеграла в правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования t назад к переменной x.

Иногда целесообразно подбирать подстановку в виде $t = \psi(x)$, тогда $\int f\big(\psi(x)\big)\psi'(x)dx = \int f(t)dt$. Другими словами, формулу замены переменных можно применять справа налево.

6.2.1. Интегралы, сводящиеся к интегралам от алгебраических функций

Исходя из формулы замены переменных и свойства инвариантности интегралов, перепишем табличные интегралы от алгебраических функций в виде, который более удобен для практического применения:

$$\int u^n du = \begin{bmatrix} u = u(x) \\ \Rightarrow du = u'dx \end{bmatrix} = \int u^n \cdot u'dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{du}{u} = \begin{bmatrix} u = u(x) \\ \Rightarrow du = u'dx \end{bmatrix} = \int \frac{u'dx}{u} = \ln|u| + C$$

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \begin{bmatrix} u = u(x) \\ \Rightarrow du = u'dx \end{bmatrix} = \int \frac{u'dx}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \int \frac{u'du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \int \frac{u'dx}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + k}} = \int \frac{u'dx}{\sqrt{u^2 + k}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + k}\right| + C$$

Пример 10. Вычислить интегралы:

а) $\int (x^3 + 5)^7 2x dx$; б) $\int (3x^3 + 5x^2 - 8)^3 (9x^2 + 10x) dx$;

в) $\int \sqrt{x^2+6}\cdot 2xdx$; г) $\int (2x^2+7)^3 xdx$; д) $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+8}}dx$.

Решение. Все эти интегралы вычисляются с помощью формулы

$$\int u^n u' dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

Прежде, чем применять данную формулу, надо выяснить:

(1) Какую из функций, стоящих под интегралом, следует принять равной u?
(2) Есть ли под интегралом множитель, равный u'?

а) В первом примере следует взять $u = x^2 + 5$. Множитель $2x$ является производной функции u, так как $u' = (x^2+5)' = 2x$. Поэтому

$$\int \underbrace{(x^2+5)^7}_{u^7}\cdot \underbrace{2x}_{u'}\, dx = \int u^7 du = \frac{u^8}{8} + C = \frac{(x^2+5)^8}{8} + C$$

б) Данный пример решается аналогично. Пусть $u = 3x^3 + 5x^2 - 8$, тогда $u' = 9x^2 + 10x$, следовательно

$$\int \underbrace{(3x^3+5x^2-8)^3}_{u^3}\cdot \underbrace{(9x^2+10x)}_{u'}\, dx = \int u^3 \underbrace{du}_{u'dx} = \frac{u^4}{4} + C$$
$$= \frac{(3x^3+5x^2-8)^4}{4} + C$$

в) Пусть $u = x^2 + 6$, тогда $u' = 2x$, следовательно

$$\int \sqrt{x^2+6} \cdot 2xdx = \int \underbrace{(x^2+6)^{\frac{1}{2}}}_{u^{\frac{1}{2}}} \cdot \underbrace{2x}_{u'}\, dx = \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2(x^2+6)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

г) В этом примере подынтегральная функция равна $(2x^2+7)^3 x$. Если принять, что $u = 2x^2 + 7$, то $u' = 4x$. Множитель $4x$ отсутствует под знаком интеграла, а поэтому подынтегральная функция не имеет вида $u^n u'$.

К такому виду легко прийти, если умножить и разделить подынтегральную функцию на 4, отчего ее значение не изменится:

$$\int (2x^2+7)^3 xdx = \int \frac{1}{4} \cdot (2x^2+7)^3 \cdot 4xdx =$$

$$= \frac{1}{4} \int \underbrace{(2x^2+7)^3}_{u^3} \cdot \underbrace{4x}_{u'}\, dx = \frac{1}{4} \int u^3 du = \frac{1}{4} \cdot \frac{u^4}{4} + C$$

$$= \frac{1}{16}(2x^2+7)^4 + C$$

д) В данном примере также надо преобразовать подынтегральную функцию так, чтобы она приобрела вид $u^n u'$:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+8}} dx = \int (x^3+8)^{-\frac{1}{3}} x^2 dx = \begin{bmatrix} u = x^3+8 \\ u' = 3x^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{1}{3} \cdot (x^3+8)^{-\frac{1}{3}} \cdot 3x^2 dx = \frac{1}{3} \int \underbrace{(x^3+8)^{-\frac{1}{3}}}_{u^{-\frac{1}{3}}} \cdot \underbrace{3x^2}_{u'}\, dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{3}}du = \frac{1}{3}\frac{u^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{1}{2}u^{\frac{2}{3}} + C = \frac{1}{2}(x^3+8)^{\frac{2}{3}} + C$$

Пример 11. Вычислить интегралы:

а) $\int \sin^3 x \cos x\, dx$; б) $\int \cos^5 4x \sin 4x\, dx$; в) $\int \frac{x^2 dx}{(4x^3+9)^4}$;

г) $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}dx$; д) $\int \frac{\cos x}{\sin^5 x}dx$; е) $\int \sqrt[3]{\cos^2 x}\sin x\, dx$

Решение.

а) $$\int \sin^3 x \cos x\, dx = \begin{bmatrix} u = \sin x \\ \Rightarrow u' = \cos x \end{bmatrix} = \int \underbrace{(\sin x)^3}_{u^3} \cdot \underbrace{\cos x}_{u'}\, dx$$
$$= \frac{\sin^4 x}{4} + C$$

б) $$\int \cos^5 4x \sin 4x\, dx = \begin{bmatrix} u = \cos 4x \\ \Rightarrow u' = -4\sin 4x \\ \Rightarrow \text{надо умножить и разделить} \\ \text{подынтегральную функцию на } -4 \end{bmatrix}$$
$$= \int -\frac{1}{4}\cdot(\cos 4x)^5 \cdot (-4\sin 4x)dx$$
$$= -\frac{1}{4}\int \underbrace{(\cos 4x)^5}_{u^5} \cdot \underbrace{(-4\sin 4x)}_{u'}\, dx$$
$$= -\frac{1}{4}\frac{\cos^6 4x}{6} + C = -\frac{1}{24}\cos^6 4x + C$$

в) $\int \frac{x^2dx}{(4x^3+9)^4} = \int (4x^3+9)^{-4}x^2dx$

$$= \begin{bmatrix} u = 4x^3+9 \\ \Rightarrow u' = 12x^2 \\ \Rightarrow \text{надо умножить и разделить} \\ \text{подынтегральную функцию на } 12 \end{bmatrix}$$

$$= \int \frac{1}{12}(4x^3+9)^{-4}\cdot 12x^2dx$$

$$= \frac{1}{12}\int \underbrace{(4x^3+9)^{-4}}_{u^{-4}}\cdot \underbrace{12x^2}_{u'}dx$$

$$= \frac{1}{12}\cdot\frac{(4x^3+9)^{-4+1}}{-4+1} + C = -\frac{1}{36}\frac{1}{(4x^3+9)^3} + C$$

г) $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}dx = \int \operatorname{arctg}^3 x\cdot\frac{1}{1+x^2}dx = \begin{bmatrix} u = \operatorname{arctg} x \\ \Rightarrow u' = \frac{1}{1+x^2} \end{bmatrix} =$

$$= \int \underbrace{(\operatorname{arctg} x)^3}_{u^3}\cdot \underbrace{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}_{u'}dx = \frac{\operatorname{arctg}^4 x}{4} + C$$

д) $\int \frac{\cos x}{\sin^5 x}dx = \int \sin^{-5} x\cos x\,dx = \begin{bmatrix} u = \sin x \\ \Rightarrow u' = \cos x \end{bmatrix} =$

$$= \int \underbrace{\sin^{-5} x}_{u^{-5}}\cdot\underbrace{(\cos x)}_{u'}dx = \frac{\sin^{-4} x}{-4} + C = -\frac{1}{4\sin^4 x} + C$$

е) $\int \sqrt[3]{\cos^2 x}\sin x\,dx = \int \cos^{\frac{2}{3}} x\sin x\,dx =$

$$= \left[\begin{array}{c} u = \cos x \\ \Rightarrow u' = -\sin x \\ \Rightarrow \text{надо умножить и разделить} \\ \text{подынтегральную функцию на } -1 \end{array} \right] =$$

$$= -\int \underbrace{\cos^{\frac{2}{3}} x}_{u^{\frac{2}{3}}} \cdot \underbrace{(-\sin x)}_{u'} dx = -\frac{\cos^{\frac{5}{3}} x}{\frac{5}{3}} + C$$

$$= -\frac{3}{5} \cos x \sqrt[3]{\cos^2 x} + C.$$

Пример 12. Вычислить интегралы:

$$\text{а)} \int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1 - x^2}} dx\,; \text{ б)} \int \frac{\ln x}{x} dx\,; \text{ в)} \int \frac{dx}{x \ln^4 x};$$

$$\text{г)} \int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} dx\,; \text{ д)} \int \frac{\sin x}{\sqrt{5 + \cos x}} dx\,; \text{е)} \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{3 - \sin^2 x}} dx$$

Решение.

$$\text{а)} \sqrt{\frac{\arcsin x}{1 - x^2}} = \sqrt{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = (\arcsin x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Считая, что $u = \arcsin x$, имеем $u' = \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$, а поэтому по формуле $\int u^n u' dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$:

$$\int \underbrace{(\arcsin x)^{\frac{1}{2}}}_{u^{\frac{1}{2}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}_{u'} dx = \frac{(\arcsin x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \arcsin^{\frac{3}{2}} x + C$$

б) Представим $\frac{\ln x}{x}$ в виде $(\ln x)\cdot\frac{1}{x}$. Полагая $u=\ln x$, получим $u'=\frac{1}{x}$. Подынтегральная функция $\frac{\ln x}{x}$ приобретает вид $u^n u'$ $(n=1)$, и тогда

$$\int \frac{\ln x}{x}dx=\int \underbrace{\ln x}_{u}\cdot\frac{1}{\underbrace{x}_{u'}}dx=\frac{\ln^2 x}{2}+C$$

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln^4 x}=\int(\ln x)^{-4}\cdot\frac{dx}{x}$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{Замена:}\\ u=\ln x\,,u'=\dfrac{1}{x}\\ (\ln x)^{-4}\cdot\dfrac{dx}{x}=u^{-4}u'dx=u^{-4}du\end{array}\right]=$$

$$=\int u^{-4}du=\frac{u^{-3}}{-3}+C=-\frac{1}{3\ln^3 x}+C$$

г) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}xdx$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{Замена:}\\ u=1+x^2\\ u'=2x\\ (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}xdx=u^{-\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2}\cdot(2x)dx=\\ =\dfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}u'dx=\dfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du\end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{1+x^2}+C$$

д) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{5+\cos x}}dx = \int (5+\cos x)^{-\frac{1}{2}}\sin x\,dx =$

$$= \begin{bmatrix} \text{Замена:} \\ u = 5+\cos x \\ u' = -\sin x \\ (5+\cos x)^{-\frac{1}{2}}\sin x\,dx = \\ = -u^{-\frac{1}{2}}(-\sin x)dx = -u^{-\frac{1}{2}}u'dx = -u^{-\frac{1}{2}}du \end{bmatrix} = -\int u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$= -2\sqrt{u} + C = -2\sqrt{5+\cos x} + C$$

е) $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{3-\sin^2 x}}dx = \int (3-\sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}\sin x\cos x\,dx =$

$$\begin{bmatrix} \text{Замена:} \\ u = 3-\sin^2 x \\ u' = -2\sin x\cos x \\ (3-\sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}\sin x\cos x\,dx = \\ = -\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}u'dx = -\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{u} + C = -\sqrt{3-\sin^2 x} + C$$

Пример 13. Вычислить интегралы:

$$\text{а)} \int \frac{dx}{x+3};\ \text{б)} \int \frac{2x}{x^2+5}dx;\ \text{в)} \int \frac{\sin x\,dx}{1+\cos x};$$

$$\text{г)} \int \frac{x}{1-x^2}dx;\ \text{д)} \int \frac{e^x}{5+e^x}dx;\ \text{е)} \int \frac{x^2}{4+3x^3}dx$$

Решение. а) Если $u = x + 3$, то $u' = 1$. Подынтегральная функция имеет вид $\frac{u'}{u}$, на основании формулы $\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + C$:

$$\int \frac{dx}{x+3} = \ln|x+3| + C$$

б) $$\int \frac{2x}{x^2+5} dx = \begin{bmatrix} \text{Замена:} \\ u = x^2 + 5 \\ u' = 2x \\ \dfrac{2xdx}{x^2+5} = \dfrac{u'dx}{u} = \dfrac{du}{u} \end{bmatrix} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$
$$= \ln(x^2 + 5) + C$$

в) $$\int \frac{\sin x\, dx}{1+\cos x} = \begin{bmatrix} \text{Замена:} \\ u = 1 + \cos x \\ u' = -\sin x \\ \dfrac{\sin x\, dx}{1+\cos x} = -\dfrac{u'dx}{u} = -\dfrac{du}{u} \end{bmatrix} = -\int \frac{du}{u}$$
$$= -\ln|u| + C = -\ln|1 + \cos x| + C$$

г) $$\int \frac{x}{1-x^2} dx = \begin{bmatrix} \text{Замена:} \\ u = 1 - x^2 \\ u' = -2x \\ \dfrac{x}{1-x^2} dx = -\dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{u} dx = -\dfrac{du}{2u} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$
$$= -\frac{1}{2}\ln|u| + C = -\frac{1}{2}\ln|1 - x^2| + C$$

д) $$\int \frac{e^x}{5+e^x} dx = \begin{bmatrix} \text{Замена:} \\ u = 5 + e^x \\ u' = e^x \\ \dfrac{e^x dx}{5+e^x} = \dfrac{u'dx}{u} = \dfrac{du}{u} \end{bmatrix} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$
$$= \ln|5 + e^x| + C$$

е) $\int \frac{x^2}{4+3x^3}dx = \left[\begin{array}{c} \text{Замена:} \\ u = 4+3x^3 \\ u' = 9x^2 \\ \frac{x^2dx}{4+3x^3} = \frac{\frac{1}{9}u'dx}{u} = \frac{\frac{1}{9}du}{u} \end{array}\right] = \frac{1}{9}\int \frac{du}{u}$

$$= \frac{1}{9}\ln|u| + C = \frac{1}{9}\ln|4+3x^3| + C$$

Пример 14. Вычислить интегралы:

$$\text{а)} \int \frac{dx}{8+5x^2}; \text{ б)} \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}; \text{ г)} \int \frac{dx}{7-5x^2}; \text{ д)} \int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-14}}.$$

Решение.

а) В знаменателе дроби находится не x^2, а $5x^2$. Поэтому должна быть применена формула $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C$. Для этого надо в числите иметь производную функции u, квадрат которой $u^2 = 5x^2$. Получаем, что $u = \sqrt{5}x$, $u' = \sqrt{5}$. Преобразовываем подынтегральное выражение

$$\frac{dx}{8+5x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{8+\left(\sqrt{5}x\right)^2}$$

Учитывая, что $a^2 = 8, a = 2\sqrt{2}$, по указанной формуле получаем

$$\int \frac{dx}{8+5x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{\overbrace{\sqrt{5}dx}^{du}}{8+\Big(\underbrace{\sqrt{5}x}_{u}\Big)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}x}{2\sqrt{2}} + C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{10}x}{4}+C$$

б) $$\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}=\left[\begin{matrix}a^2=3, a=\sqrt{3}\\ u^2=2x^2, u=\sqrt{2}x\\ u'=\sqrt{2}\end{matrix}\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\sqrt{2}dx}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}x\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}+C$$

г)В этом примере на первом месте стоит не квадрат функции u, а квадрат постоянной величины. Поэтому преобразуем сначала подынтегральную функцию следующим образом

$$\frac{1}{7-5x^2}=\frac{1}{-(-7+5x^2)}=-\frac{1}{-7+5x^2}=-\frac{1}{5x^2-7}$$

$$\int\frac{dx}{7-5x^2}=-\int\frac{dx}{5x^2-7}=\left[\begin{matrix}\text{Замена:}\\ a^2=7, a=\sqrt{7}\\ u^2=5x^2, u=\sqrt{5}x\\ u'=\sqrt{5}\\ \frac{dx}{5x^2-7}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{du}{u^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}\end{matrix}\right]=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dx}{u^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{7}}{u+\sqrt{7}}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{35}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}x-\sqrt{7}}{\sqrt{5}x+\sqrt{7}}\right|+C$$

$$\text{д) } \int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-14}} = \left[\begin{array}{c} \text{Замена:} \\ u^2 = 9x^2, u = 3x \\ u' = 3 \\ \dfrac{dx}{\sqrt{9x^2-14}} = \dfrac{1}{3}\dfrac{u'dx}{\sqrt{u^2-14}} = \dfrac{1}{3}\dfrac{du}{\sqrt{u^2-14}} \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-14}} = \frac{1}{3}\ln\left|u + \sqrt{u^2-14}\right| + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|3x + \sqrt{9x^2-14}\right| + C$$

6.2.2. Интегралы, сводящиеся к интегралам от показательных и тригонометрических функций

Исходя из формулы замены переменных и свойства инвариантности интегралов, перепишем табличные интегралы от показательных и тригонометрических функций в виде, который более удобен для практического применения:

$$\int e^u du = \left[\begin{array}{c} u = u(x) \\ \Rightarrow du = u'dx \end{array} \right] = \int e^u \cdot u'dx = e^u + C$$

$$\int a^u du = \left[\begin{array}{c} u = u(x) \\ \Rightarrow du = u'dx \end{array} \right] = \int a^u \cdot u'dx = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$\int \sin u \, du = \left[\begin{array}{c} u = u(x) \\ \Rightarrow du = u'dx \end{array} \right] = \int \sin u \cdot u'dx = -\cos u + C$$

$$\int \cos u \, du = \left[\begin{array}{c} u = u(x) \\ \Rightarrow du = u'dx \end{array} \right] = \int \cos u \cdot u'dx = \sin u + C$$

$$\int \operatorname{tg} u\, du = \left[\begin{matrix} u = u(x) \\ \Rightarrow du = u'dx \end{matrix}\right] = \int \operatorname{tg} u \cdot u'dx = -\ln|\cos u| + C$$

$$\int \operatorname{ctg} u\, du = \left[\begin{matrix} u = u(x) \\ \Rightarrow du = u'dx \end{matrix}\right] = \int \operatorname{ctg} u \cdot u'dx = \ln|\sin u| + C$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \left[\begin{matrix} u = u(x) \\ \Rightarrow du = u'dx \end{matrix}\right] = \int \frac{u'dx}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$$

$$\int \frac{du}{\sin^2 u} = \left[\begin{matrix} u = u(x) \\ \Rightarrow du = u'dx \end{matrix}\right] = \int \frac{u'dx}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$$

Пример 15. Вычислить интегралы:

$$\text{а)} \int 5^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \ ; \ \text{б)} \int e^{\cos x} \sin x\, dx\, ; \ \text{в)} \int 7^{x^2} x dx\, ;$$

$$\text{г)} \int e^{-(x^3+x+3)}(3x^2+1)dx\, ; \ \text{д)} \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx\, ; \text{е)} \int (e^x + e^{-x})^2 dx$$

Решение. а) Здесь показатель степени $u = \sqrt{x}, u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Подынтегральная функция вместо этого множителя содержит множитель $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Умножая и деля на $\frac{1}{2}$, получим $5^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\ 5^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$. По формуле $\int a^u \cdot u'dx = \frac{a^u}{\ln a} + C$ при $a = 5$

$$\int 5^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \ = 2 \int \underbrace{5\text{^}\sqrt{x}}_{5^u} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{u'} dx = 2 \cdot \frac{5^{\sqrt{x}}}{\ln 5} + C$$

$$б)\int e^{\cos x}\sin x\,dx=\left[\begin{array}{c}\text{Замена:}\\ u=\cos x\\ u'=-\sin x\\ e^{\cos x}\sin x\,dx=-e^{u}u'dx=-e^{u}du\end{array}\right]$$

$$=-\int e^{u}du=-e^{u}+C=-e^{\cos x}+C$$

$$в)\int 7^{x^2}xdx=\left[\begin{array}{c}\text{Замена:}\\ u=x^2\\ u'=-2x\\ 7^{x^2}xdx=-\frac{1}{2}7^{u}u'dx=-\frac{1}{2}7^{u}du\end{array}\right]=-\frac{1}{2}\int 7^{u}du$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{7^{u}}{\ln 7}+C=-\frac{1}{2}\cdot\frac{7^{x^2}}{\ln 7}+C$$

$$г)\int e^{-(x^3+x+3)}(3x^2+1)dx=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{Замена:}\\ u=-(x^3+x+3)\\ u'=-(3x^2+1)\\ e^{-(x^3+x+3)}(3x^2+1)dx=-e^{u}u'dx=-e^{u}du\end{array}\right]$$

$$=-\int e^{u}du=-e^{u}+C=-e^{-(x^3+x+3)}+C$$

$$д)\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx=\left[\begin{array}{c}\text{Замена:}\\ u=\dfrac{1}{x}\\ u'=-1/x^2\\ \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx=-e^{u}u'dx=-e^{u}du\end{array}\right]=-e^{\frac{1}{x}}+C$$

е) $\int (e^x + e^{-x})^2 dx = \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) dx$

$$= \int e^{2x} dx + 2\int dx + \int e^{-2x} dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + C$$

Пример 16. Вычислить интегралы:

а) $\int \frac{1}{\cos^2 4x} dx$; б) $\int \frac{\operatorname{ctg} 2x}{\sin^2 2x} dx$; в) $\int \sqrt[3]{tg\ 2x} \frac{1}{\cos^2 2x} dx.$

Решение.

а) $$\int \frac{1}{\cos^2 4x} dx = \begin{bmatrix} \text{Замена:} \\ u = 4x \\ u' = 4 \\ \frac{dx}{\cos^2 4x} = \frac{u' dx}{4\cos^2 u} = \frac{du}{4\cos^2 u} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\int \frac{du}{\cos^2 u}$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{tg} u + C = \frac{1}{4}\operatorname{tg} 4x + C$$

б) $$\int \frac{\operatorname{ctg} 2x}{\sin^2 2x} dx = \int \operatorname{ctg} 2x \cdot \frac{1}{\sin^2 2x} dx$$

$$= \begin{bmatrix} \text{Замена:} \\ u = \operatorname{ctg} 2x \\ u' = -\frac{1}{\sin^2 2x} \cdot (2x)' = -\frac{2}{\sin^2 2x} \\ \frac{\operatorname{ctg} 2x}{\sin^2 2x} dx = -\frac{1}{2} u u' dx = -\frac{u}{2} du \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\int u du = -\frac{u^2}{4} + C = -\frac{\operatorname{ctg}^2 2x}{4} + C$$

$$
\text{в)} \int \sqrt[3]{tg\,2x}\,\frac{1}{\cos^2 2x}dx = \left[\begin{gathered}\text{Замена:}\\ u = \operatorname{tg} 2x\\ u' = \frac{2}{\cos^2 2x}\\ \frac{\sqrt[3]{tg\,2x}dx}{\cos^2 2x} = \frac{\sqrt[3]{u}u'dx}{2} = \frac{\sqrt[3]{u}}{2}du\end{gathered}\right]
$$

$$
= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{3}}du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}} + C
$$

$$
= \frac{3}{8}(\operatorname{tg} 2x)^{\frac{4}{3}} + C
$$

Метод замены переменной является одним из общих методов интегрирования. Умения использовать такие подстановки, которые упрощают подынтегральные выражения, вырабатываются практикой. Общих указаний по выбору выгодной подстановки дать нельзя.

Задачи

Вычислить интегралы:

123. $\int (5x+4)^4 dx$

124. $\int \operatorname{tg}(2x-3)dx$

125. $\int \sin(2x+5)\,dx$

126. $\int \frac{dx}{2x+3}$

127. $\int \frac{3dx}{6+13x^2}$

128. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-8x^2}}$

129. $\int (9+7x^2)^5 x dx$

130. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+7}}$

131. $\int \sqrt{4x^2+8x}(2x+2)\,dx$

132. $\int \frac{3xdx}{x^2+7}$

133. $\int \sqrt{1-x}dx$

134. $\int \frac{\cos x}{\sin^7 x}dx$

135. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$

136. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^4}}$

137. $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

138. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx$

139. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{7-\cos^2 x}}$

140. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{1-3x^2}}$

141. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \operatorname{tg} x}$

142. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$

143. $\int \frac{\sin x dx}{5+7\cos x}$

144. $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$

145. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$

146. $\int e^{\sin x}\cos x\, dx$

147. $\int \left(e^{\frac{x}{3}}+2\right)^3 e^{-\frac{x}{4}}dx$

148. $\int 9^{x^3+6x^2+3x}(x^2+4x+1)dx$

149. $\int \frac{(7^x-8^x)^2}{7^x 8^x}dx$

150. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2}dx$

151. $\int e^{5+\sin^2 2x}\sin 4x\, dx$

152. $\int \sin(x^2)\, xdx$

153. $\int \sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx$

154. $\int \cos(e^x)\, e^x dx$

155. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

156. $\int \frac{dx}{x^2\cos^2\frac{1}{x}}$

157. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x}dx$

158. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{7-3\sin^2 x}}dx$

159. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{6-5\operatorname{arctg}^2 x}}$

160. $\int \frac{dx}{x\sqrt{25-9\ln^2 x}}$

Задачи для самостоятельного решения

Задание 12

Найдите интегралы:

12.1. $\int \left(\sqrt[3]{5x+4}+e^{4\sin x-3}\cdot\cos x+\frac{x^2}{\sqrt{1-25x^6}}\right)dx$;

12.2. $\int \left(3^{8-5x}+e^{3\cos x+1}\cdot\sin x+\frac{x}{25+x^4}\right)dx$;

12.3. $\int\left(\frac{1}{15-7x}+2^{7\sin x+2}\cdot\cos x+\frac{x}{\sqrt{4-25x^4}}\right)dx;$

12.4. $\int\left(\cos(1+2x)+\cos x\cdot\sqrt{1+\sin x}+\frac{\sin x}{4+\cos^2 x}\right)dx\,;$

12.5. $\int\left(\sin(3x-4)+\frac{e^x}{3+e^x}+\frac{\cos x}{\sqrt{4+\sin^2 x}}\right)dx;$

12.6. $\int\left(\frac{1}{\sin^2(1+3x)}+3^{\sin x}\cdot\cos x+\frac{e^x}{\sqrt{16-e^{2x}}}\right)dx;$

12.7. $\int\left(\frac{1}{\cos^2(6-4x)}+\sin x\cdot\sqrt[3]{2+\cos x}+\frac{2^x}{25+4^x}\right)dx;$

12.8. $\int\left(\frac{1}{\sqrt[4]{(8-3x)^3}}+\frac{5^x}{6+5^x}+\frac{3^x}{\sqrt{16-9^x}}\right)dx\,;$

12.9. $\int\left(e^{5+6x}+3^x\cdot\cos 3^x+\frac{\sin x}{\sqrt{16+9\cos^2 x}}\right)dx;$

12.10. $\int\left((15-7^x)^{10}\cdot 7^x+\frac{2^x}{\sqrt{1-2^x}}+\frac{5^x}{\sqrt{49+25^x}}\right)dx;$

12.11. $\int\left(\cos(10x-9)+\frac{\cos x}{\sqrt[3]{5+\sin x}}+\frac{x^3}{4-25x^8}\right)dx;$

12.12. $\int\left(\sin(7x+6)+e^x(10+e^x)^{13}+\frac{\sin x}{64-25\cos^2 x}\right)dx;$

12.13. $\int\left(\frac{1}{8-2x}+(9-\cos x)^5\sin x+\frac{\cos x}{16\sin^2 x-9}\right)dx\,;$

12.14. $\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5+7x}}+(3+\sin x)^6\cos x+\frac{2^x}{4^x-36}\right)dx\,;$

12.15. $\int\left(5^{3x-1}+7^x\sin(7^x+2)+\frac{3^x}{4-9^x}\right)dx\,;$

12.16. $\int\left(\sqrt[7]{6-9x}+\sin x\cdot 2^{3+\cos x}+\frac{x^4}{\sqrt{36-25x^{10}}}\right)dx;$

12.17. $\int\left(\frac{1}{(9-5x)^4}+\frac{\sin x}{13-2\cos x}+\frac{x}{\sqrt{64+25x^4}}\right)dx;$

12.18. $\int\left(13^{6x+2}+\cos x\cdot 6^{7-\sin x}+\frac{x^2}{16-9x^6}\right)dx;$

12.19. $\int\left(\frac{1}{\sin^2(2+15x)}+\frac{\cos x}{7+9\sin x}+\frac{x^3}{9+25x^8}\right)dx;$

12.20. $\int\left(\frac{1}{\cos^2(3x-10)}+\frac{3^x}{\sqrt{5+2\cdot 3^x}}+\frac{\sin x}{\sqrt{16-9\cos^2 x}}\right)dx;$

12.21. $\int\left((15x-8)^9+\frac{e^x}{\sin^2(e^x+2)}+\frac{\cos x}{25\cos^2 x+4}\right)dx\,;$

12.22. $\int\left(\sqrt[6]{12-10x}+\sin x\cdot e^{3+2\cos x}+\frac{\cos x}{\sqrt{49-16\sin^2 x}}\right)dx\,;$

12.23. $\int \left(\frac{1}{\sqrt[5]{(6x+7)^2}} + \frac{3^x}{\cos^2(2\cdot 3^x - 4)} + \frac{2^x}{\sqrt{25+4^x}}\right)dx$;

12.24. $\int \left(6^{1-5x} + 7^{\cos x - 3}\cdot \sin x + \frac{3^x}{16+9^x}\right)dx$;

12.25. $\int \left((5x-7)^{11} + \frac{8^x}{\cos^2(3-8^x)} + \frac{x^4}{\sqrt{36x^{10}+49}}\right)dx$;

12.26. $\int \left(\frac{1}{\cos^2(15x+9)} + e^x\cdot 6^{2-e^x} + \frac{x}{25-64x^4}\right)dx$;

12.27. $\int \left(\cos(8-3x) + \sqrt[4]{(15+2\cdot 3^x)^3} + \frac{5^x}{\sqrt{49-25^x}}\right)dx$;

12.28. $\int \left(\frac{1}{\sin^2(7x+6)} + \cos(15-2^x)\cdot 2^x + \frac{x^2}{16x^6+9}\right)dx$;

12.29. $\int \left(\sin(5-7x) + \cos x\cdot 5^{10+2\sin x} + \frac{x^3}{\sqrt{9-25x^8}}\right)dx$;

12.30. $\int \left(\frac{1}{\sqrt[6]{13-8x}} + \frac{\sin x}{3+2\cos x} + \frac{x}{36x^4-25}\right)dx$.

6.3 Интегрирование по частям

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемые функции, тогда

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

или

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int v \cdot u' dx$$

Ниже приведены основные типы интегралов, берущихся по частям.

I тип

$$\int \underline{P_n(x)} \cdot \begin{Bmatrix} \sin \alpha x \\ \cos \alpha x \end{Bmatrix} dx \qquad \int \underline{P_n(x)} \cdot \begin{Bmatrix} e^{\beta x} \\ a^{\beta x} \end{Bmatrix} dx$$

II тип

$$\int P_n(x) \cdot \begin{Bmatrix} \underline{\arcsin x} \\ \underline{\arccos x} \\ \underline{arctgx} \\ \underline{arcctgx} \end{Bmatrix}^m dx \qquad \int P_n(x) \cdot \underline{(\ln x)^m}\, dx$$

$$\int x^{\alpha} \underline{(\ln x)^m}\, dx, \qquad \alpha \neq -1$$

III тип
(интегралы, приводящиеся к себе)

$$\int \underline{e^{\alpha x}} \cdot \begin{Bmatrix} \sin\beta x \\ \cos\beta x \end{Bmatrix} dx \qquad \int \underline{\sin(\ln x)}\, dx \qquad \int \underline{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$$

$$\int \underline{\cos(\ln x)}\, dx \qquad \int \underline{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\, dx$$

За u принимаются подчёркнутые функции, за dv – остальная часть подынтегрального выражения. $P_n\ (x)$ – многочлен степени n. Интегралы I типа берутся путём интегрирования по частям n раз, II типа – m раз, III типа (за исключением двух последних) – 2 раза (причём, в первом интеграле III типа оба раза за u можно принять как $e^{\alpha x}$, так и тригонометрические функции $\sin\beta x$, $\cos\beta x$).

Пример 17. Найти интеграл $\int \ln x\, dx$

Решение.

$$\int \ln x\, dx = \begin{bmatrix} u = \ln x, & du = \frac{1}{x}dx, \\ dv = dx, & v = x \end{bmatrix} = \underbrace{x \cdot \ln x}_{u \cdot v} - \int \underbrace{x}_{v} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}\, dx}_{du} =$$

$$x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

Замечание. Здесь и ниже при нахождении v при известном dv мы полагаем $C = 0$ (так в этом случае: $dv = dx$, отсюда следует, что $v = x + C$, но мы берём одну из первообразных $v = x$).

Пример 18. Найти интеграл $\int (x^2 - 3x + 4)\sin 2x dx$

Решение.

$$I = \int (x^2 - 3x + 4)\sin 2x\, dx$$

$$= \begin{bmatrix} u = x^2 - 3x + 4, & du = (2x-3)dx \\ dv = \sin 2x\, dx, & v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 3x + 4)\cos 2x + \frac{1}{2} \underbrace{\int (2x-3)\cos 2x\, dx}_{\substack{\text{Снова применить} \\ \text{интегрирование по частяи}}}$$

$$\int (2x-3)\cos 2x\, dx = \begin{bmatrix} u = 2x - 3, & du = 2dx \\ dv = \cos 2x\, dx, & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(2x-3)\sin 2x - \frac{1}{2}\int 2\sin 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}(2x-3)\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + C$$

Таким образом

$$I = \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 4)\cos 2x + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(2x-3)\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + C\right]$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 3x + 4)\cos 2x + \frac{1}{4}(2x-3)\sin 2x$$

$$+ \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

Пример 19. Найти интеграл $\int e^x cos\ x\ dx$

Решение.

$$I = \int e^x \cos x\, dx = \begin{bmatrix} u = \cos x & du = -\sin x\, dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{bmatrix}$$

$$= \cos x \cdot e^x - \int e^x(-\sin x)dx$$

$$= e^x \cos x + \underbrace{\int e^x \sin x\, dx}_{\substack{\text{Снова интегрирование} \\ \text{по частям}}} = \begin{bmatrix} u = \sin x & du = \cos x\, dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{bmatrix}$$

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \underbrace{\int e^x \cos x\, dx}_{I}$$

Таким образом,

$$I = e^x \cos x + e^x \sin x - I$$

Мы получили уравнение с неизвестной величиной I.

Перенося последнее слагаемое в левую часть уравнения, найдем

$$2I = e^x (\cos x + \sin x)$$

Отсюда $\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + C$.

Пример 20. Найти интеграл $\int \sqrt{9 - x^2} dx$.

Решение.

$$J = \int \sqrt{9 - x^2} dx = \begin{bmatrix} u = \sqrt{9 - x^2} & du = \dfrac{1}{2\sqrt{9 - x^2}}(-2x)dx \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix}$$

$$= x \cdot \sqrt{9 - x^2} - \int \frac{(-2x) \cdot x}{2\sqrt{9 - x^2}} dx$$

Рассмотрим получившийся интеграл.

$$\int \frac{-x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx = \int \frac{(9-x^2)-9}{\sqrt{9-x^2}}dx$$
$$= \int \sqrt{9-x^2}\,dx - 9\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = J - 9\arcsin\frac{x}{3}$$

Имеем: $J = x\sqrt{9-x^2} - J + 9\arcsin\frac{x}{3}$ уравнение относительно J.

$$2J = x\sqrt{9-x^2} + 9\arcsin\frac{x}{3}.$$

Отсюда $J = \int \sqrt{9-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{9-x^2} + 9\arcsin\frac{x}{3}\right) + C.$

Необходимо иметь в виду, что применение метода интегрирования по частям приводит к частичному интегрированию, т.к. правая часть формулы (1) содержит интеграл. Но при правильном применении метода этот интеграл получается табличным или просто приводящимся к табличному.

Если в результате применения метода интегрирования по частям в правой части получается интеграл сложнее исходного, необходимо заново применить этот метод, разбив подынтегральное выражение на другие два множителя u и dv, из которых первый дифференцируется, а второй интегрируется при переходе к интегралу в правой части.

Умение правильно использовать этот метод приобретается только в результате упражнений.

Задачи

Вычислить интегралы:

161. $\int x \cdot \ln(x-1)\,dx$
162. $\int (5x+6)\cos 2x\,dx$
163. $\int x \operatorname{arctg} x\;dx$
164. $\int xe^{2x}dx$
165. $\int e^{x}\sin x\,dx$
166. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$
167. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$
168. $\int \sqrt{1-x^2}dx$
169. $\int \arcsin x\,dx$
170. $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$
171. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$
172. $\int (\ln x)^2 dx$
173. $\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1+x}}$
174. $\int \frac{x}{e^x}dx$
175. $\int x \cdot 2^{-x}dx$
176. $\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx$
177. $\int \frac{x\sin x dx}{\cos^2 x}$

Задачи для самостоятельного решения

Задание 13

Найдите интегралы:

13.1. $\displaystyle\int (4x+7)\cdot e^{3x}dx + \int (\,x^2+5x+6)\cos 2x\,dx$

13.2. $\displaystyle\int (5-x)\cdot e^{-4x}dx + \int (x^2-4)\cos 3x\,dx$

13.3. $\displaystyle\int (1-5x)\cdot e^{-5x}dx + \int (x^2+4x+3)\cos x\;\,dx$

13.4. $\displaystyle\int (7x-10)\sin 10x\,dx + \int (3x^2-2)e^{3x}\,dx$

13.5. $\displaystyle\int (8-3x)\cos 5x\,dx + \int (x^2+1)e^{3x}dx$

13.6. $\int \ln(25x^2+1)\,dx + \int (2x^2+4x+7)\cos 2x\,dx$

13.7. $\int \ln(x^2+25)\,dx + \int (9x^2+9x+11)\cos 3x\,dx$

13.8. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{25x-1}\,dx + \int (8x^2+16x+17)\cos 4x\,dx$

13.9. $\int \ln(9x^2+1)\,dx + \int (3x^2+5)\cos 3x\,dx$

13.10. $\int (5x+6)\cos 2x\,dx + \int (2x^2-7)e^{4x}dx$

13.11. $\int (5-x)\cdot e^{-4x}dx + \int (1-8x^2)\cos 4x\,dx$

13.12. $\int \ln(x^2+9)\,dx + \int (x^2-3x)\sin 2x\,dx$

13.13. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}\,dx + \int (3-7x^2)\cos 2x\,dx$

13.14. $\int (2-9x)\cdot e^{-3x}dx + \int (x^2+2x+1)\sin 3x\,dx$

13.15. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{3x-1}\,dx + \int (x^2-3x+2)\sin x\,dx$

13.16. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x+1}\,dx + \int (1-6x^2)e^{2x}dx$

13.17. $\int (3x-2)\cos 5x\,dx + \int (x-1)^2 \ln^2(x-1)\,dx$

13.18. $\int \left(\sqrt{2}+8x\right)\sin 3x\,dx + \int (2-x^2)e^{4x}dx$

13.19. $\int \left(x\sqrt{2}-3\right)\cos 2x\,dx + \int (x+2)^2 \ln^2(x+2)\,dx$

13.20. $\int (2-4x)\sin 2x\,dx + \int (x^2-2x+3)e^{2x}dx$

13.21. $\int (1-6x)\cdot e^{2x}dx + \int (x^2-5x+6)\sin 3x\,dx$

13.22. $\int (5x-2)\cdot e^{3x}dx + \int (x+1)^2 \ln(x+1)\,dx$

13.23. $\int \ln(x^2+4)\,dx + \int (x^2+2x)e^{2x}dx$

13.24. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{6x-1}dx + \int (3x^2-4)e^{2x}dx$

13.25. $\int \ln(4x^2+1)\,dx + \int (x^2+4x+4)e^{2x}dx$

13.26. $\int (4-16x)\sin 4x\,dx + \int (7x^2-5)e^{3x}dx$

13.27. $\int (4x-2)\cos 2x\,dx + \int (x-3)^2 \ln^2(x-3)\,dx$

13.28. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}\,dx + \int (x^2+7x+12)\cos x\,dx$

13.29. $\int (3x+4)\cdot e^{3x}dx + \int (3x-x^2)\sin 3x\,dx$

13.30. $\int (4-3x)\cdot e^{-3x}dx + \int (2x^2-15)\cos 3x\,dx$

6.4 Интегралы от некоторых функций, содержащих квадратный трёхчлен

В данной теме будут рассматриваться интегралы вида

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$$

где a, b, c, m, n – постоянные, причем $a \neq 0$.

Введем сначала четыре **основных интеграла**:

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C\,, (a \neq 0)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, (a \neq 0)$$

$$\int \frac{xdx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln|x^2+a^2| + C\,, (a \neq 0)$$

$$\int \frac{xdx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2}\ln|x^2-a^2| + C\,, (a \neq 0)$$

Данные интегралы следует запомнить.

Схема вычисления интегралов вида $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx$

Для вычисления интеграла $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx$, где $a, b, c, m, n \in R$ нужно выполнить следующие действия:

1.Квадратный трехчлен ax^2+bx+c дополнить до полного квадрата:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$
$$= a\left(\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)$$
$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)$$

2. Сделать замену $t = x + \frac{b}{2a}$

3. Представить интеграл в виде суммы основных интегралов.

Пример 21. Найти интеграл

$$I = \int \frac{dx}{x^2-10x+16}$$

Решение. 1) Дополним квадратный трехчлен $x^2 - 10x + 16$ до полного квадрата:

$$x^2 - 10x + 16 = x^2 - 2 \cdot 5 \cdot x + 16$$
$$= (x^2 - 2 \cdot 5 \cdot x + 25) - 25 + 16 = (x-5)^2 - 9$$

Следовательно,

$$I = \int \frac{dx}{(x-5)^2 - 9}$$

2) Сделаем замену $t = x - 5$, тогда $x = t + 5, dx = dt$ и

$$I = \int \frac{dt}{\underbrace{t^2 - 9}_{a^2=9, a=3}} = \frac{1}{6} \ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right| + C = \frac{1}{6} \ln\left|\frac{(x-5)-3}{(x-5)+3}\right| + C$$
$$= \frac{1}{6} \ln\left|\frac{x-8}{x-2}\right| + C$$

Пример 22. Найти интеграл

$$I = \int \frac{dx}{x^2 + 3x + 4}$$

Решение. 1) Дополним квадратный трехчлен $x^2 + 3x + 4$ до полного квадрата:

$$x^2 + 3x + 4 = x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x + 4 = \left(x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x + \frac{9}{4}\right) + 4 - \frac{9}{4}$$
$$= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$$

Следовательно,

$$I=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}$$

2) Сделаем замену $t=x+\frac{3}{2}$, тогда $x=t-\frac{3}{2}, dx=dt$. Получаем, что

$$I=\int\frac{dt}{\underbrace{t^2+\frac{7}{4}}_{a^2=\frac{7}{4}, a=\frac{\sqrt{7}}{2}}}=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{7}}+C=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{7}}+C$$

Пример 23. Найти интеграл

$$I=\int\frac{xdx}{x^2+x+1}$$

Решение. 1**)** Дополним квадратный трехчлен x^2+x+1 до полного квадрата:

$$x^2+x+1=x^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+1=\left(x^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{4}\right)+1-\frac{1}{4}$$
$$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

Следовательно,

$$I=\int\frac{xdx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

2) Сделаем замену $t=x+\frac{1}{2}$, тогда $x=t-\frac{1}{2}, dx=dt$ и

$$I=\int\frac{t-\frac{1}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}dt=\int\left(\frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}-\frac{\frac{1}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}\right)dt$$

3) Разобьем получившийся интеграл на два

$$I=\int\frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}dt-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+\underbrace{\frac{3}{4}}_{a^2=\frac{3}{4},a=\frac{\sqrt{3}}{2}}}=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=\frac{1}{2}\ln\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}+C=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

Пример 24. Найти интеграл

$$I=\int\frac{(3x-1)dx}{x^2-4x+13}$$

Решение. Дополним квадратный трехчлен $x^2-4x+13$ до полного квадрата:

$$x^2-4x+13=(x^2-2\cdot2\cdot x+4)-4+13=(x-2)^2+9$$

Получаем, что

$$I=\int\frac{\overbrace{3x-1}^{3(u+2)-1=3u+5}}{\underbrace{(x-2)^2}_{\substack{u=x-2\\u'=1}}+\underbrace{9}_{\substack{a^2=9\\a=3}}}\underbrace{dx}_{du}=\int\frac{3u+5}{u^2+3^2}du$$

$$=3\int\frac{udu}{u^2+3^2}+5\int\frac{du}{u^2+3^2}$$

$$=\frac{3}{2}\ln(u^2+9)+\frac{5}{3}\operatorname{arctg}\frac{u}{3}+C$$

$$=\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+13)+\frac{5}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}+C$$

Схема вычисления интегралов вида $\int\frac{\boldsymbol{Ax+B}}{(\boldsymbol{x^2+px+q})^{\boldsymbol{n}}}\boldsymbol{dx}$

Рассмотрим теперь интегралы вида $\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx$. Здесь $A, B, p, q, \in R$, причем $p^2-4q<0$; $n>1$ и $n\in Z$.

Частным случаем данного интеграла является интеграл вида $I_n=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$ (n – целое положительное число). Для вычисления I_n применяется следующая рекуррентная формула:

$$\mathrm{I_n}=\frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1}$$

Пример 25. Найти интеграл

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}$$

Решение. В данном примере $n = 3$. Введем обозначение $I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$. И применим рекуррентную формулу:

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot (3-1)} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{3-1}} + \frac{2 \cdot 3 - 3}{2 \cdot 3 - 2} \cdot I_{3-1} = \frac{1}{4} \frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{4} I_2$$

К интегралу $I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ снова применяем рекуррентную формулу (здесь полагаем $n = 2$):

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot (2-1)} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{2-1}} + \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 \cdot 2 - 2} \cdot I_{2-1} = \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} I_1 = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C$$

Итак,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{4} \frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{4} \left[\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \right] + C$$

Окончательно имеем

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{3}{8} arctg\ x + C$$

Чтобы проинтегрировать $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx$, нужно выделить в знаменателе дроби полный квадрат и сделать нужную замену переменных, после чего мы получим рассмотренный выше частный случай.

Пример 26. Найти интеграл

$$I = \int \frac{3x + 2}{(x^2 + 2x + 10)^2} dx$$

Решение. Дополним квадратный трехчлен $x^2 + 2x + 10$ до полного квадрата:

$$x^2 + 2x + 10 = x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + 10$$
$$= (x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + 1) + 10 - 1 = (x + 1)^2 + 9$$

Следовательно,

$$I = \int \frac{(3x + 2)dx}{((x + 1)^2 + 9)^2}$$

Сделаем замену $t = x + 1,$ тогда $x = t - 1, dx = dt$ и

$$I = \int \frac{(3(t - 1) + 2)dt}{(t^2 + 9)^2} = \int \frac{(3t - 1)dt}{(t^2 + 9)^2}$$

Разобьем получившийся интеграл на два и вычислим каждый из них:

$$I = 3 \underbrace{\int \frac{t}{(t^2 + 9)^2} dt}_{I_1} - \underbrace{\int \frac{dt}{(t^2 + 9)^2}}_{I_2} = 3 \cdot I_1 - I_2;$$

$$I_1 = \int \frac{tdt}{(t^2+9)^2} = \begin{bmatrix} \text{Замена:} \\ u = t^2 + 9 \\ u' = 2t \\ \frac{tdt}{(t^2+9)^2} = \frac{u'dt}{2u^2} = \frac{du}{2u^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int u^{-2}du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2+9} + C$$

Для вычисления интеграла I_2 воспользуемся рекуррентной формулой для интеграла $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$:

$$\mathrm{I_n} = \frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1}$$

Получаем, что

$$I_2 = \frac{1}{2\cdot 9\cdot(2-1)}\cdot\frac{t}{(t^2+9)^{2-1}} + \frac{1}{9}\cdot\frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2}\cdot I_{2-1};$$

$$I_2 = \frac{1}{18}\cdot\frac{t}{t^2+9} + \frac{1}{18}\int\frac{dt}{t^2+9} = \frac{t}{18(t^2+9)} + \frac{1}{18}\cdot\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\frac{t}{3} + C$$
$$= \frac{t}{18(t^2+9)} + \frac{1}{54}\mathrm{arctg}\frac{t}{3} + C$$

Таким образом,

$$I = 3I_1 - I_2 = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{t^2+9} - \frac{1}{18}\cdot\frac{t}{t^2+9} - \frac{1}{54}\mathrm{arctg}\frac{t}{3} + C$$
$$= -\frac{27+t}{18(t^2+9)} - \frac{1}{54}\mathrm{arctg}\frac{t}{3} + C$$
$$= -\frac{x+28}{18(x^2+2x+10)} - \frac{1}{54}arctg\frac{x+1}{3} + C$$

Задачи

Вычислить интегралы:

178. $\int \frac{dx}{x^2+4x+14}$

179. $\int \frac{dx}{x^2+3x+6}$

180. $\int \frac{dx}{x^2-9x+25}$

181. $\int \frac{dx}{x^2-7x+14}$

182. $\int \frac{dx}{x^2-x+14}$

183. $\int \frac{dx}{5x^2+9x+10}$

184. $\int \frac{dx}{7x^2-3x+5}$

185. $\int \frac{dx}{3x^2-11x+17}$

186. $\int \frac{3x-11}{x^2+8x+18}dx$

187. $\int \frac{x+7}{x^2+11x+42}dx$

188. $\int \frac{x-3}{x^2-9x+23}dx$

189. $\int \frac{7x+4}{x^2+x+9}dx$

190. $\int \frac{dx}{(3x^2+x+7)^2}$

191. $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+3)^2}dx$

6.5 Интегрирование дробно-рациональных функций

Рассмотрим интегралы вида $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx,$ где

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}, a_n, b_m \neq 0.$$

Если $n < m$, то дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ является правильной и интеграл $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx$ вычисляется путём представления этой функции в виде суммы простейших дробей.

Если $n \geq m$, то дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ является неправильной. Тогда её представляют в виде суммы многочлена и правильной дроби, затем интегрируют эти слагаемые.

Например, дробь $\frac{x^2+5x-3}{x^3+3x-1}$ – правильная (степень числителя (2) меньше степени знаменателя (3)).

Дроби $\frac{x^3+x^2-9}{2x^3+3x^2-x+7}$ и $\frac{x^5-3x^2+x-8}{x^2+x+3}$ – неправильные. Из неправильной рациональной дроби всегда можно выделить целую часть (многочлен). Это достигается делением числителя на знаменатель по правилу деления многочленов.

Теорема 1. Всякая неправильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной дроби.

Поэтому интегрирование рациональной дроби всегда может быть приведено к интегрированию многочлена и правильной дроби.

Разложение многочлена на множители

A. Если числа $x_1, x_2, \dots, x_m$ – корни многочлена $Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$, то этот многочлен может быть разложен на множители по формуле

$$Q_m(x) = b_m(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_m)$$

B. Многочлен степени m не может иметь больше, чем m различных корней.

C. Корень многочлена x_1 называется простым, если множитель $x - x_1$ входит в разложение многочлена один раз.

D. Если корень x_1 имеет кратность α_1, корень x_2 имеет кратность $\alpha_2, \dots$, корень x_p – кратность α_p, причем $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p=m$, то формулу разложения из пункта *А* можно заменить следующей

$$Q_m(x)=b_m\cdot(x-x_1)^{\alpha_1}\cdot(x-x_2)^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\left(x-x_p\right)^{\alpha_p}$$

Е. Если коэффициенты многочлена $Q_m(x)$ - действительные числа, а его корнями являются и действительные, и комплексные корни, то имеет место формула

$$\begin{aligned}Q_m(x)=b_m(x-x_1)^{\alpha_1}\cdot(x-x_2)^{\alpha_2}\cdot\ldots\\ \cdot(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\cdot(x^2+p_2x+q_2)^{k_2}\\ \cdot\ldots\cdot(x^2+p_lx+q_l)^{k_l}\end{aligned}$$

причем $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+2k_1+2k_2+\cdots+2k_l=m$. Квадратичные множители, входящие в эту формулу, не имеют действительных корней и на множители первой степени с действительными коэффициентами не разлагаются.

Разложение рациональной дроби на простейшие

Простейшими (элементарными) дробями называются правильные дроби следующего вида:

$$I.\ \frac{A}{x+a};$$

$$II.\ \frac{A}{(x+a)^n};$$

$$III.\ \frac{Ax+B}{x^2+px+q};$$

$$IV. \quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$$

Здесь $A, B, a, p, q, \in R$, причем $p^2-4q<0$; $n>1$ и $n \in Z$.

Перечисленные дроби будут соответственно называться простейшими дробями I, II, III, IV типов.

Теорема 2 (о разложении рациональной дроби на простейшие). Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная, несократимая рациональная дробь, знаменатель которой после разложения имеет вид

$$Q(x) = b_m(x-x_1)^{\alpha_1} \cdot (x-x_2)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{k_1} \cdot (x^2+p_2x+q_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_lx+q_l)^{k_l},$$

где $x_1, x_2, \ldots$ - действительные числа, а квадратичные множители не имеют действительных корней. Тогда дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ может быть представлена в виде суммы простейших дробей. Каждому множителю вида $(x-x_0)^\alpha$ в знаменателе, где x_0 – корень кратности α, соответствует выражение вида

$$\frac{A_1}{x-x_0}+\frac{A_2}{(x-x_0)^2}+\frac{A_3}{(x-x_0)^3}+\cdots+\frac{A_\alpha}{(x-x_0)^\alpha},$$

а каждому множителю $(x^2+px+q)^r$ знаменателя – выражение вида

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{B_rx+C_r}{(x^2+px+q)^r},$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha, B_1, B_2, \ldots, B_r, C_1, C_2, \ldots, C_r$ – действительные числа, подлежащие определению.

Рассмотрим сначала на нескольких примерах два наиболее распространенных способа определения коэффициентов разложения правильной рациональной дроби на простейшие: метод неопределенных коэффициентов и метод задания частных значений.

Пример 27. Разложить на простейшие дроби рациональную дробь

$$\frac{x^2+2x-4}{(x-1)(x-2)(x+3)(x-4)}$$

Решение. Найдем разложение данной дроби с помощью метода неопределенных коэффициентов. Общий вид разложения будет таким:

$$\frac{x^2+2x-4}{(x-1)(x-2)(x+3)(x-4)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{A_3}{x+3}+\frac{A_4}{x-4}.$$

Умножим обе части этого равенства на знаменатель левой части:

$$\begin{aligned} x^2+2x-4=A_1&(x-2)(x+3)(x-4)\\ &+A_2(x-1)(x+3)(x-4)\\ &+A_3(x-1)(x-2)(x-4)\\ &+A_4(x-1)(x-2)(x+3) \end{aligned} \qquad (*)$$

Левая часть равенства должна тождественно равняться правой. Последнее будет иметь место только в том случае, когда коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства будут между собой равны.

Перемножим в правой части скобки и приведем подобны слагаемые:

$$x^2 + 2x - 4 = A_1(x^3 - 3x^2 - 10x + 24) \\ + A_2(x^3 - 2x^2 - 11x + 12) \\ + A_3(x^3 - 7x^2 + 14x - 8) + A_4(x^3 - 7x + 6);$$

$$x^2 + 2x - 4 = (A_1 + A_2 + A_3 + A_4)x^3 + (-3A_1 - 2A_2 - 7A_3)x^2 \\ + (-10A_1 - 11A_2 + 14A_3 - 7A_4)x + (24A_1 \\ + 12A_2 - 8A_3 + 6A_4)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях последнего равенства, получаем линейную систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{array}{r|c} x^3 & A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0 \\ x^2 & -3A_1 - 2A_2 - 7A_3 = 1 \\ x & -10A_1 - 11A_2 + 14A_3 - 7A_4 = 2 \\ 1 & 24A_1 + 12A_2 - 8A_3 + 6A_4 = -4 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}$$

Решив эту систему, получим:

$$A_1 = -\frac{1}{12}; A_2 = -\frac{2}{5}; A_3 = \frac{1}{140}; A_4 = \frac{10}{21}.$$

Применим метод задания частных значений. Раз равенство (*) – тождество, то оно сохраняется при любом значении x.

Будем давать такие значения x, чтобы в правой части все члены, кроме одного, обращались в нуль, т.е. возьмем корни знаменателя: $x = 1; x = 2; x = -3; x = 4$.

$$x = 1:\ -1 = A_1(1 - 2)(1 + 3)(1 - 4);\ -1 = 12A_1;\ A_1 = -\frac{1}{12}.$$

$$x = 2: 4 = A_2(2-1)(2+3)(2-4);\ 4 = -10A_2;\ A_2 = -\frac{2}{5}.$$

$$x = -3:\ -1 = A_3(-3-1)(-3-2)(-3-4);$$

$$-1 = -140A_3;\ A_3 = \frac{1}{140}.$$

$$x = 4: 20 = A_4(4-1)(4-2)(4+3);\ 20 = 42A_4;\ A_4 = \frac{10}{21}.$$

Итак, заданная дробь

$$\frac{x^2+2x-4}{(x-1)(x-2)(x+3)(x-4)} = -\frac{1}{12(x-1)} - \frac{2}{5(x-2)} +$$

$$+\frac{1}{140(x+3)} + \frac{10}{21(x-4)}.$$

Перейдем теперь непосредственно к интегрированию дробно-рациональных функций. Рассмотрим следующие случаи:

- Случай 1. Знаменатель имеет только действительные различные корни, т.е. разлагается на неповторяющиеся множители первой степени;
- Случай 2. Знаменатель имеет только действительные корни, причем некоторые из них кратные, т.е. разлагается на множители первой степени, некоторые из которых повторяются;
- Случай 3. Среди корней знаменателя имеются простые комплексные корни, т.е. разложение знаменателя содержит квадратичные неповторяющиеся множители.

- Случай 4. Среди корней знаменателя имеются кратные комплексные корни, т.е. разложение знаменателя содержит квадратичные повторяющиеся множители.

Случай 1

Пример 28. Найти интеграл

$$\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx$$

Решение. 1) Проверим является ли дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}$ правильной. Для этого найдем старшую степень в числителе (n) и в знаменателе (m):

$$\frac{\underline{x^2}+2x+6}{(\underline{x}-1)(\underline{x}-2)(\underline{x}-4)}$$

Получаем, что $n=2, m=3$. Следовательно, дробь правильная.

2) Так как каждый из двухчленов $x-1, x-2, x-4$ входит в знаменатель в первой степени, то данная дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей I типа:

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-4}$$

3**)** Найдем коэффициенты A, B, C.

Домножим левую и правую часть равенства на общий знаменатель:

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-4} \quad | \cdot (x-1)(x-2)(x-4)$$

Получим

$$x^2+2x+6 = \mathrm{A}(x-2)(x-4)+\mathrm{B}(x-1)(x-4)+\mathrm{C}(x-1)(x-2)$$

Следовательно,

$$x^2+2x+6 = A(x^2-6x+8)+B(x^2-5x+4)+C(x^2-3x+2)$$

Сгруппируем члены с одинаковыми степенями:

$$x^2+2x+6 = (A+B+C)x^2+(-6A-5B-3C)x+(8A+4B+2C)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ -6A-5B-3C=2 \\ 8A+4B+2C=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=-7 \\ C=5 \end{cases}$$

Итак, разложение рациональной дроби на простейшие имеет вид

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{3}{x-1}-\frac{7}{x-2}+\frac{5}{x-4}$$

Таким образом,

$$\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx = \int \frac{3dx}{x-1} - \int \frac{7dx}{x-2} + \int \frac{5dx}{x-4}$$
$$= 3\int \frac{dx}{x-1} - 7\int \frac{dx}{x-2} + 5\int \frac{dx}{x-4}$$
$$= 3\ln|x-1| - 7\ln|x-2| + 5\ln|x-4| + C$$

Замечание. Неизвестные A, B, C в разложении можно было определить и иначе. После освобождения от знаменателя можно придать x столько частных значений, сколько содержится в системе неизвестных, в данном случае – три частных значения.

Пример 29. Вычислить

$$\int \frac{x^3+x+2}{(x-3)(x-4)}dx$$

Решение. В нашем случае дробь неправильная, так как степень ее числителя (3) выше степени знаменателя (2). Поэтому прежде всего выделим целую часть дроби. Для этого разделить числитель x^3+x+2 на знаменатель $(x-3)(x-4) = x^2-7x+12$:

$$\begin{array}{r|l} -\; x^3+0\cdot x^2+x+2 & x^2-7x+12 \\ \cline{2-2} \underline{x^3-7x^2+12x} & x+7 \\ -\; 7x^2-11x+2 & \\ \underline{7x^2-49x+85} & \\ 38x-82 & \end{array}$$

Получим

$$I = \int \left(x+7+\frac{38x-82}{(x-3)(x-4)}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 7x + \int \frac{38x - 82}{(x-3)(x-4)}dx$$

Вычислим интеграл $I_1 = \int \frac{38x-82}{(x-3)(x-4)}dx$

Дробь $\frac{38x-82}{(x-3)(x-4)}$ может быть представлена в виде суммы простейших дробей I типа:

$$\frac{38x - 82}{(x-3)(x-4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-4}$$

Найдем коэффициенты A, B. Домножим левую и правую часть равенства на общий знаменатель:

$$38x - 82 = A(x-4) + B(x-3)$$

Определяем коэффициентами методом задания частных значений:$A = -32; B = 70$.

$$I_1 = \int \left(-\frac{32}{x-3} + \frac{70}{x-4}\right)dx = -32\ln|x-3| + 70\ln|x-4| + C$$

Таким образом,

$$I = \frac{x^2}{2} + 7x - 32\ln|x-3| + 70\ln|x-4| + C$$

Пример 30. Вычислить

$$\int \frac{2x^4 - x^3 + 5}{x^3 - 9x}dx$$

Решение. В нашем случае дробь неправильная, так как степень ее числителя (4) выше степени знаменателя (3). Поэтому прежде всего выделим целую часть дроби. Для этого разделить числитель $2x^4 - x^3 + 5$ на знаменатель $x^3 - 9x$:

$$\begin{array}{rl|l}
- & 2x^4 - x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 5 & x^3 - 9x \\ \cline{3-3}
 & \underline{2x^4 - 18x^2} & 2x - 1 \\
- & -x^3 + 18x^2 + 5 & \\
 & \underline{-x^3 + 9x} & \\
 & 18x^2 - 9x + 5 &
\end{array}$$

Получим

$$I = \int \left(2x - 1 + \frac{18x^2 - 9x + 5}{x(x^2 - 9)}\right) dx$$
$$= x^2 - x + \int \frac{18x^2 - 9x + 5}{x(x-3)(x+3)} dx$$

Вычислим интеграл $I_1 = \int \frac{18x^2 - 9x + 5}{x(x-3)(x+3)} dx$

Дробь $\frac{18x^2 - 9x + 5}{x(x-3)(x+3)}$ может быть представлена в виде суммы простейших дробей I типа:

$$\frac{18x^2 - 9x + 5}{x(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+3}$$

Найдем коэффициенты A, B. Домножим левую и правую часть равенства на общий знаменатель:

$$18x^2 - 9x + 5 = A(x-3)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-3)$$

Определяем коэффициентами методом задания частных значений:$A=-\frac{5}{9}$; $B=\frac{70}{9}$; $C=\frac{97}{9}$.

$$I_1=-\frac{5}{9}\ln|x|+\frac{70}{9}\ln|x-3|+\frac{97}{9}\ln|x+3|+C$$

Таким образом,

$$I=x^2-x-\frac{5}{9}\ln|x|+\frac{70}{9}\ln|x-3|+\frac{97}{9}\ln|x+3|+C$$

Случай 2

Пример 31. Найти интеграл

$$\int\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx$$

Решение. 1) Так как $n=2$, $m=4$, то дробь правильная. Разложим ее на простейшие дроби.

2) Множителю $(x-1)^3$ соответствует сумма трех простейших дробей

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}$$

Множителю $x+3$ – простейшая дробь $\frac{D}{x+3}$.

Итак,

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{x+3}$$

3) Домножая левую и правую часть равенства на общий знаменатель, получаем:

$$x^2+1 = A(x-1)^2(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x+3) + D(x-1)^3$$

При $x = 1$: $2 = 4C; C = \frac{1}{2}$.

При $x = -3$: $10 = -64D; D = -\frac{5}{32}$.

При $x = 0$:

$$1 = 3A - 3B + 3C - D; 1 = 3A - 3B + \frac{3}{2} + \frac{5}{32};$$

$$3A - 3B = -\frac{21}{32}; A - B = -\frac{7}{32}.$$

При $x = 2$:

$$5 = 5A + 5B + 5C + D; 1 = A + B + C + \frac{1}{5}D;$$

$$1 = A + B + \frac{1}{2} - \frac{1}{32}; A + B = 1 - \frac{15}{32}; A + B = \frac{17}{32}.$$

Таким образом, получаем следующую систему для определения A и B.

$$\begin{cases} A - B = -\dfrac{7}{32} \\ A + B = \dfrac{17}{32} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A = \dfrac{10}{32} \\ 2B = \dfrac{24}{32} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{5}{32} \\ B = \dfrac{3}{8} \end{cases}$$

Итак, разложение рациональной дроби на простейшие имеет вид

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} = \frac{5}{32} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{5}{32} \cdot \frac{1}{x+3}$$

То есть

$$\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} dx = \frac{5}{32} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{3}{8} \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-1)^3} - \frac{5}{32} \int \frac{dx}{x+3} = \frac{5}{32} \ln|x-1| - \frac{3}{8(x-1)} - \frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{5}{32} \ln|x+3| + C$$

Случай 3

Пример 32. Найти интеграл

$$\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2} dx$$

Решение. Выделим целую часть данной неправильной рациональной дроби:

$$
\begin{array}{r|l}
-\; x^3+3x^2+5x+7 & x^2+2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 \qquad\quad +2x} \quad & x+3 \\
-\; 3x^2+3x+7 & \\
\underline{3x^2 \qquad\quad +6} & \\
3x+1 &
\end{array}
$$

Итак,

$$\frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}=x+3+\frac{3x+1}{x^2+2}$$

Отсюда находим,

$$
\begin{aligned}
\int\frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx &= \int\left(x+3+\frac{3x+1}{x^2+2}\right)dx \\
&= \int xdx+3\int dx+3\int\frac{x}{x^2+2}dx+\int\frac{dx}{x^2+2} \\
&= \frac{1}{2}x^2+3x+\frac{3}{2}\ln(x^2+2)+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C
\end{aligned}
$$

Пример 33. Найти интеграл

$$I=\int\frac{x^2-3x+5}{x^4-8x}dx$$

Решение. Разложим знаменатель на множители:

$$x^4-8x=x(x^3-8)=x(x-2)(x^2+2x+4)$$

Получим

$$\int \frac{x^2+3x-5}{x^4-8x}dx = \int \frac{(x^2+3x-5)dx}{x(x-2)(x^2+2x+4)}$$

Разложим подынтегральную функцию $f(x) = \frac{x^2-3x+5}{x(x-2)\,(x^2+2x+4)}$ на сумму простых дробей:

$$\frac{x^2-3x+5}{x(x-2)\,(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+4}$$

Домножим левую и правую часть равенства на $x(x-2)\,(x^2+2x+4)$:

$$x^2-3x+5 = A(x-2)(x^2+2x+4) + Bx(x^2+2x+4) \\ + (Cx+D)\,x\,(x-2);$$

$$x^2-3x+5 = A(x^3-8) + B(x^3+2x^2+4\text{x}) + \text{C}(x^3-2x^2) \\ + D(x-2);$$

$$x^2-3x+5 = (A+B+C)x^3 + (2B-2C+D)x^2 + (4B-2D)x \\ + (-8A)$$

Последнее равенство выполняется тогда и только тогда, когда коэффициенты при многочленах (слева и справа) равны, т.е.

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 2B-2C+D=1 \\ 4B-2D=-3 \\ -8A=5 \end{cases} \Leftrightarrow B=\frac{1}{8}, C=\frac{1}{2}, D=\frac{7}{4}, A=-\frac{5}{8}.$$

Таким образом,

$$\mathrm{I}=-\frac{5}{8}\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{4}\int\frac{(2x+7)dx}{x^2+2x+4}=-\frac{5}{8}\ln|x|+\frac{1}{8}\ln|x-2|+\frac{1}{4}\underbrace{\int\frac{2x+7}{x^2+2x+4}dx}_{I_1}$$

$$=-\frac{5}{8}\ln|x|+\frac{1}{8}\ln|x-2|+\frac{1}{4}I_1$$

Вычислим интеграл I_1.

$$\mathrm{I}_1=\int\frac{\overbrace{2x+7}^{2(u-1)+7=2u+5}}{\underbrace{(x+1)^2}_{\substack{u=x+1\\u'=1}}+\underbrace{3}_{\substack{a^2=3\\a=\sqrt{3}}}}\underbrace{dx}_{du}=\int\frac{2u+5}{u^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}du$$

$$=2\int\frac{udu}{u^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}+5\int\frac{du}{u^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\ln(u^2+3)+\frac{5}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{u}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\ln(x^2+2x+4)+\frac{5}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C$$

Таким образом,

$$I=-\frac{5}{8}\ln|x|+\frac{1}{8}\ln|x-2|+\frac{1}{4}\ln(x^2+2x+4)+\frac{5}{4\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C$$

Случай 4

Пример 34. Найти интеграл

$$\int \frac{x^3 - 2x}{(x^2+1)^2} dx$$

Решение. Так как $Q_4(x) = (x^2+1) \cdot (x^2+1)$, т.е. знаменатель содержит двукратные множитель, то

$$\frac{x^3 - 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

Освобождаясь от знаменателя, получим

$$x^2 - 2x = (Ax+B)(x^2+1) + Cx + D$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{r|c} x^3 & 1 = A \\ x^2 & 0 = B \\ x & -2 = A + C; \quad C = -3 \\ x^0 & 0 = B + D; \quad D = 0 \end{array}$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^3 - 2x}{(x^2+1)^2} dx = -3 \int \frac{xdx}{(x^2+1)^2} + \int \frac{xdx}{x^2+1}$$

$$= \frac{3}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

Задачи

Вычислить интегралы:

192. $\int \frac{x^3}{x-2}dx$

193. $\int \frac{x^3}{x+3}dx$

194. $\int \frac{x^4}{x^2+4}dx$

195. $\int \frac{x^5}{x+3}dx$

196. $\int \frac{dx}{(x+2)(x+3)}$

197. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+3)}$

198. $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}dx$

199. $\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}dx$

200. $\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}dx$

201. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2}dx$

202. $\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x}dx$

203. $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$

204. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

205. $\int \frac{3x-2}{x^4-x^3}dx$

206. $\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}dx$

207. $\int \frac{dx}{x^3+8}$

208. $\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$

209. $\int \frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}dx$

210. $\int \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^3}dx$

211. $\int \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$

212. $\int \frac{6x^2+10x+2}{2x^3+5x^2+2x}dx$

Задачи для самостоятельного решения

Задание 14

Найдите интегралы:

14.1. $a)\int \frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^3}dx$; б) $\int \frac{x^3+4x^2+4x+2}{(x+1)^2(x^2+x+1)}dx$

14.2. $a)\int \frac{x^3+6x^2+13x+8}{x(x+2)^3}dx$; б) $\int \frac{x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$

$$14.3.\ a)\int\frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^3}dx\,;\ \text{б)}\int\frac{2x^3+7x^2+7x-1}{(x+2)^2(x^2+x+1)}dx$$

$$14.4.\ a)\int\frac{x^3+6x^2+14x+10}{(x+1)(x+2)^3}dx\,;\ \text{б)}\int\frac{2x^3+4x^2+2x-1}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}dx$$

$$14.5.\ a)\int\frac{x^3-6x^2+11x-10}{(x+2)(x-2)^3}dx\,;\ \text{б)}\int\frac{x^3+6x^2+9x+6}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}dx$$

$$14.6.\ a)\int\frac{x^3+6x^2+11x+7}{(x+1)(x+2)^3}dx\,;\ \text{б)}\int\frac{2x^3+11x^2+16x+10}{(x+2)^2(x^2+2x+3)}dx$$

$$14.7.\ a)\int\frac{2x^3+6x^2+7x+1}{(x-1)(x+1)^3}dx\,;\ \text{б)}\int\frac{3x^3+6x^2+5x-1}{(x+1)^2(x^2+2)}dx$$

$$14.8.\ a)\int\frac{x^3+6x^2+10x+10}{(x-1)(x+2)^3}dx\,;\ \text{б)}\int\frac{x^3+9x^2+21x+21}{(x+3)^2(x^2+3)}dx$$

$$14.9.\ a)\int\frac{2x^3+6x^2+7x+2}{x(x+1)^3}dx\,;\ \text{б)}\int\frac{x^3+6x^2+8x+8}{(x+2)^2(x^2+4)}dx$$

$$14.10.\ a)\int\frac{x^3-6x^2+13x-8}{x(x-2)^3}dx\,;\ \text{б)}\int\frac{x^3+5x^2+12x+4}{(x+2)^2(x^2+4)}dx$$

$$14.11.\ a)\int\frac{x^3-6x^2+13x-7}{(x+1)(x-2)^3}dx\,;\text{б)}\int\frac{2x^3-4x^2-16x-12}{(x-1)^2(x^2+4x+5)}dx$$

$$14.12.\ a)\int\frac{x^3-6x^2+14x-6}{(x+1)(x-2)^3}dx\,;\text{б)}\int\frac{-3x^3+13x^2-13x+1}{(x-2)^2(x^2-x+1)}dx$$

$$14.13.\ a)\int \frac{x^3-6x^2+10x-10}{(x+1)(x-1)^3}dx\,;\ б)\ \int \frac{x^3+2x^2+10x}{(x+1)^2(x^2-x+1)}dx$$

$$14.14.\ a)\int \frac{x^3+x+2}{x^3(x+2)}dx\,;\ б)\int \frac{3x^3+x+46}{(x-1)^2(x^2+9)}dx$$

$$14.15.\ a)\int \frac{3x^3+9x^2+10x+2}{(x-1)(x+1)^3}dx\,;\ б)\int \frac{4x^3+24x^2+20x-28}{(x+3)^2(x^2+2x+2)}dx$$

$$14.16.\ a)\int \frac{2x^3+x+1}{(x+1)x^3}dx\,;\ б)\int \frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx$$

$$14.17.\ a)\int \frac{2x^3+6x^2+7x+4}{(x+2)(x+1)^3}dx\,;\ б)\int \frac{x^3+x+1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx$$

$$14.18.\ a)\int \frac{2x^3+6x^2+5x}{(x+2)(x+1)^3}dx\,;\ б)\int \frac{x^3+x+3}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx$$

$$14.19.\ a)\int \frac{2x^3+6x^2+7x}{(x-2)(x+1)^3}dx\,;\ б)\int \frac{2x^3+4x^2+2x+2}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)}dx$$

$$14.20.\ a)\int \frac{2x^3+6x^2+5x+4}{(x-2)(x+1)^3}dx\,;\ б)\int \frac{2x^3+7x^2+7x+9}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)}dx$$

$$14.21.\ a)\int \frac{x^3+6x^2+4x+24}{(x-2)(x+2)^3}dx\,;\ б)\int \frac{4x^3+3x+4}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx$$

$$14.22.\ a)\int \frac{x^3+6x^2+14x+4}{(x-2)(x+2)^3}dx\,;\ б)\int \frac{3x^3+4x^2+6x}{(x^2+2)(x^2+2x+2)}dx$$

$$14.23.\ a)\int\frac{x^3+6x^2+18x-4}{(x-2)(x+2)^3}dx\,;\ б)\int\frac{2x^3-x+1}{(x^2+1)(x^2-x+1)}dx$$

$$14.24.\ a)\int\frac{x^3+6x^2+10x+12}{(x-2)(x+2)^3}dx\,;\ б)\int\frac{x^3+x^2+1}{(x^2+1)(x^2-x+1)}dx$$

$$14.25.\ a)\int\frac{x^3-6x^2+14x-4}{(x+2)(x-2)^3}dx\,;\ б)\int\frac{x^3+x+1}{(x^2+1)(x^2-x+1)}dx$$

$$14.26.\ a)\int\frac{x^3+6x^2+15x+2}{(x-2)(x+2)^3}dx\,;\ б)\int\frac{2x^3+2x+1}{(x^2+1)(x^2-x+1)}dx$$

$$14.27.\ a)\int\frac{2x^3-6x^2+7x-4}{(x-2)(x-1)^3}dx\,;\ б)\int\frac{x^3+2x^2+x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx$$

$$14.28.\ a)\int\frac{2x^3-6x^2+7x}{(x+2)(x-1)^3}dx\,;\ б)\int\frac{x+4}{(x^2+x+2)(x^2+2)}dx$$

$$14.29.\ a)\int\frac{x^3+6x^2-10x+52}{(x-2)(x+2)^3}dx\,;\ б)\int\frac{2x^3+2x^2+2x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx$$

$$14.30.\ a)\int\frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^3}dx\,;\ б)\int\frac{3x^3+7x^2+12x+6}{(x^2+x+3)(x^2+2x+3)}dx$$

6.6 Интегрирование некоторых иррациональных функций

Интегралы вида $\int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x}, \left(\frac{ax+b}{cx+g}\right)^{k_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+g}\right)^{k_n}\right) \boldsymbol{dx}$

Рассмотрим интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+g}\right)^{k_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+g}\right)^{k_n}\right) dx$, где R - рациональная функция, $ag - bc \neq 0$, а $k_1, \dots, k_n$ – дробные рациональные числа.

Обозначим через m – общий наименьший знаменатель чисел $k_1, \dots, k_n$, тогда в результате замены $t^m = \frac{ax+b}{cx+g}$ получаем интеграл от рациональной функции. Причем из данной замены следует определить x, а по найденному x определить dx.

Пример 35. Найти интеграл

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}} dx$$

Решение. Представим интеграл в виде $\int \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{2}}} dx$. Общим наименьшим знаменателем чисел $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ является 6. Под интегралом находится рациональная функция от $\sqrt[6]{x}$. Сделаем $t^6 = x$, тогда

$$6t^5 dt = dx;\ x^{\frac{1}{3}} = (t^6)^{\frac{1}{3}} = t^2; x^{\frac{2}{3}} = t^{6\cdot\frac{2}{3}} = t^4; x^{\frac{1}{2}} = t^{6\cdot\frac{1}{2}} = t^3$$

$$I = \int \frac{t^2}{t^4 - t^3} \cdot 6t^5 dt = 6\int \frac{t^7}{t^3(t-1)} dt = 6\underbrace{\int \frac{t^4}{t-1} dt}_{\substack{\text{выделим} \\ \text{целую часть}}}$$

$$= 6\int \left(t^3 + t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1}\right) dt$$

$$= 6\underbrace{\left(\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + \ln|t - 1|\right)}_{\substack{\text{возвращаемся к старой переменной:} \\ x = t^6 \Rightarrow t = \sqrt[6]{x}}} + C$$

$$= 6\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4} + \frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} + \ln\left|\sqrt[6]{x} - 1\right|\right) + C$$

Пример 36. Найти интеграл

$$I = \int \frac{x^4}{\sqrt{x - 1}} dx$$

Решение. Данный интеграл можно переписать в виде $\int \frac{x^4}{(x-1)^{\frac{1}{2}}} dx$, поэтому он относится к рассматриваемому случаю. Сделаем замену:

$$x - 1 = t^2; x = t^2 + 1; dx = 2tdt.$$

Осуществляя замены, получаем интеграл от рациональной функции:

$$I = \int \frac{(t^2 + 1)^4}{t} \cdot 2tdt = 2\int (t^2 + 1)^4 dt = 2\int (t^4 + 2t^2 + 1)^2 dt$$

$$= 2\int (t^8 + 4t^4 + 1 + 4t^6 + 2t^4 + 4t^2) dt$$

$$= 2\int (t^8 + 4t^6 + 6t^4 + 4t^2 + 1) dt$$

$$= 2\underbrace{\left(\frac{1}{9}t^9 + \frac{4}{7}t^7 + \frac{6}{5}t^5 + \frac{4}{3}t^3 + t\right)}_{\substack{\text{переходим к старой переменной:} \\ t = \sqrt{x-1}}} + C$$

$$= \frac{2}{9}(x-1)^{\frac{9}{2}} + \frac{8}{7}(x-1)^{\frac{7}{2}} + \frac{12}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}} + C$$

Пример 37. Найти интеграл

$$I = \int \frac{x^2}{(5x+2)\sqrt{5x+2}}dx$$

Решение. Представим интеграл в виде $I = \int \frac{x^2dx}{(5x+2)^{\frac{3}{2}}}$. Он относится к рассматриваемому типу. Сделаем замену:

$$5x+2 = t^2; x = \frac{1}{5}(t^2-2); dx = \frac{2}{5}tdt.$$

Подставляя данные значения, получаем интеграл от рациональной функции:

$$I = \int \frac{\frac{(t^2-2)^2}{25}}{t^3} \cdot \frac{2}{5}tdt = \frac{2}{125}\int \frac{(t^2-2)^2}{t^2}dt = \frac{2}{125}\int \frac{t^4-4t^2+4}{t^2}dt = \frac{2}{125}\int \left(t^2 - 4 + \frac{4}{t^2}\right)dt$$

$$= \frac{2}{125}\left(\frac{t^3}{3} - 4t - \frac{4}{t}\right) + C = \frac{2}{125}\left(\frac{1}{3}(5x+2)^{\frac{3}{2}} - 4\sqrt{5x+2} - \frac{4}{\sqrt{5x+2}}\right) + C$$

Пример 38. Найти интеграл

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}-\sqrt{2x+3}}$$

Решение. Представим интеграл в виде $\int\frac{dx}{(2x+3)^{\frac{2}{3}}-(2x+3)^{\frac{1}{2}}}$. Общим наименьшим знаменателем чисел $\frac{2}{3},\frac{1}{2}$ является 6. Под интегралом находится рациональная функция от $\sqrt[6]{2x+3}$. Сделаем $t^6=2x+3$, тогда

$$x=\frac{t^6-3}{2};dx=3t^5dt$$

$$I=\int\frac{3t^5dt}{t^4-t^3}=3\int\frac{t^5}{t^3(t-1)}dt=3\underbrace{\int\frac{t^2}{t-1}dt}_{\substack{\text{выделим}\\ \text{целую часть}}}$$

$$=3\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt$$

$$=\underbrace{\frac{3}{2}t^2+3t+3\ln|t-1|}_{\substack{\text{возвращаемся к старой переменной}\\ t=\sqrt[6]{2x+3}}}+C$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+3}+3\sqrt[6]{2x+3}+3\ln\left|\sqrt[6]{2x+3}-1\right|+C$$

Пример 39. Найти

$$I=\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{1}{x}dx$$

Решение. Перепишем интеграл в виде $I = \int \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x} dx$. Сделаем замену $\frac{1-x}{1+x} = t^2$. Из указанной замены определим x:

$$1 - x = t^2 + xt^2; 1 - t^2 = x + xt^2;$$

$$1 - t^2 = x(1 + t^2); x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Теперь определим dx:

$$dx = \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)' dt = \frac{-2t(1 + t^2) - 2t(1 - t^2)}{(1 + t^2)^2} dt$$

$$dx = \frac{-4t}{(1 + t^2)^2} dt$$

Поэтому

$$I = \int t \cdot \underbrace{\frac{1 + t^2}{1 - t^2}}_{\frac{1}{x}} \cdot \underbrace{\frac{-4t}{(1 + t^2)^2} dt}_{dx} = 4 \int \frac{t^2}{(t^2 - 1)(1 + t^2)} dt$$

$$= -4 \int \frac{t^2 dt}{(t - 1)(t + 1)(t^2 + 1)}$$

Разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей:

$$\frac{t^2}{(t - 1)(t + 1)(t^2 + 1)} = \frac{A}{t - 1} + \frac{B}{t + 1} + \frac{Ct + D}{t^2 + 1}$$

Отсюда

$$A = \frac{1}{4}; B = -\frac{1}{4}; C = 0; D = \frac{1}{2};$$

$$I = 4\int \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t-1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2+1}\right)dt$$

$$= \ln|t-1| - \ln|t+1| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C$$

$$= \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C$$

Учитывая, что $t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, получаем

$$I = \ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - 1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + 1}\right| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C;$$

$$I = \ln\left|\frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}\right| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.$$

Интегралы от биномиальных дифференциалов

Интегралами от биномиальных дифференциалов называются интегралы вида $\int x^m(a+bx^n)^p dx$, где m, n и p – любые рациональные числа, a и b – произвольные постоянные, отличные от нуля.

П.Л. Чебышев доказал, что только в трех случаях этот интеграл может быть выражен в конечном виде через алгебраические, логарифмические и обратные круговые функции:

1) p – любое целое число. В этом случае применяется замена $x = t^s$, где s – наименьший общий знаменатель дробей m и n.

2) $\frac{m+1}{n}$ – целое число. В этом случае применяется замена $a + bx^n = t^s$, где s – знаменатель дроби p.

3) $\frac{m+1}{n} + p$ – целое число. В этом случае применяется замена $ax^{-n} + b = t^s$, где s – знаменатель дроби p.

Других случаев интегрируемости биномиальных дифференциалов нет.

Пример 40. Найти

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

Решение. Перепишем интеграл в виде $I = \int x^{-\frac{1}{2}} \left(1 + x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} dx$. Получаем, что $m = -\frac{1}{2}; n = \frac{1}{4}; p = \frac{1}{3}$.

Составим выражение $\frac{m+1}{n}$:

$$\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{4}} = 2 - \text{ целое число.}$$

Следовательно, мы имеем второй случай интегрируемости. Замена выглядит следующим образом:

$$1+x^{\frac{1}{4}}=t^3; t=\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}};$$

$$x^{\frac{1}{4}}=t^3-1; x=(t^3-1)^4;$$

$$dx=4(t^3-1)^3 3t^2dt=12(t^3-1)^3t^3dt;$$

$$\begin{aligned} I=\int(t^3-1)^{4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}t^{3\cdot\frac{1}{3}}\cdot 12(t^3-1)^3t^3dt &= 12\int\frac{(t^3-1)^3t^3dt}{(t^3-1)^2} \\ &= 12\int t^3(t^3-1)dt=12\int(t^6-t^3)dt \\ &= \frac{12}{7}t^7-\frac{12t^4}{4}+C=\frac{12}{7}t^7-3t^4+C. \end{aligned}$$

Возвращаясь к старой переменной, при помощи равенства $t=\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$, получим

$$I=12\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^7}-3\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^4}+C$$

Пример 41. Найти

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt[2]{(1+4x^2)^3}}$$

Решение. Перепишем интеграл в виде $I=\int(1+4x^2)^{-\frac{3}{2}}dx$. Получаем, что $m=0; n=2; p=-\frac{3}{2}$.

Составим выражение $\frac{m+1}{n}$:

$$\frac{m+1}{n} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} -$$ не целое число.

Составим выражение $\frac{m+1}{n} + p$:

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1 -$$ целое число.

Следовательно, мы имеем третий случай интегрируемости. Замена выглядит следующим образом:

$$x^{-2} + 4 = t^2; x^{-2} = t^2 - 4;$$

$$x^2 = \frac{1}{t^2 - 4}; x = \sqrt{\frac{1}{t^2 - 4}};$$

$$dx = \left((t^2 - 4)^{-\frac{1}{2}}\right)' dt = -\frac{tdt}{(t^2 - 4)^{\frac{3}{2}}};$$

$$I = \int (1 + 4x^2)^{-\frac{3}{2}} dx = \int \left(1 + \frac{4}{t^2 - 4}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{-tdt}{(t^2 - 4)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= -\int \left(\frac{t^2 - 4 + 4}{t^2 - 4}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{tdt}{(t^2 - 4)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= -\int \frac{(t^2)^{-\frac{3}{2}}}{(t^2 - 4)^{-\frac{3}{2}}} \cdot \frac{tdt}{(t^2 - 4)^{\frac{3}{2}}} = -\int t^{-2} dt$$
$$= \frac{1}{t} + C$$

Возвращаясь к старой переменной, при помощи равенства $t = \sqrt{4 + x^{-2}} = \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{4x^2+1}{x^2}} = \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}$, получим

$$I = \frac{x}{\sqrt{4x^2 + 1}} + C.$$

Интегралы вида $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$

Для вычисления интеграла $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ необходимо:

1) вынести под корнем $|a|$ за скобку, $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$ - за знак интеграла
2) выделить под корнем полный квадрат
3) применить к одному из следующих видов (сделать необходимую замену переменных):

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C;$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C;$$

$$\int \frac{udu}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \sqrt{u^2 \pm a^2} + C$$

$$\int \frac{udu}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\sqrt{a^2 - u^2} + C$$

Пример 42. Найти интеграл

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{7x^2 + 5x + 4}}.$$

Решение. Вынесем под корнем 7 за скобку, и в оставшемся выражении выделим полный квадрат:

$$\sqrt{7x^2+5x+4}=\sqrt{7\left(x^2+\frac{5}{7}x+\frac{4}{7}\right)}=\sqrt{7}\sqrt{x^2+\frac{5}{7}x+\frac{4}{7}}$$

$$=\sqrt{7}\sqrt{\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{5}{14}+\left(\frac{5}{14}\right)^2\right)-\left(\frac{5}{14}\right)^2+\frac{4}{7}}$$

$$=\sqrt{7}\sqrt{\left(x+\frac{5}{14}\right)^2+\frac{87}{196}}$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{7}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{5}{14}\right)^2+\frac{87}{196}}}=\left[\begin{matrix}\text{Замена:}\\ u=x+\frac{5}{14};du=dx\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{7}}\int\frac{du}{\sqrt{u^2+\frac{87}{196}}}=\frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|u+\sqrt{u^2+\frac{87}{196}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|x+\frac{5}{14}+\sqrt{\left(x+\frac{5}{14}\right)^2+\frac{87}{196}}\right|+C$$

Пример 43. Найти интеграл

$$I=\int\frac{2x+5}{\sqrt{7+8x-11x^2}}dx.$$

Решение. Вынесем под корнем 11 за скобку, и в оставшемся выражении выделим полный квадрат:

$$\sqrt{7+8x-11x^2}=\sqrt{11\left(\frac{7}{11}+\frac{8}{11}x-x^2\right)}$$
$$=\sqrt{11}\sqrt{-\left(x^2-\frac{8}{11}x-\frac{7}{11}\right)}$$
$$=\sqrt{11}\sqrt{-\left(\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{4}{11}+\left(\frac{4}{11}\right)^2\right)-\left(\frac{4}{11}\right)^2-\frac{7}{11}\right)}$$
$$=\sqrt{11}\sqrt{-\left(\left(x-\frac{4}{11}\right)^2-\frac{93}{121}\right)}=\sqrt{11}\sqrt{\frac{93}{121}-\left(x-\frac{4}{11}\right)^2}$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{11}}\int\frac{2x+5}{\sqrt{\frac{93}{121}-\left(x-\frac{4}{11}\right)^2}}dx=\left[\begin{array}{c}\text{Замена:}\\ u=x-\frac{4}{11};x=u+\frac{4}{11}\\ dx=du\end{array}\right]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{11}}\int\frac{2u+\frac{8}{11}+5}{\sqrt{\frac{93}{121}-u^2}}du$$
$$=\frac{2}{\sqrt{11}}\int\frac{udu}{\sqrt{\frac{93}{121}-u^2}}+\frac{63}{11\sqrt{11}}\int\frac{du}{\sqrt{\frac{93}{121}-u^2}}$$
$$=-\frac{2}{\sqrt{11}}\sqrt{\frac{93}{121}-u^2}+\frac{63}{11\sqrt{11}}\arcsin\frac{u}{\frac{\sqrt{93}}{11}}+C$$
$$=-\frac{2}{11\sqrt{11}}\sqrt{93-121u^2}+\frac{63}{11\sqrt{11}}\arcsin\frac{11u}{\sqrt{93}}$$
$$+C$$

Произведя обратную замену, получим:

$$I = -\frac{2}{11\sqrt{11}}\sqrt{93 - 121\left(x - \frac{4}{11}\right)^2} + \frac{63}{11\sqrt{11}}\arcsin\frac{11\left(x - \frac{4}{11}\right)}{\sqrt{93}} + C = -\frac{2}{11}\sqrt{7 + 8x - 11x^2} + \frac{63}{11\sqrt{11}}\arcsin\frac{11x - 4}{\sqrt{93}} + C$$

Интегралы вида $\int \frac{dx}{(x+k)\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Для вычисления интеграла вида $\int \frac{dx}{(x+k)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ нужно сделать замену переменных

$$x + k = \frac{1}{t}.$$

Пример 44. Найти интеграл

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 3}}$$

Решение. Применим замену переменных

$$x = \frac{1}{t}; dx = -\frac{1}{t^2}dt.$$

$$I = \int -\frac{\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2} + 3}} = -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1 + 3t^2}{t^2}}} = -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^2}\sqrt{1 + 3t^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{3t^2 + 1}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{3}\sqrt{t^2 + \frac{1}{3}}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{3}}} = \underbrace{-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|t + \sqrt{t^2 + \frac{1}{3}}\right| + C}_{\substack{\text{возвращаемся к старой} \\ \text{перменной } t=\frac{1}{x}}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3}}\right| + C$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3} + \sqrt{3 + x^2}}{x\sqrt{3}}\right| + C$$

Пример 45. Найти интеграл

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{4 - x^2}}$$

Решение. Применим замену переменных

$$x = \frac{1}{t}; dx = -\frac{1}{t^2}dt.$$

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{4 - x^2}} = \int -\frac{\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{4 - \frac{1}{t^2}}} = -\int \frac{\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^2}\sqrt{4t^2 - 1}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \frac{1}{4}}} = \underbrace{-\frac{1}{2}\ln\left|t + \sqrt{t^2 - \frac{1}{4}}\right| + C}_{\substack{\text{возвращаемся к старой} \\ \text{перменной } t=\frac{1}{x}}}$$

$$I = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}}\right| + C = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2x}\right| + C$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2 + \sqrt{4 - x^2}}{2x}\right| + C$$

Интегралы вида $\int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x}, \sqrt{\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}}\right) \boldsymbol{dx}$

Для вычисления интегралов, не содержащих другой иррациональности, кроме квадратного корня из квадратного трехчлена, применяются тригонометрические подстановки, которые приводят интеграл $\int R\left(x,\ \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx$ к интегралу от рациональной функции синуса и косинуса.

Для применения этих подстановок следует:

1) из квадратного трехчлена, находящегося под корнем, выделить полный квадрат;
2) сделать линейную замену, в результате которой под корнем получится одно из следующих выражений: $y^2 + k^2$, $k^2 - y^2$, $y^2 - k^2$ (здесь под y понимается переменная, а под k – число)
3) Сделать необходимую тригонометрическую подстановку

Вид подкоренного Выражения	***Тригонометрическая подстановка***
$y^2 + k^2$	$y = k \operatorname{tg} t$ $dy = \frac{k}{\cos^2 t} dt$ $\sqrt{y^2 + k^2} = \frac{k}{\cos t}$

Вид подкоренного Выражения	***Тригонометрическая подстановка***
$y^2 - k^2$	$y = \frac{k}{\cos t}$ $dy = \frac{k \operatorname{tg} t}{\cos t} dt$ $\sqrt{y^2 - k^2} = k \operatorname{tg} t$
$k^2 - y^2$	$y = k \sin t$ $dy = k \cos t \, dt$ $\sqrt{k^2 - y^2} = k \cos t$

Основными интегралами рассматриваемого вида являются:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C;$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$$

Пример 46. Вычислить

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}}$$

Решение. Выражение, стоящее под корнем, имеет вид $x^2 + 4 = x^2 + 2^2$. Применим подстановку:

$$x = 2\operatorname{tg} t;\ dx = \frac{2}{\cos^2 t}dt$$

$$\sqrt{(x^2+4)^3} = \left(\sqrt{x^2+4}\right)^3 = \left(\frac{2}{\cos t}\right)^3 = \frac{8}{\cos^3 t}$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}} = \int \frac{\frac{2}{\cos^2 t}dt}{\frac{8}{\cos^3 t}} = \int \frac{2\cdot\cos^3 t\, dt}{8\cos^2 t} = \frac{1}{4}\int \cos t\ dt$$
$$= \frac{1}{4}\sin t + C$$

Для того, чтобы возвратиться к первоначальной переменной x, надо выразить $\sin t$ через x. Из подстановки

$$x = 2\operatorname{tg} t;\ \operatorname{tg} t = \frac{x}{2};$$

$$\sin t = \operatorname{tg} t \cdot \cos t\,;$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}; \cos^2 t = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t}; \cos t = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t}};$$

$$\sin t = \operatorname{tg} t \cdot \cos t = \operatorname{tg} t \cdot \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t}} = \frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}} = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$$

Поэтому окончательно

$$I = \frac{x}{4\sqrt{4+x^2}} + C.$$

Пример 47. Вычислить

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-5)^3}}$$

Решение. Выражение, стоящее под корнем, имеет вид $x^2 - 5 = x^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2$. Применим подстановку:

$$x = \frac{\sqrt{5}}{\cos t};\ dx = \frac{\sqrt{5}\operatorname{tg} t}{\cos t} dt$$

$$\sqrt{(x^2-5)^3} = \left(\sqrt{x^2-5}\right)^3 = \left(\sqrt{5}\operatorname{tg} t\right)^3 = 5\sqrt{5}\cdot\operatorname{tg}^3 t$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-5)^3}} = \int \frac{\frac{\sqrt{5}\operatorname{tg} t}{cos\ t} dt}{5\sqrt{5}\cdot\operatorname{tg}^3 t} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{\cos t\cdot\operatorname{tg}^2 t}$$
$$= \frac{1}{5}\int \frac{dt}{\cos t\cdot\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{1}{5}\int \underbrace{\frac{\cos t}{\sin^2 t}\, dt}_{\substack{u=\sin t;\\ du=\cos t dt}} = \frac{1}{5}\int \frac{du}{u^2}$$
$$= -\frac{1}{5u} = -\frac{1}{5\sin t} + C$$

Для того, чтобы возвратиться к первоначальной переменной x, надо выразить $\sin t$ через x. Из подстановки

$$x = \frac{\sqrt{5}}{\cos t};\cos t = \frac{\sqrt{5}}{x}$$

$$\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - \frac{5}{x^2} = \frac{x^2 - 5}{x^2};$$

$$\sin t = \sqrt{\frac{x^2 - 5}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - 5}}{x}$$

Поэтому окончательно

$$I = -\frac{\sqrt{x^2 - 5}}{5x} + C.$$

Пример 48. Вычислить

$$I = \int \frac{dx}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}$$

Решение. Выражение, стоящее под корнем, имеет вид $x^2 - 1$. Применим подстановку:

$$x = \sin t;\ dx = \cos t\, dt;$$
$$(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2} = \left(1 - \sin^2 t\right)\cos t = \cos^3 t;$$

$$I = \int \frac{dx}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}} = \int \frac{\cos t\, dt}{\cos^3 t} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C$$

Для того, чтобы возвратиться к первоначальной переменной x, надо выразить $\operatorname{tg} t$ через x. Из подстановки

$$x = \sin t\,; \cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Поэтому окончательно

$$I = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} + C.$$

Замечание. Интегрирование функций вида $R\left(x,\ \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)$ в общем случае приводится к интегрированию рационально дроби и вычислению интегралов следующих трех видов:

$$(1) \int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx \quad (P(x) - \text{многочлен})\,;$$

$$(2) \int \frac{dx}{(x + k)^p \sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad (p - \text{целое число}, p > 0);$$

$$(3) \int \frac{(Mx + N)dx}{(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^m \sqrt{ax^2 + bx + c}} (m - \text{целое число}, m > 0)$$

Задачи

Вычислить интегралы:

213. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}$

214. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx$

215. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2} dx$

216. $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

217. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}$

218. $\int \sqrt{9 - x^2} dx$

219. $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$

220. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(9+x^2)^5}}$

221. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$

222. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

223. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-x^2}}$

Задачи для самостоятельного решения

Задание 15

Найдите интегралы:

15.1. $a)\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+1}-2\sqrt[4]{(2x+1)^2}}$; б) $\int \frac{5x+8}{\sqrt{5+4x+x^2}}dx$

15.2. $a)\int \frac{2\sqrt[6]{x}-3}{\sqrt[6]{x^5}\left(4+\sqrt[3]{x}\right)}dx$; б) $\int \frac{x-1}{\sqrt{3x-x^2+2}}dx$

15.3. $a)\int \frac{\sqrt[4]{x+6}dx}{\sqrt{x+6}+2\sqrt[4]{x+6}}$; б) $\int \frac{7x-1}{\sqrt{8x-x^2+12}}dx$

15.4. $a)\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(3x+2)^3}+\sqrt{3x+2}}$; б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{4-6x-3x^2}}$

15.5. $a)\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}\left(9+\sqrt[6]{x}\right)}$; б) $\int \frac{x+4}{\sqrt{3-6x-3x^2}}dx$

15.6. $a)\int \frac{2+3\sqrt[8]{x}}{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[8]{x^7}}dx$; б) $\int \frac{3x+5}{\sqrt{2x^2-8x+7}}dx$

$$15.7.\ a)\int\frac{3-2\sqrt[7]{x}}{\sqrt[7]{x^6}-\sqrt[14]{x^{13}}}dx;\ б)\int\frac{x+2}{\sqrt{3+4x-4x^2}}dx$$

$$15.8.\ a)\int\frac{5+\sqrt[6]{x}}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}\right)^2}dx;\ б)\int\frac{x-2}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx$$

$$15.9.\ a)\int\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\left(\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}\right)^3}dx;\ б)\int\frac{6x-1}{\sqrt{1-6x-3x^2}}dx$$

$$15.10.\ a)\int\frac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[6]{x}\right)^2}dx;\ б)\int\frac{3x+7}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx$$

$$15.11.\ a)\int\frac{4-\sqrt{\frac{3x+1}{1-x}}}{\left(\sqrt{\frac{3x+1}{1-x}}+4\right)(3x+1)^2}dx;\ б)\int\frac{3xdx}{\sqrt{7-6x-x^2}}$$

$$15.12.\ a)\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x}+\sqrt[4]{1-2x}};\ б)\int\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+2}}dx$$

$$15.13.\ a)\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}};\ б)\int\frac{3x+5}{\sqrt{x^2-6x-16}}dx$$

$$15.14.\ a)\int\frac{2dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+6\sqrt[4]{x}+10\right)};\ б)\int\frac{7xdx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$$

$$15.15.\ a)\int\frac{\sqrt[8]{x}-1}{\sqrt[8]{x^7}\left(5-\sqrt[4]{x}\right)}dx;\ б)\int\frac{x-2}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx$$

15.16. $a) \int \frac{dx}{(4+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$; б) $\int \frac{5x-2}{\sqrt{16+6x-x^2}}dx$

15.17. $a) \int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^5}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}+5)}$; б) $\int \frac{7x+2}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$

15.18. $a) \int \frac{\sqrt[6]{x}-2}{\sqrt[6]{x^5}(4\sqrt[6]{x}-\sqrt[3]{x}-3)}dx$; б) $\int \frac{2xdx}{\sqrt{x^2+6x+16}}$

15.19. $a) \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^3}$; б) $\int \frac{3x+1}{\sqrt{x^2-4x+3}}dx$

15.20. $a) \int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}-2\sqrt[4]{2x+1}+2}$; б) $\int \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$

15.21. $a) \int \frac{\sqrt[6]{x}-1}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$; б) $\int \frac{8x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$

15.22. $a) \int \frac{1+\sqrt[6]{x}}{\sqrt[4]{x^3}(\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x})}dx$; б) $\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}dx$

15.23. $a) \int \frac{6-\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}-6\sqrt[4]{x^3}-7x}dx$; б) $\int \frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx$

15.24. $a) \int \frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}(\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})}dx$; б) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{4x^2-4x+17}}dx$

15.25. $a) \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$; б) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

$$15.26.\ a)\int \frac{\sqrt[6]{x+2}\,dx}{6\left(\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{(x+2)^2}\right)};\ б)\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$$

$$15.27.\ a)\int \frac{4dx}{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)^2(x-2)^2};\ б)\int \frac{xdx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$$

$$15.28.\ a)\int \frac{6\sqrt{x+2}}{(x+2)^2\sqrt{x+1}}dx;\ б)\int \frac{3x-1}{\sqrt{3x^2+6x+4}}dx$$

$$15.29.\ a)\int \frac{1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[3]{x^4}}dx;\ б)\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx$$

$$15.30.\ a)\int \frac{\sqrt[6]{x}}{x+\sqrt[4]{x^3}}dx;\ б)\int \frac{5x+3}{\sqrt{5+4x-x^2}}dx$$

6.7 Интегрирование тригонометрических функций

Интегралы вида $\int \sin\alpha x\cos\beta x\,dx$, $\int \cos\alpha x\cos\beta x\,dx$, $\int \sin\alpha x\sin\beta x\,dx$

Из тригонометрии известно, что произведения тригонометрических функций, находящиеся под знаками рассматриваемых интегралов, преобразуются в суммы по следующим формулам

$$\sin\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}[\sin(\alpha x-\beta x)+\sin(\alpha x+\beta x)]$$

$$\cos\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}[\cos(\alpha x-\beta x)+\cos(\alpha x+\beta x)]$$

$$\sin\alpha x\sin\beta x=\frac{1}{2}[\cos(\alpha x-\beta x)-\cos(\alpha x+\beta x)]$$

Преобразовав в рассматриваемых интегралах подынтегральные функции с помощью данных формул, легко выполнить интегрирование.

Для удобства запишем здесь еще раз основные интегралы от тригонометрических функций, которыми часто придется пользоваться:

$$\int\sin(ax)\,dx=-\frac{1}{a}\cos(ax)+C;$$

$$\int\cos(ax)\,dx=\frac{1}{a}\sin(ax)+C;$$

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C;$$

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C;$$

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

Пример 49. Найти $I = \int \sin 2x \cos 4x \, dx$

Решение.

$$\begin{aligned} I = \int \sin 2x \cos 4x \, dx = \frac{1}{2}\int (\sin(2x-4x)+\sin(2x+4x))dx \\ = \frac{1}{2}\int \sin(-2x)\, dx + \frac{1}{2}\int \sin(6x)\, dx \\ = -\frac{1}{2}\int \sin 2x \, dx + \frac{1}{2}\int \sin 6x \, dx \\ = \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{12}\cos 6x + C. \end{aligned}$$

Пример 50. Найти $I = \int \sin 2x \cos 5x \sin 9x \, dx$

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\begin{aligned} \sin 2x \cos 5x \sin 9x = \frac{1}{2}[\sin(2x-5x)+\sin(2x+5x)] \sin 9x \\ = \frac{1}{2}[\sin(-3x)+\sin 7x] \sin 9x \\ = \frac{1}{2}[-\sin 3x + \sin 7x] \sin 9x \\ = -\frac{1}{2}\sin 3x \sin 9x + \frac{1}{2}\sin 7x \sin 9x\,; \end{aligned}$$

Учитывая, что $\sin 3x \sin 9x = \frac{1}{2}[\cos(-6x) - \cos 12x]$ и $\sin 7x \sin 9x = \frac{1}{2}[\cos(-2x) - \cos 16x]$, окончательно получаем:

$$\sin 2x \cos 5x \sin 9x = -\frac{1}{4}\cos 6x + \frac{1}{4}\cos 12x + \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\cos 16x$$

$$I = -\frac{1}{24}\sin 6x + \frac{1}{48}\sin 12x + \frac{1}{8}\sin 2x - \frac{1}{64}\sin 16x + C$$

Интегралы вида $\int \sin^{n} x \cdot \cos^{m} x\, dx$

При интегрировании функций вида $\sin^n x \cdot \cos^m x$ следует придерживаться следующих правил:

1) Показатель степени синуса n – нечетное положительное число. В этом случае отделить первую степень синуса, оставшуюся часть подынтегральной функции выразить через косинус, сделать замену $t = \cos x$;
2) Показатель степени косинуса m – нечетное положительное число. В этом случае отделить первую степень косинуса, оставшуюся часть подынтегральной функции выразить через синус, сделать замену $t = \sin x$;
3) Сумма показателей $n + m$ – четное отрицательное число. В этом случае сделать замену $t = \operatorname{tg} x$ или $t = \operatorname{ctg} x$;
4) Сумма показателей $n + m = 0$ (предполагается, что m и n - целые числа). Получится один из следующих интегралов: $\int \operatorname{tg}^n x\, dx$ или $\int \operatorname{ctg}^m x\, dx$. В данном случае с помощью основного тригонометрического тождества необходимо понизить степень подынтегральной функции;
5) Оба показатели степени n и m – чётные числа. В этом случае с помощью формул

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2};$$

$$\cos x \sin x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

понизить степень подынтегральной функции.

Пример 51. Вычислить интегралы:

$$\text{а)} \int \cos^5 x\, dx\,; \text{б)} \int \sin^3 x\, dx\,; \text{в)} \int \sin^4 x \cos^3 x\, dx\,;$$

$$\text{г)} \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx\,;\ \text{д)} \int \frac{\cos^3 x}{\sin x \sqrt[3]{\sin x}} dx$$

Решение. а) Степень косинуса – нечетное положительное число, поэтому в подынтегральной функции отделяем первую степень косинуса и выражаем с помощью основного тригонометрического тождества оставшуюся часть подынтегральной функции через синус:

$$\begin{aligned} I = \int cos^5 x\, dx &= \int \cos^4 x \cdot \cos x\, dx = \int (\cos^2 x)^2 \cdot \cos x\, dx \\ &= \int \underbrace{(1-\sin^2 x)^2 \cos x\, dx}_{t=\sin x; dt=\cos x dx} = \int (1-t^2)^2 dt \\ &= \int (1-2t^2+t^4)dt = t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{t^5}{5} + C \\ &= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C \end{aligned}$$

б) Степень синуса – нечетное положительное число, поэтому в подынтегральной функции отделяем первую степень синуса и выражаем с помощью основного тригонометрического тождества оставшуюся часть подынтегральной функции через косинус:

$$I = \int \sin^3 x\, dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x\, dx = \int \underbrace{(1 - \cos^2 x) \sin x\, dx}_{t = \cos x; dt = -\sin x dx}$$

$$= -\int (1 - t^2) dt = -t + \frac{t^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

в) Степень косинуса – нечетное положительное число, поэтому в подынтегральной функции отделяем первую степень косинуса и выражаем с помощью основного тригонометрического тождества оставшуюся часть подынтегральной функции через синус:

$$\begin{aligned} \sin^4 x \cos^3 x\, dx &= \sin^4 x \cos^2 x \cos x\, dx \\ &= \sin^4 x\, (1 - \sin^2 x) \cos x\, dx \\ &= (\sin^4 x - \sin^6 x) \cos x\, dx; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I = \int \sin^4 x \cos^3 x\, dx &= \int \underbrace{(\sin^4 x - \sin^6 x) \cos x\, dx}_{t = \sin x; dt = \cos x dx} \\ &= \int (t^4 - t^6) dt = \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{7} t^7 + C \\ &= \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x + C. \end{aligned}$$

г) Степень синуса – нечетное положительное число, поэтому в подынтегральной функции отделяем первую степень синуса и выражаем с помощью основного тригонометрического тождества оставшуюся часть подынтегральной функции через косинус:

$$I = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x}{\cos^4 x} dx = \int \underbrace{\frac{(1 - \cos^2 x) \sin x}{\cos^4 x} dx}_{t = \cos x; dt = -\sin x dx} =$$

$$= \int \frac{t^2-1}{t^4}dt = \int (t^{-2} - t^{-4})\,dt = -\frac{1}{t} + \frac{1}{3t^3} + C$$

$$= -\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + C$$

д) Степень косинуса – нечетное положительное число, поэтому в подынтегральной функции отделяем первую степень косинуса и выражаем с помощью основного тригонометрического тождества оставшуюся часть подынтегральной функции через синус:

$$I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin x \sqrt[3]{\sin x}}dx = \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x\, dx}{\sin x \cdot \sin^{\frac{1}{3}} x} =$$

$$= \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x\, dx}{\sin^{\frac{4}{3}} x}dx$$

$$= \int \underbrace{(1-\sin^2 x)\sin^{-\frac{4}{3}} x \cos x\, dx}_{t=\sin x; dt=\cos x dx} = \int (1-t^2)t^{-\frac{4}{3}}dt$$

$$= \int \left(t^{-\frac{4}{3}} - t^{\frac{2}{3}}\right)dt = \frac{t^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}} - \frac{t^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C$$

$$= -\frac{3}{t^{\frac{1}{3}}} - \frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}} + C = -\frac{3}{\sin^{\frac{1}{3}} x} - \frac{3}{5}\sin^{\frac{5}{3}} x + C$$

Пример 52. Вычислить интегралы:

а) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}dx$; б) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^9 x}dx$; в) $\int \frac{\sin^7 x}{\cos^7 x}dx$; г) $\int \mathrm{ctg}^6\, x\, dx$

Решение. а) Здесь $n = 3, m = -5, n + m = -2$ – четное отрицательное число. В числителе степень косинуса, поэтому отделим квадрат косинуса, выразим с помощью основного тригонометрического тождества оставшуюся часть подынтегральной функции через тангенс и воспользуемся заменой $t = \operatorname{tg} x$:

$$\frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}dx = \frac{\sin^3 x\, dx}{\cos^3 x \cdot \cos^2 x} = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^3 \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^3 x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x};$$

$$I = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}dx = \int \underbrace{\operatorname{tg}^3 x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}}_{t=\operatorname{tg} x;\, dt=\frac{dx}{\cos^2 x}} = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + C$$

б) Здесь $n = -9, m = 3, n + m = -6$ – четное отрицательное число. В числителе степень синуса, поэтому отделим квадрат синуса, выразим с помощью основного тригонометрического тождества оставшуюся часть подынтегральной функции через котангенс и воспользуемся заменой $t = \operatorname{ctg} x$:

$$\frac{\cos^3 x}{\sin^9 x}dx = \frac{\cos^3 x}{\sin^7 x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{ctg}^3 x \cdot \frac{1}{\sin^4 x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$= \operatorname{ctg}^3 x \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{\sin^2 x}}_{\frac{1}{\sin^2 x}=1+\operatorname{ctg}^2 x}\right)^2 \cdot \frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$= \operatorname{ctg}^3 x \cdot (1 + \operatorname{ctg}^2 x)^2 \cdot \frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^9 x}dx = \underbrace{\int \operatorname{ctg}^3 x \cdot (1 + \operatorname{ctg}^2 x)^2 \cdot \frac{dx}{\sin^2 x}}_{t=\operatorname{ctg} x;\, dt=-\frac{dx}{\sin^2 x}}$$

$$= -\int t^3(1 + t^2)^2 dt = -\int t^3(1 + 2t^2 + t^4)dt$$

$$= -\int (t^3 + 2t^5 + t^7)dt = -\frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{3} - \frac{t^8}{8} + C$$

$$= -\frac{\mathrm{ctg}^4 x}{4} - \frac{\mathrm{ctg}^6 x}{3} - \frac{\mathrm{ctg}^8 x}{8} + C$$

в) Здесь $n = 7, m = -7, n + m = 0$. Перепишем интеграл в следующем виде:

$$I = \int \frac{\sin^7 x}{\cos^7 x} dx = \int \mathrm{tg}^7 x dx$$

Преобразуем подынтегральную функцию, воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством:

$$1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}; \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1;$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{tg}^7 x dx &= \mathrm{tg}^5 x \cdot tg^2 x\, dx = \mathrm{tg}^5 x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx \\
&= \left(\frac{\mathrm{tg}^5 x}{\cos^2 x} - \mathrm{tg}^5 x\right) dx \\
&= \left(\frac{\mathrm{tg}^5 x}{\cos^2 x} - \mathrm{tg}^3 x \cdot \mathrm{tg}^2 x\right) dx \\
&= \left(\frac{\mathrm{tg}^5 x}{\cos^2 x} - \mathrm{tg}^3 x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\right) dx \\
&= \left(\frac{\mathrm{tg}^5 x}{\cos^2 x} - \frac{\mathrm{tg}^3 x}{\cos^2 x} + \mathrm{tg}^3 x\right) dx \\
&= \left(\frac{\mathrm{tg}^5 x}{\cos^2 x} - \frac{\mathrm{tg}^3 x}{\cos^2 x} + tg\, x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\right) dx \\
&= \left(\frac{\mathrm{tg}^5 x}{\cos^2 x} - \frac{\mathrm{tg}^3 x}{\cos^2 x} + \frac{tg\, x}{\cos^2 x} - tg\, x\right) dx;
\end{aligned}$$

Таким образом

$$I=\int\frac{\sin^7 x}{\cos^7 x}dx=\int\left(\frac{\mathrm{tg}^5 x}{\cos^2 x}-\frac{\mathrm{tg}^3 x}{\cos^2 x}+\frac{tg\ x}{\cos^2 x}-tg\ x\right)dx$$

$$=\underbrace{\int\left(\frac{\mathrm{tg}^5 x}{\cos^2 x}-\frac{\mathrm{tg}^3 x}{\cos^2 x}+\frac{tg\ x}{\cos^2 x}\right)dx}_{u=\mathrm{tg}\ x;du=\frac{dx}{\cos^2 x}}-\int tg\ x$$

$$=\frac{u^6}{6}-\frac{u^4}{4}+\frac{u^2}{2}+\ln|\cos x|+C$$

$$=\frac{\mathrm{tg}^6 x}{6}-\frac{\mathrm{tg}^4 x}{4}+\frac{\mathrm{tg}^2 x}{2}+\ln|\cos x|+C$$

г) Здесь $n=6, m=-6, n+m=0$. Преобразуем подынтегральную функцию, воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством:

$$1+\mathrm{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x};\mathrm{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}-1;$$

$$\mathrm{ctg}^6 x dx=\mathrm{ctg}^4 x\cdot ctg^2 x\ dx=\mathrm{ctg}^4 x\cdot\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx$$

$$=\left(\frac{\mathrm{ctg}^4 x}{\sin^2 x}-\mathrm{ctg}^4 x\right)dx=$$

$$=\left(\frac{\mathrm{ctg}^4 x}{\sin^2 x}-\mathrm{ctg}^2 x\cdot\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)\right)dx$$

$$=\left(\frac{\mathrm{ctg}^4 x}{\sin^2 x}-\frac{\mathrm{ctg}^2 x}{\sin^2 x}+\mathrm{ctg}^2 x\right)dx$$

$$=\left(\frac{\mathrm{ctg}^4 x}{\sin^2 x}-\frac{\mathrm{ctg}^2 x}{\sin^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx;$$

Таким образом

$$I=\int\left(\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{\sin^2 x}-\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{\sin^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx$$

$$=\underbrace{\int\left(\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{\sin^2 x}-\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{\sin^2 x}\right)dx}_{u=\operatorname{ctg} x;du=-\frac{dx}{\sin^2 x}}-\operatorname{ctg} x-x+C$$

$$=-\frac{u^5}{5}+\frac{u^3}{3}-\operatorname{ctg} x-x+C$$

$$=-\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5}+\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}-\operatorname{ctg} x-x+C$$

Пример 53. Вычислить интегралы:

$$\text{а)}\int\sin^4 x\,dx\,;\text{б)}\int\cos^6 x\,dx\,;\text{в)}\int\sin^2 x\cos^2 x\,dx$$

Решение. а) Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\sin^4 x=(\sin^2 x)^2=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1-2\cos 2x+\overbrace{\cos^2 2x}^{\substack{\text{понижаем}\\ \text{степень}}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}-2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\right)$$

$$=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$$

Поэтому

$$I=\int\sin^4 x\,dx=\int\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\right)dx$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

б) Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\cos^6 x = (\cos^2 x)^3 = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^3$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 + 3\cos 2x + 3\overbrace{\cos^2 2x}^{\substack{\text{понижаем} \\ \text{степень}}} + \overbrace{\cos^3 2x}^{\substack{\text{отделяем} \\ \cos 2x}}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 + 3\cos 2x + \frac{3}{2}(1 + \cos 4x) + \overbrace{\cos^2 2x}^{\substack{\text{выражаем} \\ \text{через } \sin 2x}} \cdot \cos 2x\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{5}{2} + 3\cos 2x + \frac{3}{2}\cos 4x + (1 - \sin^2 2x) \cdot \cos 2x\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{5}{2} + 4\cos 2x + \frac{3}{2}\cos 4x - \sin^2 2x \cdot \cos 2x\right)$$

Поэтому

$$I = \int \cos^6 x\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(\frac{5}{2} + 4\cos 2x + \frac{3}{2}\cos 4x - \sin^2 2x \cdot \cos 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}x + 2\sin 2x + \frac{3}{8}\sin 4x - \frac{1}{6}\sin^3 2x\right) + C$$

в) Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x$$

Поэтому

$$I = \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int cos4x \, dx$$
$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Запись $R(\sin x, \cos x)$ означает, что над синусом и косинусом производятся только рациональные операции: сложение, вычитание, умножение на число, возведение в целую степень, деление. Другими словами, под символом $R(\sin x, \cos x)$ следует понимать рациональную функцию синуса и косинуса.

При интегрировании функций вида $R(\sin x, \cos x)$ следует придерживаться следующих правил:

1) Если $R(\sin x, \cos x)$ меняет знак при замене $\sin x$ на $-\sin x$, т.е. если $R(\sin x, \cos x)$ - нечетная функция от $\sin x$, то подынтегральное выражение приводится к рациональной функции с помощью замены $t = \cos x$;
2) Если $R(\sin x, \cos x)$ меняет знак при замене $\cos x$ на $-\cos x$, т.е. если $R(\sin x, \cos x)$ - нечетная функция от $\cos x$, то подынтегральное выражение приводится к рациональной функции с помощью замены $t = \sin x$;
3) Если $R(\sin x, \cos x)$ не изменяется при одновременной замене $\sin x$ на $-\sin x$ и $\cos x$ на $-\cos x$, то подынте-

гральное выражение приводится к рациональному виду с помощью замены $t = \operatorname{tg} x$ $\left(dx = \frac{dt}{1+t^2}\right)$;

4) В общем случае данный интеграл приводится к интегралу от рациональной функции с помощью ***универсальной тригонометрической подстановки***:

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}; \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример 54. Вычислить интегралы:

$$\text{а)} \int \frac{1}{\sin^5 x}\, dx\,; \text{б)} \int \frac{(\cos^3 x + \cos^5 x)dx}{\sin^2 x + \sin^4 x}; \text{в)} \int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5};$$

$$\text{г)} \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x}$$

Решение. а) Здесь $R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{\sin^5 x}$. Проверим является ли данная функцию нечетной функцией от $\sin x$:

$$R(-\sin x, \cos x) = \frac{1}{(-\sin x)^5} = -\frac{1}{\sin^5 x} = -R(\sin x, \cos x),$$

т.е. $R(\sin x, \cos x)$ - нечетная функция от $\sin x$. Поэтому воспользуемся заменой переменных $t = \cos x$:

$$I = \int \frac{dx}{\sin^5 x} = \int \underbrace{\frac{\sin x\, dx}{\sin^6 x}}_{\substack{t=\cos x;\\ dt=-\sin x\, dx;\\ \sin^2 x=1-t^2;\\ \sin^6 x=(1-t^2)^3}} = \int -\frac{dt}{(1-t^2)^3}$$

$$= \int \frac{dt}{(t-1)^3(t+1)^3}$$

Так как, $\frac{1}{(t-1)^3(t+1)^3} = \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{t-1} - \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(t-1)^3} - \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{t+1} - \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(t+1)^3}$, то

$$I = \frac{3}{16}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{3}{16}\int \frac{dt}{(t-1)^2} + \frac{1}{8}\int \frac{dt}{(t-1)^3} - \frac{3}{16}\int \frac{dt}{t+1} - \frac{3}{16}\int \frac{dt}{(t+1)^2} - \frac{1}{8}\int \frac{dt}{(t+1)^3}$$

$$= \frac{3}{16}\ln|t-1| + \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{t-1} - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{(t-1)^2} - \frac{3}{16}\ln|t+1| + \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{t+1} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{(t+1)^2} + C$$

Возвращаясь к старой переменной, получим

$$I = \frac{3}{16}\ln|\cos x - 1| + \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{\cos x - 1} - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{(\cos x - 1)^2} - \frac{3}{16}\ln|\cos x + 1| + \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{\cos x + 1} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{(\cos x + 1)^2} + C$$

б) Здесь подынтегральная функция является нечетной относительно $\cos x$. Поэтому воспользуемся заменой переменных $t = \sin x$:

$$I = \int \frac{(\cos^3 x + \cos^5 x)dx}{\sin^2 x + \sin^4 x} =$$

$$= \int \frac{\overbrace{(\cos^2 x + \cos^4 x)}^{\cos^2 x(1+\cos^2 x)} \cos x\, dx}{\underbrace{\sin^2 x + \sin^4 x}_{\substack{t=\sin x; dt=\cos x dx;\\ \cos^2 x = 1-t^2}}} = \int \frac{(1-t^2)(2-t^2)dt}{t^2(1+t^2)}$$

Так как $\frac{(1-t^2)(2-t^2)}{t^2(1+t^2)} = 1 + \frac{2}{t^2} - \frac{6}{1+t^2}$, то

$$I = \int \left(1 + \frac{2}{t^2} - \frac{6}{1+t^2}\right) dt = t - \frac{2}{t} - 6 \operatorname{arctg} t + C.$$

Возвращаясь к старой переменной, получим

$$I = \sin x - \frac{2}{\sin x} - 6 \operatorname{arctg} (\sin x) + C.$$

в) К рассматриваемой подынтегральная функция правила 1) – 3) не применяются, следовательно, воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой:

$$I = \int \frac{dx}{\underbrace{4 \sin x + 3 \cos x + 5}_{\substack{tg\frac{x}{2}=t;\ dx=\frac{2dt}{1+t^2};\\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}; \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}}}} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 3 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5}$$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{8t + 3 - 3t^2 + 5 + 5t^2}{1 + t62}} = \int \frac{2dt}{2t^2 + 8t + 8}$$

$$= \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C.$$

Возвращаясь к старой переменной, получим

$$I = -\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2} + C.$$

г) Так как подынтегральная функция не меняет знак при одновременной замене $\sin x$ на $-\sin x$ и $\cos x$ на $-\cos x$, то подынтегральное выражение приводится к рациональному виду с помощью замены $t = \operatorname{tg} x$:

$$I = \int \underbrace{\frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x}}_{\substack{tg\, x=t;\; dx=\frac{dt}{1+t^2}; \\ \sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}};\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}}$$

$$= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2+2t-1}$$

$$= \int \frac{dt}{(t+1)^2-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x+1-\sqrt{2}}{\operatorname{tg} x+1+\sqrt{2}}\right| + C.$$

Задачи

Вычислить интегралы:

224. $\int \sin^2\frac{x}{2}\,dx$

225. $\int \cos^2\frac{x}{2}\,dx$

226. $\int \cos^3 x\,dx$

227. $\int \sin^5 x\,dx$

228. $\int \sin^7 x\cos^6 x\,dx$

229. $\int \sin^2 x\cos^5 x\,dx$

230. $\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx$

231. $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$

232. $\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx$

233. $\int \cos^6 3x\,dx$

234. $\int \sin^3 x\cos^3 x\,dx$

235. $\int \cos^7 x\, dx$

236. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$

237. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$

238. $\int \sin 10x \sin 15x\, dx$

239. $\int \cos\frac{x}{2} \cos\frac{x}{3} dx$

240. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$

241. $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$

242. $\int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx$

243. $\int \frac{\sin x dx}{1-\sin x}$

244. $\int \frac{\sin x+\cos x}{\cos x-\sin x} dx$

245. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$

246. $\int \mathrm{tg}^4 x dx$

247. $\int \mathrm{ctg}^4 x dx$

248. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$

249. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$

250. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$

251. $\int \frac{dx}{\sin^{5x} \cos^3 x}$

252. $\int \mathrm{tg}\, 5x dx$

253. $\int \mathrm{ctg}^3 x dx$

Задачи для самостоятельного решения

Задание 16

Найдите интегралы:

16.1. $a) \int \sin^4 x \cos^7 x\, dx$; б) $\int \sin 2x \sin 5x\, dx$

16.2. $a) \int \sqrt{\sin^3 x} \cos^5 x\, dx$; б) $\int \sin 3x \cos 8x\, dx$

16.3. $a) \int \sin^6 x \cos^3 x\, dx$; б) $\int \cos x \cos 4x\, dx$

16.4. $a) \int \sin^5 2x \cos^3 2x\, dx$; б) $\int \sin 7x \sin 6x\, dx$

16.5. $a) \int \sqrt{\sin x} \cos x \, dx$; б) $\int \sin 5x \cos 3x \, dx$

16.6. $a) \int \sin^3 x \sqrt{\cos^3 x} \, dx$; б) $\int \sin 3x \sin 6x \, dx$

16.7. $a) \int \sin^5 x \cos^8 x \, dx$; б) $\int \cos 4x \cos 5x \, dx$

16.8. $a) \int \sin^2 2x \cos^7 2x \, dx$; б) $\int \sin 5x \cos 7x \, dx$

16.9. $a) \int \sin^5 x \sqrt{\cos^3 x} \, dx$; б) $\int \sin x \sin 3x \, dx$

16.10. $a) \int \sin^3 3x \cos^2 3x \, dx$; б) $\int \cos 7x \cos 8x \, dx$

16.11. $a) \int \sin^4 3x \cos^3 3x \, dx$; б) $\int \sin 4x \cos 8x \, dx$

16.12. $a) \int \sin^5 2x \cos^2 2x \, dx$; б) $\int \sin 3x \sin 7x \, dx$

16.13. $a) \int \sin^4 x \cos^5 x \, dx$; б) $\int \cos x \cos 7x \, dx$

16.14. $a) \int \sqrt{\sin^3 x} \cos x \, dx$; б) $\int \sin 7x \cos 8x \, dx$

16.15. $a) \int \sin^3 3x \cos^3 3x \, dx$; б) $\int \sin 5x \sin x \, dx$

16.16. $a)\int \sin^2 2x\cos^3 2x\,dx$; б) $\int \cos 4x\cos 2x\,dx$

16.17. $a)\int \sin^5 x\sqrt{\cos x}\,dx$; б) $\int \sin 2x\cos 7x\,dx$

16.18. $a)\int \sin^2 x\cos^6 x\,dx$; б) $\int \sin 3x\sin 2x\,dx$

16.19. $a)\int \sin^5 x\cos^5 x\,dx$; б) $\int \sin 7x\cos 5x\,dx$

16.20. $a)\int \sqrt{\sin^3 x}\cos^3 x\,dx$; б) $\int \cos 2x\cos 6x\,dx$

16.21. $a)\int \sin^2 2x\cos^2 2x\,dx$; б) $\int \sin 5x\cos 8x\,dx$

16.22. $a)\int \sin^4 x\cos^6 x\,dx$; б) $\int \sin 2x\sin x\,dx$

16.23. $a)\int \sqrt{\sin x}\cos^3 x\,dx$; б) $\int \sin 4x\cos 7x\,dx$

16.24. $a)\int \sin^3 x\cos^6 x\,dx$; б) $\int \cos 2x\cos 8x\,dx$

16.25. $a)\int \sin^3 x\sqrt{\cos x}\,dx$; б) $\int \sin 4x\cos x\,dx$

16.26. $a)\int \sin^5 x\cos^7 x\,dx$; б) $\int \sin x\sin 5x\,dx$

$$16.27.\ a)\int \sin^6 x\cos^2 x\,dx;\quad б)\int \sin 3x\cos 5x\,dx$$

$$16.28.\ a)\int \sqrt{\sin 5x}\cos 5x\,dx;\quad б)\int \cos 7x\cos 4x\,dx$$

$$16.29.\ a)\int \sin^4 x\cos^4 x\,dx;\quad б)\int \sin 5x\sin 2x\,dx$$

$$16.30.\ a)\int \sin^3 x\cos^4 x\,dx;\quad б)\int \sin 4x\cos 6x\,dx$$

Задание 17

Найдите интегралы:

17.1. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-2\cos x-2\sin x}$

17.2. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+3\cos x+\sin x}$

17.3. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+2\cos x-\sin x}$

17.4. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\cos x-3\sin x}$

17.5. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-2\cos x+2\sin x}$

17.6. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos x-\sin x}$

17.7. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x+3\sin x}$

17.8. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-3\cos x+\sin x}$

17.9. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-2\cos x-\sin x}$

17.10. $\displaystyle\int \frac{dx}{2-\cos x+2\sin x}$

17.11. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+2\cos x+\sin x}$

17.12. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+3\cos x+3\sin x}$

17.13. $\int \frac{dx}{1 - 2\sin x + 2\cos x}$

17.14. $\int \frac{dx}{2 + 2\sin x + \cos x}$

17.15. $\int \frac{dx}{1 + 3\sin x - \cos x}$

17.16. $\int \frac{dx}{1 - \sin x + 2\cos x}$

17.17. $\int \frac{dx}{1 - 3\sin x + 3\cos x}$

17.18. $\int \frac{dx}{2 - 2\sin x + \cos x}$

17.19. $\int \frac{dx}{1 + 2\sin x + \cos x}$

17.20. $\int \frac{dx}{1 - 3\sin x + \cos x}$

17.21. $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$

17.22. $\int \frac{dx}{2 + \sin x - \cos x}$

17.23. $\int \frac{dx}{1 - \sin x - \cos x}$

17.24. $\int \frac{dx}{1 + 3\sin x - 2\cos x}$

17.25. $\int \frac{dx}{2 + \sin x - 2\cos x}$

17.26. $\int \frac{dx}{1 - 2\sin x + \cos x}$

17.27. $\int \frac{dx}{2 - 2\sin x - \cos x}$

17.28. $\int \frac{dx}{1 + 2\sin x + 2\cos x}$

17.29. $\int \frac{dx}{1 - \sin x + \cos x}$

17.30. $\int \frac{dx}{1 - 2\sin x - \cos x}$

6.8 Теорема Коши. Понятие о «неберущихся» интегралах

До сих пор мы весьма удачно для некоторых непрерывных функций $f(x)$ находили их неопределенные интегралы $\int f(x)dx$.

Возникает вопрос, всегда ли это будет так, т. е.: 1) всякая ли непрерывная функция $f(x)$ имеет неопределенный интеграл и 2) каким способом можно найти этот интеграл, если он существует?

Ответом на первую часть этого вопроса служит теорема Коши, являющаяся основной теоремой интегрального исчисления.

Теорема Коши. Всякая непрерывная функция имеет первообразную.

Иными словами, для каждой непрерывной в интервале $(a;b)$ функции $f(x)$ существует функция $F(x)$, производная которой в интервале $(a;b)$ в точности равна данной функции $f(x)$, т. е.

$$F'(x) = f(x)$$

Тем самым существует и неопределенный интеграл

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C – произвольная постоянная.

Доказательство этой теоремы ввиду его сложности не может быть здесь приведено.

Этим не решается вторая часть нашего вопроса: если дана непрерывная функция $f(x)$, то как найти ее неопределенный интеграл. Теорема Коши вовсе не утверждает, что первообразную данной функции можно фактически отыскать с помощью конечного числа известных операций и выразить ответ в элементарных функциях (алгебраических, показательных, тригонометрических и т. п.). Более того, имеются непрерывные элементарные функции, интегралы от которых не являются элементарными функциями. Такие интегралы часто называют **«*неберущимися*»,** подразумевая под этим, что такого рода интегралы не могут быть выражены с помощью конечного числа элементарных функций.

Например, можно доказать, что интегралы

$$\int e^{-x^2}\,dx, \int \frac{\sin x}{x}\,dx\,, \int \frac{\cos x}{x}\,dx\,, \int \frac{dx}{\ln x}$$

и ряд других не сводятся к конечной комбинации элементарных функций и, следовательно, являются «неберущимися» в нашем смысле слова.

Глава 7. Определенный интеграл

7.1 Определенный интеграл. Вычисление определённого интеграла

Рассмотрим непрерывную функцию $y = f(x)$, не принимающую отрицательных значений, так что график ее целиком лежит выше оси Ox, но может касаться оси Ox в некоторых точках. Пусть a и b – такие числа, что функция определена на отрезке $[a,\ b]$.

Криволинейной трапецией называется фигура на плоскости, ограниченная ***сверху*** графиком функции $\text{y} = f(x)$, ***снизу*** отрезком $[a,b]$, ***с боков*** вертикальными прямыми $x = a, x = b$.

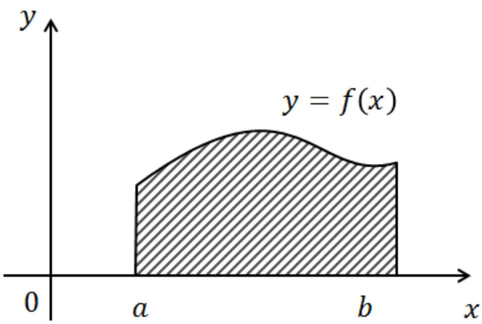


Рис.7.1

Разобьём отрезок $[a;b]$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ на n частей $[x_{k-1};\ x_k]$, $1 \le k \le n$; обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

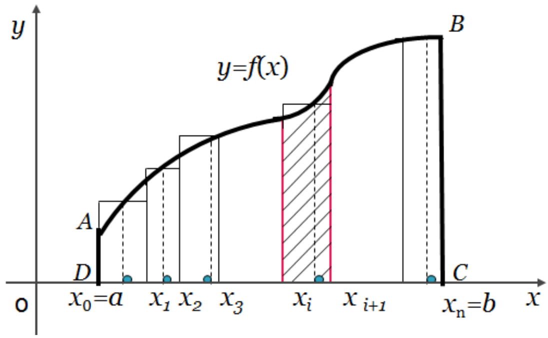


Рис.7.2

На каждом из полученных отрезков произвольным образом выберем точку t_k и составим так называемую ***интегральную сумму***, соответствующую данной разбивке x_k и выбору точек t_k:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k$$

Обозначим через $\lambda = \max \Delta x_k$, $1 \le k \le n$, т.е. λ - длина наибольшего из отрезков $[x_{k-1}; x_k]$.

Если при $\lambda \to 0$ существует конечный предел интегральных сумм σ, то этот предел называется ***определённым интегралом функции*** $f(x)$ на $[a;\ b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$.

Если существует определенный интеграл функции $y = f(x)$ на некотором отрезке, то функция называется ***интегрируемой*** на этом отрезке.

К интегрируемым функциям относятся непрерывные функции, ограниченные и имеющие конечное число точек разрыва функции, монотонные функции.

Геометрический смысл определенного интеграла

Если $f(x) \geq 0$ на $[a; b]$,то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции S (рис.7.1).

Экономический смысл определенного интеграла

Пусть функция $z = z\,(t)$ описывает производительность в зависимости от времени t. Тогда объем V продукции, произведенной за промежуток времени с момента $t = t_0$ до момента $t = T$, выражается интегралом от $z\,(t)$ на отрезке $[t_0, T]$:

$$\mathrm{V} = \int_{\mathrm{t}_0}^{T} \mathrm{z(t)}dt$$

Свойства определенного интеграла

1) $\int_a^b dx = b - a$
2) Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a; c]$ и $[c; b]$, то она интегрируема и на всем отрезке $[a; b]$, при этом

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

3) $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
4) $\int_a^a f(x)dx = 0.$
5) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$
6) $\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$
7) Если $|f(x)|$ интегрируема на [a; b], то $f(x)$ также интегрируема на [a; b] и при этом

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx\,;$$

8) Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a;\ b]$ и $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a;\ \ b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx\,;$$

9) Если $f(x)$ интегрируема на $[a;\ b]$ и $m \le f(x) \le M$ $\forall x \in [a;\ \ b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

10) Если $f(x)$ – четная функция, то

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

11) Если $f(x)$ – нечетная функция, то

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

Формула Ньютона–Лейбница

Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, непрерывной на $[a;\ b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Разность $F(b) - F(a)$ записывают символом $F(x)|_a^b$. («двойная подстановка от a до b»).

Таким образом, чтобы вычислить $\int_a^b f(x)dx$ надо вычислить $\int f(x)dx$ (найти $F(x) + C$) и воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница.

Пример 1. Найти

$$I = \int_{-2}^{3} \sqrt[3]{2x}\ dx$$

Решение. Вычислим $\int \sqrt[3]{2x}dx$

$$\int \sqrt[3]{2x}dx = \int \sqrt[3]{2} \cdot x^{\frac{1}{3}}dx = \sqrt[3]{2} \cdot \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \sqrt[3]{2} \cdot \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C \Longrightarrow$$

$$F(x) = \sqrt[3]{2} \cdot \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{2x^4}$$

Воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница

$I = \int_{-2}^{3} \sqrt[3]{2x}\ dx = \frac{3}{4}\sqrt[3]{2x^4}\Big|_{-2}^{3} = \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{2 \cdot 3^4} - \sqrt[3]{2(-2)^4} \right) =$
$\frac{3}{4}(3\sqrt[3]{6} - 2\sqrt{4})$

Пример 2. Найти

$$\int_{1}^{3} \left(x^2 - \frac{4}{x} + \frac{5}{1+x^2}\right) dx$$

Решение. Воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница

$I = \int_{1}^{3} \left(x^2 - \frac{4}{x} + \frac{5}{1+x^2}\right) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - 4\ln x + 5\operatorname{arctg} x\right)\Big|_{1}^{3} = \frac{1}{3} \cdot$
$3^3 - 4\ln 3 + 5\operatorname{arctg} 3 - \left(\frac{1}{3} - 4\ln 1 + 5\operatorname{arctg} 1\right) = \frac{27}{3} - 4\ln 3 +$
$5\operatorname{arctg} 3 - \frac{1}{3} - \frac{5}{4}\pi = \frac{26}{3} + 5\operatorname{arctg} 3 - \frac{5\pi}{4}$.

Формула замены переменной (формула интегрирования подстановкой)

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;\ b]$, функция $\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha;\beta]$, где $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$, и при этом сложная функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на $[\alpha;\beta]$,то

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt.$$

Пример 3. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } I = \int_{1}^{2} x(3x-1)^7 dx\,;\ \text{б) } I = \int_{0}^{2} x^2\sqrt{4-x^2}dx$$

Решение. а) Сделаем замену переменного: $3x-1=t$. Тогда $x=\frac{t+1}{3}$; $dx=\frac{1}{3}dt$;

Новые пределы интегрирования:

при $x=1$: $3-1=t$; $t=2$;

при $x=2$: $6-1=t$; $t=5$.

Таким образом, новая переменная изменяется на отрезке $[2;5]$. Имеем

$$I = \int_{2}^{5} \frac{t+1}{3}\cdot t^7 \cdot \frac{1}{3}dt = \frac{1}{9}\int_{2}^{5}(t^8+t^7)dt =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{t^9}{9}+\frac{t^8}{8}\right)\Bigg|_2^5 = \frac{1}{9}\left(\frac{5^9}{9}+\frac{5^8}{8}-\frac{2^9}{9}-\frac{2^8}{8}\right)$$

б) Сделаем подстановку $x=2\sin t$, тогда $dx=2\cos t\,dt$.

Новые пределы интегрирования:

при $x=0$: $0=2\sin t$; $t=0$;

при $x=2$: $2=2\sin t$; $\sin t=1$; $t=\frac{\pi}{2}$.

Получаем, что

$$I = \int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt$$

$$= 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,dt =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t)dt = \left(2t - \frac{1}{2}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

Пример 4. Вычислить

$$I = \int_1^4 \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}}$$

Решение. Сделаем подстановку $x = t^2\,(t > 0)$, тогда $dx = 2tdt$.

Новые пределы интегрирования:

при $x = 1$: $1 = \mathrm{t}^2;\ t = 1;$

при $x = 4$: $4 = t^2; t = 2.$

Получаем, что

$$I = 2\int\limits_1^2 \frac{t^2dt}{1+t} = 2\int\limits_1^2 \left(t - 1 + \frac{1}{1+t}\right)dt = 2\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|\right)\Bigg|_1^2$$

$$= 2\left(2 - 1 + \ln 3 - \left(\frac{1}{2} - 1 + \ln 2\right)\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} + \underbrace{\ln 3 - \ln 2}_{\ln\frac{3}{2}}\right) = 1 + 2\ln\frac{3}{2}.$$

Формула интегрирования по частям

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны вместе со своими производными на отрезке $[a;b]$, тогда

$$\int\limits_a^b u(x)dv(x) = u\cdot v|_a^b - \int\limits_a^b v(x)du(x)$$

или

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u\cdot v|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)dx$$

Пример 5. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } I = \int\limits_1^e x^2\ln x\,dx\,;\ \text{б) } I = \int\limits_0^1 \arcsin x\,dx$$

Решение.

$$a)\ I=\int_1^e x^2\ln x\,dx=\begin{bmatrix} u=\ln x\,, & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=x^2dx, & v=\dfrac{x^3}{3} \end{bmatrix}$$

$$=\frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{e^3}{3}\ln e-\frac{1}{3}\ln 1-\frac{1}{3}\int_1^e x^2dx=\frac{1}{3}e^3-\frac{1}{9}x^3\Big|_1^e=$$

$$=\frac{1}{3}e^3-\frac{1}{9}(e^3-1)=\frac{2e^3+1}{9}.$$

$$б)\ I=\int_0^1\arcsin x\,dx=\begin{bmatrix} u=\arcsin x\,, & du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv=dx, & v=x \end{bmatrix}$$

$$=x\arcsin x|_0^1-\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\arcsin 1-0+\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}+(0-1)$$

$$=\frac{\pi}{2}-1.$$

Теорема о среднем значении функции на отрезке

Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Среднее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ обозначается через $f(c)$ и вычисляется следующим образом:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Пример 6. Найти среднее значение функции $y = \sin 3x$ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

Решение. По формуле получаем, что

$$f(c) = \frac{1}{\frac{\pi}{3} - 0}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x\, dx = -\frac{3}{\pi}\cdot\frac{1}{3}\cos 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$= -\frac{1}{\pi}(\cos\pi - \cos 0) = -\frac{1}{\pi}(-1-1) = \frac{2}{\pi}$$
$$= 0{,}6366.$$

Задачи

254. $\int_1^3 x^3\, dx$

255. $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right) dx$

256. $\int_0^1 \sqrt{1+x}\, dx$

257. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$

258. $\int_1^4 \sqrt{x}\, dx$

259. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

260. $\int_1^2 (x^2 - 2x + 3)\, dx$

261. $\int_0^8 \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right) dx$

262. $\int_0^1 \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^6+4}}$

263. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}\, dy$

264. $\int_1^e \frac{1+\lg x}{x}\, dx$

265. $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx$

266. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$

267. $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

268. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x\, dx$

269. $\int_0^{2\pi} \cos\frac{x}{2}\, dx$

270. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\, dx$

271. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\, dx$

272. $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\, dx$

273. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\, dx$

274. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

275. $\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$

276. $\int_1^2 \frac{xdx}{x^2+1}$

277. $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+1}}$

278. $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^4}}$

279. $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$

280. $\int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx$

281. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$

282. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$

283. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

284. $\int_0^1 xe^{-x} dx$

285. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\, dx$

286. $\int_1^e \ln x\, dx$

287. $\int_0^{e-1} \ln(x+1)\, dx$

Задачи для самостоятельного решения

Задание 18

Вычислите интегралы:

18.1. а) $\int\limits_1^2 \left(x^3 - \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{2}{1+x^2}\right) dx$; б) $\int\limits_1^2 x(5x-3)^4 dx$

18.2. а) $\int\limits_2^4 \left(\frac{3}{x} - \frac{6}{x^2} - sin\frac{\pi x}{8}\right) dx$; б) $\int\limits_0^2 x^2(3x-8)^6 dx$

18.3. а) $\int_1^3 \left(\frac{4}{\sqrt[3]{x}} + \frac{7}{x} - e^{2x}\right) dx$; б) $\int_1^3 x^2(2x+3)^5 dx$

18.4. а) $\int_3^4 \left(6\sqrt{x} - \frac{8}{x} + 2^{4x}\right) dx$; б) $\int_0^3 x^2(5x-2)^6 dx$

18.5. а) $\int_1^4 \left(\sqrt{2x-1} + \frac{7}{x^2} - 3\cos\frac{\pi x}{4}\right) dx$; б) $\int_0^1 x(3x+4)^5 dx$

18.6. а) $\int_3^5 \left(\sqrt[3]{4x+1} - \frac{8}{x} + 2e^{3x}\right) dx$; б) $\int_0^2 x^2(4x-5)^4 dx,$

18.7. а) $\int_1^3 \left(2\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{x^3} - \frac{3}{9+x^2}\right) dx$; б) $\int_1^2 x(5x+2)^6 dx$

18.8. а) $\int_2^5 \left(\sqrt{6x-5} - \frac{9}{x^2} + \sin\frac{\pi x}{4}\right) dx$; б) $\int_2^3 x^2(2x-3)^5 dx$

18.9. а) $\int_{-2}^{-1} \left(\sqrt{2x+5} - \frac{3}{x} - e^{4x}\right) dx$; б) $\int_0^1 x(4x+3)^6 dx$

18.10. а) $\int_1^6 \left(3\sqrt[3]{x} - \frac{4}{x^2} - 5\cdot 2^x\right) dx$; б) $\int_0^2 x^2(5x-3)^7 dx$

18.11. а) $\int\limits_{2}^{3}\left(\frac{5}{x^3}+\frac{8}{x}+\frac{3}{16+x^2}\right)dx$; б) $\int\limits_{1}^{2} x(4x-3)^4 dx$

18.12. а) $\int\limits_{1}^{2}\left(\frac{2}{x}-\frac{5}{\sqrt{4+x^2}}-3\sin\frac{\pi x}{3}\right)dx$; б) $\int\limits_{0}^{1} x^2(3x+1)^5 dx$

18.13. а) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{6x+1}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+e^{2x}\right)dx$; б) $\int\limits_{0}^{2} x(5x+1)^4 dx$

18.14. а) $\int\limits_{-3}^{-1}\left(\sqrt{-3x+2}-\frac{7}{x^2}+\frac{4}{9+x^2}\right)dx$; б) $\int\limits_{0}^{1} x^2(4x+3)^4 dx$

18.15. а) $\int\limits_{-3}^{0}\left(\sqrt{4x+125}-8x^3-7e^{2x}\right)dx$; б) $\int\limits_{2}^{3} x(3x-5)^6 dx$

18.16. а) $\int\limits_{2}^{5}\left(3x^2-\frac{7}{x}+2^{3x}\right)dx$; б) $\int\limits_{-2}^{-1} x^2(5x-2)^4 dx$

18.17. а) $\int\limits_{3}^{5}\left(\sqrt{3x+1}-\frac{2}{x^2}-\cos\frac{\pi x}{2}\right)dx$; б) $\int\limits_{0}^{1} x^2(2x-3)^6 dx$

18.18. а) $\int\limits_{1}^{6}\left(2x^7-\frac{3}{\sqrt{4x+1}}-\sin\frac{\pi x}{6}\right)dx$; б) $\int\limits_{-1}^{0} x(5x-2)^7 dx$

18.19. а) $\int\limits_{0}^{2}\left(4x^3+\frac{5}{\sqrt{4x+1}}+2e^{-3x}\right)dx$; б) $\int\limits_{1}^{2}x^2(2x+3)^4dx$

18.20. а) $\int\limits_{3}^{5}\left(\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{6}{x}+2\sin\frac{\pi x}{3}\right)dx$; б) $\int\limits_{-31}^{-2}x(5x+3)^4dx$

18.21. а) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(3\sqrt{x}-\frac{2}{\cos^2 x}-6\cos 2x\right)dx$; б) $\int\limits_{-2}^{0}x^2(3x+1)^6dx$

18.22. а) $\int\limits_{2}^{6}\left(2\sqrt{3x-2}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x}\right)dx$; б) $\int\limits_{0}^{2}x(4x-7)^5dx$

18.23. а) $\int\limits_{3}^{4}\left(3x^2+\frac{4}{x}-e^{2x}\right)dx$; б) $\int\limits_{-2}^{-1}x(5x-3)^6dx$

18.24. а) $\int\limits_{0}^{2}\left(4x^4-\frac{3}{x^2+25}-\sin\frac{\pi x}{3}\right)dx$; б) $\int\limits_{2}^{3}x(3x+2)^7dx$

18.25. а) $\int\limits_{0}^{3}\left(2x^2-\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}+5e^{-2x}\right)dx$; б) $\int\limits_{0}^{2}x^2(4x+3)^5dx$

18.26. а) $\int\limits_{2}^{4}\left(\sqrt{3x-2}-\frac{2}{x^2}+2\cos\frac{\pi x}{8}\right)dx$; б) $\int\limits_{-3}^{-2}x(2x-1)^4dx$

18.27. а) $\int_1^4 \left(\frac{3}{x} - \frac{6}{x^2} + e^{3x}\right) dx$; б) $\int_{-1}^0 x^2(3x-4)^5 dx$

18.28. а) $\int_0^4 \left(\sqrt{2x+1} - \frac{6}{\sqrt{x^2+25}} - \sin\frac{\pi x}{8}\right) dx$;б) $\int_0^1 x(5x-2)^5 dx$

18.29. а) $\int_2^5 \left(\frac{8}{x^3} - 3\sqrt{2x-1} - e^{\frac{x}{2}}\right) dx$; б) $\int_1^3 x(2x+3)^7 dx$

18.30. а) $\int_1^2 \left(\sqrt{5x-1} - \frac{9}{x} + 2\sin\frac{\pi x}{2}\right) dx$; б) $\int_0^2 x^2(3x-8)^4 dx$

Задание 19

Вычислите интегралы:

19.1. а) $\int_1^{e^2} \sqrt{x}\ln x\, dx$; б) $\int_0^{\pi} (x^2-3x)\sin 2x\, dx$

19.2. а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 3x\, dx$; б) $\int_1^e \frac{\ln^2 x\, dx}{x^3}$

19.3. а) $\int_0^2 xe^{\frac{x}{2}} dx$; б) $\int_0^{\frac{1}{\pi}} (x^2-2x+1)\cos 3x\, dx$

19.4. а) $\int\limits_{0}^{2\pi} x\cos\frac{x}{2}dx$; б) $\int\limits_{0}^{1}(x^2-3x-1)e^{2x}dx$

19.5. а) $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int\limits_{0}^{\pi}(x^2+x-2)\sin\frac{x}{2}dx$

19.6. а) $\int\limits_{0}^{\pi} x\sin\frac{x}{3}dx$; б) $\int\limits_{e}^{2e} x^{\frac{5}{2}}\ln^2 x\,dx$

19.7. а) $\int\limits_{0}^{1} xe^{-2x}dx$; б) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}(x^2+3x+4)\cos\frac{x}{3}dx$

19.8. а) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\cos 4x\,dx$; б) $\int\limits_{0}^{2}(x^2-2x+2)e^{\frac{x}{2}}dx$

19.9. а) $\int\limits_{1}^{e^3} \sqrt[3]{x}\ln x\,dx$; б) $\int\limits_{0}^{2\pi}(x^2-2x-1)\sin\frac{x}{3}dx$

19.10. а) $\int\limits_{-\pi}^{0} x\sin\frac{x}{4}dx$; б) $\int\limits_{1}^{e}\frac{\ln x}{x^2}dx$

19.11. а) $\int\limits_{0}^{3} xe^{\frac{x}{3}}dx$; б) $\int\limits_{0}^{\pi}(x^2-3x+5)\cos\frac{x}{2}dx$

19.12. а) $\int_0^{\pi} x\cos\frac{x}{3}dx$; б) $\int_0^{3}(x^2+4x-6)e^{\frac{x}{3}}\,dx$

19.13. а) $\int_1^{e} \sqrt[3]{x^2}\ln x\,dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2+2x+2)\sin 4x\,dx$

19.14. а) $\int_0^{\pi} x\sin\frac{x}{4}dx$; б) $\int_e^{e^3} x^3 ln^2 x\ \ dx$

19.15. а) $\int_0^{2} xe^{-\frac{x}{2}}dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2-5x+3)\cos 2x\,dx$

19.16. а) $\int_{-\pi}^{0} x\cos\frac{2}{3}x\,dx$; б) $\int_0^{1}(x^2-2x-7)e^{2x}\ \ dx$

19.17. а) $\int_{e^2}^{e^3} x\ln x\,dx$; б) $\int_0^{2\pi}(x^2-6x+10)\sin\frac{x}{4}\ dx$

19.18. а) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} x\sin\frac{2}{3}x\,dx$; б) $\int_1^{e^3} \sqrt[3]{x}\ln^2 x\ \ dx$

19.19. а) $\int_{1}^{2} xe^{\frac{2}{3}x} dx$; б) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - 7x + 2) \cos 2x \, dx$

19.20. а) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} x \cos 3x \, dx$; б) $\int_{0}^{2} (x^2 - 5x - 7) e^{\frac{x}{2}} dx$

19.21. а) $\int_{1}^{e} \sqrt{x^3} \ln x \, dx$; б) $\int_{-\pi}^{0} (x^2 - 3x - 2) \sin \frac{x}{2} \, dx$

19.22. а) $\int_{0}^{\pi} x \sin \frac{3x}{2} dx$; б) $\int_{2}^{e} x^4 \ln^2 x \, dx$

19.23. а) $\int_{0}^{3} xe^{-\frac{x}{3}} dx$; б) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (x^2 + 4x + 10) \cos 2x \, dx$

19.24. а) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \cos \frac{x}{3} dx$; б) $\int_{0}^{2} (x^2 + 5x - 2) e^{3x} dx$

19.25. а) $\int_{e}^{2e} x^{\frac{5}{2}} \ln x \, dx$; б) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - 3x + 11) \sin 2x \, dx$

19.26. а) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\sin 3x\,dx$; б) $\int_2^{e} x^2\ln^2 x\,dx$

19.27. а) $\int_0^{2} xe^{-3x}dx$; б) $\int_0^{\pi} (x^2-4x+1)cos\frac{x}{2}\ dx$

19.28. а) $\int_0^{\pi} x\cos\frac{2x}{5}dx$; б) $\int_0^{3} (x^2-6x-7)e^{\frac{x}{3}}\,dx$

19.29. а) $\int_1^{e} x^4\ln x\,dx$; б) $\int_{-\pi}^{0} (x^2-7x+1)\sin\frac{x}{3}dx$

19.30. а) $\int_0^{2\pi} x\sin\frac{x}{6}dx$; б) $\int_e^{e^2} \sqrt[4]{x^3}\ln^2 x\,dx$

7.2 Геометрические приложения определённого интеграла

Вычисление длины кривой

Пусть кривая задана явным уравнением $y=f(x),\ \ x\in[a,b]$. Тогда длина кривой l вычисляется по формуле:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Если кривая задана параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, то длина кривой вычисляется по формуле:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Если кривая задана в полярных координатах: $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, то длина кривой вычисляется по формуле:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{[r'(\varphi)]^2 + [r(\varphi)]^2} d\varphi.$$

Пример 7. Найти длину кривой $y = \frac{x^2}{6}$ на участке $x \in [0,4]$.

Решение.

$$y' = \left(\frac{x^2}{6}\right)' = \frac{x}{3};$$

$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{3}\right)^2} dx = \frac{1}{3} \int_0^4 \sqrt{9 + x^2} dx$$

Напомним, что

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$$

Поэтому

$$l=\frac{1}{3}\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2+9}+\frac{9}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+9}\right|\right]\Bigg|_0^4$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{9+16}+\frac{9}{2}\ln\left(4+\sqrt{9+16}\right)-\frac{1}{2}\cdot 0\right.$$

$$\left.\cdot\sqrt{9+0}-\frac{9}{2}\ln\left(0+\sqrt{9+0}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[10+\frac{9}{2}\underbrace{\ln 9}_{2\ln 3}-\frac{9}{2}\ln 3\right]=\frac{10}{3}+\frac{3}{2}\ln 3.$$

Пример 8. Вычислить длину циклоиды: $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t$, $t\in[0{,}2\pi]$.

Решение. Найдем производные: $x'_t=1-\cos t$, $y'_t=\sin t$.

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt=\int_0^{2\pi}2\sin\frac{t}{2}dt$$

$$=-4\cos\frac{t}{2}\bigg|_0^{2\pi}=-4(cos\,\pi-\cos 0)=8.$$

Пример 9. Вычислить длину кривой $r=1+\cos\varphi$, $\varphi\in[0,\pi]$.

Решение. $r'_\varphi=(1+\cos\varphi)'=-\sin\varphi$;

$$l = \int_0^{\pi} \sqrt{(1+\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}\, d\varphi = \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos\varphi}\, d\varphi$$
$$= 2\int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 4\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 4\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right)$$
$$= 4.$$

Вычисление площади плоской фигуры в прямоугольных координатах

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $f(x) \geq 0$ при $\forall\, x \in [a, b]$. Тогда площадь S под графиком функции $f(x)$ (площадь криволинейной трапеции) численно равна определенному интегралу (рис.7.1)

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Пример 10. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, прямыми $x = 0, x = 1$ и осью Ox.

Решение.

$$S = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Если же функция $y = f(x)$ непрерывна и не положительна на отрезке $[a; b]$, т.е. $f(x) \leq 0 \; \forall \, x \in [a, b]$, то отразив функцию $y = f(x)$ относительно оси Ox, получим функцию $y = -f(x)$, расположенную над осью Ox (рис.7.3). Площадь под кривой $y = -f(x)$ будет равна

$$S = \int_a^b (-f(x))dx = -\int_a^b f(x)dx$$

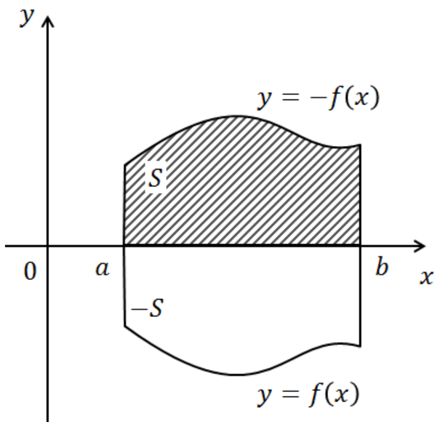


Рис. 7.3

Пример 11. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = -x^2$, прямыми $x = 0, x = 1$ и осью Ox.

Решение.

$$S = -\int_0^1 (-x^2)dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Пусть функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, причем $f_2(x) \geq f_1(x)$ при $\forall\, x \in [a, b]$ (рис.7.4). Тогда площадь фигуры, ограниченной графиками функций $x = a$, $x = b$, $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)dx.$$

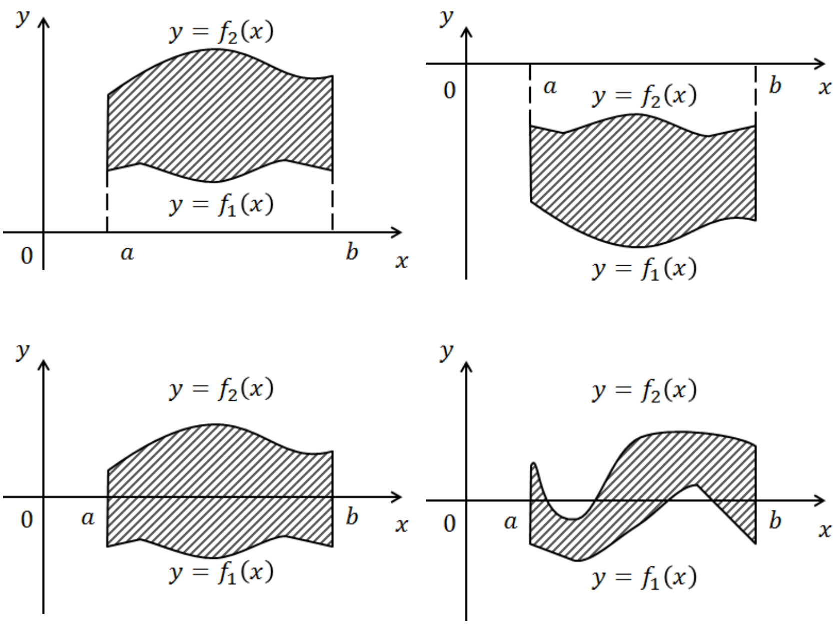


Рис. 7.4

Пример 12. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = -x \end{cases}$$

Решение. Найдем точки пересечения графиков заданных функций: $2 - x^2 = -x$, откуда $x_1 = -1, x_2 = 2$.

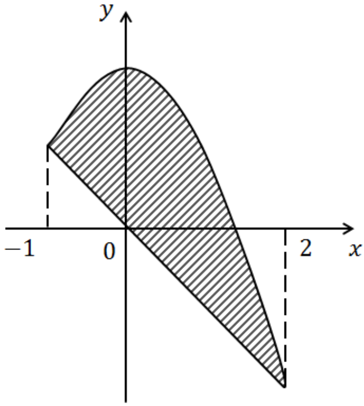


Рис. 7.5

Искомая площадь:

$$S = \int_{-1}^{2} (2 - x^2 - (-x))dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 4{,}5.$$

Вычисление площади плоской фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрической или полярной форме

Площадь криволинейной трапеции в случае, когда задана в параметрической форме: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ вычисляется по формуле:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t)dt.$$

Площадь криволинейного сектора в полярных координатах: $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[r(\varphi)]^2 d\varphi.$$

Пример 13. Вычислить площадь циклоиды: $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in [0,2\pi]$.

Решение.

$$S = \int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt = \int_0^{2\pi}(1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right)dt$$

$$= \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi.$$

Пример 14. Вычислить площадь кардиоиды $r = 1 + \cos\varphi$, $\varphi \in [0,2\pi]$.

Решение.

$$S = \int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2} + 2\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi$$

$$= \left(\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi.$$

Объем тела вращения

Пусть на отрезке $x \in [a,b]$ задана непрерывная неотрицательная функция $y = f(x)$. Объем V_x тела, образованного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, определяется из следующей формулы:

$$V_x = \int_a^b \pi f^2(x)dx$$

Заменив формально в данной формуле переменную x на y. Получим формулу

$$V_y = \int_c^d \pi g^2(y)dy$$

Она выражает объем тела, полученного от вращения криволинейной трапеции вокруг оси Oy.

Замечание. Для нахождения объема тела, полученного от вращения криволинейной трапеции вокруг оси Oy также применяется следующая формула:

$$V_y = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$$

Пример 15. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямыми $y = 0, x = 1$ (рис.7.6).

Решение.

$$V_x = \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}\pi.$$

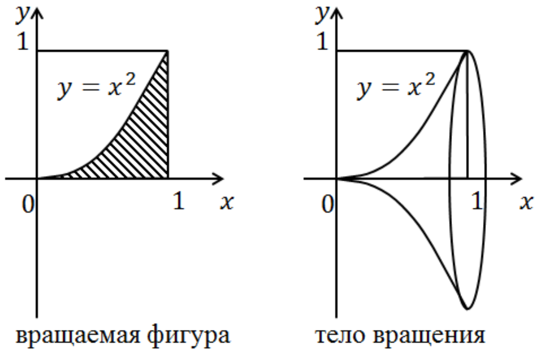


Рис. 7.6

Пример 16. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy области, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямыми $y = 1, x = 0$

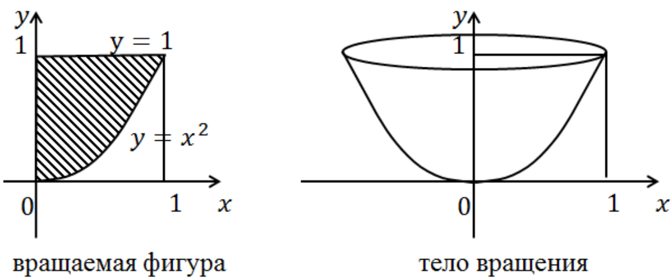


Рис. 7.7

$$V_y = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{y}\right)^2 dy = \pi \int_0^1 y dy = \frac{1}{2}\pi.$$

Задачи

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

288. $y = \frac{1}{x}, x = 1, x = e, y = 0.$
289. $y = x^2, y = 1.$
290. $y = x^2, y = 2 - x^2.$
291. $y = x^2 - 1, x = 2, y = 0$, где $x \geq 1.$
292. $y = \sin 3x\,, y = 0$, где $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}.$
293. $y = \sin x\,, y = \sin^3 x$, где $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$
294. $y = x^2, y = x.$
295. $y = \arcsin 2x\,, x = 0, y = -\frac{\pi}{2}.$
296. $y = \sin 2x\,, y = 1, x = \frac{\pi}{2}$, где $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$
297. $x^2 - y^2 = 1, x = 2.$
298. $y = x^3, y = -1, x = 0.$
299. $y = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right), x = 1, x = -1, y = 0.$
300. $y = x(3 - x), y = x - 3.$
301. $y = 3x - x^2, y = x^2 - x.$
302. $xy = 5, x + y = 6.$
303. $xy = -2, y = x - 3.$
304. $xy = 4, x = 4, y = 4, x = 0, y = 0.$

Вычислить объемы тел, образованных вращение фигуры, ограниченной линиями:

305. $y = 4 - x^2, y = 0, x = 0$, где $x \geq 0$ вокруг: 1) оси x; 2) оси y.
306. $y = x - x^2, y = 0, x = 0$ вокруг каждой из следующих прямых: 1)$y = 0$; 2)$x = 0$; 3)$x = 2$; 4)$x = -2$; 5)$y = -1$; 6)$y = 2$.
307. $y = e^x, x = 0, x = 1, y = 0$ вокруг: 1) оси x; 2) оси y.

308. $y = x^2, y = 4, x = 0$, где $x \geq 0$ вокруг: 1) оси x; 2) оси y.
309. $y = x^2 + 1, y = 0, x = 1, x = 2$ вокруг: 1) оси x; 2) оси y.
310. $y = x^3, y = 1, x = 0$ вокруг: 1) оси x; 2) оси y.
311. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, y = 0$, где $y \geq 0$ вокруг оси x.
312. $y = \ln x, y = 0, x = e$ вокруг каждой из следующих прямых: 1) $y = 0$; 2) $x = 0$; 3)$y = -1$; 4)$x = 1$; 5)$x = -1$; 6)$y = 1$.
313. $y = \sin x, y = 0$, где $0 \leq x \leq \pi$ вокруг каждой из следующих прямых: 1) $y = 0$; 2) $x = 0$; 3)$x = 2\pi$; 4)$x = -1$; 5)$x = -2$; 6)$y = 1$; 7)$y = -2$.
314. $x^2 - y^2 = 4, y = 2, y = 0$ вокруг оси x.
315. $y = x, y = x^2$ вокруг: 1) оси x; 2) оси y.
316. $y = \cos 2x, y = 0, x = 0$, где $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ вокруг: 1) оси x; 2) оси y.
317. $y = \sin x, y = 0$, где $2\pi \leq x \leq 3\pi$ вокруг каждой из следующих прямых: 1) $y = 0$; 2) $x = 0$; 3)$x = \pi$; 4)$y = -2$.
318. $y = 2x - x^2, y = 0$ вокруг каждой из следующих прямых: 1) $x = 0$; 2) $y = 0$; 3)$x = -1$; 4)$y = 1$.
319. $y = \frac{4}{x}, x = 1, x = 4, y = 0$ вокруг: 1) оси x; 2) оси y.
320. $y = \frac{1}{1+x^2}, x = 1, x = -1, y = 0$ вокруг: 1) оси x; 2) оси y.

Вычислить длину дуги кривой:

321. $y^2 = x^3$, отсеченной прямой $x = 1$.
322. $y = \ln \cos x$, отсеченной прямыми $x = 0, x = \frac{\pi}{6}$.
323. $y^2 = (x + 1)^3$, отсеченной прямой $x = 4$.
324. $y^2 = \frac{4}{9}(2 - x)^3$, отсеченной прямой $x = -1$
325. $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ между осью y и прямой $x = a$.
326. $y = x^2 - 1$, отсеченной осью x.
327. $y = \ln \sin x$ от $x = \frac{\pi}{3}$ до $x = \frac{2\pi}{3}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 20

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

20.1. $y = x^2 + 4x + 3, y = -2x - 5.$

20.2. $y = x^2 + 3x - 5, y = 3x - 1.$

20.3. $y = x^2 - 2x + 2, y = x + 6.$

20.4. $y = -x^2 - 5x + 6, y = -3x - 2.$

20.5. $y = x^2 + 4x + 1, y = -2x - 4.$

20.6. $y = x^2 + 3x - 2, y = x + 1.$

20.7. $y = x^2 + 6x - 9, y = 2x - 4.$

20.8. $y = -x^2 + x - 3, y = -4x + 1.$

20.9. $y = -x^2 + 3x - 4, y = 2x - 6.$

20.10. $y = x^2 + x - 1, y = -3x - 1.$

20.11. $y = x^2 - 3x - 10, y = -x + 5.$

20.12. $y = -x^2 - 4x + 6, y = -6x - 2.$

20.13. $y = -x^2 - 3x + 2, y = x + 5.$

20.14. $y = x^2 - 2x + 2, y = 2x - 1.$

20.15. $y = -x^2 - 6x - 2, y = 2x + 13.$

20.16. $y = x^2 - x - 10, y = -3x + 5.$

20.17. $y = -x^2 + 2x + 4, y = x - 2.$

20.18. $y = x^2 - x + 1, y = -2x + 7.$

20.19. $y = x^2 - x - 7, y = 2x + 3.$

20.20. $y = -x^2 - 2x + 3, y = 3x + 3.$

20.21. $y = x^2 - 4 + 1, y = -2x + 4.$

20.22. $y = x^2 + 5x - 1, y = 3x - 1.$

20.23. $y = -x^2 - 4x - 2, y = x + 2.$

20.24. $y = x^2 - 5x - 2, y = -x + 3.$

20.25. $y = -x^2 - 3x + 1, y = -2x - 1.$

20.26. $y = x^2 - x - 1, y = -4x + 3.$

20.27. $y = x^2 - 4x + 1, y = -2x + 4.$

20.28. $y = x^2 + x - 9, y = 2x + 3.$

20.29. $y = -x^2 - x + 7, y = 2x - 3.$

20.30. $y = x^2 - 4x + 2, y = 2x - 3.$

Глава 8. Несобственные интегралы

Вводя понятие определенного интеграла, мы предполагали, что отрезок интегрирования конечен, а подынтегральная функция ограничена на этом отрезке. Рассмотрим случаи, когда хотя бы одно из этих условий не выполняется.

8.1 Несобственные интегралы с бесконечными пределами

Пусть функция $f(x)$ определена на $[a;\ +\infty)$ и интегрируема в любой конечной его части $[a;\ A]$, то есть интеграл $\int_a^A f(x)dx$ имеет смысл при любом $A > a$.

Несобственным интегралом первого рода от функции $f(x)$ по промежутку $[a;\ +\infty)$ называется предел (если он существует) $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx$, его величина обозначается

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx.$$

Если существует конечный предел в этом равенстве, то интеграл называется ***сходящимся***, в противном случае – ***расходящимся***.

Свойства несобственного интеграла

1. Если существуют несобственные интегралы от функций $f(x)$ и $g(x)$ на промежутке $[a;+\infty)$, то для любых постоянных α и β справедливо равенство:

$$\int_a^{+\infty} \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x)dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

2. Пусть $a < c < +\infty$, и существует несобственный интеграл от функции $f(x)$ на $[a;+\infty)$, тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$$

3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;+\infty)$, тогда для любого строго монотонной и непрерывно дифференцируемой на $[\alpha;\beta)$ функции $\varphi\colon [\alpha;\beta) \to [a;+\infty)$ справедливо равенство

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_\alpha^{\beta} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt.$$

4. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывно дифференцируемы на промежутке $[a;+\infty)$ и существует $\lim_{A\to+\infty} f(x)g(x)$, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и

$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ одновременно сходятся или расходятся, и в случае их сходимости имеет место равенство

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx = f(x)g(x)|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx.$$

Замечание. Аналогично интегралу $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ определяются несобственные интегралы $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{B\to-\infty} \int_{B}^{b} f(x)dx\,;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{B\to-\infty \\ A\to+\infty}} \int_{B}^{A} f(x)dx.$$

Геометрически, для неотрицательной на $[a;+\infty)$ функции $f(x)$, несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ представляет собой площадь криволинейной фигуры, ограниченной данной линией $y = f(x)$, осью Ox и вертикалью $x = a$.

Пусть $F(x)$ – первообразная функции для подынтегральной функции $f(x)$. На основании формулы

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Имеем

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}[F(b) - F(a)]$$

Если ввести условное обозначение $F(+\infty) = \lim_{b\to+\infty} F(b)$, то получим для сходящегося несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом интегрирования ***обобщенную формулу Ньютона-Лейбница:***

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a),$$

где $F'(x) = f(x)$.

Пример 1. Рассмотрим интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.Функция $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ на любом промежутке $[0, A]$ интегрируема

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty} \operatorname{arctg} A = \frac{\pi}{2}.$$

По определению интеграл сходится и его величина равна $\frac{\pi}{2}$.

Пример 2. Рассмотрим интеграл $\int_0^{+\infty} \sin x\, dx$. Функция $f(x) = \sin x$ интегрируема на любом промежутке $[0, A]$. Так как

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \sin x\, dx = \lim_{A\to+\infty} (-\cos A)$$

не существует, то по определению $\int_0^{+\infty} \sin x\, dx$ расходится.

Пример 3. Рассмотрим интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$. Функция $f(x)=\frac{1}{x^p}$ интегрируема на любом промежутке $[1,A]$. Так как

$$\int_1^{A}\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\frac{1}{1-p}(A^{1-p}-1), p\neq 1,\\ \ln p, \qquad\qquad p=1,\end{cases}$$

то интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ сходится при $p>1$ и расходится при $p\leq 1$.

Пример 4. Рассмотрим интеграл $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}$. Функция $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ на любом промежутке $[B,0]$ интегрируема

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{B\to-\infty}\int_{B}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{B\to-\infty}-\operatorname{arctg}B=\frac{\pi}{2}.$$

По определению интеграл сходится и его величина равна $\frac{\pi}{2}$.

Пример 5. Рассмотрим интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi$$

По определению интеграл сходится и его величина равна π.

Первый признак сходимости

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены на $[a;\ +\infty)$, для любого $b>a$ $f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a;\ b]$ и $0\leq f(x)\leq g(x)$ $\forall x\in[a;\ +\infty)$. Тогда имеем

1) если $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то сходится и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$;

2) если $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Второй признак сходимости

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены на $[a;\ +\infty)$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0 \quad \forall x \in [a;\ +\infty)$ и пусть существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$. Тогда интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ ведут себя одинаково в смысле сходимости (т.е. одновременно сходятся или расходятся).

Абсолютная сходимость

Если $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится, то сходится и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ (в таком случае говорят, что $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится абсолютно).

Аналогичные утверждения справедливы для несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$.

Пример 6. Вычислить или установить расходимость

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$$

Решение.

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{A\to+\infty} \int_e^{A} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{A\to+\infty} \int_e^{A} (\ln x)^{-\frac{1}{2}} d(\ln x) =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} 2\sqrt{\ln x}\Big|_e^A = 2\lim_{A\to+\infty}\left(\sqrt{\ln A} - \sqrt{\ln e}\right) = +\infty - 1 = +\infty,$$

Следовательно, интеграл расходится.

Пример 7. Вычислить или установить расходимость

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx$$

Решение.

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx = \lim_{B\to-\infty}\int_{B}^{0} xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\lim_{B\to-\infty}\int_{B}^{0} e^{-x^2}d(-x^2)$$
$$= -\frac{1}{2}\lim_{B\to-\infty}\left(e^{-x^2}\Big|_B^0\right) = -\frac{1}{2}\lim_{B\to-\infty}\left(1 - \frac{1}{e^{B^2}}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}.$$

8.2 Несобственные интегралы от неограниченных функций

Пусть функция $f(x)$ определена на конечном промежутке $[a;\ b]$, но неограничена в этом промежутке. Положим, что в любом промежутке $[a; b-\varepsilon]$ $(0 < \varepsilon < b - a)$ $f(x)$ ограничена и интегрируема, а на промежутке $[b-\varepsilon; b]$ неограничена. Точка b в этом случае называется особой точкой.

Несобственным интегралом от функции $f(x)$ на промежутке $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ называется предел $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, его величина обозначается

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если существует конечный предел в этом равенстве, то говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, в противном случае – расходится.

Замечание. В случае, если $f(x)$ ограничена и интегрируема в любом промежутке $[a+\varepsilon; b]$ и неограничена в каждом промежутке $[a; a+\varepsilon]$ справа от точки a (особая точка), тогда несобственный интеграл функции $f(x)$ на промежутке $[a, b]$ определяется равенством

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Замечание. Пусть $c \in [a, b]$ и функция $f(x)$ неограничена в точке c, причем на промежутках $[a; c-\varepsilon_1]$ $(0 < \varepsilon_1 < c-a)$ и $[c+\varepsilon_2; b]$ $(0 < \varepsilon_2 < b-c)$ функция $f(x)$ интегрируема, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{e_2 \to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx.$$

Формулировки признаков сходимости для несобственных интегралов от неограниченных функций, по существу, ничем не отличаются от формулировок признаков сходимости для несобственных интегралов на бесконечных промежутках.

Пример 8. Вычислить или установить расходимость интеграла

$$I = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Решение. $x = -1$ – особая точка.

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-1+\varepsilon}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin x \,|_{-1+\varepsilon}^{0}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(\arcsin 0 - \arcsin(-1+\varepsilon))$$
$$= -\arcsin(-1) = \frac{\pi}{2}.$$

Интеграл сходится и его величина равна $\frac{\pi}{2}$.

Пример 9. Вычислить или установить расходимость интеграла

$$I = \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Решение. $x = 1$ – особая точка.

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{0}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin x \,|_{0}^{1-\varepsilon}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Интеграл сходится и его величина равна $\frac{\pi}{2}$.

Пример 10. Вычислить или установить расходимость интеграла

$$I = \int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$$

Решение. $x = 0$ – особая точка.

$$I = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int_{0}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_{-1}^{0-\varepsilon_1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{0+\varepsilon_2}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \Big|_{-1}^{-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \Big|_{\varepsilon_2}^{8} = \frac{9}{2}.$$

Интеграл сходится и его величина равна $\frac{9}{2}$.

Пример 11. Вычислить или установить расходимость интеграла

$$I = \int_{0}^{\mathrm{a}} \frac{dx}{(a-x)^p}.$$

Решение. $x = a$ – особая точка.

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1}^{a-\varepsilon} \frac{dx}{(a-x)^p} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{a} \frac{dt}{t^p}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\begin{cases}\dfrac{1}{1-p}\left(a^{1-p}-\varepsilon^{1-p}\right), & p\neq 1\\ \ln a-\ln\varepsilon, & p=1,\end{cases}$$

Таким образом, интеграл сходится, если $p < 1$б и расходится, если $p \geq 1$.

Задачи

Вычислить:

328. $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} dx$

329. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$

330. $\int_6^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x}$

331. $\int_0^{+\infty} \operatorname{arctg} x dx$

332. $\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln x}{x} dx$

333. $\int_0^{+\infty} \sin x\, dx$

334. $\int_{-\infty}^{0} x e^x dx$

335. $\int_0^{1} \frac{dx}{x^\alpha}$

336. $\int_0^{3} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

337. $\int_0^{1} \ln x\, dx$

338. $\int_0^{1} \ln^2 x\, dx$

339. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} x\, dx$

340. $\int_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

341. $\int_0^{3} \frac{dx}{(x-3)^2}$

342. $\int_2^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$

343. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$

344. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$

345. $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x\, dx$

Задачи для самостоятельного решения

Задание 21

Установите сходимость или расходимость несобственных интегралов:

21.1. а) $\int\limits_{-\infty}^{0,5} \frac{dx}{1+4x^2}$; б) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

21.2. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+10}$; б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} 2x\, dx$

21.3. а) $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-2x^2} dx$; б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\left(x+\frac{\pi}{4}\right) dx}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$

21.4. а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{x^4+9}$; б) $\int\limits_{3}^{6} \frac{dx}{x^2-7x+10}$

21.5. а) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; б) $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{x^2-2x-3}$

21.6. а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^3+1}$; б) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+8}}$

21.7. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$; б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1-x^3}$

21.8. а) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x\, dx}{1+x^2}$; б) $\int\limits_{0,5}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

21.9. а) $\int\limits_{-\infty}^{1} e^{3x-1}dx$; б) $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$

21.10. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{1+9x^2}$; б) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{xln^2x}$

21.11. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x+7}$; б) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln^3 x}}$

21.12. а) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^2}}$; б) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{\sin x+1}}$

21.13. а) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln x+1}{x}dx$; б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\operatorname{arctg}^2 x\cdot(1+x^2)}$

21.14. а) $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx$; б) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$

21.15. а) $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{xln^2x}$; б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^3+\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[5]{x}}\, dx$

21.16. а) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{xdx}{x^2-1}$; б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{x^4-1}$

21.17. а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2dx}{5x^3+1}$; б) $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{(x-1)\ln(x-1)}$

21.18. а) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x+1}}$; б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,dx}{\cos^3 x}$

21.19. а) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2+9x+13}$; б) $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{x^2-x-6}$

21.20. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$; б) $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x-1}}$

21.21. а) $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

21.22. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$; б) $\int\limits_{2}^{3} \frac{2x-7}{x^2-7x+10}dx$

21.23. а) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^3dx}{3x^4-1}$; б) $\int\limits_{3}^{4} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-6}}dx$

21.24. а) $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x+1)^3}$; б) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$

21.25. а) $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{\sqrt{2\ln x-1}}{x}dx$; б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{1+\ln x}{x}dx$

21.26. а) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{xdx}{x^4+4}$; б) $\int\limits_{-3}^{-1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}dx$

21.27. а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^x}{e^x+1}dx$; б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt[3]{1-\cos x}}$

21.28. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-2x+10}$; б) $\int\limits_{3}^{5} \frac{2x-6}{\sqrt[3]{x^2-6x+5}}dx$

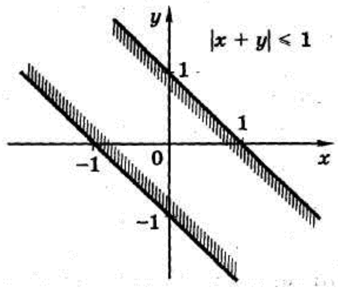
21.29. а) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+8x+7}$; б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\arccos x-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

21.30. а) $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[5]{\ln^2 x}}$; б) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{\sin^5 x}}$

Ответы

1. $x^2 + y^2 > 9.$

2.



3. $xy \geq 0, |x| \leq 2.$ **4.** $x^2 + y^2 < 4$. **5.** $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x > 4 \\ x^2 + y^2 < 16 \end{cases}$ **12.** $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 14xy^4; \frac{\partial z}{\partial y} = 6y^2 = 28x^2y^3.$

13. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}.$ **14.** $\frac{\partial z}{\partial x} = 10x^9; \frac{\partial z}{\partial y} = 10y^9.$

15. $\frac{\partial z}{\partial x} = -2\sin(2x + 3y); \frac{\partial z}{\partial y} = -3\sin(2x + 3y).$

16. $\frac{\partial z}{\partial x} = y\cos x\,; \frac{\partial z}{\partial y} = \sin x + \cos y.$ **17.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \sin y \cdot x^{\sin y - 1}\,;$ $\frac{\partial z}{\partial y} = x^{\sin y} \cdot \cos y \cdot \ln x.$ **18.** $\frac{\partial u}{\partial x} = yz^{xy}\ln z\,; \frac{\partial u}{\partial y} = xz^{xy}\ln z\,;$ $\frac{\partial u}{\partial z} = xyz^{xy-1}.$ **19.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$ **20.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}\,;$ $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}.$ **21.** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\,e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} \cdot \frac{y}{x^2+y^2}\,;\ \frac{\partial z}{\partial y} = e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} \cdot \frac{x}{x^2+y^2}$

22. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2+z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}};\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}};\ \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{xz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$

23. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2};\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}.$ **24.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y} - \frac{2y}{x^3};\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x^2}$

25. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{2xy+y^2}};\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x+y}{\sqrt{2xy+y^2}}$ **26.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt[3]{y} - \frac{y}{2\sqrt{x^3}};$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{3\sqrt[3]{y^2}}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ **27.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{y}{\sqrt{x^3}}\right)e^{\frac{y}{x}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{x}}e^{\frac{y}{x}}$
28. $\frac{\partial z}{\partial x}=(1-xy)e^{-xy}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-x^2e^{-xy}$ **29.** $\frac{\partial z}{\partial x}=y(1+x)e^{x+2y}$;
$\frac{\partial z}{\partial y}=x(1+2y)e^{x+2y}$. **30.** $\frac{\partial z}{\partial x}=(6x-y)2^{3x^2+2y^2-xy}\ln 2$;
$\frac{\partial z}{\partial y}=(4y-x)2^{3x^2+2y^2-xy}\ln 2$. **31.** $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2y+z^2$;
$\frac{\partial u}{\partial y}=x^3+2yz$; $\frac{\partial u}{\partial z}=2xz+y^2$. **32.** $\frac{\partial u}{\partial x}=\cos(x+2y)+\sqrt{\frac{yz}{x}}$;
$\frac{\partial u}{\partial y}=2\cos(x+2y)+\sqrt{\frac{xz}{y}}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=\sqrt{\frac{yx}{z}}$. **33.** $\frac{\partial u}{\partial x}=2x$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-1}{1+(y+z^3)^2}$;
$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{3z^2}{1+(y+z^3)^2}$. **34.** $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2y^2z+3$; $\frac{\partial u}{\partial y}=2x^3yz-5$;
$\frac{\partial u}{\partial z}=x^3y^2+1$ **38.** $dz=\frac{5(xdy-ydx)}{(3y-2a)^2}$. **39.** $dz=\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+$
$\left(1-\frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}dy$. **40.** $dz=2xye^{x^2y}dx+x^2e^{x^2y}dy$. **41.** $z=\frac{3dx+2dy}{3x+2y}$
42. $du=-(xdx+ydy+zdz)/(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}$
43. $du=\frac{(1+x^2)dy-2x(1+y^2)\operatorname{arctg} y\,dx}{(1+x^2)^2(1+y^2)}$.
44. $du=\frac{2}{y\sin\frac{2x}{y}}dx-\frac{2x}{y^2\sin\frac{2x}{y}}dy$. **45.** $du=\frac{x\sqrt{2}(ydx-xdy)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$
46. $du=\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}dx-\left(e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{x}{y^2}+e^{\frac{z}{y}}\cdot\frac{z}{y^2}\right)dy+\frac{1}{y}e^{\frac{z}{y}}dz$
49. $\frac{dz}{dt}=(t-2)\frac{e^t}{t^3}\cos\frac{e^t}{t^2}$. **50.** $\frac{du}{dx}=3e^{3x}+e^x(\sin x+\cos x)+$
$\sin 2x$. **51.** $\frac{du}{dx}=\frac{2v+y}{x}+ve^x$. **52.** $\frac{\partial z}{\partial u}=2xy^2+2x^2y\cdot\frac{1}{v}$; $\frac{\partial z}{\partial v}=$
$2xy^2+2x^2y\left(-\frac{u}{v^2}\right)$. **53.** $y'=-\frac{\sin y}{x\cos y+\sin y-2\sin 2y}$. **54.** $y'''=\frac{1}{3}$.
55.. $z''_{xx}=0$; $z''_{xy}=1$; $z''_{yy}=0$. **56.** $z''_{xx}=25e^{5x+3y}$;
$z''_{xy}=15e^{5x+3y}$;$z''_{yy}=9e^{5x+3y}$. **57.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$;
$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-4\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$. **58.** $z''_{xx}=y^2e^{xy}$;
$z''_{xy}=e^{xy}(xy+1)$; $z''_{yy}=x^2e^{xy}$.**59.** $u''_{xx}=y^2z^2e^{xyz}$;

$u''_{yy} = x^2z^2e^{xyz}; u''_{zz} = x^2y^2e^{xyz}; u''_{xy} = z(xyz+1)e^{xyz};$
$u''_{xz} = y(xyz+1)e^{xyz}; u''_{yz} = x(xyz+1)e^{xyz}.$

60. $u''_{xx} = -\left(\frac{y}{z}\right)^2 \sin\frac{xy}{z};\ u''_{yy} = -\left(\frac{x}{z}\right)^2 \sin\frac{xy}{z}; u''_{zz} = -\left(\frac{xy}{z^2}\right)^2 \sin\frac{xy}{z}$
$u''_{xy} = -\left(\frac{y}{z}\right)^2 \sin\frac{xy}{z} + \frac{1}{z}\cos\frac{xy}{z}; u''_{xz} = -\frac{xy^2}{z^3}\sin\frac{xy}{z} - \frac{y}{z^2}\cos\frac{xy}{z};$
$u''_{yz} = \frac{x^2y}{z^3}\sin\frac{xy}{z} - \frac{x}{z^2}\cos\frac{xy}{z}$. **61**. $z''_{xx} = z''_{xy} = z''_{yy} = \frac{x+y}{(1-(x+y)^2)^{3/2}}$

62. $z''_{xx} = \frac{8y}{(x-y)^3\sin\frac{2(x+y)}{x-y}} \cdot \left(\frac{2y}{x-y}\ \mathrm{ctg}\left(\frac{2(x+y)}{x-y}\right) - 1\right);$
$z''_{yy} = \frac{8x}{(x-y)^3\sin\frac{2(x+y)}{x-y}} \cdot \left(1 - \frac{2y}{x-y}\ \mathrm{ctg}\left(\frac{2(x+y)}{x-y}\right)\right);$
$z''_{xy} = \frac{4}{(x-y)^3\sin\frac{2(x+y)}{x-y}} \cdot \left(3x - 4 - \frac{4x^2}{x-y}\ \mathrm{ctg}\left(\frac{2(x+y)}{x-y}\right)\right);$

63. $z''_{xx} = (2y - y^3)\cos xy - xy^2\sin xy;$
$z''_{yy} = -(2x + x^3)\sin xy - x^2y\cos xy;$
$z''_{xy} = (2x - y^2)\cos xy - (2y + x^2y)\sin xy.$

64. $z''_{xx} = 2\ln(x+y) + \frac{3x^2+4yx}{(x+y)^2}; z''_{yy} = -\frac{x^2}{(x+y)^2}; z''_{xy} = \frac{x^2+2xy}{(x+y)^2}.$

65. $z''_{xx} = 2\sin\sqrt{y}; z''_{yy} = \frac{-x^2}{4y\sqrt{y}}(\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}); z''_{xy} = \frac{x}{\sqrt{y}}\cos\sqrt{y}$

66. $z''_{xx} = y(y-1)x^{y-2}; z''_{yy} = x^y(\ln x)^2; z''_{xy} = x^{y-1}(\ln x + 1)$

67. $-\frac{11}{\sqrt{2}}$. **68.** $-\frac{3}{25}$. **69.** $-\frac{1}{6}$. **70.** $\frac{20\sqrt{3}}{9}$ **71.** $-\frac{\sqrt{6}}{3}$. **72.** $\frac{2\sqrt{2}}{9}$. **73.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **74.** $-\frac{4}{\sqrt{41}}i + \frac{5}{\sqrt{41}}j$. **75.** $\frac{1}{\sqrt{2}}i - \frac{1}{\sqrt{2}}j$. **76.** $\frac{1}{\sqrt{37}}i - \frac{6}{\sqrt{37}}j$. **77.** 26. **78.** $2\sqrt{13}$. **79.** $2\sqrt{14}$. **80.** 2. **81.** 7. **82.** $(1;\ 2)$ – max. **83.** $(0;\ 3)$ – max. **84.** $(1, 2)$ – экстремума нет, $(-1, 2)$ – max. **85.** $(0, 0)$ – экстремума нет, $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ – min. **86.** $(2, -3)$ – max; $(2, 3)$ – экстремума нет. **87.** $(0, 0)$ – экстремума нет, $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ – min. **88.** $(3, 2)$ – min, $(-3, -2)$ – max. **89.** $(-4; 1)$ – min. **90.** экстремума нет. **91.** $\left(0; -\frac{2}{3}\right)$ – min. **92.** экстремума нет. **93.** $(-2; 0)$ – min. **94.** $(0; 0)$ – max. **95.** $(-2;\ 1), (2; -1)$ – max, $(1;\ 2), (-1; -2)$ – min. **96.** наибольшее значение $z\left(\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\sqrt{5}$, наименьшее значение $z\left(-\frac{1}{\sqrt{5}};-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=-\sqrt{5}$. **97.** наибольшее значение $z\left(\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=z\left(-\frac{1}{\sqrt{5}};-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=4$, наименьшее значение $z\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=z\left(\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{12}{5}$. **98.** наибольшее значение $z(2;0)=4$, наименьшее значение $z\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=z\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1}{2}$. **99.** наибольшее значение $z(4;0)=13$, наименьшее значение $z(1;2)=-4$. **100.** наибольшее значение: 6, наименьшее значение: -1. **101.** наибольшее значение 16, наименьшее значение $-\frac{16}{3}$. **102.** наибольшее значение 11, наименьшее значение 5. **103.** наибольшее значение $z(2;-1)=13$, наименьшее значение $z(1,1)=z(0,-1)=-1$. **104.** $\frac{x^4}{4}-x^3+\frac{5x^2}{2}-4x+C$. **105.** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{2x^2}-8\sqrt{x}-\frac{15}{2}\sqrt[5]{x^2}+C$. **106.** $15\sqrt[3]{x}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+14\sqrt[7]{x^2}+C$. **107.** $-\frac{3}{4x^4}+\frac{2}{3x^3}-\frac{1}{2x^2}+C$. **108.** $\frac{4}{25}x^{\frac{25}{4}}+\frac{4}{7}x^{\frac{21}{4}}-\frac{28}{17}x^{\frac{17}{4}}+\frac{60}{7}x^{\frac{7}{12}}+C$.**109.** $-4\cos x+2x^4-11\operatorname{tg}x+C$. **110.** $-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+C$. **111.** $\frac{x^2}{2}+2\ln|x|-\frac{2}{x^2}+C$. **112.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{2\sqrt{2}}+C$. $(\sqrt{8}=2\sqrt{2})$ **113.** $\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right|+C$. **114.** $\operatorname{Ln}\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|+C$. **115.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}\arcsin\frac{x}{2\sqrt{3}}+C$. $(\sqrt{12}=2\sqrt{3})$.**116.** $\frac{2^x e^x}{\ln(2e)}+C=\frac{2^x e^x}{1+\ln 2}+C$. **117.** $4x^{0,83}+C$. **118.** $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+x+C$.**119.** $-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}-e^x+\ln|x|+C$. **120.** $3x-2\cdot\frac{1{,}5^x}{\ln 1{,}5}+C$. **121.** $-\frac{1}{u}-2\ln u+u+C$. **122.** $x-\cos x+C$. **123.** $\frac{(5x+4)^5}{25}+C$. **124.** $-\frac{1}{2}\ln|\cos(2x-3)|+C$. **125.** $-\frac{1}{2}\cos(2x+5)+C$. **126.** $\frac{1}{2}\ln|2x+3|+C$. **127.** $\frac{3}{\sqrt{13}}\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{13}x}{\sqrt{6}}+C$. **128.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\frac{2\sqrt{2}x}{\sqrt{7}}+C$. **129.** $\frac{1}{84}(9+7x^2)^6+C$. **130.** $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+7}+C$. **131.** $\frac{1}{6}(4x^2+8x)^{\frac{3}{2}}+C$. **132.** $\frac{3}{2}\ln|x^2+7|+C$.**133.** $-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}+C$. **134.** $-\frac{1}{6\sin^6 x}+C$. **135.**

$\frac{2}{3}\ln x\sqrt{\ln x}+C$. **136.** $-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^4}+C$. **137.** $\frac{1}{3}\arcsin^3 x+C$. **138.** $\frac{3}{4}\operatorname{arctg}^{\frac{4}{3}}x+C$. **139.** $2\sqrt{7-\cos^2 x}+C$. **140.** $-\frac{2}{3}\sqrt{1-3x^2}+C$. **141.** $\ln|\operatorname{tg} x|+C$. **142.** $\ln|\operatorname{arctg} x|+C$. **143.** $-\frac{1}{7}\ln|5+7\cos x|+C$. **144.** $\ln|1+\ln x|+C$. **145.** $\ln|\arcsin x|+C$. **146.** $e^{\sin x}+C$. **147.** $\frac{4}{3}e^{\frac{3}{4}x}+\frac{72}{5}e^{\frac{5}{12}x}+144e^{\frac{x}{12}}-32e^{-\frac{x}{4}}+C$. **148.** $\frac{1}{3\ln 9}9^{x^3+6x^2+3x}+C$. **149.** $\frac{1}{\ln\frac{7}{8}}\left(\left(\frac{7}{8}\right)^x-\left(\frac{8}{7}\right)^x\right)-2x+C$. **150.** $\frac{1}{2}e^{\operatorname{arctg}2x}+C$. **151.** $\frac{1}{2}e^{5+\sin^2 2x}+C$. **152.** $-\frac{1}{2}\cos x^2+C$. **153.** $-\cos\ln|x|+C$. **154.** $\operatorname{Sin} e^x+C$. **155.** $2\sin\sqrt{x}+C$. **156.** $-\operatorname{tg}\frac{1}{x}+C$. **157.** $-2\ln|\cos x|+C$. **158.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}\sin x}{\sqrt{7}}+C$. **159.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{5}{6}}\operatorname{arctg} x\right)+C$. **160.** $\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3}{5}\ln x\right)+C$. **161.** $\frac{x^2}{2}\ln(x-1)-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}+x+\ln(x-1)\right]+C$. **162.** $\frac{1}{2}(5x+6)\sin 2x+\frac{5}{4}\cos 2x+C$. **163.** $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{x}{2}+C$. **164.** $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{2x}+C$. **165.** $\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C$. **166.** $-x\operatorname{ctg} x+\ln|\sin x|+C$. **167.** $x\,tg\,x+\ln|\cos x|+C$. **168.** $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)+C$. **169.** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$. **170.** $-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+C$. **171.** $2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+C$. **172.** $x(\ln x-1)^2+x+C$. **173.** $2\sqrt{1+x}\cdot\arcsin x+4\sqrt{1-x}+C$. **174.** $-\frac{x+1}{e^x}+C$. **175.** $-\frac{x\ln 2+1}{2^x\ln^2 2}+C$. **176.** $-\frac{x}{\sin x}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$. **177.** $\frac{x}{\cos x}-\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$. **178.** $\frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{10}}+C$. **179.** $\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{15}}+C$. **180.** $\frac{2}{\sqrt{19}}\operatorname{arctg}\frac{2x-9}{\sqrt{19}}+C$. **181.** $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x-7}{\sqrt{7}}+C$. **182.** $\frac{2}{\sqrt{55}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{55}}+C$. **183.** $\frac{2}{\sqrt{119}}\operatorname{arctg}\frac{10x+9}{\sqrt{119}}+C$. **184.** $\frac{2}{\sqrt{131}}\operatorname{arctg}\frac{18x+1}{\sqrt{431}}+C$. **185.** $\frac{2}{\sqrt{83}}\operatorname{arctg}\frac{6x-11}{\sqrt{83}}+C$. **186.** $\frac{3}{2}\ln(x^2+8x+18)-\frac{23}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+4}{\sqrt{2}}+C$. **187.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+11x+42)+\frac{3}{\sqrt{47}}\operatorname{arctg}\frac{2x+11}{\sqrt{47}}+C$. **188.** $\frac{1}{2}\ln(x^2-$

$9x+23)+\frac{3}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x-9}{\sqrt{11}}+C$. **189.** $\frac{7}{2}\ln(x^2+x+9)+\frac{1}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{35}}+C$.**190.** $\frac{6x+1}{83(3x^2+x+7)}+\frac{12}{83\sqrt{83}}\operatorname{arctg}\frac{6x+1}{\sqrt{83}}+C$. **191.** $\frac{x-5}{4(x^2+2x+5)}+\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$. **192.** $\frac{x^3}{3}+x^2+4x+8\ln|x-2|+C$. **193.** $\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+9x-27\ln|x+3|+C$. **194.** $\frac{x^3}{2}-4x+8\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$. **195.** $\frac{x^3}{3}+\frac{8}{3}\ln|x^3-8|+C$. **196.** $\ln|x+2|-\ln|x+3|+C\left(=\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right|+C\right)$. **197.** $\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x+3|+C$. **198.** $2\ln|x-2|-\ln|x-3|+C$. **199.** $3\ln|x-1|-\ln|x+2|+C$. **200.** $3\ln|x|+\ln|x-1|-\ln|x+1|+C$. **201.** $\frac{1}{x}+\ln|x-2|-\ln|x|+C$. **202.** $\frac{x^2}{2}+4x+8\ln|x-1|-\ln|x|+C$. **203.** $5x+\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{161}{6}\ln|x-4|-\frac{7}{3}\ln|x-1|+C$. **204.** $\frac{1}{x+1}+\ln|x|-\ln|x+1|+C$. **205.** $\ln|x-1|-\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+C$. **206.** $\frac{5}{2}\ln(x^2+2x+10)-\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+C$. **207.** $\frac{1}{12}\ln|x-2|-\frac{1}{24}\ln(x^2-2x+4)+\frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{3}+C$. **208.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+1|-\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}+\operatorname{arctg}x+C$. **209.** $\frac{3}{2}\ln(x^2-2x+5)-3\ln|x|+2\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$. **210.** $-\frac{1}{2(x^2-3x+2)^2}+C$. **211.** $-\frac{1}{2(1+x^2)}+C$. **212.** $\ln|2x^3+5x^2+2x|+C$. **213.** $\left(1+\sqrt[4]{2x-1}\right)^2+2\ln|\sqrt[4]{2x-1}-1|+C$. **214.** $\frac{2}{7}(x-1)^{\frac{7}{2}}+\frac{6}{5}(x-1)^{\frac{3}{2}}+2x(x-1)^{\frac{1}{2}}+C$. **215.** $2\sqrt{x}-2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{2}}+C$. **216.** $-2\operatorname{arctg}\sqrt{1-x}+C$. **217.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}+C$. **218.** $\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+C$. **219.** $2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin\left(4\arcsin\frac{x}{2}\right)+C$. **220.** $\frac{x^3}{27\sqrt{(9+x^2)^3}}+C$. **221.** $\arcsin\frac{x-1}{x\sqrt{2}}+C$. **222.** $-\arcsin\frac{1}{x}+C$. **223.**$-\sqrt{\frac{2-x}{x}}+C$. **224.** $\frac{x}{2}-\frac{\sin x}{2}+C$. **225.** $\frac{x}{2}+\frac{\sin x}{2}+C$. **226.** $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3x+C$. **227.** $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3x-\frac{1}{5}\cos^5x+C$.**228.**

$-\frac{1}{7}\cos^7 x+\frac{1}{3}\cos^9 x-\frac{3}{11}\cos^{11} x+\frac{1}{13}\cos^{13} x+C$ **229.** $\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{2}{5}\sin^5 x+\frac{1}{7}\sin^7 x+C$. **230.** $\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C$. **231.** $\frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$. **232.** $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+C$. **233.** $\frac{1}{3}x+\frac{1}{12}\sin 6x+\frac{1}{64}\sin 12x-\frac{1}{144}\sin^3 6x+C$. **234.** $\frac{1}{4}\sin^4 x-\frac{1}{6}\sin^6 x+C$. **235.** $\sin x-\sin^3 x+\frac{3}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+C$. **236.** $-\frac{1}{\sin x}-\sin x+C$. **237.** $-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+C$. **238.** $-\frac{1}{50}\sin 25x+\frac{1}{10}\sin 5x+C$. **239.** $\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}+3\sin\frac{x}{6}+C$.**240.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C$. **241.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right|+C$. **242.** $x-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$. **243.** $-x-\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}+C$. **244.** $-\ln|\cos x-\sin x|+C$. **245.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{2}\right)+C$. **246.** $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}-\operatorname{tg} x+x+C$. **247.** $-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}+\operatorname{ctg} x+x+C$. **248.** $-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}-\operatorname{ctg} x+C$. **249.** $\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+\frac{2\operatorname{tg}^3 x}{3}+\operatorname{tg} x+C$. **250.** $2\operatorname{tg} x+\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}-\operatorname{ctg} x+C$. **251.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+3\ln|\operatorname{tg} x|-\frac{3}{2\operatorname{tg}^2 x}-\frac{1}{4\operatorname{tg}^4 x}+C$. **252.** $\frac{1}{5}\operatorname{tg} 5x-x+C$. **253.** $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x-\ln|\sin x|+C$. **254.** 20.**255.** 21/8 . **256.** $\frac{2}{3}\left(\sqrt{8}-1\right)$. **257.** 7/72. **258.** 14/3. **259.** $\pi/6$. **260.** 7/3. **261.** 100/3. **262.** $\frac{1}{3}\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **263.** 7/4. **264.** $1+\frac{1}{2}\lg e$. **265.** $e-\sqrt{e}$. **266.** $\pi/2$.**267.** 2. **268.** ½. **269.** 0. **270.** $\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$. **271.** 2/3. **272.** $1-\cos 1$. **273.** 0. **274.** $4-2\ln 3$. **275.** 1/4. **276.** $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$. **277.** $4-2\sqrt{2}$. **278.** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{4}$. **279.** 1,5. **280.** $0{,}2(e-1)^5$. **281.** $2-\frac{\pi}{2}$. **282.** $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$. **283.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **284.** $1-\frac{2}{e}$. **285.** $\frac{\pi}{2}-1$. **286.** 1. **287.** 1. **288.** 1. **289.** $\frac{4}{3}$. **290.** $\frac{8}{3}$. **291.** $\frac{4}{3}$. **292.** $\frac{2}{3}$. **293.** $\frac{1}{3}$. **294.** $\frac{1}{6}$. **295.** $\frac{1}{2}$. **296.** $\frac{\pi-2}{4}$. **297.** $2\sqrt{3}-\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$. **298.** $\frac{3}{4}$. **299.** $\frac{2(e-1)}{\sqrt{e}}$. **300.** $\frac{32}{3}$. **301.** $\frac{8}{3}$. **302.** $12-5\ln 5$. **303.** $\frac{3}{2}-2\ln 2$. **304.** $4\ln(4e)$. **305.** $\frac{256}{15}\pi$, 8π. **306.** $\frac{\pi}{30},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6},\frac{11\pi}{30},\frac{19\pi}{30}$. **307.** $\frac{\pi\left(e^2-1\right)}{2}$, 2π.

308. $\frac{128\pi}{5}, 8\pi$. **309.** $\frac{178\pi}{15}, \frac{21\pi}{2}$. **310.** $\frac{6\pi}{7}, \frac{3\pi}{5}$. **311.** $\frac{4\pi ab^2}{3}$. **312.** $\pi(e-2), \frac{\pi(e^2+1)}{2}, \pi e, \frac{\pi(e^2-3)}{2}, \frac{\pi(e^2+5)}{2}, \pi(4-e)$. **313.** $\frac{\pi^2}{2}, 2\pi^2, 6\pi^2, 2\pi(\pi+2), \quad 2\pi(\pi+4), \frac{\pi(8-\pi)}{2}, \frac{\pi(\pi+16)}{2}$. **314.** $\frac{32}{3}\pi\left(2\sqrt{2}-1\right)$. **315.** $\frac{2\pi}{15}$, $\frac{\pi}{6}$. **316.** $\frac{\pi^2}{8}$, $\frac{\pi}{4}(\pi-2)$. **317.** $\frac{\pi^2}{2}, 10\pi^2, 6\pi^2, \frac{\pi(\pi+16)}{2}$. **318.** $\frac{8\pi}{3}$, $\frac{16\pi}{15}$, $\frac{16\pi}{3}, \frac{8\pi}{5}$. **319.** $12\pi, 24\pi$. **320.** $\frac{\pi(\pi+2)}{4}, \pi\ln 2$. **321.** $\frac{2}{27}\left(13\sqrt{13}-8\right)$. **322.** $\frac{1}{2}\ln 3$. **323.** $\frac{670}{27}$. **324.** $\frac{28}{3}$. **325.** $\frac{a(e^2-1)}{2e}$. **326.** $\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$. **327.** $\ln 3$. **328.** 1. **329.** $\frac{1}{\alpha-1}$, при $\alpha > 1$; расходится при $\alpha \leq 1$. **330.** $\frac{1}{4}\ln 3$. **331.** Расходится. **332.** Расходится. **333.** Расходится. **334.** -1. **335.** $\frac{1}{1-\alpha}$, при $\alpha < 1$; расходится при $\alpha \geq 1$. **336.** $\frac{\pi}{2}$. **337.** -1. **338.** 2. **339.** Расходится. **340.** 0. **341.** Расходится. **342.** $6\sqrt[3]{2}$. **343.** Расходится. **344.** Расходится. **345.** $\frac{1}{2}$.

Литература

[1] Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа // СПб.: «Профессия», 2007 г.

[2] Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике //СПб.: «Лань», 2005 г.

[3] Малугин В.А. Математика для экономистов: Математический анализ. Курс лекций // М.: «Эксмо», 2005 г.

[4] Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике // М.: Издательство Физико-математической литературы, 2009 г.

[5] Сборник задач по высшей математике для экономистов под редакцией В.И. Ермакова// М.: ИНФА-М, 2003с

[6] Шипачев В.С. Высшая математика // М.: «Высшая школа», 1990 г.

[7] Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике // Харьков: изд-во при Харьковском гос. университете, 1967г.

Оглавление

Св. план 2013 г, поз. 175

Ишханян Маргарита Владимировна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
Часть II
Учебное пособие для направления 080100.62 «Экономика»

Подписано в печать Формат 60 X 84 / 16

Заказ № Усл. - печ. л. -

Тираж -150 экз.