ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»

КАФЕДРА «МАТЕМАТИКА»

М.В. Ишханян, А.М. Русинова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебное пособие

Москва – 2014

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»

КАФЕДРА «МАТЕМАТИКА»

М.В. Ишханян, А.М. Русинова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Рекомендовано редакционно-издательским советом

университета в качестве учебного пособия

для студентов направления «Экономика»

Москва – 2014

УДК 517

И – 97

Ишханян М.В., Русинова А.М. Дифференциальное исчисление функции одной переменной: Учебное пособие. - М.: МГУПС (МИИТ), 2014. – 145 с.

Учебное пособие предназначено для студентов направления «Экономика», обучающихся по дисциплине «Математический анализ». Учебное пособие состоит из 4 глав. Каждая глава разбита на параграфы, содержащие краткое изложение теории и примеры решения типовых задач. В каждой главе представлены задачи с ответами и задачи для самостоятельного решения. Предлагаемое пособие может быть полезно в процессе аудиторной и самостоятельной работы студентов.

Рецензенты:

О.А. Платонова, к.ф.-м.н., зав. кафедрой «Высшая математика» МИИТа;
М.И. Джиоева, к.ф.-м.н., доцент кафедры «Высшая математика» МГТУ МИРЭА

Глава 1. Производная и дифференциал функции

1.1 Понятие производной функции.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на интервале $(a; b)$.

Определение. Разность $\Delta x = x - x_0$, где $x, x_0 \in (a; b)$называется ***приращением аргумента в точке $\boldsymbol{x_0}$.***

Определение. Разность $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется ***приращением функции $\boldsymbol{f(x)}$ в точке $\boldsymbol{x_0}$.***

Определение. Если существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

то он называется ***производной функции $\boldsymbol{f(x)}$ в точке $\boldsymbol{x_0}$*** и обозначается $\boldsymbol{f'(x_0)}$**.**Операция нахождения производной называется ***дифференцированием.***

Замечание. Для производной функции $y = f(x)$ используются следующие обозначения:

$y', y'(x), f', f'(x), {y'}_x, {f_x}', \frac{dy}{dx}, \frac{dy(x)}{dx}, \frac{df}{dx}, \frac{df(x)}{dx}$.

Как вычисляют производную функции *y(x)* в точке x_0?

1. Находят приращение функции
$$\Delta y(x_0) = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$$
2. Составляют отношение $\frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x}$
3. Вычисляют предел этого отношения при $\Delta x \to 0$

Пример 1. Найти по определению производную функции $y = x^2$.

Решение. Пусть x_0-произвольная фиксированная точка. Вычислим производную функции $y = x^2$ в точке x_0.

В нашем случае $y = x^2$, поэтому $y(x_0) = {x_0}^2$ и $y(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2$. Значит, $\Delta y(x_0) = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - {x_0}^2$.

Следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x_0+\Delta x) - y(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0+\Delta x)^2 - {x_0}^2}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

Так как в качестве x_0 может быть выбрано любое число, то для числа x

$$y'(x) = (x^2)' = 2x.$$

Пример 2. Найти по определению производную функции $y = \sin x$.

Решение. Зафиксируем произвольную точку x_0. Так как $y(x) = \sin x$, то $y(x_0) = \sin x_0$ и $y(x_0 + \Delta x) = \sin(x_0 + \Delta x)$, поэтому $\Delta y(x_0) = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0$.

Следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x_0+\Delta x) - y(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x_0+\Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) =$$
$$= 1 \cdot \cos x_0 = \cos x_0$$

Так как в качестве x_0 можно взять любое число, то для числа x

$$y'(x) = (\sin x)' = \cos x.$$

Пример 3. Функция $y = \frac{2x+1}{3x+1}$. Вычислить по определению производную при $x = 1$.

Решение. Зафиксируем произвольную точку x_0. Так как $y(x) = \frac{2x+1}{3x+1}$, то $y(x_0) = \frac{2x_0+1}{3x_0+1}$ и $y(x_0 + \Delta x) = \frac{2(x_0+\Delta x)+1}{3(x_0+\Delta x)+1}$, поэтому

$$\Delta y(x_0) = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = \frac{2(x_0+\Delta x)+1}{3(x_0+\Delta x)+1} - \frac{2x_0+1}{3x_0+1}.$$

Следовательно,

$$y'^{(x_0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\frac{2(x_0 + \Delta x) + 1}{3(x_0 + \Delta x) + 1} - \frac{2x_0 + 1}{3x_0 + 1}}{\Delta x} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2(x_0 + \Delta x) + 1)(3x_0 + 1) - (3(x_0 + \Delta x) + 1)(2x_0 + 1)}{\Delta x(3(x_0 + \Delta x) + 1)(3x_0 + 1)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2x_0 + 1)(3x_0 + 1) + 2\Delta x(3x_0 + 1) - (2x_0 + 1)(3x_0 + 1) - 3\Delta x(2x_0 + 1)}{\Delta x(3(x_0 + \Delta x) + 1)(3x_0 + 1)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x(3(x_0 + \Delta x) + 1)(3x_0 + 1)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{(3(x_0 + \Delta x) + 1)(3x_0 + 1)} = \frac{-1}{(3x_0 + 1)^2}$$

Таким образом, $y'(x) = -\frac{1}{(3x+1)^2}$;$y'(1) = -\frac{1}{16}$.

1.2. Производная суммы, разности, произведения и частного функций

Нахождение производной функции непосредственно по определению часто связано с определенными трудностями, поэтому на практике функции дифференцируют с помощью ряда правил и формул.

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$две дифференцируемые функции, тогда

(1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
(2) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;
(3) $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, где -постоянная;
(4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u \cdot v\prime - u \cdot v\prime}{v^2}, v \neq 0$;

1.3. Производная сложной функции

Пусть функция $u = \phi(x)$имеет производную в некоторой точке $x = x_0$, а функция $y = f(u)$ имеет производную в точке $u_0 = \phi(u_0)$. Тогда, сложная функция $f(\phi(x))$ имеет производную в точке $x = x_0$, которая вычисляется по формуле

$$(f(\phi(x_0)))' = f'(u_0) \cdot \phi'(x_0).$$

Для краткости используется следующая запись этой формулы ${f_x}' = {f_u}' \cdot {u'}_x$.

1.4. Производные основных элементарных функций (таблица производных)

Приведем производные основных элементарных функций. Во всех перечисленных ниже формулах функция u считается функциями независимой переменной x:.$u = u(x)$. .

Таблица производных

(1) $y = c$ (c-постоянная) , $y' = 0$;
(2) $y = x$,$y' = 1$;
(3) $y = u^n$, $y' = nu^{n-1} \cdot u'$, где $n \in R$;
(4) $y = a^u$, $y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, где $a > 0, a \neq 1$;
(5) $y = e^u$,$y' = e^u \cdot u'$;
(6) $y = \log_a u$, $y' = \frac{u'}{u \ln a}$, где $a > 0, a \neq 1$,$x > 0$;

(7) $y = \ln u,\ y' = \frac{u'}{u}$;
(8) $y = \sin u,\ y' = \cos u \cdot u'$;
(9) $y = \cos u,\ y' = -\sin u \cdot u'$;
(10) $y = \operatorname{tg} u,\ y' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$, где $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$;
(11) $y = \operatorname{ctg} u,\ y' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$, где $x \neq \pi n, n \in Z$
(12) $y = \arcsin u,\ y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$,где $|x| \leq 1$;
(13) $y = \arccos u,\ y' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$,где $|x| \leq 1$;
(14) $y = arctg\ \ u,\ y' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
(15) $y = arcctg\ \ u,\ y' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

Пример 3. Найти производные следующих функций:

$$y = 5, y = arcctg\ \ \ln 345, y = \log_5 x,\ y = 7^x.$$

Решение. Производная числа равна нулю, поэтому $(5)' = 0$,

$(arcctg\ \ \ln 345)' = 0$, так как 5 и $arcctg\ \ \ln 345$ - числа.

Для нахождения производных функций $y = \log_5 x$ и $y = 7^x$ воспользуемся табличными формулами для показательной функции (при $a = 7$) и логарифмической функции (при $a = 5$). Имеем: $(\log_5 x)' = \frac{1}{x\ln 5}$, $(7^x)' = 7^x \ln 7$.

Пример 4. Вычислить производные функций: $x^2, x^{2\pi-3e+1}$, $\frac{1}{x}, \sqrt{x}, \sqrt[4]{x^3}$.

Решение. Каждая из данных функций является степенной функцией, поэтому все производные находятся по формуле $y' = nu^{n-1} \cdot u'$.

Имеем:

$$u = x \Rightarrow u' = 1;$$
$$(x^2)' = 2x;$$
$$(x^{2\pi-3e+1})' = (2\pi - 3e + 1)x^{2\pi-3e};$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2};$$
$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\left(\sqrt[4]{x^7}\right)' = \left(x^{\frac{7}{4}}\right)' = \frac{7}{4}x^{\frac{7}{4}-1} = \frac{7}{4}x^{\frac{3}{4}} = \frac{7}{4}\sqrt[4]{x^3}.$$

Пример 5. Найти производную функции $y = (1 + 7x)^4$.

Решение. Данная функция является степенной, поэтому производная находятся по формуле $y' = nu^{n-1} \cdot u'$:

$$y' = ((1 + 7x)^4)' = [u = 1 + 7x] = 4(1 + 7x)^3 \cdot (1 + 7x)' =$$
$$= 4(1 + 7x)^3 \cdot 7 = 28(1 + 7x)^3.$$

Пример 6. Найти производную функции $y = \mathrm{tg}5x$.

Решение. Применяя таблицу производных, находим

$$y' = (\mathrm{tg}5x)' = [u = 5x] = \frac{1}{\cos^2 5x} \cdot (5x)' = \frac{5}{\cos^2 5x}.$$

Пример 7. Найти производную функции $y = \cos^2 x$.

Решение. Применяя правило дифференцирования сложной функции и таблицу производных, находим

$$y' = (\cos^2 x)' = [u = \cos x] = 2\cos x(\cos x)' =$$
$$= 2\cos x(-\sin x) = -\sin 2x.$$

Пример 8. Найти производную функции

$y = (2x^2 + x + 5)\cos x.$

Решение. Применяя правило дифференцирования произведения функций и таблицу производных, находим

$$y' = \left((2x^2 + x + 5) \cdot \cos x\right)' = (2x^2 + x + 5)' \cdot \cos x +$$
$$+(2x^2 + x + 5) \cdot (\cos x)' = (4x + 1)\cos x - (2x^2 + x + 5)\sin x.$$

Пример 9. Найти производную функции

$y = 3\ln x + 5\sqrt{x} \cdot \cos x + e^3.$

Решение. Применяя правила дифференцирования и таблицу производных, находим

$$y' = \left(3\ln x + 5\sqrt{x}\cos x + e^3\right)' = 3(\ln x)' + 5\left(x^{\frac{1}{2}}\cos x\right)' + (e^3)' =$$

$$= 3\ \frac{1}{x} + 5\ \left(\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' \cos x + x^{\frac{1}{2}}(\cos x)'\right) + 0 =$$

$$= \frac{3}{x} + 5\ \left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} \cos x + x^{\frac{1}{2}}\,(-\sin x)\right) = \frac{3}{x} + \frac{5\cos x}{2\sqrt{x}} - 5\sqrt{x} \cdot \sin x$$

.

Пример 10. Найти производную функции $y = \frac{arc\ tgx}{x^3}$.

Решение. Применяя правила дифференцирования частного функций и таблицу производных, находим

$$\left(\frac{arctgx}{x^3}\right)' = \frac{(arctgx)'\,x^3 - (x^3)'\,arctgx}{(x^3)^2} =$$

$$= \frac{\frac{x^3}{1+x^2} - 3x^2 \cdot arctgx}{x^6} = \frac{1}{x^3(1+x^2)} - \frac{3 \cdot arctgx}{x^4}.$$

Пример 11. Найти производную функции

$$y = \cos(\log_6 5x) - \cos(\log_6 5\ )$$

Решение. $y' = (\cos(\log_6 5x) - \cos(\log_6 5))' = (\cos(\log_6 5x))' - (\cos(\log_6 5))'$

Так как выражение $\cos(\log_6 5)$ является числом, то

$(\cos(\log_6 5))' = 0$. Получаем, что

$y' = (\cos(\log_6 5x))' - 0 = -\sin(\log_6 5x)(\log_6 5x)' =$

$= -\sin(\log_6 5x) \cdot \frac{1}{5x \cdot \ln 6}(5x)' =$

$= -\sin(\log_6 5x) \cdot \frac{1}{5x\ln 6} \cdot 5 = -\frac{\sin(\log_6 5x)}{x\ln 6}$

Пример 12. Найти производную функции $y = arctg^2 e^{-x}$

Решение. Применяя правила дифференцирования и таблицу производных, находим

$y' = (\mathrm{arctg}^2 e^{-x})' = [u_1 = \mathrm{arctg}e^{-x}] = 2\mathrm{arctg}e^{-x} \cdot u_1{}';$
$u_1{}' = (\mathrm{arctg}e^{-x})' = [u_2 = e^{-x}] = \frac{1}{1+(e^{-x})^2} \cdot u_2{}' = \frac{1}{1+e^{-2x}} \cdot u_2{}';$
$u_2{}' = (e^{-x})' = [u_3 = -x] = e^{-x} \cdot u_3{}' = e^{-x} \cdot (-x)' = -e^{-x}.$

Таким образом,

$$y' = 2\text{arctg}\ \ e^{-x} \cdot \frac{1}{1+e^{-2x}} \cdot (-e^{-x}) = -\frac{2e^{-x}\text{arctg}\ \ e^{-x}}{1+e^{-2x}}.$$

Пример 13. Найти производную функции

$$y = \left(\log_5 ctg\,\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^4 + 3^{arc\cos\left(x^2\sqrt{3-x}\right)};$$

Решение. Представим функцию y в следующем виде

$y = f + g$,где $f = \left(\log_5 ctg\,\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^4, g = 3^{arc\cos\left(x^2\sqrt{3-x}\right)}$.

Тогда $y' = f' + g'$.

Найдем f':

$$f' = \left(\left(log_5 ctg\,\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^4\right)' = \left[u_1 = log_5 ctg\,\frac{1-x^2}{1+x^2}\right] =$$

$$= 4\left(log_5 ctg\,\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^3 \cdot u_1{}';$$

$$u_1{}' = \left(log_5 ctg\,\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \left[u_2 = ctg\,\frac{1-x^2}{1+x^2}\right] = \frac{1}{ln5 \cdot ctg\frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot u_2{}';$$

$$u_2{}' = \left(ctg\,\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \left[u_3 = \frac{1-x^2}{1+x^2}\right] = -\frac{1}{sin^2\frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot u_3{}';$$

$$u_3{}' = \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

Таким образом,

$$f' = 16\left(\log_5 ctg\,\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^3 \cdot \frac{1}{\ln 5 \cdot ctg\frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \frac{1}{\sin^2\frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{16x}{\ln 5 \cdot (1+x^2)^2}\left(\log_5 ctg\,\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^3 \cdot \frac{1}{\cos\frac{1-x^2}{1+x^2}\sin\frac{1-x^2}{1+x^2}} =$$

$$= \frac{32x}{\ln 5 \cdot (1+x^2)^2 \sin\frac{2(1-x^2)}{1+x^2}}\left(\log_5 ctg\,\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^3.$$

Найдем g':

$$g' = \left(3^{arc\,\cos\left(x^2\sqrt{3-x}\right)}\right)' = \left[u_1 = arc\,\cos\left(x^2\sqrt{3-x}\right)\right] =$$

$$= 3^{arc\,\cos\left(x^2\sqrt{3-x}\right)} \cdot \ln 3 \cdot u_1';$$

$$u_1' = \left(arc\,\cos\left(x^2\sqrt{3-x}\right)\right)' = \left[u_2 = x^2\sqrt{3-x}\right] =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\left(x^2\sqrt{3-x}\right)^2}} \cdot u_2';$$

$$u_2' = \left(x^2\sqrt{3-x}\right)' = (x^2)'\sqrt{3-x} + x^2\left(\sqrt{3-x}\right)' =$$

$$= 2x\sqrt{3-x} - \frac{x^2}{2\sqrt{3-x}}$$

Таким образом,

$$g' = 3^{\arccos\left(x^2\sqrt{3-x}\right)} \ln 3\, \frac{-1}{\sqrt{1-x^4(3-x)}} \left(2x\sqrt{3-x} - x^2\, \frac{1}{2\sqrt{3-x}}\right) =$$

$$= 3^{\arccos\left(x^2\sqrt{3-x}\right)} \ln 3\, \frac{-1}{\sqrt{1-x^4(3-x)}}\, \frac{2x(3-x)-x^2}{2\sqrt{3-x}} =$$

$$= -3^{\arccos\left(x^2\sqrt{3-x}\right)} \ln 3\, \frac{6x-3x^2}{2\sqrt{3-x}\sqrt{1-x^4(3-x)}}$$

Получаем, что

$$y' = \frac{32x\left(\log_5 ctg\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^3}{\ln5\cdot(1+x^2)^2\sin\frac{2(1-x^2)}{1+x^2}} - \frac{3\ln3\cdot x(2-x)\cdot3^{\arccos\left(x^2\sqrt{3-x}\right)}}{2\sqrt{3-x}\sqrt{1-x^4(3-x)}}.$$

Пример 14. Показать, что функция $y = \sqrt{2\ln\frac{1+e^x}{2} + 1}$ удовлетворяет уравнению$(1+e^x)y\cdot y' = e^x$.

Решение. Найдём производную функции

$$y' = \left(\left(2\ln\frac{1+e^x}{2} + 1\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(2\ln\frac{1+e^x}{2} + 1\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2\ln\frac{1+e^x}{2} + 1\right)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\ln\frac{1+e^x}{2}+1}}\cdot\left(2\ \frac{2}{1+e^x}\ \ \frac{e^x}{2}\right) = \frac{e^x}{(1+e^x)\sqrt{2\ln\frac{1+e^x}{2}+1}}.$$

Подставив это выражение в уравнение, получим

$$(1+e^x)\sqrt{2\ln\frac{1+e^x}{2} + 1}\cdot\frac{e^x}{(1+e^x)\sqrt{2\ln\frac{1+e^x}{2}+1}} = e^x, \text{ или } \ e^x = e^x.$$

Это доказывает, что наша функция удовлетворяет уравнению.

1.5.Производная степенно-показательной функции. «Логарифмическая» производная.

Для вычисления производной функции вида $\boldsymbol{f(x)^{g(x)}}$ существуют два способа.

Способ 1. Так как в соответствии с основным логарифмическим тождеством $\boldsymbol{f(x) = e^{\ln f(x)}}$, то функцию $\boldsymbol{f(x)^{g(x)}}$ можно представить в следующем виде

$$f(x)^{g(x)} = \left(e^{\ln f(x)}\right)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

Таким образом, нахождение производной сводится к дифференцированию сложной функции $\boldsymbol{e^{g(x)\ln f(x)}}$.

Пример 15. Найти производную функции $y = x^x$.

Решение. Данная функция не является ни функцией вида$\boldsymbol{x^n}$, ни функцией вида $\boldsymbol{a^x}$, поэтому будет ошибкой вычислять производной данной функций одним из следующих способов:

$$(x^x)' = x \cdot x^{x-1},\ (x^x) = x^x \cdot \ln x.$$

Представим функцию $\boldsymbol{y = x^x}$ в виде $\boldsymbol{y = e^{x\ln x}}$.

$$y' = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln x} \cdot (x\ln x)' = e^{x\ln x} \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right)$$
$$= e^{x\ln x}(\ln x + 1).$$

Пример 16. Найти производную функции $y = (\sin x)^{\ln x}$.

Решение.

$y' = \left((\sin x)^{\ln x}\right)' = \left(e^{\ln x \ln\sin x}\right)' = e^{\ln x \ln\sin x} \cdot (\ln x \cdot \ln\sin x)' =$

$= (\sin x)^{\ln x} \cdot (\ln x \cdot \ln\sin x)' =$

$= (\sin x)^{\ln x} \cdot ((\ln x)'\ln\sin x + \ln x(\ln\sin x)') =$

$= (\sin x)^{\ln x} \cdot \left(\frac{1}{x}\ln\sin x + \ln x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)'\right) =$

$= (\sin x)^{\ln x} \cdot \left(\frac{\ln\sin x}{x} + \ln x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}\right)$

Способ 2. Данный способ связан с так называемой ***логарифмической производной*** функции, т.е. производной от логарифма этой функции: $(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow f'(x) = f(x) \cdot (\ln f(x))'$.

В частности, $\left(f(x)^{g(x)}\right)' = f(x)^{g(x)} \cdot (g(x) \cdot \ln f(x))'$.

Пример 17. Найти производную функции$y = (x+1)^{arctgx}$.

Решение. Предварительно прологарифмируем обе части равенства $y = (x+1)^{arctgx}$, имеем $\ln y = (arctgx)\ \ln(x+1)$.

Продифференцируем обе части последнего равенства:

$$(\ln y)' = \frac{1}{1+x^2}\ln(x+1) + \frac{arctgx}{x+1};$$

Так как $y' = y \cdot (\ln y)'$, то $y' = y\left(\frac{\ln(x+1)}{1+x^2} + \frac{arctgx}{x+1}\right)$.

Подставив $y = (x+1)^{arctgx}$, получим

$$y' = (x+1)^{arctgx}\left(\frac{\ln(x+1)}{1+x^2} + \frac{arctgx}{x+1}\right).$$

Пример 18. Найти производную функции $y = \frac{(x-3)^2(2x-1)}{(x+1)^3}$.

Решение. Для нахождения производной данной функции удобно предварительно прологарифмировать обе части равенства $y = \frac{(x-3)^2(2x-1)}{(x+1)^3}$, имеем $\ln y = ln\frac{(x-3)^2(2x-1)}{(x+1)^3}$.

Упростим правую часть равенства, используя свойства логарифма:

$$lny = 2\,ln(x-3) + ln(2x-1) - 3ln(x+1)$$

Продифференцируем обе части последнего равенства:

$$(lny)' = \frac{2}{x-3} + \frac{2}{2x-1} - \frac{3}{x+1};$$

Так как $y' = y \cdot (lny)'$, то $y' = y\left(\frac{ln(x+1)}{1+x^2} + \frac{arctgx}{x+1}\right)$.

Упростив выражение в скобках и подставив $y = \frac{(\mathrm{x}-3)^2(2\mathrm{x}-1)}{(\mathrm{x}+1)^3}$, получим

$$y' = \frac{(x-3)(19x-17)}{(x+1)^4}.$$

Пример 19. Найти производную функции

$$y = \frac{x^{\sin x} \cdot \sqrt[3]{x-1} \cdot \cos^2 x}{(1+x^2)\sqrt{(x+2)^3}}.$$

Решение. Действуя так же, находим

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x + \frac{1}{3}\ln(x-1) + 2\ln|\cos x| -$$

$$-\ln(1+x^2) - \frac{3}{2}\ln|x+2|;$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{3(x-1)} + \frac{2\,(-\sin x)}{\cos x} - \frac{2x}{1+x^2} - \frac{3}{2(x+2)};$$

$$y' = y\,\left[\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{3(x-1)} - 2tgx - \frac{2x}{1+x^2} - \frac{3}{2(x+2)}\right] =$$

$$= \frac{x^{\sin x} \cdot \sqrt[3]{x-1} \cdot \cos^2 x}{(1+x^2)\sqrt{(x+2)^3}} \Big[\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{3(x-1)} -$$

$$- 2tgx - \frac{2x}{1+x^2} - \frac{3}{2(x+2)}\Big] .$$

1.6. Геометрический смысл производной

Производная функции $f(x)$, вычисленная в точке x_0 есть угловой коэффициент касательной (тангенс угла наклона), проведенной к графику функции в точке x_0, т.е. $\boldsymbol{k = f'(x_0)}$**.**

Таким образом, ***уравнение касательной*** к кривой $y = f(x)$, проведенной в точке $M(x_0, y_0)$, имеет вид

$$\boldsymbol{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}$$

Прямая NN', проходящая через точку касания M перпендикулярно касательной, называется ***нормалью*** к графику функции $y = f(x)$ в точке M. ***Уравнение нормали***

$$\boldsymbol{x - x_0 = -f'(x_0)(y - y_0)}$$

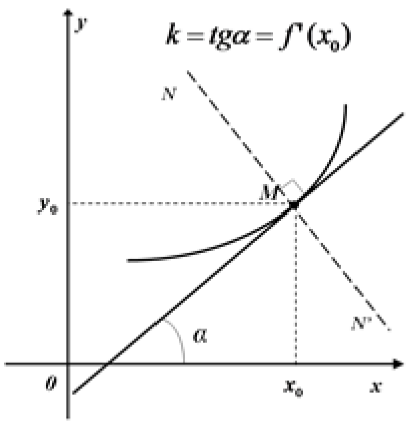


рис.1.1.

Пример 20. Найти угол наклона касательной к графику функции $y = x^3 - x$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. Из геометрического смысл производной получаем, что производная функции *y(x)*, вычисленная при заданном значении x_0, равна тангенсу угла касательной, проведенной к графику этой функции в точке с абсциссой x_0, то есть $tg\alpha = y'(x_0)$. Найдем производную от заданной функции: $y'(x) = (x^3 - x)' = 3x^2 - 1$. В точке $x_0 = 0$ имеем: $y'(0) = -1$.

Тогда окончательно получим, что $tg\alpha = -1$. Отсюда $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ (т.е. 135^0).

Пример 21. Определить в какой точке графика функции $y = \ln(x-1)$ касательная к нему образует с осью абсцисс угол 45^0.

Решение. Имеем соотношение $tg\alpha = y'(x_0)$. Вычислим производную заданной функции: $y'(x) = (\ln(x-1))' = \frac{1}{x-1} \cdot (x-1)' = \frac{1}{x-1}$. Тогда $tg\, 45^0 = \frac{1}{x-1} \Rightarrow 1 = \frac{1}{x-1} \Rightarrow 1 = x - 1 \Rightarrow x = 2$. Значит, в точке $x = 2$ касательная к графику функции $y = \ln(x-1)$ образует с осью *Ox* угол 45^0.

Пример 22. Найти угол между касательными к графику $f(x) = x^2 - 1$ в точках с абсциссами $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$.

Решение. Обозначим угловые коэффициенты касательных в соответствующих точках:

$tg\ \alpha = f'(x_1), tg\ \beta = f'(x_2)$. Найдем производную заданной функции: $f'(x) = (x^2 - 1)' = 2x$.

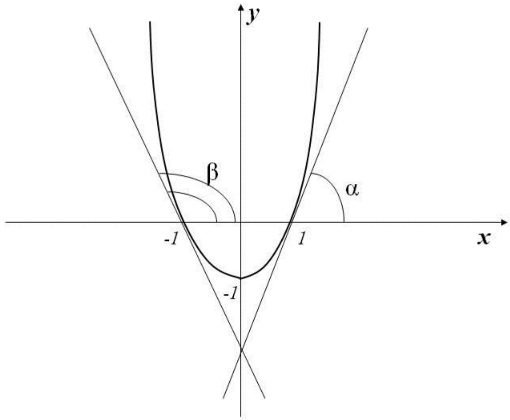


рис.1.2

Теперь вычислим значения производной в указанных точках:

$$tg\ \alpha = f'(1) = 2, tg\ \beta = f'(-1) = -2$$

Вычислим тангенс угла между касательными (для этого используем формулу тангенса разности двух аргументов):

$$tg(\beta - \alpha) = \frac{tg\ \beta - tg\ \alpha}{1 + tg\ \beta \cdot tg\ \alpha} = \frac{-2 - 2}{1 + (-2) \cdot 2} = \frac{4}{3}$$

Тогда угол между касательными $\beta - \alpha = arctg\frac{4}{3}$.

1.7. Механический смысл производной

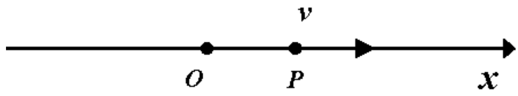


рис.1.3

Пусть точка *P* движется по прямой *Ox* по закону $x = f(t)$. Тогда скорость точки *P* в момент времени *t* – это производная функции *f* в момент *t*:

$$\boldsymbol{v(t) = f'(t)}$$

А ускорение точки *P* – вторая производная функции *f* : $\boldsymbol{a(t) = f''(t)}$.

Пример 23. Закон движения материальной точки по прямой задан формулой $S = t^3 - 3t^2 + 3t + 5$. В какой момент времени t скорость точки равна нулю?

Решение. Скорость данной материальной точки в момент времени *t* есть производная функции *S* по времени *t*, т.е:

$$v(t) = S'(t) = (t^3)' - \left(3t^2\right)' + (3t)' + (5)' = 3t^2 - 6t + 3$$

Найдем время *t*, когда скорость равна нулю: $v(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 6t + 3 = 0 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 1.$

Пример 24. Точка движется по закону $x(t) = 2t^3 - 3t$. Чему равна скорость в момент времени $t = 1$?

Решение. Найдем скорость точки как первую производную от перемещения:

$$v(t) = x'(t) = (2t^3)' - (3t)' = 6t^2 - 3.$$

В момент времени $t = 1$ скорость равна $v(1) = 6 \cdot 1^2 - 3 = 6 - 3 = 3$.

Пример 25. Тело, брошенное вверх, движется по закону $S(t) = 4t^2 + 96t + 50$. Найти скорость тела в произвольный момент времени и его начальную скорость. В какой момент времени скорость тела становится равной нулю? Какую наивысшую высоту в этот момент времени достигнет тело?

Решение. Скорость тела равна производной от пути, т.е.$v(t) = S'(t) = (4t^2)' + (96t)' + (50)' = = 8t + 96$. Тогда начальная скорость (скорость при *t=0*) равна $v_0 = v(0) = 8 \cdot 0 + 96 = 96$.

Найдем момент времени, при котором скорость тела становится равной нулю. Для этого решим уравнение $v(t) = 0$: $8t + 96 = 0$ $\Rightarrow t = \frac{96}{8} = 12$.

В этот момент времени тело будет находиться на высоте: $S(12) = 4 \cdot 12^2 + 96 \cdot 12 + 50 = 1778$.

Задачи

1. Найти по определению производные функций:
а)$y = \sqrt{x}$; б) $y = x^4$; в) $y = \frac{1}{x^2}$; г) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; д) $y = \cos\frac{x}{2}$;

е) $y = \dfrac{1}{3x+4}$; ж) $y = \sqrt{1+x^2}$; з) $y = x \cdot \sin x$.

Найти производную функции:

2. $y = x^4 + 3x^2 - 2x + 1$

3. $y = 7x^7 + 3x^2 - 4x + 1$

4. $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ ()

5. $y = 3\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[4]{x^3}$

6. $y = \left(\sqrt{x} - 1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1\right)$

7. $y = 3\sqrt{x} + 4\cos x - 2tgx + 3$

8. $y = 4x^2 + \sin x + \ln x + \frac{1}{x^2}$

9. $y = x \cdot sinx$

10. $y = x^3 ctgx$

11. $y = \frac{tgx}{\sqrt[3]{x^2}}$

12. $y = \frac{cosx}{1+sinx}$

13. $y = 3x^3 \log_2 x + \frac{x^2}{e^x}$

14. $y = \frac{x-1}{x+1}$

15. $y = \frac{x^2+1}{x^3-x}$

16. $y = \frac{1}{x^3+3x-1}$

17. $y = \ln tg\frac{2x+1}{4}$

18. $y = \sin 2x - \cos^2 x$

19. $y = \sqrt{3x + \cos 3x}$

20. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 3}\right)$

21. $y = 3^{\cos^2 x}$

22. $y = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg\frac{x}{\sqrt{2}}$

23. $y = \frac{1}{6\sqrt{2}} \arcsin\frac{x^3}{\sqrt{8}}$

24. $y = \ln\frac{x^2}{1-x^2}$

25. $y = \ln\left(3x^2 + \sqrt{9x^4 + 1}\right)$

26. $y=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)$

27. $y=\frac{1}{2}e^{x^2}\left(\sin 2x+\cos 2x\right)$

28. $y=\frac{2^x}{\ln 2}\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)$

29. $y=tg^3\frac{x}{3}$

30. $y=2^{3x^2}+\ln\sin x$

31. $y=\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$

32. $y=\ln\sin(3x+2)$

33. $y=\frac{e^{-x^2}}{x-3}$

34. $y=\arcsin\sqrt{2x+1}$

35. $y=\ln \mathrm{arc\,tg}\sqrt{1+x^2}$

36. $y=\sqrt[3]{\ln^5\sin\left(\frac{3}{5}x\right)}$

37. $y=\frac{2xarctgx-\ln(1+x^2)}{2^x}$

38. $y=e^{-x}\cdot tg\left(\frac{1}{x}\right)+arctg(x^2)$

Указание. В приведенных ниже примерах прежде чем вычислять производную, целесообразно выполнить логарифмирование.

39. $y=\left(3x^2+3x-1\right)^x$

40. $y=(x+1)^{\ln x}$

41. $y=\frac{2^x\sqrt{4x+1}}{\left(2x-1\right)^3\sqrt[3]{x^3+2}}$

42. $y=\dfrac{\left(x^2-1\right)^3\arcsin\sqrt{x}}{x^4\left(3x+2\right)}$

43. $y=\dfrac{\sqrt[5]{(x-2)^4}}{x^5\cdot\sqrt[3]{(2x+7)^7}}$

44. $y=\dfrac{\sqrt{2x+9}}{\sqrt{(x+7)\ (3x+4)}}$

45. $y=\dfrac{(x+4)^3\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt[7]{(x+1)^5}\,(x-5)^2}$

Указание. В приведенных ниже примерах использовать материалы параграфов «геометрический/механический смысл производной».

46. Записать уравнение касательной к графику функции $f(x)=\ln(2x+4)$ в точке $x_0=-\frac{1}{2}$.

47. Записать уравнение касательной к графику функции $y=x^2\ln x$ в точке $x_0=e$.

48. Записать уравнение касательной к графику функции $f(x)=e^{2x+1}$ в точке, в которой угловой коэффициент касательной равен 2.

49. Записать уравнение касательной к графику функции $y=-x^2+3x-2$, которая параллельна прямой $y=x$.

50. Найти угол между касательными к графику функции $f(x)=x^2+3x-1$ в точках с абсциссами $x=-1$ и $x=1$.

51. Записать уравнение касательной к графику функции $y = 0.5x^2 - 3x + 1$, проходящей под углом 45° к прямой $y = 0$.

52. Найти угол, под которым пересекаются прямая $y = 4 - x$ и парабола $y = 4 - 0.5x^2$.

53. Точка движется по закону $x(t) = 2t^2 - t$. Чему равна скорость в момент времени $t = 10$ с?

54. Точка движется по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + +3t + 1$. В какие моменты времени ее скорость будет равна нулю?

55. Две материальные точки движутся прямолинейно по законам $x_1(t) = 2.5t^2 - 6t + 1$ и $x_2(t) = 0.5t^2 + +2t - 3$. В какой момент времени их скорости будут равны?

56. По прямой движутся две материальные точки по законам $x_1(t) = t^3$ и $x_2(t) = 6t^2 - 9t$. В каком промежутке времени скорость первой точки больше скорости второй точки?

57. Закон движения материальной точки по прямой имеет вид $x(t) = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$.

a) В какие моменты времени точка находится в начале координат?

b) В какие моменты времени направление ее движения совпадает с положительным направлением Ox?

c) В какие моменты времени ее ускорение равно 0?

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1

Исходя из определения производной (не пользуясь формулами дифференцирования), найти производную функции:

2.1 $y = 2x^3 + 5x^2 - 7x - 4$

2.2 $y = -\operatorname{ctg} x - x$

2.3 $y = \sqrt[3]{x^2}$

2.4 $y = 5(\operatorname{tg} x - x)$

2.5 $y = \sqrt{x}$

2.6 $y = \dfrac{1}{x^3}$

2.7 $y = \dfrac{1}{e^x + 1}$

2.8 $y = \dfrac{1}{x^2 + x - 6}$

2.9 $y = 3x^2 + 3x - 5$

2.10 $y = \sin 3x - x$

2.11 $y = x + \cos 2x$

2.12 $y = \dfrac{1 - x}{1 + x}$

2.13 $y = \sqrt{x - 1}$

2.14 $y = \dfrac{2}{(x - 2)^2}$

2.15 $y = \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{(x + 1)^2}$

2.16 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 2x$

2.17 $y = \operatorname{tg} 2x - 5$

2.18 $y = \sqrt{4x + 1}$

2.19 $y = 3 + \operatorname{ctg} 2x$

2.20 $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

2.21 $y = x + 3x^2 - \dfrac{x^3}{3}$

2.22 $y = 3\sqrt[3]{x} + 4$

2.23 $y = \dfrac{2x}{x + 3}$

2.24 $y = \dfrac{1}{\sin x}$

2.25 $y = \dfrac{1}{\cos x}$

2.26 $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

2.27 $y = \dfrac{1}{\sqrt{3 - x}}$

2.28 $y = \sqrt{x^2 + 3} + 4$

2.29 $y = 2x - \cos 3x$

2.30 $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Задание 2

Найти производную:

2.1 $y = 3x^2 + \sqrt[3]{x} - \dfrac{1}{x^2} + 3$

2.2 $y = 4x^5 - \sqrt[4]{x^3} + \dfrac{1}{x^3} - \sqrt[3]{3}$

2.3 $y = x^{10} - 2\sqrt{x} - \dfrac{1}{x} + \sqrt[4]{2}$

2.4 $y = 7x^4 - \sqrt[7]{x^2} - \dfrac{1}{x^4} + \sqrt{7}$

2.5 $y = 8x^3 - 3\sqrt[5]{x^4} - \frac{1}{x^2} + \sqrt[3]{3}$

2.6 $y = x^{10} - 3\sqrt[3]{x^7} + \frac{1}{x^2} - \sqrt[3]{10}$

2.7 $y = 10x^5 - \frac{1}{4x^4}$

2.8 $y = 7x^5 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt{2}$

2.9 $y = 3x^{12} + 4\sqrt[3]{x^7} - \frac{1}{x^2} + \sqrt[4]{10}$

2.10 $y = 7x^3 + \frac{1}{2x^2} + \sqrt{x + \sqrt[3]{5}}$

2.11 $y = 5x^7 + \sqrt[6]{x^5} - \frac{1}{x^3} + \sqrt[3]{3}$

2.12 $y = 4x^9 - \sqrt[7]{x^3} + \frac{1}{x^4} - \sqrt[7]{2}$

2.13 $y = 9x^5 - 7\sqrt[3]{x^8} + \frac{3}{x^8} - 2\sqrt[4]{5}$

2.14 $y = -7x^3 + 2\sqrt[5]{x^3} + \frac{4}{x^8} - 3\sqrt[3]{4}$

2.15 $y = -5x^4 - 3\sqrt[4]{x^5} + \frac{5}{x^7} - \sqrt[5]{6}$

2.16 $y = -3x^6 + 5\sqrt[4]{x^3} - \frac{2}{x^7} - \sqrt[5]{6}$

2.17 $y = -6x^8 - 4\sqrt[9]{x^5} - \frac{7}{x^6} + 3\sqrt[8]{3}$

2.18 $y = 8x^3 - \sqrt[5]{x^6} + \frac{6}{x^9} - 4\sqrt[9]{5}$

2.19 $y = -12x^4 + 2\sqrt[6]{x^7} - \frac{3}{x^7} + 7\sqrt[3]{2}$

2.20 $y = -4x^7 + 3\sqrt[7]{x^3} + \frac{4}{x^3} - 2\sqrt[5]{3}$

2.21 $y = x^7 - 3\sqrt[4]{x^7} + \frac{1}{x^5} - \sqrt[3]{13}$

2.22 $y = 12x^6 - \dfrac{2}{3x^3}$

2.23 $y = 7x^8 - 6\sqrt[4]{x} + 7$

2.24 $y = 4x^{17} + 4\sqrt[5]{x^8} - \dfrac{1}{x^9} + \sqrt[4]{19}$

2.25 $y = 3x^7 + \dfrac{1}{3x^4} + \sqrt{2x + \sqrt[3]{5}}$

2.26 $y = x^{15} - 3\sqrt[5]{x^2} + \dfrac{6}{x^5} - \sqrt{34}$

2.27 $y = 7x^5 - \dfrac{1}{2x} + \sqrt{3}$

2.28 $y = 5x^7 - 3\sqrt[5]{x} + \sqrt{7}$

2.29 $y = 7x^{19} + 2\sqrt[3]{x^5} - \dfrac{1}{x^7} + \sqrt[5]{16}$

2.30 $y = x^7 + \dfrac{1}{9x^3} + \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{5}}$

Задание 3

Найти производную:

3.1. $y = (\dfrac{1}{\sqrt{x}} + 2)tgx$

3.2. $y = (\sqrt{x} - 4)\cos x$

3.3. $y = \sqrt[3]{x^2}\ tgx$

3.4. $y = 5^x(1 - \dfrac{6}{\sqrt[13]{x^8}})$

3.5. $y = 2^x arctg 4x$

3.6. $y = \cos x(1 + \frac{6}{\sqrt{x^3}})$

3.7. $y = (\sqrt{x^3} - 7)tgx$

3.8. $y = 2\cos x(x^2 - 1)$

3.9. $y = \sqrt[5]{x}\sin x$

3.10. $y = 4^x arctgx$

3.11. $y = \arccos x \ ctgx$

3.12. $y = \sin x \arcsin x$

3.13. $y = arcctgx \ \log_3 x$

3.14. $y = \sqrt[5]{x}\log_2 x$

3.15. $y = \sin x \log_7 x$

3.16. $y = e^x arcctgx$

3.17. $y = e^x ctgx$

3.18. $y = \sqrt{x}\cos x$

3.19. $y = 6^x arctgx$

3.20. $y = (\sqrt[3]{x} + 1)arctgx$

3.21. $y = (x^3 + 1)\sin x$

3.22. $y = (\sqrt{x} - 4)\sin x$

3.23. $y = \sqrt[3]{x}\cos x$

3.24. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\sin x$

3.25. $y = e^x \arcsin x$

3.26. $y = xarctgx$

3.27. $y = \sqrt{x}\sin x$

3.28. $y = \sin x \ \cdot arctg \ x$

3.29. $y = 2^x tgx$

3.30. $y = 3^x ctgx$

Задание 4

Найти производную:

4.1. $y=\dfrac{2\left(3x^3+4x^2-x-2\right)}{15\sqrt{1+x}}$

4.2. $y=\dfrac{\left(2x^2-1\right)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$

4.3. $y=\dfrac{x^4-8x^2}{2\left(x^2-4\right)}$

4.4. $y=\dfrac{2x^2-x-1}{3\sqrt{2+4x}}$

4.5. $y=\dfrac{\left(1+x^8\right)\sqrt{1+x^8}}{12x^{12}}$

4.6. $y=\dfrac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$

4.7. $y=\dfrac{\left(x^2-6\right)\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}{120x^5}$

4.8. $y=\dfrac{\left(x^2-8\right)\sqrt{x^2-8}}{6x^3}$

4.9. $y=\dfrac{4+3x^3}{x\sqrt[3]{\left(2+x^3\right)^2}}$

4.10. $y=\sqrt[3]{\dfrac{\left(1+x^{3/4}\right)^2}{x^{3/2}}}$

4.11. $y=\dfrac{x^6+x^3-2}{\sqrt{1-x^3}}$

4.12. $y=\dfrac{\left(x^2-2\right)\sqrt{4+x^2}}{24x^3}$

4.13. $y = \dfrac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$

4.14. $y = \dfrac{\sqrt{x-1}\,(3x+2)}{4x^2}$

4.15. $y = \dfrac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}{3x^3}$

4.16. $y = \dfrac{x^6+8x^3-128}{\sqrt{8-x^3}}$

4.17. $y = \dfrac{\sqrt{2x+3}\,(x-2)}{x^2}$

4.18. $y = \left(1-x^2\right)\sqrt[5]{x^3+\dfrac{1}{x}}$

4.19. $y = \dfrac{\left(2x^2+3\right)\sqrt{x^2-3}}{9x^3}$

4.20. $y = \dfrac{x-1}{\left(x^2+5\right)\sqrt{x^2+5}}$

4.21. $y = \dfrac{(2x+1)\sqrt{x^2-x}}{x^2}$

4.22. $y = 2\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$

4.23. $y = \dfrac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+5}}$

4.24. $y = 3\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x+1}$

4.25. $y = 3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)}{(x-1)^2}}$

4.26. $y = \dfrac{x+7}{6\sqrt{x^2+2x+7}}$

4.27. $y=\dfrac{x\sqrt{x+1}}{x^2+x+1}$

4.28. $y=\dfrac{x^2+2}{2\sqrt{1-x^4}}$

4.29. $y=\dfrac{(x+3)\sqrt{2x-1}}{2x+7}$

4.30. $y=\dfrac{3x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+2}}$

Задание 5

Найти производную:

5.1. $y=\sin\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}\dfrac{\sin^2 3x}{\cos 6x}$

5.2. $y=\cos\ln 2-\dfrac{1}{3}\dfrac{\cos^2 3x}{\sin 6x}$

5.3. $y=\operatorname{tg}\lg\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\dfrac{\sin^2 4x}{\cos 8x}$

5.4. $y=\operatorname{ctg}\sqrt[3]{5}-\dfrac{1}{8}\dfrac{\cos^2 4x}{\sin 8x}$

5.5. $y=\dfrac{\cos\sin 5\cdot\sin^2 2x}{2\cos 4x}$

5.6. $y=\dfrac{\sin\cos 3\cdot\cos^2 2x}{4\sin 4x}$

5.7. $y=\dfrac{\cos\ln 7\cdot\sin^2 7x}{7\cos 14x}$

5.8. $y=\cos(\operatorname{ctg} 2)-\dfrac{1}{16}\dfrac{\cos^2 8x}{\sin 16x}$

5.9. $y=\operatorname{ctg}(\cos 2)+\dfrac{1}{6}\dfrac{\sin^2 6x}{\cos 12x}$

5.10. $y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} 2} - \frac{1}{20}\frac{\cos^2 10x}{\sin 20x}$

5.11. $y = \frac{1}{3}\cos\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{10}\frac{\sin^2 10x}{\cos 20x}.$

5.12. $y = \ln\sin\frac{1}{2} - \frac{1}{24}\frac{\cos^2 12x}{\sin 24x}$

5.13. $y = 8\sin(\operatorname{ctg} 3) + \frac{1}{5}\frac{\sin^2 5x}{\cos 10x}$

5.14. $y = \frac{\cos(\operatorname{ctg} 3)\cdot\cos^2 14x}{28\sin 28x}$

5.15. $y = \frac{\cos\left(\operatorname{tg}\frac{1}{3}\right)\cdot\sin^2 15x}{15\cos 30x}$

5.16. $y = \frac{\sin\left(\operatorname{tg}\frac{1}{7}\right)\cdot\cos^2 16x}{32\sin 32x}$

5.17. $y = \frac{\operatorname{ctg}\left(\sin\frac{1}{3}\right)\cdot\sin^2 17x}{17\cos 34x}$

5.18. $y = \frac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg} 2}\cdot\cos^2 18x}{36\sin 36x}$

5.19. $y = \frac{\operatorname{tg}(\ln 2)\cdot\sin^2 19x}{19\cos 38x}$

5.20. $y = \operatorname{ctg}(\cos 5) - \frac{1}{40}\frac{\cos^2 20x}{\sin 40x}$

5.21. $y = \sqrt{\operatorname{tg} 4} + \frac{\sin^2 21x}{21\cos 42x}$

5.22. $y = \cos(\ln 13) - \frac{1}{44}\frac{\cos^2 22x}{\sin 44x}$

5.23. $y = \ln\cos\frac{1}{3} + \frac{\sin^2 23x}{23\cos 46x}$

5.24. $y=\mathrm{ctg}\left(\sin\frac{1}{13}\right)-\frac{1}{48}\frac{\cos^2 24x}{\sin 48x}$

5.25. $y=\sin\ln 2+\frac{\sin^2 25x}{25\cos 50x}$

5.26. $y=\sqrt[3]{\cos\sqrt{2}}-\frac{1}{52}\frac{\cos^2 26x}{\sin 52x}$

5.27. $y=\sqrt[7]{\mathrm{tg}(\cos 2)}+\frac{\sin^2 27x}{27\cos 54x}$

5.28. $y=\sin\sqrt[3]{\mathrm{tg}\,2}-\frac{\cos^2 28x}{56\sin 56x}$

5.29. $y=\cos^2\sin 3+\frac{\sin^2 29x}{29\cos 58x}$.

5.30. $y=\sin^3\cos 2-\frac{\cos^2 30x}{60\sin 60x}$

Задание 6

Применяя метод логарифмического дифференцирования, найдите производные функций:

6.1. $y=(\mathrm{arctg}\,x)^{(1/2)\ln(\mathrm{arctg}\,x)}$

6.2. $y=\left(\sin\sqrt{x}\right)^{\ln\left(\sin\sqrt{x}\right)}$

6.3. $y=(\sin x)^{5\mathrm{e}^x}$

6.4. $y=(\arcsin x)^{\mathrm{e}^x}$

6.5. $y=(\ln x)^{3^x}$

6.6. $y = x^{\arcsin x}$

6.7. $y = (\mathrm{ctg}\, 3x)^{2\mathrm{e}^x}$

6.8. $y = x^{\mathrm{e}^{\mathrm{tg}\, x}}$

6.9. $y = (\mathrm{tg}\, x)^{4\mathrm{e}^x}$

6.10. $y = (\cos 5x)^{\mathrm{e}^x}$

6.11. $y = (x \sin x)^{8\ln(x \sin x)}$

6.12. $y = (x-5)^{\cos x}$

6.13. $y = (x^3+4)^{\mathrm{tg}\, x}$

6.14. $y = x^{\sin x^3}$

6.15. $y = (x^2-1)^{\sin x}$

6.16. $y = (x^4+5)^{\mathrm{ctg}\, x}$

6.17. $y = (\sin x)^{5x/2}$

6.18. $y = (x^2+1)^{\cos x}$

6.19. $y = 19^{x^{19}}\, x^{19}$

6.20. $y = x^{3^x} \cdot 2^x$

6.21. $y = \left(\sin\sqrt{x}\right)^{\mathrm{e}^{1/x}}$

6.22. $y = x^{\mathrm{e}^{\mathrm{ctg}\, x}}$

6.23. $y = x^{\mathrm{e}^{\cos x}}$

6.24. $y = x^{2^x} \cdot 5^x$

6.25. $y = x^{e^{\sin x}}$

6.26. $y = (\operatorname{tg} x)^{\ln(\operatorname{tg} x)/4}$

6.27. $y = x^{e^{\operatorname{arctg} x}}$

6.28. $y = x^{29^x} \cdot 29^x$

6.29. $y = (\cos 2x)^{\ln(\cos 2x)/4}$

6.30. $y = x^{e^x} x^9$

Задание 7

Используя предварительное логарифмирование, вычислить производные следующих функций:

7.1. $y = \sqrt[3]{\dfrac{(x-1)(x+1)^5}{x^{11}}}$

7.2. $y = \dfrac{\sqrt[3]{(x-2)^4}\,x^2}{\sqrt{(x-2)^3(3x+5)}}$

7.3. $y = \dfrac{\sqrt[5]{(x^3-2)^3}}{x^7 \cdot \sqrt[3]{(2x+1)^5}}$

7.4. $y = \dfrac{x\sqrt[3]{x+3}}{\sqrt[5]{x+5}}$

7.5. $y = x^3\sqrt{\dfrac{x-1}{(x+2)\sqrt{x-2}}}$

7.6. $y = \sqrt{\frac{(x-1)^3(x+1)}{(x-10)^5\sqrt{x+12}}}$

7.7. $y = \frac{\sqrt[5]{(x+6)^3}(x-1)}{(x-10)^5\sqrt{x+12}}$

7.8. $y = \frac{\sqrt[4]{(x-1)^3}x^5}{(x-3)^3\sqrt{x-2}}$

7.9. $y = \frac{\sqrt[3]{(x+2)\sqrt{(x-4)}}}{(x-1)^5}$

7.10. $y = \frac{\sqrt[3]{(x-7)^5(x+1)}}{\sqrt{(x+1)}}$

7.11. $y = (x-3)^2\sqrt{\frac{(x-1)^3}{(x+1)^5(x-2)}}$

7.12. $y = \sqrt{\frac{(1-2x)^4}{\sqrt[7]{(x+1)^5}(3x-2)}}$

7.13. $y = \frac{\sqrt{x^3-x+1}}{(x+4)^2\sqrt[3]{x-1}}$

7.14. $y = \frac{\sqrt{x^2-1}(x+3)}{x^7\sqrt[3]{4-x}}$

7.15. $y = \frac{(x+4)^3\sqrt{x^2-x+1}}{(x+1)^5\sqrt[3]{x-1}}$

7.16. $y = \frac{\sqrt{x^2+2x}}{\sqrt[5]{(x-1)^2}\sqrt[3]{x-1}}$

7.17. $y = \frac{\sqrt[3]{x^2-3x+4}(2-3x)^2}{(x+1)^5}$

7.18. $y = \frac{x^3\sqrt{1-x^2}}{\sqrt[7]{(x+1)^2}}$

7.19. $y = (x+1)^2\sqrt{\frac{(x-1)^5(x+2)}{(x+1)^3}}$

7.20. $y = (2x-1)^3\sqrt{\frac{(1-3x)^5}{(x+1)}}$

7.21. $y = (x+1)(x+2)^2(x+3)^3\sqrt{(2x-1)^3}$

7.22. $y = \frac{(x-1)\sqrt[4]{1-2x}}{(x-2)^2(x-3)^3}$

7.23. $y = \frac{\sqrt[3]{2x+3}}{(x+2)^2\sqrt{(x-3)^3}}$

7.24. $y = x\sqrt[3]{\frac{1-x-x^3}{(2x+1)^2}}$

7.25. $y = (x-1)\sqrt[3]{\frac{2-x^2}{(x-3)^4}}$

7.26. $y = (x+1)^4(x-1)^3\ \sqrt{\frac{3x-1}{x+3}}$

7.27. $y = \frac{(x-1)}{(1-2x)^2}\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$

7.28. $y = x(x+2)^2(x-2)^3\sqrt{x^2-1}$

7.29. $y = \sqrt{\frac{x^2+1}{(x-3)^5(2x-1)}}$

7.30. $y = \sqrt{\frac{(x+10)\sqrt[3]{x-2}}{(2x-3)^5}}$

Задание 8

Проверьте, что данная функция удовлетворяет дифференциальному уравнению:

8.1. $y = \ln\frac{1}{1+x}$, $xy' + 1 = e^y$

8.2. $y = C\sqrt{1+e^{2x}}$, $ye^{2x} - \left(1+e^{2x}\right)y' = 0$

8.3. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\left(1-x^2\right)y' - xy = 1$

8.4. $y = \ln\frac{1}{C-e^x}$, $y' = e^{x+y}$

8.5. $y = x + \ln x$, $x^2\left(1-\ln x\right)y'' + xy' - y = 0$

8.6. $y = 1 - \ln|x|$, $x - y + xy' = 0$

8.7. $y = \sqrt{x^2 - x}$, $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$

8.8. $y = \left(1+x\right)e^{-x} - 2$, $y'' - 2y' + y = -2$

8.9. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{x}$, $xy'' + 2y' - xy = 0$

8.10. $y = x\ln 2x$, $y'x = x + y$

8.11. $y = xe^{2x+1}$, $y'x = y\left(\ln y - \ln x\right)$

8.12. $y = \ln\left(3+e^x\right)$, $y' = e^{x-y}$

8.13. $y = e^{\frac{\pi}{4} - arctgx}$, $\left(1+x^2\right)y' + y = 0$

8.14. $y = \arccos e^{4x}$, $\ln\cos y + xy'tgy = 0$

8.15. $2^x - 2^y = \frac{3}{32}$, $y' = 2^{x-y}$

8.16. $y = \ln tge^x$, $y' = e^{x+y} + e^{x-y}$

8.17. $y = x\arcsin x$, $xy' - y = xtg\frac{y}{x}$

8.18. $y = Ce^{\sqrt{1-x^2}}$, $xy + \sqrt{1-x^2} \cdot y' = 0$

8.19. $y = tgx - 1 + e^{-tgx}$, $y' \cos^2 x + y = tgx$

8.20. $y = x \sin x$, $xy' - y = x^2 \cos x$

8.21. $y = \frac{1}{2} x^2 e^{-x^2}$, $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

8.22. $y = \frac{x \cos x}{1 + \sin x}$, $y' \cos x + y = 1 - \sin x$

8.23. $y = \frac{4(x-1)}{x^3}$, $y' + \frac{3}{x} y = \frac{4}{x^3}$

8.24. $y = arctgx - 1 + e^{-arctgx}$, $\left(1 + x^2\right) y' + y = arctgx$

8.25. $y = \frac{1}{2} x^2 \ln x$, $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x$

8.26. $y = e^{-x} \left(\frac{1}{2} e^x + 1 \right)^2$, $y' + y = \sqrt{y} \cdot e^{\frac{x}{2}}$

8.27. $y = e^{-\arcsin x} + \arcsin x - 1$, $y' \sqrt{1 - x^2} + y = \arcsin x$

8.28. $y = (x+1)(x - arctgx)$, $y - y' = y^2 + xy'$

8.29. $y = \frac{1}{4} x^4 e^{-2x^2}$, $y' + 4xy = 2xe^{-x^2} \sqrt{y}$

8.30. $y = -\frac{1}{\cos x \cdot \sqrt[3]{3tgx}}$, $y' = y\left(y^3 \cos x + tgx\right)$

1.8 Производные высших порядков

Определение. Производную от производной $f'(x)$ называют второй производной от функции f(x) и обозначают $f''(x)$: $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$. Производную от $f''(x)$ называют третьей производной функции f(x) и обозначают $f'''(x)$. Таким образом,

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)', \quad f'''(x)=\left(f''(x)\right)', \; . \; . \; . \; , \; f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)', \; . \; . \; .$$

Общепринятыми являются и другие обозначения производной n-го порядка функции y = f(x): $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ или $\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$.

Пример 26. Найти y'', y''', если $y=\ln(\sin x)$.

Решение.

$$y''=\left(\ln(\sin x)\right)''=\left(\left(\ln(\sin x)\right)'\right)'=\left(\frac{1}{\sin x}\cos x\right)'=(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$y'''=\left(\ln(\sin x)\right)'''=\left(\left(\ln(\sin x)\right)''\right)'=\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)'=-\left((\sin x)^{-2}\right)'=$$

$$=-(-2)(\sin x)^{-3}\cos x=\frac{2\cos x}{\sin^3 x}$$

Задачи

Найти производные второго порядка:

58. $y=tgx$

59. $y=\dfrac{1}{5}x^5(5\ln x-1)$

60. $y=\sqrt{1+x^2}\,arctgx$

Найти производные третьего порядка:

61. $y=x\ln x$

62. $y = \arcsin x$

63. $y = xe^{-x}$

Задачи для самостоятельного решения

Задание 9

Найти производную второго порядка:

9.1. $y = \ln tgx$

9.2. $y = \ln\sin(2x+5)$

9.3. $y = \ln ctg2x$

9.4. $y = 2^{x^2}$

9.5. $y = \sin^3 \frac{x}{2}$

9.6. $y = \ln(x^2+5)$

9.7. $y = \ln tg \frac{x}{2}$

9.8. $y = \sqrt{1-3x^2}$

9.9. $y = e^{\sqrt{2x}}\left(\sqrt{2x}-1\right)$

9.10. $y = \sin^2 \frac{x}{2}$

9.11. $y = \cos^3 \frac{x}{3}$

9.12. $y = \sqrt{2x^2+1}$

9.13. $y = \ln ctg \frac{x}{2}$

9.14. $y = tg \frac{3}{x^3}$

9.15. $y = \arcsin\sqrt{2x}$

9.16. $y = arctg\sqrt{3x}$

9.17. $y = ctg\,\frac{1}{x^2}$

9.18. $y = ctg\sqrt{\frac{x}{2}}$

9.19. $y = \frac{1}{\sqrt{\sin 2x}}$

9.20. $y = \frac{1}{\sqrt{\cos 3x}}$

9.21. $y = \ln\cos 2x$

9.22. $y = \cos\frac{2}{x^2}$

9.23. $y = \ln\cos\frac{x}{2}$

9.24. $y = \arccos\sqrt{x}$

9.25. $y = arcctg\sqrt{2x}$

9.26. $y = tg^2\,\frac{x}{2}$

9.27. $y = ctg^3\,\frac{x}{3}$

9.28. $y = arctge^{2x}$

9.29. $y = 3^{x^3}$

9.30. $y = e^{\frac{1}{x^2}}$.

1.9 Производная функции, заданной параметрически

Производная первого порядка

Пусть даны две функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ одной независимой переменной t, определенные и непрерывные на некотором промежутке. Предположим теперь, что функции

$x = x(t)$ и $y = y(t)$ имеют производные, причем $x(t) \neq 0$ на этом промежутке. Тогда y можно рассматривать как функцию, зависящую от переменной x посредством переменной t, называемой параметром. В этом случае говорят, что функция y от x задана параметрически.

Производная функции y по переменной x вычисляется по формуле

$$y'_x(t) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}.$$

Производная второго порядка

Вторая производная функции y, заданной параметрически, по переменной x находится по следующей формуле:

$$y''_{xx}(t) = \frac{y''_{tt}(t)x'_t(t) - x''_{tt}(t)y'_t(t)}{\left(x'_t(t)\right)^3}$$

Пример 27. Найти $y'_x(t)$ и $y''_{xx}(t)$ функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = 1/t, \qquad t \in \left(-1; 0\right) \cup \end{cases}$$

Решение. Находим производные $x'_t(t)$ и $y'_t(t)$:

$$x'_t = \left(\sqrt{1-t^2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}\left(-2t\right) = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}};$$

$$y'_t = \left(\frac{1}{t}\right)' = -\frac{1}{t^2};$$

Таким образом, в точках, в которых $x'_t(t) \neq 0$, имеем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{1}{t^2} : \left(-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right) = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t^3};$$

Для нахождения производной $y''_{xx}(t)$ вычислим производные $x''_{tt}(t),\ y''_{tt}(t)$:

$$x''_{tt}(t) = \left(x'_t\right)' = \left(-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)' = -\frac{\sqrt{1-t^2} - t\left(\sqrt{1-t^2}\right)'}{1-t^2} = -\frac{\sqrt{1-t^2} + \dfrac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}}{1-t^2} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\left(1-t^2\right)^3}}$$

$$y''_{tt} = \left(-\frac{1}{t^2}\right)' = \frac{2}{t^3}$$

Подставляя найденные производные в формулу , получаем:

$$y''_{xx}(t) = \frac{y''_{tt}(t)x'_t(t) - x''_{tt}(t)y'_t(t)}{\left(x'_t(t)\right)^3} = \frac{\dfrac{2}{t^3}\left(-\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{\left(1-t^2\right)^3}}\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)}{\left(-\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^3} =$$

$$= \frac{-\frac{2}{t^2\sqrt{1-t^2}} - \frac{1}{t^2\sqrt{\left(1-t^2\right)^3}}}{\left(-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^3} = -\frac{\left(2\left(1-t^2\right)+1\right)\sqrt{\left(1-t^2\right)^3}}{t^2\sqrt{\left(1-t^2\right)^3}\left(-t\right)^3} = \frac{3-2t^2}{t^5}$$

Можно вычислять вторую производную $y''_{xx}(t)$, не применяя формулу. Проиллюстрируем это на примере.

Пример 28. Найти $y'_x(t)$ и $y''_{xx}(t)$ функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^3 \end{cases}$

Решение. Сначала сделаем предварительные вычисления: $x'(t) = \frac{1}{t}, y'(t) = 3t^2$. Значит, первая производная имеет вид $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3t^2}{(\frac{1}{t})} = 3t^3$.

Теперь перейдем к вычислению $y''_{xx}(t)$. Заметим, что $y''_{xx} = (y'_x)'_x$. Рассмотрим пару функций $y'_x(t), x(t)$ как новую параметрически заданную функцию, для которой нам нужно вычислить производную $(y'_x)'_x$. Тогда получаем, что

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(3t^3)'}{(\frac{1}{t})} = \frac{9t^2}{(\frac{1}{t})} = 9t^3$$

Задачи

Найти $y'_x(t)$ и $y''_{xx}(t)$ функции, заданной параметрически:

64. $x(t) = 3\cos t, y(t) = -2\sin t$

65. $x(t)=t^2, y(t)=\frac{t^3}{3}-t$

66. $x(t)=e^{2t}, y(t)=e^{3t}$

67. $x(t)=t^2, y(t)=t^3+t$

68. $x(t)=4\cos^3 t, y(t)=4\sin^3 t$

69. $x(t)=\frac{1-t}{(t+1)^2}, y(t)=\frac{t(1-t)}{(t+1)^2}$

70. $x(t)=\frac{t}{t^2+1}, y(t)=\frac{t^2}{t^2+1}$

71. $x(t)=\arcsin t, y(t)=\ln(1-t^2)$

72. $x(t)=\operatorname{arctg} t, y(t)=\ln(1+t^2)$

73. Показать, что функция $y(x)$, заданная параметрически уравнениями $x(t)=\sin t,\qquad y(t)=e^{t\sqrt{2}}+e^{-t\sqrt{2}}$, удовлетворяет дифференциальному уравнению $(1-x^2)y''_{xx}-xy'_x=2y$.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 10

Найти $y'_x(t)$ функции, заданной параметрически:

10.1. $\begin{cases} x=2t-t^2, \\ y=3t-t^3. \end{cases}$

10.2. $\begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t. \end{cases}$

10.3. $\begin{cases} x=2t^3+t, \\ y=\ln t. \end{cases}$

10.4. $\begin{cases} x=7(t-\sin t), \\ y=7(1-\cos t). \end{cases}$

10.5. $\begin{cases} x = 2t - t^3, \\ y = 2t^2. \end{cases}$

10.6. $\begin{cases} x = \ln\dfrac{t^2 - 1}{4} \\ y = \sin t \end{cases}$

10.7. $\begin{cases} x = arctg\, t \\ y = \sqrt{t^2 + 1} \end{cases}$

10.8. $\begin{cases} x = \ln\dfrac{\sin t - 1}{2} \\ y = \arcsin t \end{cases}$

10.9. $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \dfrac{1}{t^2 - 5} \end{cases}$

10.10. $\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = \ln\sin t \end{cases}$

10.11. $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = t - arctgt \end{cases}$

10.12. $\begin{cases} x = e^{-t}\sin t \\ y = e^t\cos t \end{cases}$

10.13. $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^2 - \sin t \end{cases}$

10.14. $\begin{cases} x = \ln t + \sin t \\ y = t^2\cos t \end{cases}$

10.15. $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = tarcctg\ t \end{cases}$

10.16. $\begin{cases} x = \sin t + \cos t \\ y = 2^t \end{cases}$

10.17. $\begin{cases} x = t^2 \cos t \\ y = t^2 \sin t \end{cases}$

10.18. $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$

10.19. $\begin{cases} x = \sin t \cos^2 t \\ y = -\cos^3 t \end{cases}$

10.20. $\begin{cases} x = \sin^3 t \\ y = \cos^3 t \end{cases}$

10.21. $\begin{cases} x = \dfrac{t+1}{t^4} \\ y = \dfrac{4}{t^2} + \dfrac{1}{3t} \end{cases}$

10.22. $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^{-t} \sin t \end{cases}$

10.23. $\begin{cases} x = \sin t + t \\ y = \sqrt{t^3 + 1} \end{cases}$

10.24. $\begin{cases} x = \sqrt[3]{t} \\ y = arctgt \end{cases}$

10.25. $\begin{cases} x = \ln^3 t \\ y = \sin(t+1) \end{cases}$

10.26. $\begin{cases} x = \ln(\cos t + 1) \\ y = \sin t + t \end{cases}$

10.27. $\begin{cases} x = \arccos t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$

10.28. $\begin{cases} x = arcctgt \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$

10.29. $\begin{cases} x = tg\, t + 1 \\ y = \sin^2(t-4) \end{cases}$

10.30. $\begin{cases} x = ctgt \\ y = t\cos t + \sin t \end{cases}$

1.10 Производная функции, заданной неявно

Пусть функция $y = f(x)$ задана уравнением $F(x, y) = 0$. Это означает, что $F(x, f(x)) \equiv 0$ на некотором интервале. Тогда функция $y = f(x)$ называется неявно заданной функцией.

Для нахождения производной функции $y = f(x)$, заданной неявно, следует продифференцировать обе части равенства $F(x, y) = 0$, считая y функцией от x. Затем полученное уравнение, в которое будут входить x, y и y', следует разрешить относительно y'. Для нахождения y'' равенство (2) дифференцируется дважды, в результате чего получается уравнение, содержащее x, y, y', y'', которое следует разрешить относительно y'', затем вместо y' подставить функцию от x и y, найденную указанным выше способом.

Пример 29. Найти значения y', y'', если функция у задана неявно уравнением $x^2 + y^2 = 5xy^3$.

Решение. Пусть $y = f(x)$, тогда $x^2 + \left(f(x)\right)^2 = 5x\left(f(x)\right)^3$.

Продифференцируем обе части данного равенства:

$$\left(x^2+\left(f(x)\right)^2\right)'=\left(5x\left(f(x)\right)^3\right)'\Leftrightarrow$$

$$2x+2f(x)f'(x)=5\left(f(x)\right)^3+15x\left(f(x)\right)^2f'(x)\Leftrightarrow$$

$$f'(x)=\frac{2x-5\left(f(x)\right)^3}{15x\left(f(x)\right)^2-2f(x)}$$

Отсюда находим, что $y'=\dfrac{2x-5y^3}{15xy^2-2y}$.

Найдём y''. Имеем, что

$$y''=\left(f'(x)\right)'=\left(\frac{2x-5f^3(x)}{15xf^2(x)-2f(x)}\right)'=$$

$$=\frac{\left(2-15f^2(x)f'(x)\right)\left(15xf^2(x)-2f(x)\right)}{\left(15xf^2(x)-2f(x)\right)^2}-$$

$$-\frac{\left(2x-5f^3(x)\right)\left(15\left(f(x)\right)^2+2xf(x)f'(x)-2f'(x)\right)}{\left(15xf^2(x)-2f(x)\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(20f^3(x)-75xf^4(x)-60x^2f(x)+4x\right)f'(x)-4f(x)+75f^5(x)}{\left(15xf^2(x)-2f(x)\right)^2}$$

Подставив в последнем равенстве значение $f'(x)$, окончательно получаем

$$f''(x)=\frac{1500xf^6(x)-120x^3+150x^2f^3(x)-250f^5(x)}{\left(15xf^2(x)-2\right)^3f^2(x)},$$

Итак, $y' = \dfrac{2x - 5y^3}{15xy^2 - 2y}$, $y'' = \dfrac{1500xy^6 - 120x^3 + 150x^2y^3 - 250y^5}{\left(15xy^2 - 2\right)^3 y^2}$.

Пример 30. Вычислить y' в точке (0, 1), если $e^y + xy = e$.

Решение. Обозначим $y = f(x)$ и подставим в равенство, получим

$$e^{f(x)} + xf(x) = e$$

Продифференцируем обе части полученного равенства:

$$e^{f(x)} \cdot f'(x) + (f(x) + xf'(x)) = 0$$

Теперь перенесем все слагаемые, содержащие , в левую часть, а остальные - в правую:

$$e^{f(x)} \cdot f'(x) + xf'(x) = -f(x) \Rightarrow f'(x) \cdot \left(e^{f(x)} + x\right) = -f(x)$$

Найдем отсюда $f'(x)$:

$$f'(x) = -\frac{f(x)}{e^{f(x)} + x}$$

Значит, $y' = -\frac{y}{e^y + x}$. Теперь вычислим производную y' в точке (0, 1). Для этого подставим в выражение для производной $x = 0$, $y = 1$:

$$y'|_{(0,1)} = -\frac{1}{e^1 + 0} = -\frac{1}{e}$$

Задачи

Найти производные неявно заданных функций:

74. $x^2y^4+10=3x^4y^3+x^5-5$

75. $x^3+x^2y-4=2x^2y^2-6x+1$

76. $e^{xy}=\ln\left(y^2+x^2\right)$

77. $\arcsin y=x^2y^3-7yx^2$

Задачи для самостоятельного решения

Задание 11

Найти производные неявно заданных функций:

11.1. $\arccos^2 xy+\sin y=1$

11.2. $ctg(y+6)=x^5+2y^2$

11.3. $ctgy+x^2-y=9$

11.4. $2^x+2^y=2^{x+y}$

11.5. $x^4+y^4=e^{x+y}$

11.6. $xtgy=x+y^2$

11.7. $\cos\frac{x}{y}+3^{4y}=0$

11.8. $\cos(y+5)=2x+y^3$

11.9. $\arccos x-4y^2=5$

11.10. $x^4-3y+2^y=6$

11.11. $\frac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}=0$

11.12. $x^2+y^2\ln x-4=0$

11.13. $\sin(y-x^2)-3=0$

11.14. $y^2+5x=5^x-\sin y$

11.15. $e^{xy}-y^2=0$

11.16. $y\ arctg\ y-\arcsin x=0$

11.17. $x^4-6x^2y^2+9y^4+15y^2=0$

11.18. $x^2\sin y+2x-y+1=0$

11.19. $x\ +\ln y-x^2e^y=0$

11.20. $e^x\sin y-e^{-y}\cos x=0$

11.21. $x^2y^2-ctgy+3=0$

11.22. $arctgy=xy$

11.23. $\cos x+e^{4y}=9$

11.24. $tg(y-1)=x+y^2$

11.25. $x-3y+e^y=5$

11.26. $2x^2+x=y^3$

11.27. $e^{x+y}=xy$

11.28. $\sin xy=x^2y$

11.29. $x^3+y^2-3xy=0$

11.30. $\sin y=x+3y$

Глава 2. Дифференциал функции

2.1 Дифференциал функции. Правила вычисления дифференциала

Придадим аргументу x в точке x_0 приращение ∇x, тогда функция $y = f(x)$ получит приращение

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Определение. Если существует число A, такое, что $\Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$, то говорят, что $f(x)$ ***дифференцируемая в точке*** x_0. Линейная часть $A \cdot \Delta x$ приращения функции называется ***дифференциалом функции в точке*** $\boldsymbol{x_0}$ и обозначается dfили dy.

Если x – независимое переменное (т.е. не зависит от других переменных), то полагают $dx = \Delta x$.

Вычисление дифференциала

Правила дифференцировании функций аналогичны правилам нахождения производных. Для функций $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{f}$справедливы свойства:

$$\boldsymbol{d(u+v) = du + dv}; \quad \boldsymbol{d(u-v) = du - dv};$$

$$\boldsymbol{d(uv) = udv + vdu}; \quad \boldsymbol{d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{udv - vdu}{v^2}, v \neq 0};$$

Теорема 1. Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 в том и только в том случае, если $f(x)$ имеет производную в этой точке. При этом $df = f'(x_0)dx$.

Пример 1. Найти дифференциал функции $f = x^3$

Решение. Дифференциал df функции $f(x)$находится по формуле $df = f'(x)dx$, поэтому

$$df = (x^3)'dx = 3x^2dx.$$

Пример 2. Найти дифференциал функции $f = 5\cos 3x$в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Решение. По правилу нахождения дифференциала функции в точке, имеем

$$df = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)dx.$$

Находим, $f'(x) = -15\sin 3x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -15\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 15.$

Следовательно, дифференциал df функции $f = 5\cos 3x$в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$ равен $15dx$:

$$df = 15dx.$$

Пример 3. Найти дифференциал функции $f = x\sin^2 x^3$.

Решение.

$$\begin{aligned} df &= f'dx = (x\sin^2 x^3)'dx = \\ &= (\sin^2 x^3 + x \cdot 2\sin x^3 \cos x^3 \cdot 3x^2)dx = \\ &= (\sin^2 x^3 + 3x^3 \sin^2 2x^3)dx \end{aligned}$$

Если в равенстве $\Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$отбросить бесконечно малую величину $o(\Delta x)$, то получим приближённое равенство$\Delta f \approx df$, которое применяется для нахождения приближённого значения функции.

Пример 4. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенно значение x, если g(-5) = -3, $g(x)$ = -2,96 и g'(-5) = 2.

Решение. По определению приращение функции g(x):$\Delta g = g(x) - g(x_0)$. Заменим приращение функции дифференциалом, т.е. будем считать, что $\Delta g \approx dg$.

Тогда, $dg = g(x) - g(x_0)$.

Дифференциал dg функции $g(x)$ находится по формуле $dg = g'(x)dx$, поэтому

$$g'(x_0)dx = g(x) - g(x_0).$$

Учитывая, что $dx = \Delta x = x - x_0$, получаем

$$g'(x_0) \cdot (x - x_0) = g(x) - g(x_0) \Rightarrow 2 \cdot (x - (-5)) = -2{,}96 - (-3)$$

Т.е.

$$2 \cdot (x + 5) = 0{,}02 \Leftrightarrow 2x + 10 = 0{,}02 \Leftrightarrow 2x = -9{,}88 \Leftrightarrow x = -4{,}98$$

Пример 5. Найти приближённое значение $\sqrt{15{,}75}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x}$. Положим $x_0 = 16$, тогда $\Delta x = 15{,}75 - 16 = -0.25$.

Имеем, $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df$, где $f(x_0) = \sqrt{16} = 4$,

$df = f'(x_0)dx$, $dx = \Delta x = -1/4$,

$f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = 1/\left(2\sqrt{x}\right)$, $f'(x_0) = 1/\left(2\sqrt{16}\right) = 1/8$.

Таким образом, $df = \frac{1}{8} \left(-\frac{1}{4}\right) = -1/32$.

Окончательно находим
$\sqrt{15{,}75} \approx 4 - 1/32 = 127/32 = 3{,}96875 \approx 3{,}97$.

2.2 Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора

Определение. Дифференциалом второго порядка $d^2 f$ функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала df, где df рассматривается как функция от x: $d^2 f = d(df)$.

Определение. Дифференциалом третьего порядка $d^3 f$ называется дифференциал от второго дифференциала: $d^3 f = d\left(d^2 f\right)$ и т.д.

Если переменная x является независимой, то $d^2x = d^3x = \ldots = d^n x = \ldots = 0$. В этом случае $d^2 f = f''(x)\,(dx)^2$, $d^3 f = f'''(x)\,(dx)^3$,..., $d^n f = f^{(n)}(x)\,(dx)^n$,…

Для краткости вместо $(dx)^n$ принято писать dx^n , т.е. $d^n f = f^{(n)}(x)\,dx^n$.

Пример 6. Найти дифференциал d^3y функции $y = x^4 - 3x^2 + 4$.

Решение. Последовательно дифференцируя, получаем

$$y'(x) = 4x^3 - 6x, y''(x) = 12x^2 - 6, y'''(x) = 24x.$$

Следовательно, $d^3y = y'''(x)dx^3 = 24xdx^3$.

Если функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и в этой окрестности имеет производные до $(n+1)$-го порядка включительно (т.е. дифференцируема $(n+1)$раз), то справедлива ***формула Тейлора***

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x)$ – остаточный член, являющийся бесконечно малой величиной при $x \to x_0$.

Остаточный член обычно записывают в виде

$$R_{n+1}(x) = o((x - x_0)^n) \text{(в форме Пеано)}$$

или в виде

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \text{ (в форме Лагранжа),}$$

где c – некоторое число междуx_0 и x.

Формула Тейлора допускает и другую запись через дифференциалы

$$\Delta f = \frac{df}{1!} + \frac{d^2 f}{2!} + \frac{d^3 f}{3!} + \ \cdots \ + \frac{d^n f}{n!} + R_{n+1}(x)$$
.

Формулу Тейлора применяют для приближенных вычислений.

Пример 7. Функцию $f(x) = e^{\sin x}$ в окрестности точки $x = 0$ приближенно замените многочленом третьей степени.

Решение. Положив в формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано $x_0 = 0$, получим

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ o(x^3),$$

Последовательно дифференцируя $f(x)$, получаем

$$f'(x) = \left(e^{\sin x}\right)' = \cos x \cdot e^{\sin x} \Rightarrow f'(0) = \cos 0 \cdot e^{\sin 0} = 1;$$
$$f''(x) = \left(\cos x e^{\sin x}\right)' = -\sin x \cdot e^{\sin x} + \cos^2 x \cdot e^{\sin x} \Rightarrow$$
$$f''(0) = 0 + \cos^2 0 \cdot e^{\sin 0} = 1;$$

$$f'''(x) = \left((-\sin x + \cos^2 x)e^{\sin x}\right)' =$$
$$= (-\cos x - 2\cos x \sin x) \cdot e^{\sin x} + (-\sin x + \cos^2 x)\cos x \cdot e^{\sin x} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{f'''(0) = (-1 - 0) \cdot 1 + (-0 + 1) \cdot 1 \cdot 1 = 0}$$

Учитывая, что $f(0) = 1$, имеем

$$f(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \ R_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

Пример 8. С помощью формулы Тейлора найти приближённое значение sin 1 с точностью до 0,001.

Решение. Введём в рассмотрение функцию $f(x) = \sin(x)$. Положив $x_0 = 0$, получим

$$f(1) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2!} + \frac{f'''(0)}{3!} + \ \cdots \ + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}\square}{(n+1)\ \ !},$$

,

где $0 < c < 1$(формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа).

Имеем

$f(0) = \sin 0 = 0, f'(0) = \cos 0 = 1, f''(0) = -\sin 0 = 0,$
$f'''(0) = -\cos 0 = -1,\ f^{IV}(0) = \sin 0 = 0,\ \ldots,$
$|R_{n+1}| = \left|\frac{f^{(n+1)}\square}{(n+1)\ \ !}\right| \leq \frac{1}{(n+1)\ \ !}.$

Для вычисления требуемого значения нужно в□ь nтаким, чтобы $|R_{n+1}| < 0{,}001$, или $\frac{1}{(n+1)\ \ !} < \frac{1}{1000}$;$(n+1)\ \ ! > 1000$.

Это неравенство достигается при $n = 6$, так как $6! = 720 < 1000$, а $7! = 5040 > 1000$. Поэтому

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = \frac{101}{120} \approx 0{,}8417 \approx 0{,}842$$

Пример 9. Напишите разложение многочлена четвертой степени $P(x)$ по степеням $x - 10$, используя формулу Тейлора. Найдите $P''(10)$, если $P(10) = 4$, $P'(10) = 1$, $P'''(10) = 18$, $P^{(4)}(10) = 48$ и $P(11) = 11$.

Решение. Положив в формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа $x_0 = 10$, получим

$$P(x) = P(10) + \frac{P\prime(0)}{1!}(x-10) + \frac{P\prime\prime(0)}{2!}(x-10)^2 +$$
$$+ \frac{P\prime\prime\prime(0)}{3!}(x-10)^3 + \frac{P^{(4)}(0)}{4!}(x-10)^4 + \ \frac{P^{(5)}(c)}{5!},$$

где $0 < c < 1$.

Учитывая, что по условию задачи степень многочлена равна четырем, а $P(10) = 4$, $P'(10) = 1$, $P'''(10) = 18$, $P^{(4)}(10) = 48$, имеем

$$P(x) = 4 + \frac{1}{1!}(x-10) + \frac{P\prime\prime(0)}{2!}(x-10)^2 + \frac{18}{3!}(x-10)^3 + \frac{48}{4!}(x-10)^4 =$$
$$= 4 + (x-10) + \frac{P\prime\prime(0)}{2}(x-10)^2 + \frac{18}{6}(x-10)^3 + \frac{48}{24}(x-10)^4 =$$
$$= x - 6 + \frac{P\prime\prime(0)}{2}(x-10)^2 + 3(x-10)^3 + 2(x-10)^4$$

Так же нам известно, что $P(11) = 11$. С другой стороны, по формуле Тейлора

$$P(11) = 11 - 6 + \frac{P''(0)}{2}(11-10)^2 + 3(11-10)^3 + 2(11-10)^4 \Rightarrow$$

$$P(11) = \frac{P''(0)}{2} + 11 - 6 + 3 + 2 \Rightarrow$$
$$P(11) = \frac{P''(0)}{2} + 10$$

Получаем, что $\dfrac{P''(10)}{2} + 10 = 11 \Rightarrow \dfrac{P''(10)}{2} = 1 \Rightarrow P''(10) = 2$.

Задачи

Найти дифференциал функции:

78. $y = x^5$
79. $y = tgx$
80. $y = \sin^3 2x$
81. $y = \ln x$
82. $y = \ln\left(\sin\sqrt{x}\right)$
83. $y = e^{-\frac{1}{\cos x}}$
84. $y = 2^{-x^2}$

Найти дифференциал функции в точке x_0:

85. $y = x^{-4}, x_0 = -1$
86. $y = x^3 - 3x^2 + 3x, x_0 = 0$
87. $y = \sqrt{1 + x^2}, x_0 = -3$
88. $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}, x_0 = 2$
89. $y = \ln\cos x, x_0 = \frac{\pi}{4}$
90. $y = e^{-2x}, x_0 = -\frac{1}{2}$
91. $y = \sqrt{x} + 1, x_0 = 4$
92. $y = arctg\sqrt{4x - 1}, x_0 = 3$

Найти дифференциал второго порядка:

93. $y = ctgx$
94. $y = \cos^2 x$
95. $y = \ln(2x - 3)$

Найти дифференциал третьего порядка:

96. $y = e^x \cos x$

97. $y = x \ln x$

98. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенно значение x, если $g(5) = 2$, $g(x) = 2{,}04$ и $g'(5) = -4$.

99. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенно значение x, если $g(-5) = 2$, $g(x) = 2{,}04$ и $g'(-5) = -4$.

100. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенно значение x, если $g(-3) = 5$, $g(x) = 5{,}04$ и $g'(-3) = -2$.

101. Напишите разложение функции $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ по степеням $x-1$ до члена четвертого порядка включительно.

102. Найдите три члена разложения функции $f(x) = \sqrt{x}$ по степеням разности $x-1$.

103. Функцию $f(x) = e^{2x-x^2}$ в окрестности точки $x = 0$ приближенно замените многочленом третьей степени.

104. Напишите разложение многочлена четвертой степени $P(x)$ по степеням $x-11$, используя формулу Тейлора. Найдите $P'''(11)$, если $P(11) = 5$, $P'(11) = 4$, $P''(11) = 6$, $P^{(4)}(11) = 72$ и $P(10) = 5$.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 12

Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

12.1. $\sqrt[5]{32{,}16}$

12.2. $\ln(1,003)$

12.3. $\sqrt[3]{7,97}$

12.4. $\sqrt{9,03}$

12.5. $\ln(0,99)$

12.6. $\sqrt[4]{15,96}$

12.7. $\sqrt{8,76}$

12.8. $\sqrt[4]{80,73}$

12.9. $\cos 61^0$

12.10. $\arcsin 0,08$

12.11. $\sqrt[3]{124,98}$

12.12. $\sqrt{25,12}$

12.13. $ctg\left(\frac{\pi}{4}-0,017\right)$

12.14. $\sqrt[5]{32,11}$

12.15. $\ln 1,03$

12.16. $\sqrt{36,06}$

12.17. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+0,001\right)$

12.18. $e^{0,01}$

12.19. $\sqrt[3]{27,03}$

12.20. $tg(\pi+0,001)$

12.21. $\sqrt[4]{16,04}$

12.22. $\sqrt{1,005}$

12.23. $\ln 0,97$

12.24. $(1,03)^5$

12.25. $\arcsin 0,51$

12.26. $\sqrt[4]{15,8}$

12.27. $arctg 1,05$

12.28. $\ln 1,1$

12.29. $\arcsin 0,04$

12.30. $\sin 32^0$

Глава 3. Приложения производной

3.1 Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя.

Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$. Первое правило Лопиталя

Определение. Будем говорить, что отношение двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to a$ есть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0.$$

Раскрыть неопределенность – значит вычислить предел $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, если он существует, или установить, что он не существует.

Сформулируем ***первое правило Лопиталя***.

Теорема 1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a. Пусть, далее,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0 \text{ и } g'(x) \neq 0$$

в указанной окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a. Тогда, если существует предел отношения производных $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный), то

существует и предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, причем справедлива формула

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Замечание. Формула (правило Лопиталя) остается верной и в случае, когда $x\to a-0, x\to a+0, x\to\infty, x\to+\infty$ и $x\to-\infty$.

Пример 1. Найти предел $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-5x+4}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-5x+4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{\left(x^2-16\right)'}{\left(x^2-5x+4\right)'}=\lim_{x\to 4}\frac{2x}{2x-5}=\frac{8}{3}.$$

Пример 2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$.

Решение .

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=\lim_{x\to 0}e^x=1.$$

Пример 3. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(e-x)+x-1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(e-x)+x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)'}{\left(\ln(e-x)+x-1\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{-\dfrac{1}{e-x}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{1+1}{-\dfrac{1}{e}+1}=\frac{2e}{e-1}.$$

Замечание. Если производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и сами функции $f(x)$ и $g(x)$, то правило Лопиталя можно применить повторно. При этом получаем:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Пример 4. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Напомним, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ и по первому замечательному пределу.

Пример 5. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{\left(x^3\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{\left(3x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{6}.$$

Раскрытие неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$

Второе правило Лопиталя

Определение. Будем говорить, что отношение двух функций $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x\to a$ есть неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty,\ +\infty \text{ или } -\infty .$$

Сформулируем ***второе правило Лопиталя***.

Теорема 2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a. Пусть, далее,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty \text{ и } g'(x) \neq 0$$

в указанной окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a. Тогда, если существует предел отношения производных $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный), то существует и предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем справедлива формула

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Замечание. Приведенное правило раскрытия неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ аналогично правилу раскрытия неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$. Замечания, относящиеся к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ остаются в силе и для всех других неопределенностей.

Пример 6. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-11}{5x^2+4}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-11}{5x^2+4}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(6x^2-11\right)'}{\left(5x^2+4\right)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x}{10x}=\dfrac{12}{10}=\dfrac{6}{5}$.

Пример 7. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\ln x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0.$.

Раскрытие неопределенностей вида $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$

Неопределенности вида $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$ можно свести к неопределенностям вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Пример 8. Найти предел $\lim\limits_{x\to0+0}x\ln x$.

Решение. Имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Так как $x\ln x=\dfrac{\ln x}{1/x}$, то получаем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Применяя второе правило Лопиталя, имеем

$$\lim_{x\to0+0}x\ln x=\lim_{x\to0+0}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to0+0}\frac{(\ln x)'}{(1/x)'}=\lim_{x\to0+0}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to0+0}x=0.$$

Пример 9. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0+0}\sqrt{x}\ln x$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0+0}\sqrt{x}\ln x=\left[0\cdot\infty\right]=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{1/\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{x^{-1/2}}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\left(\ln x\right)'}{\left(x^{-1/2}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{1/x}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}=\lim_{x\to 0+0}\frac{-2x^{3/2}}{x}=-2\lim_{x\to 0+0}x^{1/2}=0.$$

Пример 10. Найти предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-tgx\right)$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Так как

$$\frac{1}{\cos x}-tgx=\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1-\sin x}{\cos x},$$

то при том же условии $x\to\frac{\pi}{2}$ получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Воспользуемся первым правилом Лопиталя

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-tgx\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(1-\sin x\right)'}{\left(\cos x\right)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}=0.$$

Пример 11. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$.

Решение.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\left(x-1-\ln x\right)'}{\left((x-1)\cdot\ln x\right)'}=\lim_{x\to1}\frac{1-1/x}{\ln x+(x-1)/x}=\lim_{x\to1}\frac{\dfrac{x-1}{x}}{\dfrac{x\ln x+x-1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1}\frac{\left(x-1\right)'}{\left(x\ln x+x-1\right)'}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\ln x+1+1}=\frac{1}{2}.$$

Раскрытие неопределенностей вида $0^0, 1^\infty$ и ∞^0

Неопределенности вида $0^0, 1^\infty$ и ∞^0 имеют место при рассмотрении функций вида $y=f(x)^{g(x)}$, если при $x\to a$ функция $f(x)$ стремится к 0,1 и ∞, а функций $g(x)$ - соответственно к 0, ∞ и 0.

Эти неопределенности сводятся к неопределенности вида $0\cdot\infty$ с помощью тождества $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$.

Пример 12. Найти $\lim\limits_{x\to0+0} x^x$.

Решение. Имеем неопределенности вида 0^0. Так как $x^x = e^{x\ln x}$, то в показатели степени получена неопределенность вида $0\cdot\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0+0} x^x = \lim\limits_{x\to 0+0} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x} =$ (см. п.6.3., пример 8) $= e^0 = 1$.

Пример 13. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{e^x-1-x}}$.

Решение. Имеем неопределенности вида 1^∞. Так как

$$\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{e^x-1-x}} = e^{\frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x}},$$

то в показателе степени получена неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$.

Применяя первое правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{e^x-1-x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{e^x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{\left(1+x^2\right)\left(e^x-1\right)} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2}{2x\left(e^x-1\right)+\left(1+x^2\right)e^x} = \frac{2}{1} = 2.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{e^x-1-x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{e^x-1-x}} = e^2$.

Пример 14. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tgx\right)^{2\cos x}$

Решение. Имеем неопределенности вида ∞^0. Так как

$$\left(tgx\right)^{2\cos x} = e^{2\cos x \ln tgx} = e^{\frac{2\ln tgx}{1/\cos x}}$$

то в показатели степени получена неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Применяя второе правило Лопиталя, имеем

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\ln tgx}{1/\cos x} = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\ln tgx\right)'}{\left(1/\cos x\right)'} = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\left(-\sin x\right)} =$$

$$= 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{tgx\cdot\sin x} = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x\cdot\sin x} = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} = 2\cdot\frac{0}{1} = 0$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(tgx\right)^{2\cos x} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} 2\cos x \ln tgx} = e^0 = 1.$

Задачи

Используя правило Лопиталя, вычислите пределы:

105. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos 2x)}{\sin 2x}$

106. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - arctg\, x}{x^3}$

107. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\arcsin 2x}$

108. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{2x}-2}$

109. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{tg3x}{tg\,x}$

110. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^5}{e^{x/100}}$

111. $\lim\limits_{x\to 1-0}\ln x\ln(1-x)$

112. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 7x}{tg5x}$

113. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\sin 3x}{x^3}$

114. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x-\sin x}$

115. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{tgx-1}{\sin 4x}$

116. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-1+\cos 3x}{e^x-e^{-x}}$

117. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{\sin x-x}$

118. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-3x}-e^{\sin x}}{x}$

119. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{\ln x}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

120. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

121. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

122. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+x^2}{(1+x)^5-1+x^2}$

123. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}$

124. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^2}{2}-x-1}{\cos x+\dfrac{x^2}{2}-1}$

125. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1-x\ln 2}{\left(1-x\right)^{10}-1+10x}$

3.2 Возрастание и убывание функции. Точки экстремума

Определение. Говорят, что функция $y=f(x)$ ***возрастает (убывает) на интервале*** $(a;b)$**,** если для любых различных точек x_1, x_2 из $(a;b)$ справедливо неравенство $\left(f(x_2)-f(x_1)\right)\left(x_2-x_1\right)>0$ $\left(\left(f(x_2)-f(x_1)\right)\left(x_2-x_1\right)<0\right)$, т.е. если большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции.

Теорема 3. Если функция $f(x)$ дифференцируема на $(a;b)$ и $f'\left(x\right)>0$ ($f'\left(x\right)<0$) для любого $x\in\left(a;b\right)$, то $f(x)$ возрастает (убывает) на $(a;b)$.

Определение. Точка x_0 называется ***точкой максимума (минимума)*** функции $f(x)$, определённой в некоторой окрестности x_0, если существует некоторая окрестность $\left(x_0-\delta; x_0+\delta\right)$ этой точки, такая, что для любого $x \in \left(x_0-\delta; x_0+\delta\right), x \neq x_0$ справедливо неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$); при этом $f(x_0)$ называют ***максимумом (минимумом) функции***. Точки максимума и точки минимума называют ***точками экстремума***.

Теорема 4 (необходимое условие экстремума). Если функция $f(x)$ дифференцируема в промежутке $(a;b)$ и $x_0 \in (a;b)$ является точкой экстремума $f(x)$, то $f'\left(x_0\right)=0$.

Определение. Точки, в которых $f'\left(x_0\right)=0$, называются ***стационарными точками*** $f(x)$.

Замечание. Не всякая стационарная точка является точкой экстремума.

Точкой экстремума $f(x)$ может оказаться и точка, в которой $f'\left(x\right)$ не определена. Стационарные точки и точки, в которых $f'\left(x\right)$ не определена, называют ***критическими точками*** функции.

Теорема 5 (достаточное условие экстремума). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в окрестности стационарной точки x_0. Если при переходе через точку x_0 производная функции $f'\left(x\right)$ меняет свой знак, то x_0 является точкой экстремума. А именно, если при переходе через точку x_0:

1) если $f'(x)$ меняет свой знак с минуса на плюс (т.е. $f'(x)(x-x_0)>0$ при достаточно малых значениях $|x-x_0|, x \neq x_0$), то x_0 является точкой минимума;

2) если $f'(x)$ меняет свой знак с плюса на минус (т.е. $f'(x)(x-x_0)<0$ при достаточно малых значениях $|x-x_0|, x \neq x_0$), то x_0 является точкой максимума функции;

3) если $f'(x)$ не меняет своего знака, то x_0 не является точкой экстремума.

Иногда удобно пользоваться другим достаточным условием экстремума.

Теорема 6 (достаточное условие экстремума). Пусть x_0 – стационарная точка функции $f(x)$, дважды дифференцируемой в точке x_0. Если $f''(x_0) \neq 0$, то x_0 является точкой экстремума. А именно, если:

1) $f''(x_0)>0$, то x_0 – точка минимума;
2) $f''(x_0)<0$, то x_0 – точка максимума.

Пример 15. Найти точки экстремума функции $f(x)=x^3-3x$.

Решение. Найдем производную:

$$f'(x)=3x^2-3=3\left(x^2-1\right)=3(x+1)(x-1)$$

Производная определена при всех *x*. Найдём стационарные точки. Для этого решим уравнение

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3\left(x+1\right)\left(x-1\right)=0$$

Стационарными точками являются $x_1=1, x_2=-1$. При переходе через точку $x=1$ (слева направо) производная $f'\left(x\right)$ меняет свой знак с «–» на «+», следовательно, $x=1$ – точка минимума. При переходе через точку $x=-1$ производная $f'\left(x\right)$ меняет свой знак с «+» на «-», следовательно, $x=1$ – точка максимума.

Далее находим значения функции в точках экстремума:

$$f_{\min}=f(1)=-2, f_{\max}=f(-1)=2.$$

Пример 16. Найти точки экстремума функции $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}$.

Решение. Найдем производную:

$$f'(x)=x^2-x^3=x^2\left(1-x\right)$$

Производная определена при всех *x*. Найдём стационарные точки. Для этого решим уравнение

$$f'(x)=0 \Rightarrow x^2\left(1-x\right)=0$$

Таким образом, возможными точками экстремума являются точки: $x=0, x=1$. Рассмотрим знаки производной на интервалах $\left(-\infty;0\right),\left(0;1\right)$ и $\left(1;+\infty\right)$:

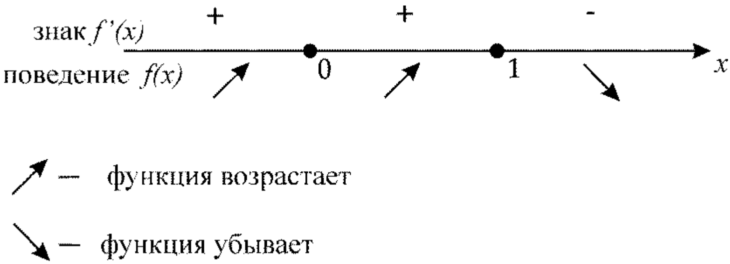


Рис. 3.1.

При переходе через критическую точку $x=0$ (слева направо) производная $f'(x)$ не меняет свой знак, следовательно, точка $x=0$ не является ни точкой минимума, ни точкой максимума.

При переходе через точку $x=1$ (слева направо) производная $f'(x)$ меняет свой знак с «+» на «-», следовательно, $x=1$ – точка максимума.

Находим значения функции в точках экстремума:

$$f_{\max} = f(1) = \frac{1}{12}.$$

Пример 17. Найти точки экстремума функции $f(x) = x - \sqrt[3]{x^2}$.

Решение. Найдем производную:

$$f' = \left(x - \sqrt[3]{x^2}\right)' = 1 - \frac{2}{3}x^{-1/3} = 1 - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{3\sqrt[3]{x} - 2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Находим критические точки функции:

$$f' = 0 \Rightarrow \frac{3\sqrt[3]{x}-2}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3\sqrt[3]{x}-2=0 \\ \sqrt[3]{x} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\sqrt[3]{x}=2 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x}=\dfrac{2}{3} \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{8}{27} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Рассмотрим знаки производной на интервалах (см. рис. 3.2.):

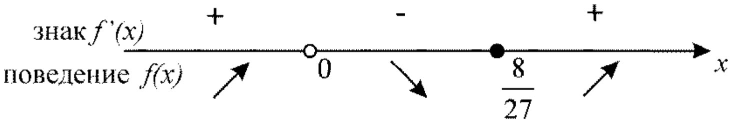


Рис. 3.2.

Отсюда получаем, что точка $x = 0$ - точка максимума, а точка $x = \dfrac{8}{27}$ - точка минимума.

Находим значения функции в точках экстремума:

$$f_{\min} = f\left(\frac{8}{27}\right) = \frac{8}{27} - \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{8}{27} - \left(\sqrt[3]{\frac{8}{27}}\right)^2 = \frac{8}{27} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{4}{27}$$

$$f_{\max} = f(0) = 0.$$

Пример 18. Найти интервалы монотонности и исследовать на экстремум функцию $y = x^3 - 9x^2 + 24x$.

Решение . Находим критические точки:

1. $y' = 3x^2 - 18x + 24 = 3\left(x^2 - 6x + 8\right) = 3\left(x-2\right)\left(x-4\right);$

2. $y' = 0 \Rightarrow 3\left(x-2\right)\left(x-4\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 4;$

Производная определена всюду, следовательно, других критических точек нет.
Изменение знака производной, поведение функции и точки экстремума изображены на рис.3.3:

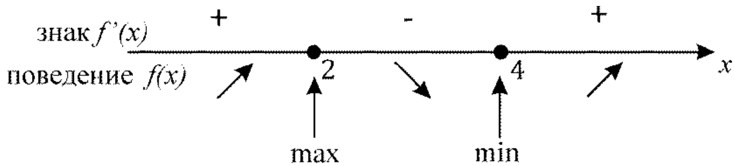


Рис. 3.3.

Находим значение функции в точках экстремума:

$$f_{\min} = f(4) = 16, f_{\max} = f(2) = 20.$$

Эскиз графика функции изображен на рис.3.4.

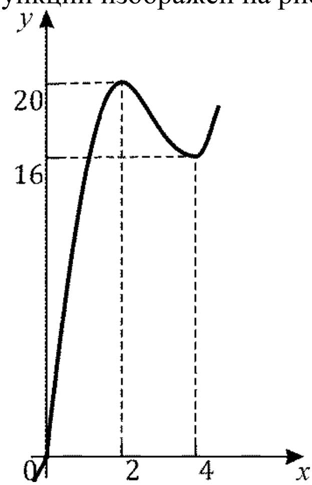


Рис. 3.4.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[a, b]$ находят значения функции в критических точках, принадлежащих этому отрезку, и на концах отрезка, после чего сравнивают эти значения и выбирают наибольшее и наименьшее.

Пример 19. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4 - 8x^2$ на отрезке [–1; 3].

Решение. Найдем производную:

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x-2)(x+2).$$

Производная существует при всех x. Найдем стационарные точки:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -2.$$

Отрезку [–1; 3] принадлежат точки $x_1 = 0, x_2 = 2.$

Вычисляем значения функции в точках $x = -1, x = 0$, $x = 2, x = 3$:

$$f(-1) = -7; f(0) = 0; f(2) = -16; f(3) = 9 .$$

Сравнив полученные значения, находим:

$$\max_{x\in[-1;\,3]} f(x) = f(3) = 9 , \quad \min_{x\in[-1;\,3]} f(x) = f(2) = -16 .$$

Задачи

Найти наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке:

126. $y=2x-1,[0;1]$

127. $y=x^2-6x+8,[1;4]$

128. $y=3x^3-4x+8,[-1;1]$

129. $y=3x^4+4x^3+1,[0;1]$

130. $y=3x^4+4x^3+1,[-2;1]$

131. $y=\sin x+2x,[-\pi;\pi]$

132. $y=\sin^2 x,\left[\frac{\pi}{4};\frac{2\pi}{3}\right]$

133. $y=\sin x-x-\frac{x^3}{3},[0;\pi]$

134. $y=x+\frac{1}{x},[0,1;10]$

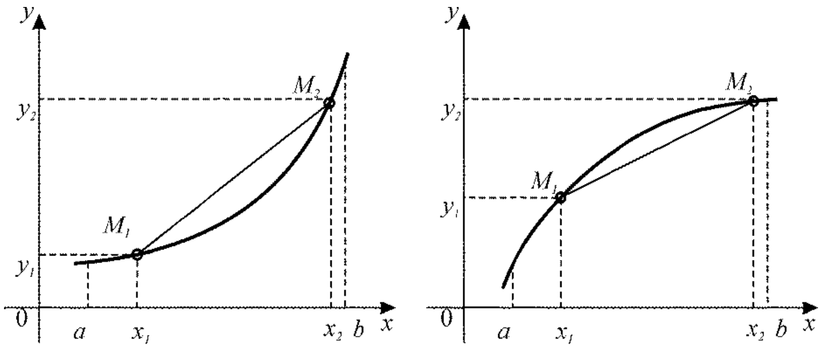
135. $y=-\frac{x}{x^2-x+1},[-2;2]$

136. $y=x\ln x-x,\left[\frac{1}{e};e\right]$

3.3 Интервалы выпуклости функции. Точки перегиба

Определение. Дифференцируемая функция $y=f(x)$ называется ***выпуклой (вогнутой) или выпуклой вверх (вниз) на интервале*** $(a;b)$, если она удовлетворяет следующему условию: для любых различных точек $x_1, x_2 \in (a;b)$ часть графика функции $y = f(x)$, соответствующая интервалу $(x_1; x_2)$, расположена выше (ниже) отрезка M_1M_2, где $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ (см. рис.3.5.).

Точка графика функции, разделяющая выпуклый и вогнутый участки графика, называется ***точкой перегиба*** (часто точкой перегиба называют абсциссу этой точки графика функции).



(a) функция выпукла вниз на отрезке

(b) функция выпукла вверх на отрезке

Рис. 3.5.

Теорема 7. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале $(a;b)$. Тогда, если $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) для всех $x \in (a;b)$, то функция $f(x)$ является выпуклой (вогнутой) на $(a;b)$.

Теорема 8. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на $(a;b)$. Точка $x_0 \in (a;b)$ является точкой перегиба в том и только в том случае, если одновременно выполняются два условия:

(1) $f''(x_0) = 0$;

(2) при переходе через точку x_0 $f''(x)$ меняет свой знак.

В последней теореме при условии трижды дифференцируемости функции условие (2) можно заменить на $f'''(x_0) \neq 0$.

Пример 20. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $y = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Решение. Находим вторую производную:

$$y'' = (y')' = \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}.$$

Вторая производная определена при любом *x*, и обращается в нуль при $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Проверим являются ли найденные точки – точками перегиба графика функции. Для этого определим знак второй производной на получившихся интервалах: $\left(-\infty; -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$. Рисуем схему (см. рис.3.6.).

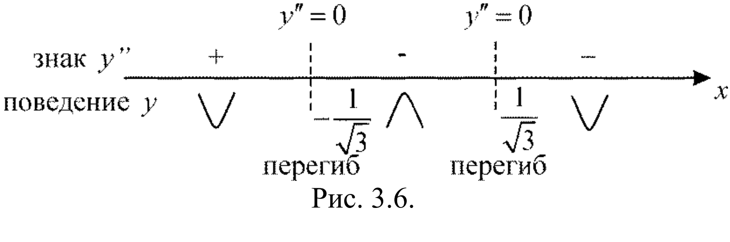


Рис. 3.6.

На интервалах $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$ функция выпукла вниз, на интервале $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ - выпукла вверх. В точках $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}, x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ функция имеет перегибы.

4.Находим ординаты точек перегиба: $y\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{3}{4}$.

3.4 Асимптоты

Определение. Прямая $x=x_0$ называется ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y=f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

Определение. Прямая $y=kx+b$ называется ***наклонной асимптотой*** графика функции $y=f(x)$ при $x\to\infty$, если $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-(kx+b)\right)=0$.

Определение. Прямая $y=kx+b$ называется ***наклонной асимптотой*** графика функции $y=f(x)$ при $x\to-\infty$, если $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(kx+b)\right)=0$.

Определение. Прямая $y=kx+b$ называется ***наклонной асимптотой*** графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$, если $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(kx+b)\right)=0$.

При $k=0$ наклонная асимптота называется ***горизонтальной***.

Нахождение горизонтальных и наклонных асимптот

1. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Если этот предел существует и равен числу b, то $y=b$ - горизонтальная асимптота.

Если предел не существует или равен бесконечности, то перейти к п.2.

2. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$. Если этот предел не существует или равен бесконечности, то наклонной асимптоты нет. Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k$, то перейти к п.3.
3. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)-kx\right)$. Если этот предел не сущесвует или равен бесконечности, то асимптоты нет. Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)-kx\right)=b$, то перейти к п.4.
4. Записать уравнение наклонной асимптоты $y=kx+b$.

Замечание. Данный алгоритм позволяет найти прямую, являющуюся асимптотой при $x\to\infty$, то есть и при $x\to-\infty$, и при $x\to+\infty$. На практике функция может иметь разные асимптоты при $x\to-\infty$ и при $x\to+\infty$, или иметь асимптоту только в одном из случаев.

Поэтому на практике искать асимптоты не при $x\to\infty$, а при $x\to-\infty$ и при $x\to+\infty$, применяя данный алгоритм.

Пример 21. Найти асимптоты графика функции $y=x+\frac{1}{x}$.

Решение. Положим $f(x)=x+\frac{1}{x}$.

1.Точка $x=0$ является точкой разрыва данной функции. Найдем пределы $\lim\limits_{x\to0+}f(x)$ и $\lim\limits_{x\to0-}f(x)$. Имеем

$$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}\left(x+\frac{1}{x}\right)=-\infty,\ \lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\left(x+\frac{1}{x}\right)=+\infty.$$

Т.е. прямая $x=0$ является вертикальной асимптотой.

2. Найдем наклонные асимптоты.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$

Следовательно, горизонтальных асимптот нет.

2) $k = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+\frac{1}{x}}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right) = 1$

$b = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-kx\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\dfrac{1}{x}-x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x} = 0$

Следовательно, прямая $y = x$ - наклонная асимптота графика функции и при $x \to -\infty$.

3) $k = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+\frac{1}{x}}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right) = 1$

$b = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\dfrac{1}{x}-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$

Следовательно, прямая $y = x$ - наклонная асимптота графика функции при $x \to +\infty$.

Пример 22. Найти асимптоты графика функции

$f(x) = \dfrac{|x|(x-1)}{x+1}$.

Решение .

1. Точка $x = -1$ является точкой разрыва данной функции. Найдем пределы $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)$. Имеем

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to -1-}\left(\frac{|x|(x-1)}{x+1}\right) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to -1+}\left(\frac{|x|(x-1)}{x+1}\right) = +\infty.$$

Т.е. прямая $x=-1$ является вертикальной асимптотой.

2. Найдем наклонные асимптоты.

Напомним, что $|x| = \begin{cases} x, x \ge 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$.

Поэтому, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x(x-1)}{x+1}, x \ge 0 \\ \dfrac{-x(x-1)}{x+1}, x < 0 \end{cases}$.

1) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x(x-1)}{x+1}\right) = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(-\dfrac{x(x-1)}{x+1}\right) = -\infty$

Следовательно, горизонтальных асимптот нет.

2) $k = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x(x-1)}{x(x+1)}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = 1$

$$b = \lim_{x\to +\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x(x-1)}{x+1} - x\right) = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2 - x - x^2 - x}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{-2x}{x+1} = -2$$

Следовательно, прямая $y = x-2$ - наклонная асимптота графика функции при $x \to +\infty$.

3) $k = \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{-x(x-1)}{x(x+1)}\right) = \lim\limits_{x\to =\infty}\left(-\dfrac{x-1}{x+1}\right) = -1$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x(x-1)}{x+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+x+x^2+x}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x+1}=2$$

Таким образом, прямая $y=-x+2$ - наклонная асимптота графика функции при $x\to-\infty$.

Задачи

Найти асимптоты графика функции:

137. $y=1-\dfrac{4}{x^2}$

138. $y=\dfrac{x^2}{x^2+2}$

139. $y=\dfrac{2}{|x|}-1$

140. $y=\dfrac{1-4x}{1+2x}$

141. $y=\dfrac{x^2+x}{x}$

142. $y=\dfrac{x^2}{x+1}$

143. $y=\dfrac{x^2-x-1}{x}$

144. $y=\dfrac{3-5x}{7x+4}$

145. $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$

146. $y=\dfrac{4x-x^3}{x^2+4}$

147. $y = \dfrac{1}{x^2} - x$

148. $y = \dfrac{x^4 + 1}{3x^2 + 1}$

149. $y = \dfrac{x - 4}{2x + 4}$

150. $y = \dfrac{x^2}{2 - 2x}$

151. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

152. $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$

3.5 Полное исследование функции и построение ее графика

График функции, заданной формулой $y = f(x)$, строится по точкам, которые затем соединяются линией. Но если брать точки, как попало, то можно допустить грубую ошибку, пропустив какие-то важные особенности графика.

Чтобы построить график с помощью небольшого числа точек, полезно предварительно выяснить его характерные особенности по следующей общепринятой схеме:

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функции на периодичность.
3. Исследовать функцию на четность.
4. Найти точки пересечения графика с осями координат.
5. Найти точки разрыва.
6. Исследовать поведение функции на границах области определения. Найти асимптоты.
7. Найти промежутки возрастания и убывания функции, точки экстремума.

8. Исследовать направление выпуклости графика функции, найти точки перегиба.
9. Вычислить значения функции для некоторых значений ее аргумента.
10. Используя все полученные результаты, построить график функции

Пример 23. Построить график функции $y=\dfrac{x^3}{x^2-4x-32}$.

Решение.

1. **Область определения функции:**

$$D(f)=(-\infty;-4)\cup \qquad \cup$$

2. **Исследование функции на периодичность.**
Функция не является периодической.
3. **Исследование функции на чётность/нечётность.**
$f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-4(-x)-32}=\dfrac{-x^3}{x^2+4x-32}\Rightarrow f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$. Следовательно, функция является функцией общего вида.
4. **Нахождение точек пересечения графика с осями координат.**
Для того, чтобы найти точки пересечения с осью 0x, приравняем функцию к нулю. Получим $\dfrac{x^3}{x^2-4x-32}=0\Rightarrow x=0$. Для нахождения общей точки графика функции и оси 0y следует найти $f(0)$: $f(0)=\dfrac{0}{-32}=0$.

5. **Нахождение точек разрыва.**

Функция непрерывна всюду, за исключением нулей знаменателя: $x=-4$ и x = 8. Найдём левые и правые пределы в этих точках.

Для точки $x=-4$:

$$\lim_{x\to-4-0} f\left(x\right)=\lim_{x\to-4-0}\frac{x^3}{\left(x+4\right)\left(x-8\right)}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to-4+0} f\left(x\right)=\lim_{x\to-4+0}\frac{x^3}{\left(x+4\right)\left(x-8\right)}=+\infty.$$

Отсюда получаем, что $x=-4$ является точкой разрыва второго рода.

Для точки $x=8$:

$$\lim_{x\to8-0} f\left(x\right)=\lim_{x\to8-0}\frac{x^3}{\left(x+4\right)\left(x-8\right)}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to8+0} f\left(x\right)=\lim_{x\to8+0}\frac{x^3}{\left(x+4\right)\left(x-8\right)}=+\infty.$$

Поэтому $x=8$ является точкой разрыва второго рода.

6. Поведение функции на границах области определения. Нахождение асимптот.

Из п.5. получаем, что $x=-4$ и $x=8$ - вертикальные асимптоты графика функции.

Найдем наклонные асимптоты.

1) При $x\to-\infty$:

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2-4x-32}=1,$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4x-32}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-32x}{x^2-4x-32}=4.$$

Таким образом, прямая $y = x + 4$ является наклонной асимптотой при $x \to -\infty$.

2) Аналогично, получаем, что при $x \to +\infty$ прямая $y = x + 4$ так же является наклонной асимптотой.

7. Нахождение промежутков возрастания и убывания функции, точки экстремума.

Найдем производную y'. Имеем

$$y' = \left(\frac{x^3}{x^2 - 4x - 32} \right)' = \frac{x^2\left(x^2 - 8x - 96\right)}{\left(x+4\right)^2\left(x-8\right)^2} =$$

$$= \frac{x^2\left(x - 4 + 4\sqrt{7}\right)\left(x - 4 - 4\sqrt{7}\right)}{\left(x+4\right)^2\left(x-8\right)^2}.$$

Приравнивая производную к нулю, находим критические точки:

$$\frac{x^2\left(x - 4 + 4\sqrt{7}\right)\left(x - 4 - 4\sqrt{7}\right)}{\left(x+4\right)^2\left(x-8\right)^2} = 0,$$

откуда $x_1 = 4 - 4\sqrt{7}$, $x_2 = 4 + 4\sqrt{7}$, $x_3 = 0$, $x_4 = -4, x_5 = 8$.

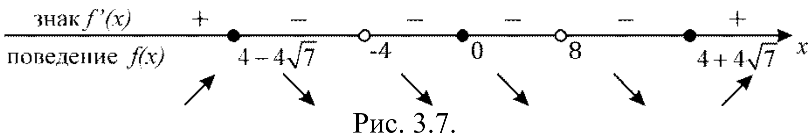


Рис. 3.7.

Из схемы (рис.3.7.) следует, что функция возрастает на промежутках $\left(-\infty; 4 - 4\sqrt{7}\right)$ и $\left(4 + 4\sqrt{7}; +\infty\right)$ и убывает на промежутках $\left(4 - 4\sqrt{7}; -4\right)$, $\left(-4; 8\right)$, $\left(8; 4 + 4\sqrt{7}\right)$.

Следовательно, точка $x = 4 - 4\sqrt{7}$ является точкой максимума, а точка $x = 4 + 4\sqrt{7}$ – точкой минимума. Найдем ординаты экстремальных точек:

$y_{\max} = f(4-4\sqrt{7}) = -7{,}57$; $y_{\min} = f(4+4\sqrt{7}) = 25{,}35$.

8. Исследование направления выпуклости графика функции, нахождение точек перегиба.

Найдем вторую производную:

$$y'' = (y')' = \frac{96x\left(x^2+8x+64\right)}{(x+4)^3(x-8)^3}.$$

Вторая производная равна нулю при x=0.

Из схемы (рис.3.8.) следует, что функция выпукла в интервалах (–∞; –4) и (0; 8) и вогнута в интервалах (–4; 0) и (8; +∞).

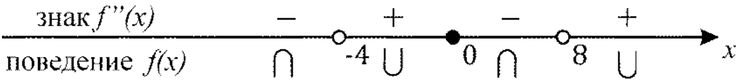


Рис. 3.8.

При переходе через точки – 4, 8, 0 y'' меняет свой знак. Поэтому точка x = 0 является точкой перегиба (в точках x = – 4, x = 8 функция не определена).

9. Вычисление значения функции для некоторых значений её аргумента. Построение графика.

Сгруппируем все полученные данные в виде таблицы и построим график функции:

x	$\left(-\infty; 4-4\sqrt{7}\right)$	$4-4\sqrt{7}$	$\left(4-4\sqrt{7}; -4\right)$	-4	$(-4;0)$
y'	+	0	-	не сущ	-
y''	-	-	-	не сущ	+
y	↑∩	$y_{\max} = -7{,}57$	↓∩	не сущ	↓∪

x	0	$(0;8)$	8	$\left(8;4+4\sqrt{7}\right)$	$4+4\sqrt{7}$	$\left(4+4\sqrt{7};+\infty\right)$
y'	0	-	не сущ	-	0	$+$
y''	0	-	не сущ	$+$	$+$	$+$
y	0, перегиб	↓∩	не сущ	↓∪	$y_{\min}=25,35$	↑∪

Пример 24. Построить график функции $y=e^{-(x-2)^2}$.

Решение.

1. **Область определения** $D(f)=(-\infty;+\infty)$.
2. **Исследование функции на периодичность.**
   Функция не является периодической.
3. **Исследование функции на четность/нечетность.**
   $f(-x)=e^{(-x-2)^2}=e^{(x+2)^2}\Rightarrow f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$.
   Следовательно, функция является функцией общего положения.
4. **Нахождение точек пересечения графика с осями координат.**
   Для того, чтобы найти точки пересечения с осью 0, приравняем функцию к нулю. Получим $e^{-(x-2)^2}=0$.

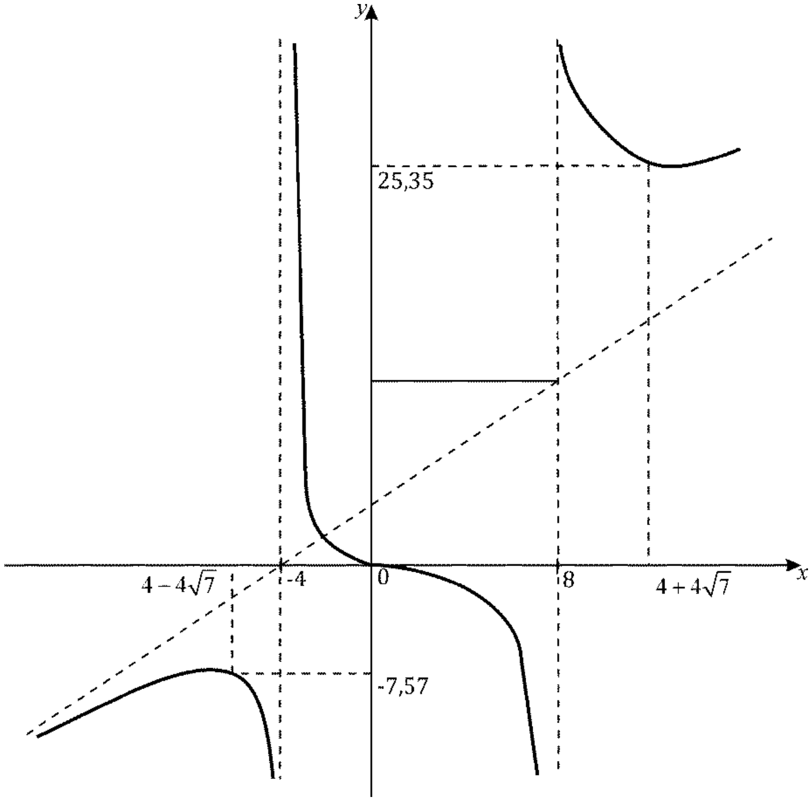


Рис. 3.9.

Данное уравнение корней не имеет, следовательно функция не имеет общих точек с осью 0х. Для нахождения общей точки графика функции и оси 0у следует найти $f(0)$: $f(0)=e^{-4}\approx 0,0183$.

5. **Нахождение точек разрыва.**

   Функция является суперпозицией непрерывных функций, поэтому она непрерывна на всей числовой оси.

6. **Поведение функции на границах области определения. Нахождение асимптот.**

Из п.5. следует, что вертикальных асимптот нет. Найдем наклонные асимптоты:

1)При $x \to -\infty$:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-(x-2)^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{xe^{(x-2)^2}} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to-\infty} e^{-(x-2)^2} = 0.$$

Таким образом, прямая $y = 0$ является наклонной асимптотой функции при $x \to -\infty$.

2)Аналогично, получаем, что при $x \to +\infty$ прямая $y = 0$ так же является наклонной асимптотой.

7. **Нахождение промежутков возрастания и убывания функции, точки экстремума.**

Найдем производную y'. Имеем

$$y' = \left(e^{-(x-2)^2}\right)' = -2(x-2)e^{-(x-2)^2}.$$

Приравнивая производную к нулю, находим критические точки: $x = 2$.

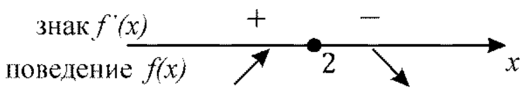


Рис. 3.10.

Из схемы (рис.3.10.) следует, что функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке (–∞; 2) и убывает на промежутке (2; +∞), точка $x = 2$ является точкой максимума. Максимум функции равен $f(2) = 1$.

8. **Исследование направления выпуклости графика функции, нахождение точек перегиба.**

Найдем вторую производную:

$$y'' = \left(y'\right)' = 2\left(2x^2 - 8x + 7\right)e^{-(x-2)^2}.$$

Функция y'' имеет нули $x = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. Из схемы (рис.6.11.) следует, что функция выпукла на интервале $\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}; 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и вогнута на интервалах $\left(-\infty; 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$.

знак $f''(x)$	$+$		$-$		$+$	
поведение $f(x)$	$\cup$	$2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cap$	$2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cup$	x

Рис. 3.11.

Точки $x = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ являются точками перегиба. Вычислим значение функции в точках перегиба: $f\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-0,5} \approx 0,61$

9. **Вычисление значения функции для некоторых значений её аргумента. Построение графика.**
   Сгруппируем все полученные данные в виде таблицы и построим график функции:

x	$\left(-\infty; 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}; 2\right)$	2
y'	+	+	+	0
y''	+	0	-	-
y	$\uparrow\cup$	0,61:	$\uparrow\cap$	$y_{\max} = 1$

		перегиб		

x	$\left(2;2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$2+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$
y'	-	-	-
y''	-	0	+
y	$\downarrow\cap$	0,61: перегиб	$\downarrow\cup$

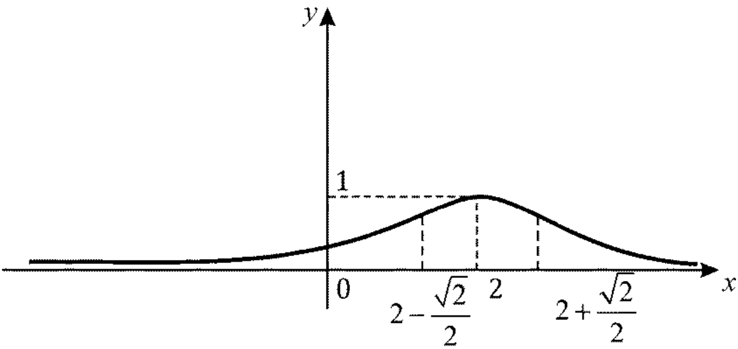


Рис. 3.12.

Пример 25. Выполнить полное исследование функции $y(x) = xe^{\frac{1}{x-2}}$ и построить ее график.

Решение.

1. **Область определения** $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$
2. **Исследование функции на периодичность.**
   Функция не является периодической.
3. **Исследование функции на чётность/нечётность.**

   $y(-x) = -xe^{\frac{1}{-2-x}} \Rightarrow y(-x) \neq y(x)$ и $\quad y(-x) \neq -y(x)$

Следовательно, функция является функцией общего вида.

4. **Нахождение точек пересечения графика с осями координат.**

Найдём точки пересечения с осью *Ox*. Для этого приравняем $y(x)$ *к* 0. Получим $xe^{\frac{1}{x-2}} = 0 \Rightarrow x = 0$ ($e^{\frac{1}{x-2}} > 0$ при любом $x \neq 2$). Чтобы найти точки пересечения с *Oy*, подставим в $y(x)$ значение $x = 0$. Если $x = 0$, то и $y = 0$.Таким образом, график функции пересекает оси *Ox* и *Oy* в точке (0;0).

5. **Нахождение точек разрыва.**

На промежутке $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$ функция непрерывна. Найдем односторонние пределы в точке $x = 2$:

$\lim_{x\to 2+0} xe^{\frac{1}{x-2}} = 2e^{+\infty} = +\infty$

$\lim_{x\to 2-0} xe^{\frac{1}{x-2}} = 2e^{-\infty} = 0$

Так как один из односторонних пределов равен $+\infty$, то $y(x)$ в точке $x = 2$ терпит разрыв второго рода.

6. **Поведение функции на границах области определения. Нахождение асимптот.**

Из п.5 следует, что $x = 2$ является вертикальной асимптотой графика функции $y(x) = xe^{\frac{1}{x-2}}$.

Для нахождения горизонтальных асимптот найдем пределы функции *y(x)* при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$:

$\lim_{x\to+\infty} xe^{\frac{1}{x-2}} = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} xe^{\frac{1}{x-2}} = -\infty$

Следовательно, горизонтальных асимптот нет.

Найдем наклонные асимптоты:

1) при $x \to +\infty$

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{\frac{1}{x-2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x-2}} = e^0 = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(xe^{\frac{1}{x-2}} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x-2}} - 1\right) =$$
$$[\infty \cdot 0] = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-2}}-1}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-2}}\cdot\left(\frac{1}{x-2}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-2}}x^2}{(x-2)^2} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{(x-2)^2} =$$
$$= e^0 \cdot 1 = 1$$

Таким образом, прямая $y = x + 1$ является наклонной асимптотой при $x \to +\infty$.
Аналогично можно получить, что прямая $y = x + 1$ также является наклонной асимптотой при $x \to -\infty$.

7. Нахождение промежутков возрастания и убывания функции, точки экстремума.

Найдём первую производную функции $y(x) = xe^{\frac{1}{x-2}}$.
Имеем $y'(x) = e^{\frac{1}{x-2}} + xe^{\frac{1}{x-2}}\left(\frac{-1}{(x-2)^2}\right) = e^{\frac{1}{x-2}}\left(1 - \frac{x}{(x-2)^2}\right)$
Найдём критические точки. Для этого приравняем к нулю $y'(x)$: $e^{\frac{1}{x-2}}\left(1 - \frac{x}{(x-2)^2}\right) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{x}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{x^2-5x+4}{(x-2)^2} = 0$. Значит, производная имеет нули в точках $x_1 = 1, x_2 = 4$.

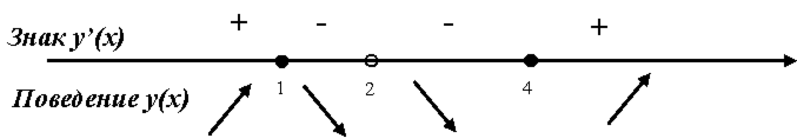


рис.3.13

Из схемы (рис. 3.13) видно, что функция *y(x)* монотонно возрастает при $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ и монотонно убывает при $x \in (1;2) \cup (2;4)$. Точка $x_{max} = 1$ является точкой локального максимума, значение функции в этой точке равно $y_{max} = y(1) = \frac{1}{e}$. Точка $x_{min} = 4$ –точка локального минимума, $y_{min} = y(4) = 4\sqrt{e}$.

8. Исследование направления выпуклости графика функции, нахождение точек перегиба.

Вычислим вторую производную функции:

$$y''(x) = \left(e^{\frac{1}{x-2}} \frac{x^2-5x+4}{(x-2)^2}\right)' =$$

$$= -\frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{(x-2)^2} \frac{x^2-5x+4}{(x-2)^2}$$

$$- \frac{(2x-5)(x-2)^2 - 2(x-2)(x^2-5x+4)}{(x-2)^4} e^{\frac{1}{x-2}}$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{(x-2)^4} \cdot (5x-8)$$

Найдем нули:

$$\frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{(x-2)^4} \cdot (5x-8) = 0 \Rightarrow x = \frac{8}{5}$$

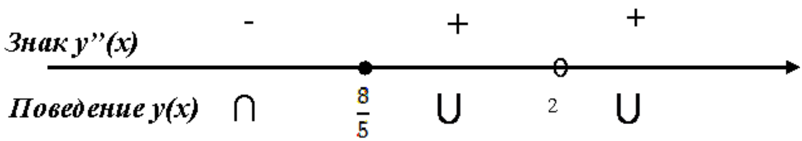


Рис. 3.14

x_2

Из схемы (рис. 3.14) видно, что функция *y(x)* выпукла на интервале $\left(-\infty; \frac{8}{5}\right)$ и вогнута на интервалах $\left(\frac{8}{5}; 2\right)$ и $(2; +\infty)$. Точка $x = \frac{8}{5}$ является точкой перегиба. Вычислим значение функции в точке перегиба: $y\left(\frac{8}{5}\right) = \frac{8}{5} e^{-\frac{5}{2}} \approx 0{,}13$.

9. Вычисление значения функции для некоторых значений её аргумента. Построение графика.

Сгруппируем все полученные данные в виде таблицы и построим график функции:

x	$(-\infty, 1)$	1	$\left(1, \frac{8}{5}\right)$	$\frac{8}{5}$	$\left(\frac{8}{5}, 2\right)$
y'	$+$	0	-	-	-
y''	-	-	-	0	$+$
y	$\uparrow\cap$	$y_{max} = 0{,}37$	$\downarrow\cap$	0,13: перегиб	$\downarrow\cup$

2	$(2{,}4)$	4	$(4, +\infty)$
не сущ.	-	0	$+$
не сущ.	$+$	$+$	$+$
не сущ.	$\downarrow\cup$	$y_{min} = 6{,}6$	$\uparrow\cup$

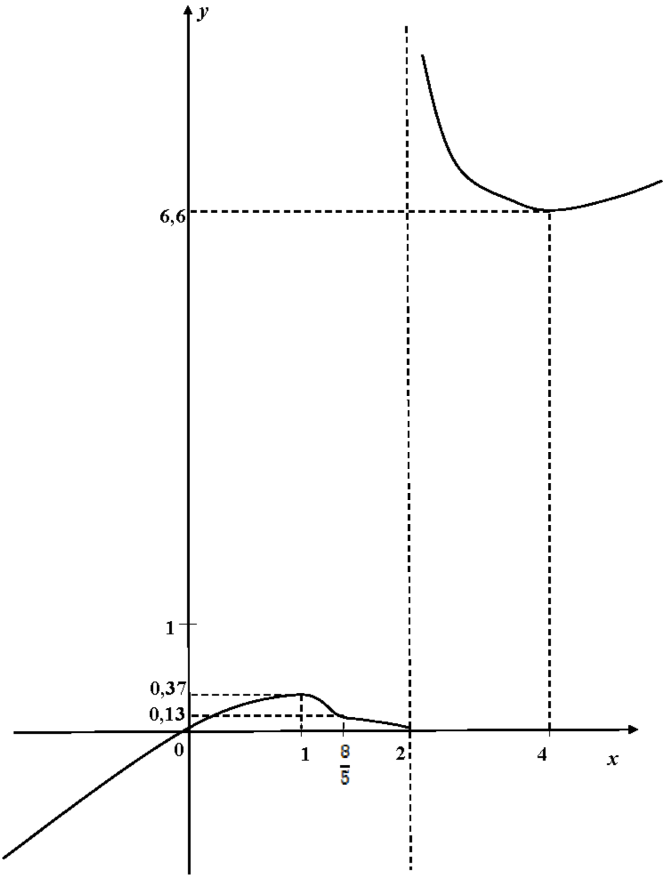


Рис.3.15

Пример 26. Дана функция $y = (2x - 1) \cdot e^{\frac{2}{x}}$. Выполнить полное исследование и построить график данной функции.

Решение.

1. Область определения функции $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. Исследование функции на периодичность.

Согласно п.7, $y(x)$– монотонно возрастающая функция, поэтому она не является периодической.

3 . Исследование функции на четность/нечетность.

$$y(-x) = (-2x - 1) \cdot e^{\frac{-2}{x}} \Rightarrow y(-x) \neq y(x) \text{ и } y(-x) \neq -y(x).$$

Следовательно, функция является функцией общего вида.

4. Нахождение точек пересечения графика с осями координат.

1) Для того, чтобы найти точки пересечения с осью 0x, приравняем функцию к нулю.

Получим $(2x - 1) \cdot e^{\frac{2}{x}} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$. Точка пересечения с *Ox* имеет координаты $(\frac{1}{2}, 0)$.

2) Т.к. функция не определена в точке $x = 0$, то точек пересечения с *Oy* нет.

5. Нахождение точек разрыва.

Функция непрерывна всюду, за исключением точки $x = 0$. Вычислим односторонние пределы в этой точке:

$$\lim_{x\to 0-0} y(x) = \lim_{x\to 0-0}(2x-1)\cdot \mathrm{e}^{\frac{2}{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to 0+0} y(x) = \lim_{x\to 0+0}(2x-1)\cdot \mathrm{e}^{\frac{2}{x}} = -\infty.$$

Т.к. один из пределов бесконечен, то $x = 0$ является точкой разрыва второго рода.

6. Поведение функции на границах области определения. Нахождение асимптот.

Из п.5. следует, что и $x = 0$ - вертикальная асимптота графика функции. Найдем предел функции на бесконечности

$$\lim_{\mathrm{x}\to\infty}(2\mathrm{x}-1)\cdot \mathrm{e}^{\frac{2}{\mathrm{x}}} = \infty$$

Следовательно, горизонтальных асимптот нет.

Найдем наклонные асимптоты:

1) при $\mathrm{x} \to +\infty$:

$$\mathrm{k} = \lim_{\mathrm{x}\to+\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim_{\mathrm{x}\to+\infty}\frac{(2\mathrm{x}-1)\cdot \mathrm{e}^{\frac{2}{\mathrm{x}}}}{\mathrm{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{\mathrm{x}\to+\infty}\frac{2\mathrm{x}\mathrm{e}^{\frac{2}{\mathrm{x}}}-\mathrm{e}^{\frac{2}{\mathrm{x}}}}{\mathrm{x}} =$$

$$= \lim_{\mathrm{x}\to+\infty}\frac{2\mathrm{e}^{\frac{2}{\mathrm{x}}}-\frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{\mathrm{x}}}}{x}}{1} = \lim_{\mathrm{x}\to+\infty}\frac{2\mathrm{e}^{0}}{1} = 2$$

$$\mathrm{b} = \lim_{\mathrm{x}\to+\infty}(y(x)-kx) = \lim_{\mathrm{x}\to+\infty}\left((2x-1)\cdot \mathrm{e}^{\frac{2}{\mathrm{x}}}-2\mathrm{x}\right) =$$

$$= \lim_{\mathrm{x}\to+\infty}\left(2\mathrm{x}\cdot(\mathrm{e}^{\frac{2}{\mathrm{x}}}-1)\right)-\mathrm{e}^{\frac{2}{\mathrm{x}}} = 4-1 = 3$$

Посчитаем отдельно $\lim_{x\to+\infty} 2x\cdot\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)$, используя таблицу эквивалентностей: $\lim_{x\to+\infty} 2x\cdot\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right) = 2x\cdot\frac{2}{x} = 4$.

Таким образом, получаем наклонную асимптоту $y = 2x + 3$ при $x \to +\infty$. Аналогично можно получить, что она также будет наклонной асимптотой при $x \to -\infty$.

7. Нахождение промежутков возрастания и убывания функции, точки экстремума.

Найдем производную y':

$$y' = \left((2x-1)\cdot e^{\frac{2}{x}}\right)' = 2\cdot e^{\frac{2}{x}} - \frac{2\cdot(2x-1)\cdot e^{\frac{2}{x}}}{x^2} =$$

$$= 2\cdot e^{\frac{2}{x}}\cdot\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = 2\cdot e^{\frac{2}{x}}\cdot\frac{(x^2-2x+1)}{x^2} == 2\cdot e^{\frac{2}{x}}\cdot\frac{(x-1)^2}{x^2}.$$

Приравнивая производную к нулю, находим критические точки: $x = 1$.

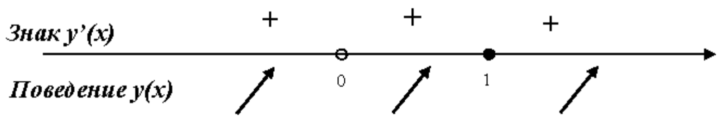


Рис. 3.16

Согласно схеме (рис. 3.16), функция монотонно возрастает на промежутках $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$. Точка $x = 1$ является критической, но не является ни локальным минимумом, ни локальным максимум функции, т.к. в этой точке знак производной не меняется.

8. Исследование направления выпуклости графика функции, нахождение точек перегиба.

Найдем вторую производную y'':

$$y''(x) = \left(2e^{\frac{2}{x}} \cdot \frac{(x-1)^2}{x^2}\right)' = 2 \cdot \left(e^{\frac{2}{x}} \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right) \cdot \frac{(x-1)^2}{x^2} + e^{\frac{2}{x}} \cdot \frac{2(x-1)x^2 - 2x(x-1)^2}{x^4}\right) = 4e^{\frac{2}{x}} \cdot \frac{-(x-1)^2 + (x-1)x^2 - x(x-1)^2}{x^4} =$$

$$= 4e^{\frac{2}{x}} \cdot \frac{(x-1)(-(x-1) + x^2 - x(x-1))}{x^4} = 4e^{\frac{2}{x}} \cdot \frac{(x-1)}{x^4}.$$

Вторая производная обращается в нуль при $x = 1$.

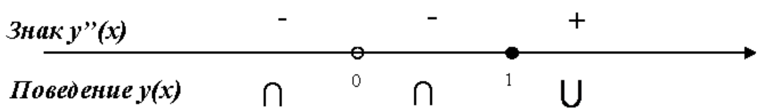


Рис.3.17

Согласно приведенной схеме (рис. 3.17), функция выпукла при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$ и вогнута при $x \in (1; +\infty)$. Точка $x = 1$ является точкой перегиба. Значение функции в этой точке: $y(1) = e^2 \approx 7{,}29$.

9. Вычисление значения функции для некоторых значений её аргумента. Построение графика.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	+	не сущ.	+	0	+
y''	-	не сущ.	-	0	+
y	↑∩	не сущ.	↑∩	7,29	↑∪

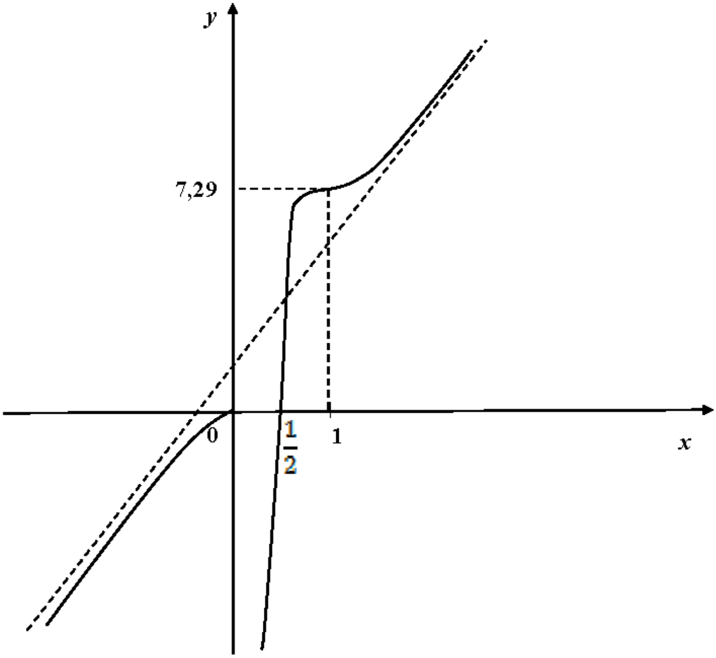


Рис.3.18

Пример 27. Выполнить полное исследование и построить график функции $f(x) = x^2 \ln^2 x$.

Решение.

1. **Область определения функции** $D(f) = (0; +\infty)$.
2. **Исследование функции на периодичность.**
   В п7. показано, что при $x > 1$ заданная функция $f(x)$– монотонно возрастает, это означает, что она не является периодической.
3. **Исследование функции на четность/нечетность.**
   Функция общего вида, т.к. она определена только при $x > 0$.
4. **Нахождение точек пересечения графика с осями координат.**
   Точки пересечения с осью Oy отсутствуют, поскольку функция определена при $x > 0$.
   Найдем точки пересечения с осью Oy. Для этого найдем решения уравнения $x^2 \ln^2 x = 0$. Т.к. $x > 0$, то только
   $\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$.Таким образом, график функции $y = f(x)$ пересекает ось Ox в точке (1;0).
5. **Нахождение точек разрыва.**
   На промежутке (0;+∞) точек разрыва у заданной функции нет, поскольку функция определена для всех допустимых значений x.
6. **Поведение функции на границах области определения. Нахождение асимптот.**
   Исследуем поведение функции при $x \to 0+$:
   $\lim_{x\to0+} x^2 \ln^2 x$=[0·∞]=$\lim_{x\to0+} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x^2}}$ =$[\frac{\infty}{\infty}]$ =
   $= \lim_{x\to0+} \frac{\frac{1}{x} 2\ln x}{-\frac{2}{x^3}} = -\lim_{x\to0+} \frac{ln\, x}{\frac{1}{x^2}} = [\frac{\infty}{\infty}] = -\lim_{x\to0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} =$

$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0+} x^2 = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$ (*при нахождении пределов дважды было использовано правило Лопиталя).*
Значит, вертикальных асимптот нет.

Исследуем поведение функции при $x \to +\infty$:

$\lim_{x\to +\infty} x^2 \ln^2 x = +\infty$.

Таким образом, горизонтальные асимптоты отсутствуют.

Исследуем на наличие наклонной асимптоты при
$x \to +\infty$.

$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 \ln^2 x}{x} = \lim_{x\to +\infty} x \ln^2 x = +\infty$.
Следовательно, наклонных асимптот также нет.

7. **Нахождение промежутков возрастания и убывания функции, точки экстремума.**

Вычислим производную $f(x)$:
$$f`(x) = 2x\ln^2 x + x^2 \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = 2x\ln x \cdot (\ln x + 1).$$
Найдем критические точки:
$$2x\ln x \cdot (\ln x + 1) \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \ln x = 0 \\ \ln(x+1) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{1}{e} \end{array}\right.$$

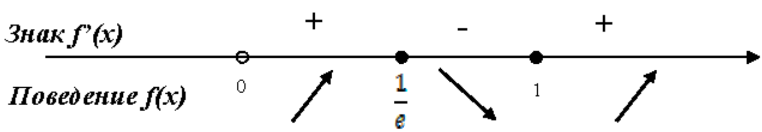


Рис.3.19

Согласно схеме (рис.3.19), при $x \in (0; \frac{1}{e}) \cup (1; +\infty)$ функция монотонно возрастает, а при $x \in (\frac{1}{e}; 1)$ – функция монотонно убывает. Точка $x = \frac{1}{e}$ - локальный максимум, $x = 1$ - точка локального минимума, $y_{max} = f\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^2 \approx 0{,}14$,

$y_{min} = f(1) = 0$.

8. **Исследование направления выпуклости графика функции, нахождение точек перегиба.**

Для этого найдем вторую производную функции:

$f''(x) = 2\ln^2 x + 2x \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} + 2\ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} =$
$2\ln^2 x + 4\ln x + 2\ln x + 2 = 2\ln^2 x + 6\ln x + 2 =$
$2(\ln^2 x + 3\ln x + 1)$

Найдем нули второй производной:

$2(\ln^2 x + 3\ln x + 1) = 0$. Сделаем замену $\ln x = t$. Уравнение примет вид $2(t^2 + 3t + 1) = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Значит, $\ln x_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$, $\ln x_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_1 = e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}} \approx 0{,}07$, $x_2 = e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}} \approx 0{,}68$.

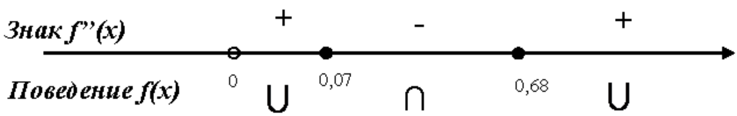


Рис.3.20

Согласно схеме, *f(x)* выпукла на промежутке $(0{,}07; 0{,}68)$ и вогнута на промежутках $(0; 0{,}07)$, $(0{,}68; +\infty)$. Точки $x \approx 0{,}07$

и $x \approx 0{,}68$ являются точками перегиба. Значения функции в точках перегиба: $f(0{,}07) \approx 0{,}03$, $f(0{,}68) \approx 0{,}07$.

9. **Вычисление значения функции для некоторых значений её аргумента. Построение графика.**

X	$(0; 0{,}07)$	0,07	$\left(0{,}07; \frac{1}{e}\right)$	$\frac{1}{e}$
y'	+	+	+	0
y''	+	0	-	-
Y	$\uparrow\cup$	0,03: перегиб	$\uparrow\cap$	$y_{max} \approx 0{,}14$

$\left(\frac{1}{e}; 0{,}68\right)$	0,68	$(0{,}68; 1)$	1	$(1; +\infty)$
-	-	-	0	+
-	0	+	+	+
$\downarrow\cap$	0,07: перегиб	$\downarrow\cup$	$y_{min} = 0$	$\uparrow\cup$

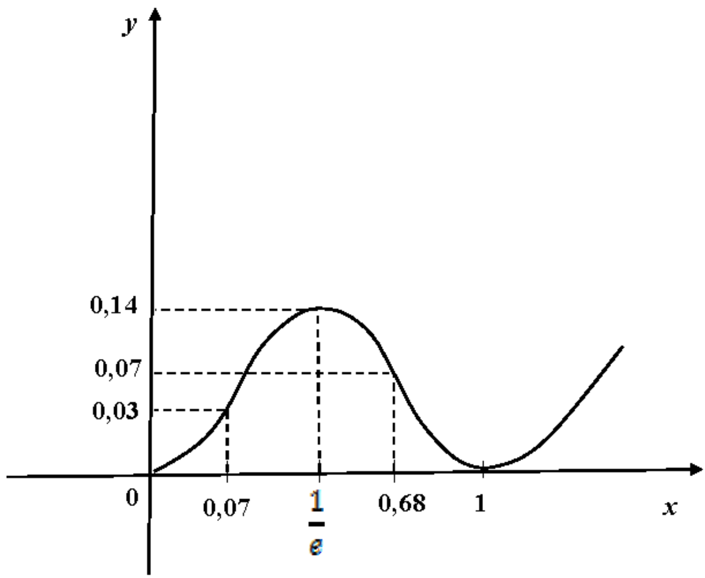


Рис.3.21

Задачи

Проведя необходимое исследование, постройте графики следующих функций:

153. $y = \dfrac{x}{x^2+1}$

154. $y = \dfrac{5}{x^6} - \dfrac{6}{x^5}$

155. $y = \dfrac{4x^2+3x}{2x+2}$

156. $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$

157. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$

158. $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$

159. $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

160. $y = \dfrac{27 - 2x^3}{6x^2}$

161. $y = \dfrac{x^2}{(x+4)^2}$

162. $y = \dfrac{2x^2 + 3x - 5}{x - 4}$

163. $y = \dfrac{x^2 - 3x - 18}{x - 9}$

164. $y = \dfrac{x^4}{(x+1)^3}$

165. $y = \dfrac{x^3 - x^2}{(x+1)^2}$

166. $y = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

167. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$

168. $y = e^{2x - x^2}$

169. $y = x e^{-x}$

170. $y = \dfrac{e^x}{x + 1}$

171. $y = (x+1) e^{\frac{1}{x}}$

172. $y = (x-2) e^{\frac{9}{x}}$

173. $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$

174. $y = x e^{-x^2}$

175. $y = x^2 e^{-x^2}$

176. $y = x \ln x$

177. $y = x^2 \ln x$

178. $y = \dfrac{\ln x}{x}$

179. $y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$

180. $y = x + arctg(x)$

181. $y = x - arctg(2x)$

Задачи для самостоятельного решения

Задание 13

Исследовать функцию и построить ее график:

13.1. $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

13.2. $y = \dfrac{x^3+16}{x}$

13.3. $y = \dfrac{x^3-1}{4x^2}$

13.4. $y = \dfrac{x-1}{x^2-2x}$

13.5. $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$

13.6. $y = \dfrac{x^2+1}{x}$

13.7. $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$

13.8. $y = \dfrac{4x^2}{x^3-1}$

13.9. $y = \dfrac{x}{3+x^2}$

13.10. $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$

13.11. $y = \frac{x^3 + 3}{x}$

13.12. $y = \frac{x^2 + 4}{x}$

13.13. $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$

13.14. $y = \frac{x}{x^2 + 5}$

13.15. $y = \frac{2x - 8}{(x - 3)^3}$

13.16. $y = \frac{2x}{(x - 2)^2}$

13.17. $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$

13.18. $y = \frac{x + 3}{2(x + 2)^2}$

13.19. $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$

13.20. $y = \frac{16x^2}{x - 4}$

13.21. $y = \frac{2x + 1}{(x + 1)^2}$

13.22. $y = \frac{x}{3 - x^2}$

13.23. $y = \frac{x}{x^2 + 2}$

13.24. $y = \frac{x^3}{3 - x}$

13.25. $y = \dfrac{x}{3 + x^2}$

13.26. $y = \dfrac{2x^3}{x - 2}$

13.27. $y = \dfrac{(x-1)^2}{x^2 + 1}$

13.28. $y = \dfrac{x - 1}{x^2 + 2}$

13.29. $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$

13.30. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Глава 4. Приложение производной в экономической теории

Ранее мы рассмотрели геометрический и физический смысл производной. Теперь обратимся к некоторым приложениям производной в экономических вопросах.

1. Пусть имеется функция $y = f(t)$, в которой величина y выражает количество произведенной продукции от начала работы, а t — время. За интервал времени Δt будет произведено $\Delta y = f(t + \Delta t) - f(t)$ единиц продукции. Величина $\frac{\Delta y}{\Delta t}$, вычисленная в окрестности некоторого момента времени t_0, представляет собой среднюю за промежуток времени Δt производительность труда в момент времени t_0. Если мы хотим знать, как меняется производительность труда со временем, то промежуток Δt мы должны брать достаточно малый, т.е. $\Delta t \to 0$. Получающаяся величина $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$ есть производная $\boldsymbol{y'(t) = f'(t)}$, представляющая собой ***производительность в некоторый момент времени***.
2. Рассмотрим ситуацию: пусть q – количество произведённой продукции, *TC(q)* – соответствующие данному выпуску совокупные издержки (total costs), TR – выручка (total revenue).

   Предельные издержки MC (marginal costs) выражают дополнительные затраты на производство каждой дополнительной единицы продукции. Предельные издержки есть не что иное, как первая производная от совокупных издержек, если последние представлены как функция от выпускаемого количества продукции: $\boldsymbol{MC = TC'(q)}$.

Аналогичным образом определяются и многие другие экономические величины, имеющие предельный характер.

Предельная выручка MR (marginal revenue) – это дополнительный доход, полученный при переходе от производства *n*-ной к (*n+1*)-ой единице продукта. Она представляет собой первую производную от выручки: $\boldsymbol{MR = TR'(q)}$.

Вычислим прибыль, получаемую предпренимателем. Она представляет собой разность между выручкой и совокупными издержками, т.е. $\boldsymbol{\pi(q) = TR(q) - TC(q)}$**.**

Пусть выполнены следующие условия:

- Функции *TR(q), TC(q)* определены на полуинтервале определены и дифференцируемы при *q>0.*
- Максимум прибыли достигается в некоторой точке $q_* > 0$.

Тогда функция $\pi(q) = TR(q) - TC(q)$ имеет максимум в точке q_*. Следовательно, $\pi'(q_*) = TR'(q_*) - TC'(q_*) = 0$. Отсюда $TR'(q_*) = TC'(q_*)$. Но $TR'(q_*) = MR(q_*), TC'(q_*) = MC(q_*)$. Таким образом,

$$\boldsymbol{MR(q_*) = MC(q_*)}.$$

В экономической теории данное равенство иллюстрирует один из базовых законов теории производства: ***фирма, максимизирующая свою прибыль, устанавливает объём производства таким образом, чтобы предельная выручка была равна предельным издержкам.***

3. **Эластичность функции**

Данное понятие было введено Аланом Маршаллом в связи с анализом функции спроса. Это понятие является чисто математическим и может быть применено к любым дифференцируемым функциям.

Эластичностью функции *y=f(x)* относительно переменной x в точке x_0 называется предел

$E_y(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right)$.

Для вычисления эластичности удобно использовать следующую формулу:

$$\boldsymbol{E_y = \frac{x}{y} \cdot y'}.$$

Экономисты измеряют степень чуткости, или чувствительности, потребителей к изменению цены продукции, используя концепцию ценовой эластичности.

Пусть *D=D(p)* – спрос на некоторый товар при цене *p*. Тогда ***спрос называется эластичным***, если $|E_D| > 1$, и

неэластичным, если $|E_D| < 1$. В случае, когда $E_D = 0$, употребляют термин ***совершенно неэластичный*** спрос.

Для спроса на некоторые продукты характерна относительная чуткость потребителей к изменениям цен, небольшие изменения в цене приводят к значительным изменениям в количестве покупаемой продукции. Спрос на такие продукты принято называть ***эластичным***. Иногда существенное изменение в цене ведет лишь к небольшому изменению в количестве покупок. В таких случаях спрос ***неэластичен***. Термин ***совершенно неэластичный*** спрос означает крайний случай, когда изменение цены не приводит ни к какому изменению количества спрашиваемой продукции.

Пример 1. Объём продукции *u(t)* цеха в течение рабочего дня представляет функцию $u = -t^3 - 5t^2 + 75t + 425$, где *t* – время (ч). Найти производительность труда через 2 часа после начала работы.

Решение. Производительность труда есть производная от функции *u(t)*:

$$u'(t) = -3t^2 - 10t \quad + 75$$

Поэтому через два часа после начала работы производительность будет равна

$$u'(2) = -3 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 \quad + 75 = 43.$$

Пример 2. Найти эластичность функций 1) $y = C$ – *const,* 2) $y = x + C,$ 3) $y = x^a, a \neq 1.$

Решение. Согласно приведенной выше формуле,

1) $E_y = \frac{x}{C} \cdot C' = 0$
2) $E_y = \frac{x}{x+C} \cdot (x + C)' = \frac{x}{x+C}$
3) $E_y = \frac{x}{x^a} \cdot (x^a)' = \frac{x}{x^a} \cdot ax^{a-1} = a$

Пример 3. Совокупные издержки *TC* и выручка *TR* следующим образом зависят от объема выпущенной продукции q:

$$TC = \frac{q^3}{10} + 200q, TR = 10q^{5/2} - 2q^3 + 10q^2 + 5q.$$

Найти предельные издержки *MC* и предельную выручку *MR*.

Решение. Имеем

$$MC(q) = TC'(q) = \left(\frac{q^3}{10} + 200q\right)' = \frac{3q^2}{10} + 200;$$

$$MR(q) = TR'(q) = \left(10q^{\frac{5}{2}} - 2q^3 + 10q^2 + 5q\right)' = 25q^{\frac{3}{2}} -$$
$$-6q^2 + 20q + 5.$$

Ответы

2. $4x^4+6x-2$

3. $49x^6+6x-4$

4. $-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^4}$

5. $\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-\frac{3}{2\sqrt[4]{x}}$

6. $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

10. $3x^2ctgx-\frac{x^3}{\sin^2 x}$

11. $\frac{3x-\sin 2x}{3x\sqrt[3]{x^2}\cos^2 x}$

12. $-\frac{1}{1+sinx}$

13. $9x^2\log_2 x+\frac{3x^2}{\ln 2}+\frac{2x-x^2}{e^x}$

14. $\frac{2}{(x+1)^2}$

15. $\frac{-x^4-4x^2+1}{(x^3-x)^2}$

16. $-\frac{3x^2+3}{(x^3+3x-1)^2}$

17. $\frac{1}{\sin\frac{2x+1}{2}}$.

7. $\frac{3}{2\sqrt{x}}-4\sin x-\frac{2}{\cos^2 x}$

8. $6x+\cos x+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}$

9. $\sin x+x\cos x$.

18. $2\cos 2x-\sin 2x$.

19. $\frac{3}{2}\frac{1-\sin 3x}{\sqrt{3x+\cos 3x}}$.

20. $\frac{1}{\sqrt{x^2-3}}$.

21. $-\sin 2x\cdot 3^{\cos^2 x}\ln 3$.

22. $\frac{1}{2+x^2}$.

23. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{x^2}{\sqrt{8-x^6}}$.

24. $\frac{2}{x\left(1-x^2\right)}$.

25. $\frac{6x}{\sqrt{9x^4+1}}$.

26. $\sqrt{1-x^2}$.

27. $e^{x^2}\left((x-1)\sin 2x+(x+1)\cos 2x\right)$.

28. $2^x\left(\ln x-\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln 2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right)$

29. $\dfrac{tg^2\dfrac{x}{3}}{\cos^2\dfrac{x}{3}}$.

30. $6x\cdot 2^{3x^2}\ln 2+ctgx$.

31. $\dfrac{e^{\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$.

32. $3ctg\left(3x+2\right)$.

33. $-e^{-x^2}\dfrac{(2x-1)(x-1)}{(x-3)^2}$.

34. $\dfrac{1}{\sqrt{-4x^2-2x}}$.

35. $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}(2+x^2)arctg\sqrt{1+x^2}}$.

36. $ctg\dfrac{3x}{5}\cdot\sqrt[3]{\ln^2\sin\dfrac{3x}{5}}$.

37. $\dfrac{2arctgx-(2xarctgx-\ln(1+x^2))\ln 2}{2^x}$

38. $-e^{-x}tg\dfrac{1}{x}-\dfrac{e^{-x}}{x^2\cos^2\dfrac{1}{x}}+\dfrac{2x}{1+x^2}$

39. $\left(3x^2+3x-1\right)^x\ln\left(3x^2+3x-1\right)+\left(3x^2+3x-1\right)^{x-1}\left(6x^2+3x\right)$

40. $(x+1)^{\ln x}\left(\dfrac{\ln(x+1)}{x}+\dfrac{\ln x}{x+1}\right)$.

41. $\dfrac{2^x\sqrt{4x+1}}{\left(2x-1\right)^3\sqrt[3]{x^3+2}}\left(\ln 2+\dfrac{1}{4x+1}-\dfrac{6}{2x-1}-\dfrac{x^2}{x^2+2}\right)$.

42. $\dfrac{\left(x^2-1\right)^3\arcsin\sqrt{x}}{x^4\left(3x+2\right)}\left(\dfrac{6x}{x^2-1}+\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}\arcsin\sqrt{x}}-\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{3x+2}\right)$

43. $\dfrac{\sqrt[5]{(x-2)^4}}{x^5\cdot\sqrt[3]{(2x+7)^7}}\left(\dfrac{4}{5(x-2)}-\dfrac{5}{x}-\dfrac{14}{3(2x+7)}\right)$

44. $\dfrac{\sqrt{2x+9}}{\sqrt{(3x+4)(x+7)}}\left(\dfrac{1}{2x+9}-\dfrac{3}{2(3x+4)}-\dfrac{1}{2(x+7)}\right)$

45. $\frac{(x+4)^3\sqrt{x^2-x+1}}{(x-5)^2\cdot\sqrt[7]{(x+1)^5}}\left(\frac{3}{x+4}+\frac{2x-1}{2(x^2-x+1)}-\frac{2}{x-5}-\frac{5}{7(x+1)}\right)$

46. $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}+\ln 3$

47. $y=3ex-2e^2$

48. $y=2x+2$

49. $y=x-1$

50. 45°

51. $y=x-7$

52. $45^\circ, arctg\frac{1}{3}$

53. 39

54. *t=1, t=3*

55. 2

56. (1;3)

57. a) t=0;8

b) $(0;4)\cup(8;+\infty)$

c) $t=\frac{4}{3}(3\pm\sqrt{3})$

58. $\frac{\sin 2x}{cos^4x}$

59. $x^3(20lnx+9)-18x^5$

60. $\frac{arctgx\sqrt{1+x^2}-x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

61. $-\frac{1}{x^2}$

62. $\frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$

63. $e^{-x}(3-x)$

64. $\frac{2}{3}\text{ctg }t;\frac{2}{9\sin^3 t}.$

65. $\frac{t^2-1}{2t};\frac{1+t^2}{4t^3}.$

66. $\frac{3}{2}e^t;\frac{3}{4}e^{-t}.$

67. $\frac{3t^2+1}{2t};\frac{3t^2-1}{4t^3}.$

68. $-\text{tg }t;\frac{1}{12\cos^4 t\sin t}.$

69. $\frac{1-3t}{t-3};\frac{8(t+1)^2}{(t-3)^3}.$

70. $\frac{2t}{1-t^2};\ \frac{2(1+2t^2)(1+t^2)^2}{(1-t^2)^3}$

71. $\frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}},-\frac{2}{1-t^2}$

72. $2t, 2(1+t^2)$

73.

74. $-\frac{2xy^4-12x^3y^3-5x^4}{4x^2y^3-9x^4y^2}$

75. $-\frac{3x^2+2xy-4xy^2+6}{x^2-4x^2y}$

76. $-\frac{2x-(x^2y+y^3)e^{yx}}{2y-(x^3+xy^2)e^{yx}}$

77. $\frac{(2xy^3-14xy)\sqrt{1-y^2}}{(7x^2-3x^2y^2)\sqrt{1-y^2}+1}$

78. $5x^4dx$

79. $\dfrac{dx}{\cos^2 x}$

80. $3\sin 2x \sin 4x dx$

81. $\dfrac{dx}{x}$

82. $\dfrac{ctg\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$

83. $-\dfrac{tgx \cdot e^{-\frac{1}{\cos x}}}{\cos x}dx$

84. $-2x \cdot 2^{-x^2} \ln 2dx$

85. $4dx$

86. $3dx$

87. $-\dfrac{3}{\sqrt{10}}dx$

88. 0

89. $-dx$

90. $-2edx$

91. $\dfrac{1}{4}dx$

92. $\dfrac{dx}{6\sqrt{11}}$

93. $\dfrac{2\cos x}{\sin^3 x}dx^2$

94. $-2\cos 2x dx^2$

95. $\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}dx^2$

96. $-2e^x\left(\cos x + \sin x\right)dx^3$

97. $-\dfrac{1}{x^2}dx^3$

98. 4,99.

99. -5,01.

100. -3,02.

101. $f(x) = -1-(x-1)-(x-1)^2-(x-1)^3-(x-1)^4+o((x-1)^4)$

102. $f(x) = 1+\dfrac{1}{2}(x-1)-\dfrac{1}{8}(x-1)^2+o((x-1)^2)$

103. $f(x) = 1+2x+x^2-\dfrac{2}{3}x^3+o(x^3)$.

104. $P'''(11)=12$.

105. 0

106. 1/3

107. 3/2

108. 3/2

109. 1/3

110. 0

111. 0

112. $-\dfrac{7}{5}$

113. 4,5 **115.** -0,5 **117.** -2

114. 3 **116.** 0,5 **118.** -4

119. 1

120. 0,5

121. $\frac{1}{6}$

122. $-\frac{1}{5}$

123. $\frac{1}{128}$

124. 1

125. $\frac{\ln^2 2}{90}$

126. $y_{\min} = y(0) = -1, y_{\max} = y(1) = 1$

127. $y_{\min} = y(3) = -1, y_{\max} = y(1) = 3$

128. $y_{\min} = y\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{56}{9}, y_{\max} = y\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{88}{9}$

129. $y_{\min} = y(0) = 1, y_{\max} = y(1) = 8$

130. $y_{\min} = y(-1) = 0, y_{\max} = y(-2) = 17$

131. $y_{\min} = y(-\pi) = -2\pi, y_{\max} = y(\pi) = 2\pi$

132. $y_{\min} = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, y_{\max} = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

133. $y_{\min} = y(\pi) = -\frac{\pi\left(\pi^2+3\right)}{3}, y_{\max} = y(0) = 0$

134. $y_{\min} = y(1) = 2, y_{\max} = y(0,1) = 10,1$

135. $y_{\min} = y(1) = -1, y_{\max} = y(-1) = \frac{1}{3}$

136. $y_{\min} = y(1) = -1, y_{\max} = y(e) = 0$

137. $x = 0, y = 1$

138. $y = 1$

139. $x = 0, y = -1$

140. $x = -\frac{1}{2}, y = -2$

141. $x = 0, y = x$

142. $x=-1, y=x-1$

143. $x=0, y=x-1$

144. $x=-\dfrac{4}{7}, y=-\dfrac{5}{7}$

145. $y=x$

146. Асимптот нет

147. $x=0, y=-x$

148. Асимптот нет.

149. $x=-2, y=\dfrac{1}{2}$

150. $x=1, y=-\dfrac{x+1}{2}$

151. $x=2, x=-2, y=1$

152. $x=1, x=-1, y=-x$

153. $y=0$ - горизонтальная асимптота, $y'=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, $y''=\dfrac{-2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$, $x_{\min}=-1$, $x_{\max}=1$, точки перегиба: $x=\pm\sqrt{3},\quad x=0$.

154. $y=0$ - горизонтальная асимптота, $x=0$ - вертикальная асимптота, $y'=30\dfrac{x-1}{x^7}$, $y''=30\dfrac{7-6x}{x^8}$, $x_{\min}=1$, точка перегиба: $x=\dfrac{7}{6}$.

155. $y=2x-\dfrac{1}{2}$ - наклонная асимптота, $y'=\dfrac{4x^2+8x+3}{2(x+1)^2}$, $y''=\dfrac{1}{(x+1)^3}$, $x_{\min}=-\dfrac{1}{2}$, $x_{\max}=-\dfrac{3}{2}$.

156. $y=x$ - наклонная асимптота, $x=0$ - вертикальная асимптота, $y'=\dfrac{x^3-8}{x^3}$, $y''=\dfrac{24}{x^4}$, $x_{\min}=2$.

157. $y=x$ - наклонная асимптота, $x=\pm 2$ - вертикальные асимптоты, $y'=\dfrac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$, $y''=\dfrac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$, $x_{\min}=2\sqrt{3}$, $x_{\max}=-2\sqrt{3}$, $x=0$ - точка перегиба.

158. $y=x$ - наклонная асимптота, $y'=\dfrac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$, $y''=\dfrac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$, $x=0;\pm\sqrt{3}$ - точки перегиба.

159. $y=x+4$ - наклонная асимптота, $x=2$ - вертикальная асимптота, $y'=\dfrac{x^2(x-6)}{(x-2)^3}$, $y''=\dfrac{24x}{(x-2)^4}$, $x_{\min}=6$, $x=0$ - точка перегиба.

160. $y=-\frac{1}{3}x$ - наклонная асимптота, $x=0$ - вертикальная асимптота, $y'=\frac{-x^3-27}{3x^3}$, $y''=\frac{27}{x^4}$, $x_{\min}=-3$.

161. $y=1$ - горизонтальная асимптота, $x=-4$ - вертикальная асимптота, $y'=\frac{8x}{(x+4)^3}$, $y''=\frac{16(2-x)}{(x+4)^4}$, $x_{\min}=0$, $x=2$ - точка перегиба.

162. $y=2x+11$ - наклонная асимптота, $x=4$ - вертикальная асимптота, $y'=\frac{2x^2-16x-7}{(x-4)^2}$, $y''=\frac{78}{(x-4)^3}$,

$x_{\min}=\frac{8+\sqrt{78}}{2}$, $x_{\max}=\frac{8-\sqrt{78}}{2}$.

163. $y=x+6$ - наклонная асимптота, $x=9$ - вертикальная асимптота, $y'=\frac{x^2-18x+45}{(x-9)^2}$, $y''=\frac{72}{(x-9)^3}$, $x_{\min}=15$, $x_{\max}=3$.

164. $y=x-3$ - наклонная асимптота, $x=-1$ - вертикальная асимптота, $y'=\frac{x^3(x+4)}{(x+1)^4}$, $y''=\frac{12x^2}{(x+1)^5}$, $x_{\min}=0$, $x_{\max}=-4$.

165. $y=x-3$ - наклонная асимптота, $x=-1$ - вертикальная асимптота, $y'=\frac{x(x^2+3x-2)}{(x+1)^3}$, $y''=\frac{10x-2}{(x+1)^4}$, $x_{\min}=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$, $x_{\max}=0,$ $x_{\max}=\frac{-3-\sqrt{17}}{2}$, точка перегиба: $x=\frac{1}{5}$.

166. $y = x + 5$ - наклонная асимптота, $x = 1$ - вертикальная асимптота, $y' = \dfrac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$, $y'' = \dfrac{24(x+1)}{(x-1)^4}$, $x_{\min} = 5$, $x = -1$ - точка перегиба.

167. $x = \pm 1$ - вертикальные асимптоты, $y' = \dfrac{x^2 - 3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$, $y'' = \dfrac{2x(9 - x^2)}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^7}}$, $x_{\min} = \sqrt{3}$, $x_{\max} = -\sqrt{3}$, точки перегиба: $x = 0; \pm 3$.

168. $y = 0$ - горизонтальная асимптота, $y' = 2(1-x)e^{2x-x^2}$, $y'' = 2(2x^2 - 4x + 1)e^{2x-x^2}$, $x_{\max} = 1$, точки перегиба: $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$.

169. $y = 0$ - горизонтальная асимптота при $x \to +\infty$, $y' = (1-x)e^{-x}$, $y'' = (x-2)e^{-x}$, $x_{\max} = 1$, точка перегиба: $x = 2$.

170. $y = 0$ - горизонтальная асимптота при $x \to -\infty$, $x = -1$ - вертикальная асимптота, $y' = \dfrac{x e^x}{(x+1)^2}$, $y'' = \dfrac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^3}$, $x_{\min} = 0$.

171. $y = x + 2$ - наклонная асимптота, $x = 0$ - вертикальная асимптота при $x \to 0 + 0$, $y' = \left(\dfrac{x^2 - x - 1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$, $y'' = \left(\dfrac{3x+1}{x^4}\right)e^{\frac{1}{x}}$, $x_{\min} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_{\max} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, точка перегиба: $x = -\dfrac{1}{3}$.

172. $y = x + 7$ - наклонная асимптота, $x = 0$ - вертикальная асимптота при $x \to 0+0$, $y' = \left(\dfrac{x^2 - 9x + 18}{x^2}\right) e^{\frac{9}{x}}$,

$y'' = \left(\dfrac{45x - 144}{x^4}\right) e^{\frac{9}{x}}$, $x_{\min} = 6$, $x_{\max} = 3$, точка перегиба: $x = 3,2$.

173. $x = 0$ - вертикальная асимптота при $x \to 0+0$, $y' = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$, $y'' = \left(\dfrac{2x^2 - 2x + 1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}}$, $x_{\min} = \dfrac{1}{2}$.

174. $y = 0$ - горизонтальная асимптота, $y' = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$, $y'' = (4x^3 - 6x^2)e^{-x^2}$, $x_{\min} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x_{\max} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, точки перегиба: $x = 0; \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

175. $y = 0$ - горизонтальная асимптота, $y' = 2(x - x^3)e^{-x^2}$, $y'' = 2(2x^4 - 5x^2 + 1)e^{-x^2}$,

$x_{\min} = 0$, $x_{\max} = \pm 1$, точки перегиба: $x = \pm\sqrt{\dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{4}}$.

176. $y' = \ln x + 1$, $y'' = \dfrac{1}{x}$, $x_{\min} = \dfrac{1}{e}$.

177. $y' = x(2\ln x + 1)$, $y'' = 2\ln x + 3$, $x_{\min} = e^{-\frac{1}{2}}$, точка перегиба: $x = e^{-\frac{3}{2}}$.

178. $y = 0$ - горизонтальная асимптота при $x \to +\infty$, $x = 0$ - вертикальная асимптота при $x \to 0+0$, $y' = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$,

$x_{\max} = e$, точка перегиба: $x = e^{\frac{3}{2}}$.

179. $y' = \dfrac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$, $y'' = \dfrac{10x+2}{9\sqrt[3]{x^4}}$, $x_{\min} = \dfrac{2}{5}$, $x_{\max} = 0$, точка перегиба: $x = -\dfrac{1}{5}$.

180. $y = x + \dfrac{\pi}{4}$ - наклонная асимптота при $x \to +\infty$, $y = x - \dfrac{\pi}{4}$ - наклонная асимптота при $x \to -\infty$, $y' = \dfrac{x^2+2}{x^2+1}$, $y'' = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$, точка перегиба: $x = 0$.

181. $y = x - \dfrac{\pi}{4}$ - наклонная асимптота при $x \to +\infty$, $y = x + \dfrac{\pi}{4}$ - наклонная асимптота при $x \to -\infty$, $y' = \dfrac{4x^2-1}{4x^2+1}$, $y'' = \dfrac{16x}{(4x^2+1)^2}$, $x_{\min} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x_{\max} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, точка перегиба: $x = 0$.

Литература

[1] Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа // СПб.: «Профессия», 2007 г.

[2] Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу.Часть 1. // М.: Дрофа, 2001 г.

[3] Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике //СПб.: «Лань», 2005 г.

[4] Малугин В.А. Математика для экономистов: Математический анализ. Курс лекций // М.: «Эксмо», 2005 г.

[5] Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике // М.: Издательство Физико-математической литературы, 2009 г.

[6] Сборник задач по высшей математике для экономистов под редакцией В.И. Ермакова// М.: ИНФА-М, 2003с

[7] Шипачев В.С. Высшая математика // М.: «Высшая школа», 1990 г.

[8] Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч. 2. Под ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова. Физматлит. Москва. 2001. 432 с.

[9] А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браилов, И.Г. Шандра. Математика в экономике: Учебник в 2-х ч. Ч. 2. «Финансы и статистика». Москва. 2000. 376 с.

[10] Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман. Высшая Математика для экономистов: Учебник для вузов. ЮНИТИ. Москва. 2001. 471 с.

[11] Ишханян М.В. Математический анализ. Часть 1. //М.: МИИТ, 2012 г, 175 с.

Оглавление

Св. план 2014 г., поз. 152

Ишханян Маргарита Владимировна

Русинова Анна Михайловна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебное пособие для направления «Экономика»

Подписано в печать Формат 60 Х 84 / 16

Заказ № Усл. - печ. л. -

Тираж -100 экз.