ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»

КАФЕДРА «МАТЕМАТИКА»

М.В. Ишханян, Л.В. Кекух, А.И. Фроловичев

МАТЕМАТИКА

Часть 1

Учебное пособие

Москва – 2013

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»

КАФЕДРА «МАТЕМАТИКА»

М.В. Ишханян, Л.В. Кекух, А.И. Фроловичев

МАТЕМАТИКА

Часть 1

Рекомендовано редакционно-издательским советом

университета в качестве учебного пособия

для студентов направления 080200.62 «Менеджмент»

Москва – 2013

УДК – 51

И – 97

Ишханян М.В., Кекух Л.В., Фроловичев А.И Математика. Часть 1.: Учебное пособие. – М.: МИИТ, 2013. – 311 с.

Учебное пособие предназначено для студентов направления 080200.62 «Менеджмент», обучающихся по дисциплине «Математика». Учебное пособие удовлетворяет требованиям ФГОС 3 поколения и написано в соответствие с примерной образовательной программой дисциплины «Математика», одобренной УМО по классическому университетскому образованию. Пособие включает следующие разделы программы: «Линейная алгебра», «Аналитическая геометрия», «Введение в анализ», Предлагаемое пособие содержит более 400 задач и может быть полезно в процессе аудиторной и самостоятельной работы студентов.

Рецензенты:
В.Н. Деснянский, к.ф.-м.н., зав. кафедрой «Математический анализ» МИИТа;
Л.А. Климина, к.ф.-м.н.,с.н.с. НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова.

Раздел 1. Линейная Алгебра

Тема 1. Матрицы и операции над ними

План

1. *Понятие матрицы.*
2. *Виды матриц.*
3. *Операции над матрицами:*
    а) *сложение (вычитание) матриц;*
    б) *умножение числа на матрицу;*
    в) *умножение матриц;*
    г) *транспонирование матриц;*
    д) *след квадратной матрицы;*
    е) *возведение в степень.*

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов.

Числа, составляющие матрицу, называются элементами матрицы. Каждый элемент матрицы снабжён двумя индексами: первый индекс указывает номер строк, а второй – номер столбца, в которых расположен этот элемент.

Матрицы обозначаются прописными заглавными буквами латинского алфавита: A,B,C и т.д. Для обозначения элементов матрицы используются строчные буквы: например, a_{ij}, где i – номер строки, j – номер столбца.

Обозначив матрицу буквой A, можно записать

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или $A=\left(a_{ij}\right)$, $i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n.$

Примеры различных матриц:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & -7 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Для матрицы А, например, элемент $a_{31}=5$.

Для матрицы В, например, элемент $b_{14}=6$.

Для матрицы С, например, элемент $c_{22}=1$.

При n = 1 матрица называется матрицей-столбцом.

Она имеет вид $A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ Например, $A=\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$.

При m = 1 матрица называется матрицей-строкой.

Она имеет вид $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$.

Например, $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Наряду с круглыми скобками используются и другие обозначения матрицы : $[\ ]$; $\|\ \|$

Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одного размера называются равными, если они совпадают поэлементно, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$; для любых i=1,2,…,m;j=1,2,…,n.

Матрицы разных размеров не сравниваются. С помощью матриц удобно, например, записывать некоторые экономические зависимости.

Квадратной матрицей называется матрица, в которой количество строк равно количеству её столбцов. Число строк матрицы, равное числу столбцов, называется *порядком* квадратной матрицы.

Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 9 & 8 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ - квадратная матрица 3-го порядка.

Множество всех элементов квадратной матрицы, которые находятся на отрезке, соединяющим её левый верхний угол с правым нижним, т.е. совокупность элементов $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$, называется *главной* диагональю; множество всех элементов, которые находятся на отрезке, соединяющем её правый верхний угол с левым нижним, называется *побочной* (вспомогательной) диагональю.

Например, дана матрица $Д = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$; элементы 1,5,9 составляют главную диагональ матрицы, а элементы 3,5,7 – вспомогательную диагональ.

Квадратная матрица называется треугольной, если её элементы, которые находятся над главной диагональю или под главной диагональю, равны нулю.

Например, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

Здесь матрица В – треугольная снизу, а матрица С – треугольная сверху. Квадратная матрица называется диагональной, если все её элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю.

Например, $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ - диагональная матрица 3-го порядка.

Если у диагональной матрицы n-го порядка все диагональные элементы равны единице, то матрица называется единичной матрицей n-го порядка и обозначается буквой Е.

Например, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - единичная матрица 3-го порядка.

Матрица любого размера называется *нулевой*, если все её элементы равны нулю.

Симметрической матрицей называется квадратная матрица, у которой элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны друг другу.

Например, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 6\\ 3 & 6 & 8\end{pmatrix}$.

Суммой (разностью) двух матриц A и B одинакового размера *m x n* (определяется только для матриц одинаковой размерности) называется матрица C=A$\pm$B, элементы которой $c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}$ для i =1,…,m; =1,…,n; т.е.матрицы складываются (вычитаются) поэлементно.

Пример. $\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6 & 3 & 21\\ 7 & 0 & -40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 4 & 24\\ 8 & 3 & -32\end{pmatrix}$

Свойства суммы матриц:

1.A+B=B+A;

2. (A+B)+C=A+(B+C); 3. A+0=A,

Произведением числа k на матрицу A называется матрица B=kA, состоящая из элементов матрицы A, умноженных на число k, т.е. $b_{ij}=ka_{ij}$ (i=1,…,m; j=1,…,n).

Пример. Пусть $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 7\end{pmatrix}$. Найти 5A.

$$5A=5\cdot\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 20\\ 15 & 35\end{pmatrix}.$$

Следствие. Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

Пример. $\begin{pmatrix}20 & 12 & 6\\ 52 & 2 & 0\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}10 & 6 & 3\\ 26 & 1 & 0\end{pmatrix}.$

Справедливы свойства:

1. 1·A = A
2. 0·A = **0,** где **0 -** нулевая матрица
3. k·**0** = **0**
4. (k + p)A = kA + pA
5. k(A+B) = kA + kB
6. (kp)A = k(pA) = p(kA)

В отличие от перечисленных операций, операция умножения матрицы на матрицу определяется более сложно.

Умножение матрицы A на матрицу B определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Тогда произведением матриц $A_{m\times k}\cdot B_{k\times n}$ называется такая матрица $C_{m\times n}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-той строки матрицы A на соответствующие элементы j-того столбца матрицы B. Это означает, что, для того, чтобы получить элемент c_{ij}, стоящий в строке с номером i и столбце с номером j , надо каждый элемент строки матрицы A с номером i умножить на соответствующий элемент матрицы B из столбца с номером j и все полученные произведения сложить.

Задача. Найти A·B и B·A, если

$$A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 8\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ -2 & -3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

Решение

► Произведение A·B существует, т.к. число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}4 & -5 & 8\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 5\\ -2 & -3\\ 3 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4\cdot(-1)+(-5)\cdot(-2)+8\cdot 3 & 4\cdot 5+(-5)\cdot(-3)+8\cdot 4\\ 1\cdot(-1)+3\cdot(-2)+(-1)\cdot 3 & 1\cdot 5+3\cdot(-3)+(-1)\cdot 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}30 & 67\\ -10 & -8\end{pmatrix}$$

◄

Произведение B·A существует, т.к. число столбцов матрицы B равно числу строк матрицы A.

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ -2 & -3\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -5 & 8\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 20 & -13\\ -11 & 1 & -13\\ 16 & -3 & 20\end{pmatrix}$$

Умножение матриц обладает свойствами:

1. k(AB)=(kA)B=A(kB), где k – число
2. (A+B)C=AC+BC
3. A(B+C)=AB+AC
4. (AB)C=A(BC)
5. A·B≠B·A

Транспонирование матрицы - это переход от матрицы A к матрице A', в которой строки и столбцы меняются местами с сохранением порядка. Матрица A' называется транспонированной относительно матрицы A.

Из определения следует, что, если матрица A имеет размер m x n, то транспонированная матрица A' имеет размер n x m.

Пример. $\underset{2x3}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Тогда $\underset{3x2}{A'} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

В литературе встречаются другие обозначения транспонированной матрицы, например, A^{T}.

Свойства операции транспонирования:

1. $(A')' = A$

3. $(A+B)' = A' + B'$

2. $(kA)' = kA'$

4. $(AB)' = B'A'$

Следом квадратной матрицы А называется сумма её диагональных элементов

$$trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Задача. Найти след матрицы С = АВ, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение

$$► C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 13 & 9 \end{pmatrix}$$

След $trC = 7 + 9 = 16$ ◄

Целой положительной степенью $A^m \left(m > 1\right)$ квадратной матрицы А называется произведение m матриц, равных А, то есть

$$A^m = \underbrace{A \cdot A ... \cdot A}_{m}$$

По определению $A^0 = E, A^1 = A.$

Справедливы равенства: $A^m \cdot A^k = A^{m+k}, \left(A^m\right)^k = A^{mk}$

Пример. Найти A^2, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Решение

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

Тема 2. Определители квадратных матриц

План

1. *Понятие определителей матриц.*
2. *Вычисление определителей.*
3. *Свойства определителей.*

С понятием матрицы тесно связано понятие определителя, которое возникло в связи с задачей решения систем алгебраических линейных уравнений. Определитель – число, характеризующее квадратную матрицу.

Пусть А - квадратная матрица: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Соответствующий ей определитель n-ого порядка обозначают символом Δ (*или* |A|)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определителем матрицы первого порядка $A = (a_{11})$, или определителем первого порядка, называется элемент a_{11}: $\Delta = a_{11}$

Например, пусть A = (5), тогда $\Delta = 5$.

Определителем матрицы второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, или

определителем второго порядка, называется число, которое вычисляется по формуле:

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$, то есть определитель второго порядка равен разности произведений элементов главной и вспомогательной диагонали.

Например, пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$,тогда

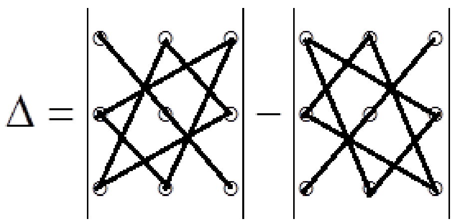
$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 4 \cdot (-3) = 2 + 12 = 14$$

Определителем матрицы третьего порядка, называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$
$$-(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{21}a_{12}a_{33}),$$

то есть определитель третьего порядка равен сумме произведений элементов главной диагонали и произведений элементов, находящихся при вершинах двух треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали, минус сумма произведения элементов вспомогательной диагонали и произведений элементов, находящихся при вершинах двух треугольников с основаниями, параллельными вспомогательной диагонали.

Схематически:



Пример. Пусть $A=\begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, тогда

$$\Delta=\begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix}=4\cdot(-1)\cdot 7+3\cdot 0\cdot(-2)+7\cdot 5\cdot 5-$$
$$-5\cdot(-1)\cdot(-2)-0\cdot 5\cdot 4-3\cdot 7\cdot 7=$$
$$=-28+0+175-10-0-147=-10$$

Рассмотрим вопрос вычисления определителя n-ого порядка. В определителе выделяют элемент a_{ij} и вычёркивают (мысленно) i-тую строку и j-тый столбец, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}. Полученный определитель (с тем же расположением строк и столбцов) (n-1)-го порядка называется минором M_{ij} элемента a_{ij} данного определителя. Минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, называется алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij}: $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$, то есть алгебраическое дополнение совпадает с минором, когда сумма номеров строки и столбца (i+j)-чётное число, и отличается от минора знаком, когда (i+j)-нечётное число.

Задача. Найти алгебраические дополнения всех элементов определителя $\Delta=\begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix}$

Решение

►

A_{11}=(-1)$^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}$= -7; A_{12}=(-1)$^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$= -(21-25)= 4;

A_{13}=(-1)$^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$= 5;

A_{21}=(-1)$^{2+1}\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}$= -49; A_{22}=(-1)$^{2+2}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$=28-(-10)= 38;

A_{23}=(-1)$^{2+3}\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$=-(-35)=35; A_{31}=(-1)$^{3+1}\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$=33;

A_{32}=(-1)$^{3+2}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$=-(20+6)= -26; A_{33}=(-1)$^{3+3}\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$=-4-21=-25◄

Определителем n-ого порядка, который соответствует матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, называется число, равное:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} M_{ij} \, (i = 1,2,\dots,n)\,,$$

то есть сумме произведений всех элементов произвольной строки на их соответствующие алгебраические дополнения.

(Аналогично определитель вычисляется по элементам произвольного столбца)

Используя это определение, вычислим определитель второго и третьего порядков в общем виде.

Задача. Дана квадратная матрица второго порядка, то есть n = 2. Вычислить определитель Δ по элементам первой строки.

Решение

► $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}a_{22} + a_{12}(-1)^{1+2}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, то есть полученное выражение совпадает с определением (см. определение определителя 2-ого порядка).◄

Задача. Дана квадратичная матрица третьего порядка, то есть n = 3. Вычислить определитель Δ по элементам второго столбца.

Решение

►

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{32}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) -$$

$$- a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}) = -a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{22}a_{11}a_{33} -$$

$$- a_{22}a_{31}a_{13} - a_{32}a_{11}a_{23} + a_{32}a_{21}a_{13} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$

$$-(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{21}a_{12}a_{33}),$$

то есть полученное выражение совпадает с определением (см. определение определителя 3-го порядка).◄

Задача. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ по элементам первой строки.

Решение

$$► \Delta = \begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-2) \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-7) - 7 \cdot (21 - 25) - 2 \cdot 5 = -28 + 28 - 10 = -10$$

◄

Для упрощения вычислений определителей используют свойства:

1. Если некоторая строка (столбец) определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю.
2. Определитель, содержащий две одинаковые строки (столбца) равен нулю.
3. Если какие-либо две строки (два столбца) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.
4. Общий множитель всех элементов строки столбца) можно выносить за знак определителя.
5. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак.
6. Определитель не изменится, если к элементам любой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.
7. При транспонировании матрицы определитель не меняется.
8. Если E - единичная матрица, то её определитель равен единице.
9. Если все элементы какой-либо строки (столбца) умножить на число k, то определитель умножится на это число k.
10. Если каждый элемент некоторой строки (столбца) определителя представлен в виде суммы двух слагаемых, то такой определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых на месте соответствующей строки

(столбца) расположены первые слагаемые, во втором - вторые слагаемые.

11. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю.

Задача. Упростить и вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 12 & 19 \\ 3 & 9 & 17 \end{vmatrix}$$

Решение

►

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 12 & 19 \\ 3 & 9 & 17 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 12 & 19 \\ 3 & 9 & 17 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \\ 9 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 4(8-6) = 4 \cdot 2 = 8$$

◄

Задача. Вычислить $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Решение

►**I способ** (по элементам второй строки, так как строка содержит два нуля):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 7 + 4 \cdot 2 \cdot 6 -$$
$$- 6 \cdot 3 \cdot 7 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 4 \cdot 1) + 2(1 \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 4 +$$
$$+ 2 \cdot 3 \cdot 6 - 6 \cdot 4 \cdot 4 - 3 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1) = 3(3 + 14 + 48 -$$
$$- 126 - 2 - 8) + 2(4 + 24 + 36 - 96 - 9 - 4) = 3 \cdot (-71) +$$
$$+ 2 \cdot (-45) = -213 - 90 = -303$$

II способ (понижение порядка определителя, используя свойства):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -5 & -12 \\ 6 & -9 & -23 & -41 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -12 \\ -9 & -23 & -41 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -12 \\ -3 & -23 & -41 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -12 \\ -3 & -23 & -35 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -5 & -12 \\ -23 & -35 \end{vmatrix} = \blacktriangleleft$$

$$= 3(175 - (-12)(-23)) = 3(175 - 276) = 3(-101) = -303$$

Тема 3. Обратная матрица

План

1. *Понятие обратной матрицы.*
2. *Алгоритмы нахождения обратной матрицы.*
3. *Решение простейших матричных уравнений*

Матрица A^{-1}называется обратной по отношению к матрице A, если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Только квадратная матрица имеет обратную, и обратная матрица является квадратной того же порядка.

Однако не каждая квадратная матрица имеет обратную.

Приведём без доказательства теорему о необходимом и достаточном условии существования обратной матрицы.

Теорема. Обратная матрица A^{-1} существует и единственна тогда только тогда, когда определитель матрицы A не равен нулю. Алгоритм нахождения обратной матрицы:

1. Найти определитель исходной матрицы A.
   Если Δ=0, то обратная матрица A^{-1} не существует.
   Если Δ≠0, то обратная матрица A^{-1} существует.
2. Найти матрицу A^t, транспонированную к матрице A.
3. Найти алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы.
4. Составить присоединённую матрицу A из алгебраических дополнений транспонированной матрицы.
5. Найти обратную матрицу A^{-1} по формуле $A^{-1}=\frac{1}{\Delta}A^*$ (Δ≠0)
6. Проверить правильность нахождения обратной матрицы A^{-1}[1], исходя из её определения $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ (п.6 не обязателен)

Задача. Для матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ найти обратную A^{-1}.

Решение

►1.Найдём определитель матрицы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -6 + 4 = -2 \neq 0$$

Значит, A^{-1} существует.

2.Найдём транспонированную матрицу: $A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

3.Найдём алгебраические дополнения транспонированной матрицы:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4; A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2; A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2$$
$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0; A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0; A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2$$
$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3; A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1; A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

4.Составим присоединённую матрицу

$$A^* = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5.Найдём обратную матрицу по формуле:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}A=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}4 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 2\\ -3 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 3/2 & -1/2 & -1/2\end{pmatrix}$$

6.Сделаем проверку, используя определение обратной матрицы:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 4\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 3/2 & -1/2 & -1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

Значит, обратная матрица найдена правильно.◄

Пусть требуется решить уравнение $AX=B$, где A,X,B - матрицы.

Если матрица A такая, что определитель $\Delta\neq 0$, то у неё существует обратная ей матрица A^{-1}. Выполним тождественные преобразования уравнения, умножая левую и правую части уравнения на матрицу A^{-1}, размещая в обеих частях уравнения множитель A^{-1} слева. Получим: $A^{-1}\cdot(AX)=A^{-1}\cdot B$

По определению обратной матрицы $A^{-1}\cdot A=E$, а $E\cdot X=X$. Тогда:

$$E\cdot X=A^{-1}\cdot B$$
$$X=A^{-1}\cdot B$$

то есть найдена неизвестная матрица.

Аналогично решается уравнение $X\cdot A=B$

Умножим левую и правую части уравнения на матрицу A^{-1}, размещая в обеих частях уравнения множитель A^{-1} справа. Получим:

$$(XA) \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$$

$$X \cdot E = B \cdot A^{-1}$$

$$X = B \cdot A^{-1},$$

то есть найдена неизвестная матрица.

Пусть требуется решить уравнение $A \cdot X \cdot B = C$, где A, X, B, C -матрицы.

Если матрицы A и B такие, что $\Delta_A \neq 0, \Delta_B \neq 0$,то у них существуют обратные матрицы A^{-1} и B^{-1}. Умножим обе части уравнения на A^{-1} и B^{-1}, размещая множитель A^{-1} слева от группы матриц, а множитель B^{-1} справа.

Получим:

$$A^{-1}(AXB) \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \; (A^{-1} \cdot A) \cdot X \cdot (B \cdot B^{-1}) = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

$$E \cdot X \cdot E = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1},$$

то есть найдена неизвестная матрица.

Задача. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение

►Уравнение имеет вид $A \cdot X = B$. Поэтому неизвестная матрица $X = A^{-1} \cdot B$.

Найдём A^{-1}, если она существует. Для этого вычислим определитель матрицы A: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, то есть A^{-1} существует.

Найдём транспонированную матрицу A':

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$A_{11} = 4, A_{12} = -2, A_{21} = -3, A_{22} = 1$

Тогда $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Получаем: $A^{-1} = \dfrac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

Теперь найдём неизвестную матрицу X:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Проверим правильность решения, подставляя найденную матрицу X в исходное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ - равенство верно.

Таким образом, матричное уравнение решено правильно.◄

Тема 4. Ранг матрицы

План

1. *Ранг матрицы и его нахождение.*
2. *Элементарные преобразования матриц.*
3. *Понятие о линейной зависимости.*

Для решения и исследования ряда математических и прикладных задач важное значение имеет ранг матрицы.

Пусть задана произвольная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Из элементов матрицы, расположенных на пересечении некоторых k строк и k столбцов, можно образовать определитель k-того порядка, который называется минором k-того порядка этой матрицы.

Например,

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$ -миноры второго порядка,

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ -минор третьего порядка.

Порядок образуемого минора меньше или равен меньшему

из чисел m и n.

Задача. Написать минор наивысшего порядка для матрицы

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 7 \\ 5 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Решение

►Наивысший порядок минора для данной матрицы равен 3. Одним из миноров третьего порядка является минор

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 7 \\ 5 & 6 & -2 \end{vmatrix}$,образованный элементами первых трёх строк.

Для данной матрицы можно написать всего четыре минора третьего порядка, последовательно вычёркивая по одной строке.◄

Определение. Если в матрице А среди миноров порядка r имеется хотя бы один, отличный от нуля, а все миноры порядка k больше r, равны нулю, то число r называется рангом матрицы.

(Иными словами, рангом матрицы А называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы).

Ранг матрицы А обозначается r(A).

Из определения следует:

1. Ранг матрицы $A_{m \times n}$ не превосходит меньшего из её размеров, то есть $r(A) \le \min(m;n)$;
2. r(A)=0 тогда и только тогда, когда все элементы матрицы равны нулю;
3. Если матрица квадратная и её определитель не равен 0, то ранг матрицы равен её порядку.

Задача. Пусть матрица А - матрица третьего порядка:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вычислить её ранг.

Решение

►Данная матрица квадратная, отсюда $r \le 3$.

Найдём её определитель Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 1 - 1 - 1 + 4 = 5 \ne 0$$

Значит, ранг матрицы равен: r(A)=3.◄

Задача. Вычислить ранг матрицы $B=\begin{pmatrix}4 & 0 & -8 & 0\\ 2 & 0 & -4 & 0\\ 3 & 0 & -6 & 0\\ 1 & 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$

Решение

►Данная матрица B имеет четвёртый порядок, поэтому $r\le 4$.

Найдём определитель:

$\Delta=\begin{vmatrix}4 & 0 & -8 & 0\\ 2 & 0 & -4 & 0\\ 3 & 0 & -6 & 0\\ 1 & 0 & -2 & 0\end{vmatrix}=0$ (так как Δ имеет столбец из нулей), поэтому $r\le 3$.◄

Найдём определитель третьего порядка. Следует отметить, что все определители третьего порядка содержат нулевой столбец, и поэтому имеют значения, равные нулю. Значит, $r(B)\le 2$.

Все определители второго порядка имеют или нулевой столбец (второй или четвёртый), или имеют пропорциональные столбцы (первый и третий), поэтому их определители тоже равны нулю. Значит, $r(B)\le 1$.

Так как среди элементов матрицы B имеются ненулевые элементы, то есть определители первого порядка, отличные от нуля, то r(B)=1.

Задача. Вычислить ранг матрицы $C=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & 4\\ 3 & 2 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0 & -3\end{pmatrix}$

Решение

►Для матрицы C $r(C) \le \min(3;4) = 3$

Проверим, равен ли ранг трём.

Для этого вычислим все миноры третьего порядка (их всего четыре, они получаются при вычёркивании одного из столбцов матрицы):

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 12 +$$

$$+6 - 16 + 1 + 27 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

Так как все миноры третьего порядка равны нулю, то $r(C) \le 2$.

Существуют ненулевые миноры второго порядка, например, минор $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7 \ne 0$ (или $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 \ne 0$, или $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \ne 0$)

Таким образом, r(C)=2 (наивысший порядок отличных от нуля миноров).◄

Вычисление ранга матрицы непосредственно по определению является достаточно трудоёмким. Для облегчения этой задачи используются преобразования, сохраняющие ранг матрицы. Рассмотрим способ определения ранга матрицы, основанный на сведении данной матрицы к матрице ступенчатого вида, полученной из данной матрицы с помощью элементарных преобразований.

Элементарными преобразованиями матрицы являются следующие операции:

1. Отбрасывание нулевой строки (столбца).
2. Умножение всех элементов некоторой строки (столбца) матрицы на число k, не равное нулю.
3. Прибавление к элементам некоторой строки (столбца) матрицы соответствующих элементов другой строки(столбца), умноженных на одно и то же число.
4. Перемена мест строк(столбцов) матрицы.
5. Транспонирование матрицы.

Матрицы, полученные одна из другой при помощи конечного числа элементарных преобразований, называются эквивалентными.

Для эквивалентных матриц выполняется теорема, которую приводим без доказательства.

Теорема. Эквивалентные матрицы имеют один и тот же ранг.

Построение эквивалентных матриц и применение этой теоремы позволяет использовать для вычисления ранга матрицы следующее **правило**:

С помощью элементарных преобразований привести исходную матрицу к ступенчатой матрице, число ненулевых строк которой будет равно рангу данной матрицы.

Определение. Прямоугольная матрица называется ступенчатой, если первый, не равный нулю элемент её каждой строки, начиная со второй, расположен правее первого, отличного от нуля, элемента предыдущей строки.

Например, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Ранг этой матрицы равен числу строк матрицы ступенчатого вида, то есть r = 3.

Задача. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Решение

►Умножим первую строку на «-2» и сложим со второй строкой, затем умножим первую строку на «-3» и сложим с третьей; получим эквивалентную матрицу, в которой вторую строку умножим на «-1» и сложим с третьей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Число ненулевых строк последней матрицы равно 2. Поэтому её ранг, а, значит, и ранг данной матрицы равен двум, то есть r(A) = 2.◄

Задача. Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение

►Для нахождения ранга матрицы необходимо при помощи элементарных преобразований в строках привести её к ступенчатому виду (откинув, если есть, нулевые строки) и посчитать количество строк полученной ступенчатой матрицы.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -12 & 1 \\ 0 & 14 & 32 & -24 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Получена ступенчатая матрица, количество ненулевых строк которой равно трём. Значит, r(A) = 3.◄

Для рангов матриц справедливы свойства:

1. $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$
2. $r(A+B) \geq |r(A) - r(B)|$
3. $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$
4. $r(A^t A) = r(A)$
5. $r(AB) = r(A)$, если B квадратная матрица и $\Delta_B \neq 0$.
6. $r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$, где n- число столбцов матрицы A или строк матрицы B.

Понятие ранга матрицы тесно связано с понятием линейной зависимости (независимости) её строк или столбцов.

Рассмотрим это понятие для строк матрицы (для столбцов матрицы изложение материала аналогично).

В матрице $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ обозначим её строки следующим образом:

$$e_1=(a_{11}a_{12}\dots a_{1n}), e_2=(a_{21}a_{22}\dots a_{2n}),\dots, e_m=(a_{m1}a_{m2}\dots a_{mn})$$

Две строки матрицы называются равными, если равны их соответствующие элементы: $e_k=e_S$, если $a_{kj}=a_{Sj}$, j=1,2,…,n.

Арифметические операции над строками матрицы (умножение строки на число, сложение строк) вводятся как операции, производимые поэлементно:

$$\lambda e_k=(\lambda a_{k1}\lambda a_{k2}\dots\lambda a_{kn})$$
$$e_k+e_S=(a_{k1}+a_{s1}\quad a_{k2}+a_{s2}\quad \dots\quad a_{kn}+a_{sn})$$

Строка e называется линейной комбинацией строк $e_1,e_2,\dots,e_S$ матрицы, если она равна сумме произведений этих строк на произвольные действительные числа:

$e=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\dots+\lambda_Se_S$, где $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_S$ - любые числа.

Строки матрицы $e_1,e_2,\dots,e_m$ называются линейно зависимыми, если существуют такие числа $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m$, не равные одновременно 0, что линейная комбинация строк матрицы равна нулевой строке:

$e=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\dots+\lambda_me_m=0$, где 0=(0 0 … 0).

Линейная зависимость строк матрицы означает, что хотя бы одна строка матрицы является линейной комбинацией остальных.

Если линейная комбинация строк равна нулю тогда и только тогда, когда все коэффициенты λ_i равны нулю, то есть $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0$, то строки $e_1, e_2, ..., e_m$ называются линейно независимыми.

Задача. Выяснить, является ли линейная комбинация строк матрицы A= $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -5 & 4 & 0 \\ 11 & -6 & -2 \end{pmatrix}$ линейно зависимой.

Решение

► $e_1 = (2;-3;1); e_2 = (-5;4;0); e_3 = (11;-6;-2)$.

Если взять $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1$, то линейная комбинация строк равна:

$$e = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = ((2 \cdot 2 + 3 \cdot (-5) + 1 \cdot 11)$$
$$(2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 + 1 \cdot (-6)(2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 1(-2)) = (0 \quad 0 \quad 0),$$

то есть равна нулевой строке. Значит линейная комбинация строк матрицы A линейно зависима.◄

Определение. Пусть ранг матрицы A равен r, то есть r(A)=r. Произвольный минор порядка r матрицы A, отличный от нуля, называется базисным минором, а строки и столбцы, на которых он расположен - базисными строками и столбцами (Понятно, что базисных миноров может быть несколько).

Рассмотрим без доказательства теоремы.

Теорема. Система из k>1 строк матрицы линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы одна из строк есть линейной комбинацией других строк.

Теорема. Система строк, содержащая нулевую строку, линейно зависима.

Теорема. Система строк матрицы у которой $r(A) = k$ и которая содержит больше, чем k строк, линейно зависима.

Теорема(о базисном миноре). Базисные строки (столбцы) матрицы линейно независимы; любая другая строка (столбец) матрицы есть линейной комбинацией базисных строк (столбцов)

Теорема. Ранг матрицы равен максимальному числу её линейно независимых строк (столбцов).

Теорема о ранге матрицы имеет принципиальную роль в матричном анализе, в частности при исследовании систем линейных уравнений.

Тема 5. Системы линейных алгебраических уравнений

План

1. *Основные понятия*
2. *Методы решения систем линейных уравнений:*
   а) *метод обратной матрицы;*
   б) *формулы Крамера;*
   в) *метод Гаусса.*
3. *Исследование произвольных систем линейных алгебраических уравнений.*
4. *Примеры решения систем линейных уравнений.*

Уравнение относительно неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$ называется линейным, если его можно записать в виде
$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = b$ ($a_1, a_2, ...; b$ -произвольные действительные числа)

Системой m линейных уравнений с n неизвестными называется соотношение вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

,где x_i -неизвестные, которые надо найти, числа a_{ij} - коэффициенты при неизвестных, b_i -свободные числа.

Решением системы уравнений (1) называется совокупность таких чисел $x_1 = \lambda_1, x_2 = \lambda_2, ..., x_n = \lambda_n$, при подстановке которых в эту систему, все уравнения превращаются в тождества.

Определение. Система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение.

Определение. Совместная система, которая имеет единственное решение, называется *определённой;* система, имеющая более одного решения, называется *неопределённой.*

Определение. Система уравнений, не имеющая решений, называется *несовместной.*

Определение. Две системы линейных уравнений называются *эквивалентными,* если любое решение одной из них является одновременно решением другой системы. (Две несовместные системы считаются эквивалентными)

Над уравнениями системы (1) можно выполнять такие же преобразования, как и элементарные преобразования над *строками* матриц:

а) умножение обеих частей уравнения на число отличное от нуля;
б) перестановка местами двух уравнений;
в) прибавление к обеим частям одного из уравнений соответствующих частей любого другого уравнения, умноженных на произвольное действительное число.

Такие преобразования системы называются элементарными. В результате элементарных преобразований получается система линейных уравнений, эквивалентная данной.

Для системы (1) можно ввести матрицы элементов, которые в неё входят.

Обозначим таблицу коэффициентов при неизвестных через матрицы A, X, B:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Матрица A называется главной матрицей системы, X-матрица-столбец неизвестных, B-матрица-столбец свободных членов.

При помощи операций над матрицами систему (1) записывают в матричном виде:

$$AX=B \tag{2}$$

<u>Определение</u>. Матрица называется <u>расширенной</u> матрицей системы, если она дополнена до главной матрицы столбцом свободных членов.

Метод обратной матрицы

Рассматривается частный случай, когда число уравнений равно числу неизвестных, то есть m = n.

Определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n\,1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ главной матрицы A

называется главным определителем системы.

Пусть $\Delta \neq 0$. В этом случае существует обратная матрица A^{-1}. Уравнение (2) AX=B умножим на матрицу A^{-1}слева и получим:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B, \quad X = A^{-1}B.$$

или

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

Задача. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

Решение

► $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Поэтому A^{-1} существует.

Найдём транспонированную матрицу:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Найдём алгебраические дополнения транспонированной матрицы:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 11; A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -7; A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4; A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2; A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5; A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3; A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 11 & -7 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11/2 & 7/2 & -1/2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5/2 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Тогда $X = \begin{pmatrix} -11/2 & 7/2 & -1/2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5/2 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$, то есть

$x_1 = \frac{3}{2}; x_2 = 0; x_3 = -\frac{1}{2}$.

Проверка:

$\frac{3}{2} + 0 - \frac{1}{2} = 1$ -верно

$2 \cdot \frac{3}{2} + 0 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$ -верно

$\frac{3}{2} - 0 - 3 \cdot \frac{1}{2} = 0$ -верно.◄

Задача. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X + 2\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}' = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X$$

Решение

► $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X + 4\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$$

то есть AX=B

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B,$$

где $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 62 \neq 0,$ A^{-1} существует

$A' = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}; A_{11} = 7; A_{12} = 4; A_{21} = -5; A_{22} = 6$

Тогда $A^{-1} = \dfrac{1}{62}\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/62 & 4/62 \\ -5/62 & 6/62 \end{pmatrix}$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 7/62 & 4/62 \\ -5/62 & 6/62 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21/62 & 8/62 \\ -47/62 & 12/62 \end{pmatrix}$$ ◄

Формулы Крамера

Рассмотрим главный определитель системы (1):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Заменим последовательно в этом определителе сначала 1-ый столбец столбцом свободных членов В и запишем полученный определитель; затем заменим 2-ой столбец столбцом В и запишем определитель и т. д., заменим n-ый столбец столбцом В и запишем определитель, то есть

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \Delta_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

Неизвестные $x_1, x_2, ..., x_n$ находятся по формулам $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, ..., x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$, которые называются формулами Крамера, а нахождение решений системы при помощи этих формул называют правилом Крамера.

Задача.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Решение

► $\Delta = -2 \neq 0 \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 2 + 2 - 12 = -3$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 + 4 - 3 + 2 = 1;$$

тогда получим:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{3}{2}; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{1}{2}$$

◄

Рассмотренные методы дают возможность решать системы таких линейных уравнений, в которых число неизвестных совпадает с числом уравнений, а так же у которых главный определитель отличен от нуля.

Метод Гаусса

Метод Гаусса – это метод последовательного исключения неизвестных с помощью элементарных преобразований системы, не изменяющих решения системы, так как линейная система переходит в систему, эквивалентную первоначальной.

Рассмотрим сначала систему n уравнений с n неизвестными с матрицей, определитель которой не равен нулю, то есть система имеет единственное решение.

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad ....(1)$$

Пусть для определённости коэффициент a_{11} не равен нулю. Умножим первое уравнение на $\lambda = -\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ и прибавим его почленно к каждому уравнению с номером i = 2,3,…,n.

Получим эквивалентную систему, в которой неизвестное x_1 будет только в первом уравнении. В качестве второго уравнения возьмём то, в котором коэффициент при x_2 не равен нулю и, поступая аналогично, исключим x_2 из всех уравнений с номерами i =3,4,…,n.

Продолжая процесс, после (n-1)-го шага получим систему вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ 0 + \alpha_{22}x_2 + ... + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ 0 + 0 + \alpha_{33}x_3 + ... + \alpha_{3n}x_n = \beta_3 \\ .... \\ 0 + 0 + 0 + ... + \alpha_{nn}x_n = \beta_n \end{cases} \quad ....(2)$$

с треугольной расширенной матрицей:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ 0 & 0 & \alpha_{33}\dots & \alpha_{3n} & \beta_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0\dots & \alpha_{nn} & \beta_n \end{pmatrix} \dots (3)$$

Отметим, что в этой квадратной матрице элементы, стоящие на главной диагонали, не равны нулю, поэтому $\Delta = a_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}\cdot\ldots\cdot\alpha_{nn} \neq 0$.А значит, r = n.

Затем выполняют «обратный ход». Из системы (2) последовательно находят все неизвестные, начиная с $x_n = \dfrac{\beta_n}{\alpha_{nn}}$.

Задача. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - = -5 \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

Решение

►Составим расширенную матрицу системы

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -5 \\ 4 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right)$, и, выполнив элементарные преобразования, получим эквивалентную матрицу ступенчатого вида:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -5 \\ 4 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right)$$ (1-ую строку умножаем на «-1» и сложим со 2-ой; 1-ую строку умножаем на «-4» и сложим с 3-ей).

Последней матрице соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = -6 \\ -3x_3 = -6 \end{cases}$$

Выполним «обратный ход». Из третьего уравнения системы $-3x_3 = -6$ находим $x_3 = 2$. Во второе уравнение подставим значение $x_3 = 2$ и найдём x_2: $x_2 - 2 \cdot 2 = -6$, $x_2 = -2$.

Из первого уравнения, подставляя найденные значения $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, находим x_1:

$$x_1 - 2 + 2 = 1, x_1 = 1.$$

Итак, решение системы: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$. ◄

Задача. Найти решение системы методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$$

Решение

►Выпишем расширенную матрицу и приведём её к ступенчатому виду.

$$A=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

Первую строку, умноженную на «-3», сложим со второй строкой; первую строку, умноженную на «-2», сложим с третьей строкой; первую строку, умноженную на «-1», сложим с четвёртой строкой. Получим матрицу $A_1 \sim A$:

$$A_1=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{array}\right)$$

В матрице A_1 поменяем местами вторую и третью строки для того, чтобы было легче считать, приводя матрицу к ступенчатому виду.

Получим $A_2 \sim A_1$:

$$A_2=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{array}\right)$$

В матрице A_2 вторую строку умножим на «4» и сложим с третьей; вторую строку, умноженную на «-1», сложим с четвёртой строкой. Получим $A_3 \sim A_2$:

$$A_3 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & -27 & -39 & -39 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

В матрице A_3 третью строку умножим на «$-\dfrac{1}{3}$»(то есть разделим на «-3»), четвёртую строку умножим на «$\dfrac{1}{3}$» чтобы облегчить подсчёт. Получим $A_4 \sim A_3$:

$$A_4 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 9 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Третью строку умножим на «-$\dfrac{2}{9}$» и сложим с четвёртой. Получим $A_5 \sim A_4$:

$$A_5 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 9 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -17/9 & -17/9 \end{array}\right)$$

Последней матрице соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 - 5x_3 - 7x_4 = -8 \\ 9x_3 + 13x_4 = 13 \\ -17/9\, x_4 = -17/9 \end{cases}$$

Выполним «обратный ход».

$$x_4 = 1; x_3 = \frac{13-13}{9} = 0; x_2 = -8 + 5\cdot 0 + 7\cdot 1 = -1;$$
$$x_1 = 1 - (-1) - 2\cdot 0 - 3\cdot 1 = 1 + 1 - 3 = -1$$

Получили решение:

$x_1 = -1; x_2 = -1; x_3 = 0; x_4 = 1.$ ◄

Мы рассмотрели системы, в которых число неизвестных равно числу уравнений, $\Delta_A \neq 0$, и системы имели единственное решение.

Пусть теперь система имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (4)$$

где $m \neq n$, то есть число уравнений не равно числу неизвестных. Выясним вопрос о совместности системы, то есть о существовании хотя бы одного решения.

Теорема Кронекера-Капелли: (критерий совместности системы). Система линейных уравнений(4) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы этой системы, причём если:

а) r = n (то есть ранг матрицы равен числу неизвестных), то система имеет единственное решение;

б) r<n (то есть ранг матрицы меньше числа неизвестных), то система имеет бесконечное множество решений.

Доказательство

Необходимость. Пусть система уравнений(4) совместна, то есть существует решение $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, ..., x_n = \alpha_n$:

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + ... + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + ... + a_{2n}\alpha_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + ... + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{cases}$$

Расширенная матрица системы имеет вид:

$$R = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$ Выполним элементарные преобразования.

В матрице R из последнего столбца вычтем первый, умноженный на α_1, второй столбец умноженный на α_2,…, n-ый столбец, умноженный на α_n, и получим матрицу R_1 с нулевым столбцом:

$$R = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 \end{array}\right)$$

Элементарные преобразования не изменяют ранг исходной матрицы, и если ранг исходной матрицы равен r, то ранг $r(R_1)$ тоже равен r.

Достаточность. Пусть ранг системы r(A) равен рангу расширенной матрицы r(R), то есть r(A)=r(R)=r.

По определению ранга матрицы существует минор порядка r, отличный от нуля (то есть базисный минор)

Пусть для определённости минор имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

Систему уравнений (4) перепишем в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{1+r} - \dots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2r}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

Остальные уравнения системы(4) являются линейной комбинацией этих первых уравнений. Неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ могут принимать различные значения, их называют *свободными*. При каждом фиксированном значении свободных неизвестных можно вычислить соответствующие неизвестные $x_1, x_2, ..., x_r$, которые являются базисными. Таким образом, система имеет бесчисленное множество решений, и, следовательно, совместна.

Исследование системы на совместность:

1. Составить расширенную матрицу.

2. Привести расширенную матрицу к ступенчатому виду.

3. Определить ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы.

Если ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы, то система совместна.

Если ранг матрицы системы не равен рангу расширенной матрицы, то система несовместна.

4. Составить систему уравнений, соответствующую ступенчатой матрице.

5. Сравнить ранг матрицы с числом неизвестных. Если

$r = n$, то система имеет единственное решение.

Если $r<n$, то система имеет бесчисленное множество решений.

6. Найти решение системы, причём, если $r<n$, то, выделить свободные неизвестные, выразить через них базисные.

В зависимости от различных значений свободных неизвестных можно получать значения базисных неизвестных.

Задача. Исследовать систему уравнений и решить её, если она совместна.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ 11x_1 - 12x_2 + 17x_3 = 3 \end{cases}$$

Решение

►Составим расширенную матрицу и приведём её к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \\ 11 & -12 & 17 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 11 & -12 & 17 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & -9 & -3 \\ 0 & 21 & -27 & -19 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{array}\right)$$

$r(A) = 2, r(R) = 3, r(A) \neq r(R)$

Значит, система несовместна.◄

Задача.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 6 \end{cases}$$

Решение

$$► \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & 5 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -9 & 2 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 5/3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

r(A) = r(R) = 3. Значит, система совместна; r = n = 3.

Составим систему, соответствующую последней матрице:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -3x_2 - x_3 = -9 \\ 5/3\, x_3 = 5 \end{cases}$$

В данном случае имеем r=n=3, поэтому система имеет единственное решение. Находим неизвестные, начиная с 3-его уравнения.

$$x_3 = 3; -3x_2 = -9 + x_3 = -9 + 3 = -6; x_2 = 2;$$
$$x_1 = 6 - x_2 - x_3 = 6 - 2 - 3 = 1; x_1 = 1$$

◄

Задача.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

Решение

► $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -2 & -5 & -4 \end{array}\right)$$

r(A) = r(R) = 2. Система совместна.

Составим систему, соответствующую последней матрице:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ -3x_2 - 2x_3 - 5x_4 = -4 \end{cases}$$

В данном случае r = 2,n = 4, то есть r<n, поэтому система имеет бесчисленное множество решений.

В качестве базисных неизвестных выбираем, например, x_1 и x_2 (базисный минор $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$), а в качестве свободных выбираем тогда x_3 и x_4 (число свободных переменных находят как разность n-r = 4-2 = 2). Переносим свободные неизвестные в правую часть и переписываем систему в виде:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 - 3x_3 - 4x_4 \\ -3x_2 = -4 + 2x_3 + 5x_4 \end{cases}$$

Со 2-го уравнения найдём x_2:

$$x_2 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_4$$

Выразим x_1 через x_3 и x_4:

$$x_1 = 5 - 3x_3 - 4x_4 - 2x_2 = 5 - 3x_3 - 4x_4 - 2(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_3 -$$

$$-\frac{5}{3}x_4) = 5 - 3x_3 - 4x_4 - \frac{8}{3} + \frac{4}{3}x_3 + \frac{10}{3}x_4 = \frac{7}{3} - \frac{5}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4$$

Тогда $\begin{cases} x_1 = \frac{7}{3} - \frac{5}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 \\ x_2 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_4 \end{cases}$

Система имеет бесчисленное множество решений. Каждое отдельное решение получается, если свободным неизвестным придать конкретные значения.

Например, $x_3 = 1, x_4 = -1$. Тогда $\mathrm{x}_1 = \frac{4}{3}, x_2 = \frac{7}{3}$. Значит, одним из решений есть решение $\left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; 1; -1\right)$. ◄

Тема 6. Системы линейных однородных уравнений

План

1. *Понятие однородной системы линейных уравнений.*
2. *Фундаментальная система решений.*
3. *Примеры решения однородных систем.*

Система m линейных уравнений с n неизвестными называется системой линейных однородных уравнений, если все свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ ----------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Для такой системы расширенная матрица R отличается от главной матрицы только столбцом нулей.

Поэтому r(A)=r(R) и по теореме Кронекера-Капелли такая система всегда совместна, так как она всегда имеет, по крайней мере, нулевое решение (0;0;…;0).

Если в системе (1) m=n (то есть число уравнений равно числу неизвестных), а её определитель отличен от нуля, то такая система имеет только нулевое решение, что следует из формул Крамера.

Действительно, пусть для системы (1) $\Delta \neq 0$. Определяя $x_1, x_2, \ldots, x_n$ по формулам Крамера $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$ и учитывая, что $\Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_n = 0$ (так как все определители $\Delta_i (i = 1, \ldots, n)$ содержат нулевой столбец), получаем**Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**то есть $(0; 0; \ldots; 0)$ –единственное решение.

Задача.

$$\begin{cases} 2x_1 - \quad x_2 + \quad x_3 = 0 \\ \ x_1 + \quad x_2 - \quad x_3 = 0 \\ 3x_1 + \ 2x_2 + \quad x_3 = 0 \end{cases}$$

Решение

Имеем однородную систему уравнений. В данном случае m=n. Найдём определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

Таким образом, данная система имеет единственное нулевое решение (0;0;0).

Однородная система может иметь не только единственное нулевое решение, а и бесконечное множество ненулевых решений.

Отметим, что не всегда удобно находить решения через определитель, так как приходится вычислять определители более высоких порядков, чем третий.

На вопрос о существовании ненулевых решений даёт ответ следующая теорема.

Теорема. Однородная система линейных уравнений имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ранг этой системы меньше числа неизвестных, то есть $r(A)<n$.

Следствие 1. Если число уравнений однородной системы меньше числа её неизвестных, то есть $m<n$, то эта система имеет ненулевые решения.

Следствие 2. Если в однородной системе число уравнений равно числу неизвестных, то есть m=n, то эта система имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда определитель матрицы равен нулю.

Решения системы линейных однородных уравнений имеют такие свойства:

а) если строка $e_1=(k_1, k_2,\ldots,k_n)$ является решением системы (1), то и строка $e_1=(\lambda k_1, \lambda k_2,\ldots, \lambda k_n)$- также является решением этой системы;

б) если строки $e_1=(k_1, k_2,\ldots,k_n)$ и $e_1=(l_1, l_2,\ldots,l_n)$- решения системы (1), то при любых C_1 и C_2 их линейная комбинация

$$C_1e_1+C_2e_2=(C_1k_1+C_1l_1; C_1k_2+C_2l_2,\ldots, C_1k_n+C_2l_n)$$

Также решение данной системы.

Убедиться в справедливости этих свойств решений однородных систем можно непосредственной подстановкой их в уравнения системы.

Из свойств следует, что всякая линейная комбинация решений системы линейных однородных уравнений также является решением этой системы.

Поэтому представляет интерес найти такие линейно независимые решения системы (1), через которые линейно выражались бы все остальные её решения.

Определение. Система линейно независимых решений $e_1,e_2,\ldots,e_k$ называется фундаментальной, если каждое решение системы (1) является линейной комбинацией этих решений.

Теорема. Если ранг основной матрицы системы однородных уравнений меньше числа неизвестных, то есть $r(A)<n$, то всякая фундаментальная система решений системы (1) состоит из $n-r$ решений.

Поэтому общее решение системы (1) линейных однородных уравнений имеет вид:

$C_1e_1 + C_2e_2 + ... + C_ke_k$, где $e_1, e_2, ..., e_k$ -любая фундаментальная система решений (ФСР), $C_1, C_2, ..., C_k$ -произвольные числа, k = n - r.

Теперь можно указать способ построения фундаментальной системы решений.

Пусть система однородных уравнений имеет ранг r<n. Тогда базисные неизвестные этой системы $x_1, x_2, ..., x_r$ линейно выражаются через свободные: $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$.

Имеем

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \beta_{11}x_{r+1} + \beta_{12}x_{r+2} + ... + \beta_{1n-r}x_n \\
x_2 &= \beta_{21}x_{r+1} + \beta_{22}x_{r+2} + ... + \beta_{2n-r}x_n \\
&-------------------- \\
x_r &= \beta_{r1}x_{r+1} + \beta_{r2}x_{r+2} + ... + \beta_{rn-r}x_n
\end{aligned}
$$

Выделяют частные решения однородной системы (1) по принципу: для нахождения первого решения e_1 придают значения свободным неизвестным

$x_{r+1} = 1, x_{r+2} = 0, ..., x_n = 0.$ Тогда $e_1 = (\beta_{11}, ..., \beta_{r1}, 1, 0, 0, ..., 0)$

Затем находят второе решение e_2, придавая значение $x_{r+2} = 1$, а остальные n-r-1 равны нулю. Тогда

$e_2 = (\beta_{21}, ..., \beta_{r2}, 0, 1, 0, ..., 0)$ и т.д., то есть

$$
\begin{cases}
e_1 = (\beta_{11}, \beta_{12}, ..., \beta_{r1}, 1, 0, 0, ..., 0) \\
e_2 = (\beta_{21}, \beta_{22}, ..., \beta_{r2}, 0, 1, 0, ..., 0) \\
----------------- \\
e_{n-r} = (\beta_{n-r1}, \beta_{n-r2}, ..., \beta_{n-rr}, 0, 0, 0, ..., 1)
\end{cases}
\qquad (2)
$$

Фундаментальная система решений является одним из фундаментальных наборов решений однородной системы (1).

Задача.

Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.

Решение

►В данном случае мы имеем систему из четырёх уравнений с четырьмя неизвестными (то есть m=n).

Составим матрицу для определения ранга

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{pmatrix} \sim
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \end{pmatrix}
$$

Значит, $r = 2$, $n = 4$, то есть $r < n$.

Запишем систему, соответствующую последней матрице

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ -x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Так как ранг меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечное множество ненулевых решений.

Система содержит два уравнения, поэтому два неизвестных – базисные, а остальные n – r, то есть два – свободные. Пусть, например, x_3 и x_4 - свободные, а x_1 и x_3 - базисные.

Тогда $x_2 = -6x_3 + 5x_4$ (со 2-го уравнения)

$$x_1 = -2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -2(-6x_3 + 5x_4) - 4x_3 + 3x_4 = 12x_3 -$$
$$-10x_4 - 4x_3 + 3x_4 = 8x_3 - 7x_4$$

Обозначим $x_3 = t_1$, $x_4 = t_2$, тогда $x_1 = 8t_1 - 7t_2$; $x_2 = -6t_1 + 5t_2$

Запишем решение ($8t_1 - 7t_2 ; -6t_1 + 5t_2 ; t_1 ; t_2$).

Если произвольно давать значения для t_1 и t_2, то получим различные решения данной системы. Например, пусть $t_1 = 1$, $t_2 = -1$. Тогда имеем одно из решений (15;-11;1;-1). Пусть $t_1 = 0$, $t_2 = 1$. Тогда имеем другое решение (-7;5;0;1) и т.д., то есть можно получить бесконечное множество ненулевых решений.◄

Задача. Найти фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Решение

►Найдём ранг:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \end{pmatrix}$$

Значит, $r = 2$; $n = 5$, то есть $r < n$.

Система, соответствующая последней матрице, имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \\ 8x_2 - 7x_3 + 25x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

Таким образом, базисных переменных – две, свободных – три.

Пусть, например, x_3, x_4, x_5 - свободные неизвестные, x_1, x_2 - базисные. Выразим базисные через свободные.

Тогда $x_2 = \dfrac{7x_3 - 25x_4 + 4x_5}{8} = \dfrac{1}{8}(7x_3 - 25x_4 + 4x_5)$

$$x_1 = 5x_2 - 2x_3 + 16x_4 - 3x_5 = \frac{5(7x_3 - 25x_4 + 4x_5)}{8} - 2x_3 +$$
$$+16x_4 - 3x_5 =$$
$$= \frac{35x_3 - 125x_4 + 20x_5 - 16x_3 + 128x_4 - 24x_5}{8} =$$
$$= \frac{19x_3 + 3x_4 - 4x_5}{8} = \frac{1}{8}(19x_3 + 3x_4 - 4x_5)$$

Итак, $x_1 = \dfrac{1}{8}(19x_3 + 3x_4 - 4x_5)$; $x_2 = \dfrac{1}{8}(7x_3 - 25x_4 + 4x_5)$,

то есть имеем бесконечное множество ненулевых решений.

Так как r=2, n=5, то фундаментальная система решений состоит из n-r, то есть из 5-2=3 решений. Для получения фундаментальной системы решений e_1, e_2, e_3 поочерёдно заменяем свободные неизвестные x_3, x_4, x_5 элементами строк единичной матрице E, то есть для свободных неизвестных берём последовательно тройки чисел

(1;0;0),(0;1;0),(0;0;1).

Таким образом, получаем фундаментальную систему решений:

$$e_1 = \left(\frac{19}{8}; \frac{7}{8}; 1; 0; 0 \right)$$

$$e_2 = \left(\frac{3}{8}; -\frac{25}{8}; 0; 1; 0 \right)$$

$$e_3 = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0; 0; 1 \right)$$

Замечание. Умножив компоненты решений e_1, e_2, e_3 соответственно на 8,8 и 2, получим фундаментальную систему решений с целыми компонентами:

$$e_1 = (19;7;8;0;0); e_2 = (3;-25;0;8;0); e_3 = (-1;1;0;0;2) \blacktriangleleft$$

Тема 7. Линейные векторные пространства

План

1. *Основные определения. Примеры.*
2. *Размерность и базис линейного пространства.*
3. *Переход к новому базису.*
4. *Пространство Евклида и его простейшие свойства.*

В школьном курсе математики, кроме операций над действительными числами, введены понятия, например, суммы векторов и умножение вектора на число. В курсе высшей математики введены понятия суммы матриц, а также понятие произведения матрицы на число. Введённые операции подчиняются определённым законам. Поэтому можно абстрагироваться от конкретных элементов, над которыми введены операции, то есть можно рассматривать множества элементов произвольной природы, для которых введены операции, подчиняющиеся определённым законам. Такие множества называются <u>пространствами</u>, а их элементы – <u>точками</u>, или <u>векторами</u> этого пространства. Пространство обозначают R, а элементы $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$. Факт принадлежности элемента $\overline{x}$ к множеству R записывают $\overline{x} \in R$. Действительные числа обозначают α, β, γ.

Определение. Множество R элементов $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ произвольной природы называется <u>линейным (векторным) пространством</u>, если: 1)указан закон, согласно которому каждым двум элементам $\overline{x} \in R$, $\overline{y} \in R$ однозначно ставится в соответствие элемент $\overline{z} \in R$, называемый суммой элементов $\overline{x}$ и $\overline{y}$; обозначается $\overline{z} = \overline{x} + \overline{y}$

2)каждому элементу $\overline{x} \in R$ и каждому числу α однозначно отвечает элемент $\overline{y} \in R$, называемый произведением элемента $\overline{x}$ на число α; обозначается $\overline{y} = \alpha \overline{x}$;

3)для произвольных $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ множества R и произвольных чисел α, β выполняются аксиомы:

а) $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$

б) $(\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} = \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z})$

в) существует нулевой элемент $\overline{0}$ такой, что для произвольного $\overline{x}$ имеет место равенство $\overline{x} + \overline{0} = \overline{x}$;

г) для каждого элемента $\overline{x}$ существует противоположный элемент (-$\overline{x}$) такой, что $\overline{x}$ +(-$\overline{x}$)= $\overline{0}$;

д) $1 \cdot \overline{x} = \overline{x}$;

е) $\alpha(\beta \overline{x}) = (\alpha\beta)\overline{x}$;

ж) $(\alpha+\beta)\bar{x}=\alpha\bar{x}+\beta\bar{x}$;

з) $\alpha(\bar{x}+\bar{y})=\alpha\bar{x}+\beta\bar{y}$.

Если в пространстве R определено умножение элементов на действительное число, то R называется действительным линейным пространством. Если элементы умножать на комплексные числа, то R называется комплексным линейным пространством.

Примеры.

1)множество действительных чисел с операциями сложения и умножения является линейным пространством.

2)множество всех произвольных векторов в пространстве с операциями сложения и умножения на число является линейным пространством. Нуль-вектор есть нулевым элементом.

3)множество всех матриц размером mxn с операциями сложения и умножения на число является линейным пространством.

4)множество рациональных чисел не является линейным пространством, так как произведение рационального числа на действительное не всегда рациональное число

($\bar{x}=\frac{2}{3},\alpha=\pi\Rightarrow\alpha\bar{x}=\frac{2}{3}\pi$ -нерациональное число)

<u>Определение. </u>Множество A называется подмножеством множества B, если каждый его элемент является элементом множества B. Обозначают $A\subset B$.

Пример. $N\subset Q$(множество натуральных чисел является подмножеством рациональных чисел).

Определение. Подпространством линейного пространства называют любое непустое подмножество множества R, элементы которого в свою очередь образуют линейное пространство относительно операций, введенных в R.

Определение. **n-мерным** вектором называют упорядоченную совокупность n действительных чисел $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, где $x_i - i$ -тая компонента.

Определение. Линейное пространство R называют n-мерным, если в нём существует система из n линейно независимых векторов $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n$ такая, что для произвольного элемента $\bar{x} \in R$

$$rang(\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n) = n.$$

Число n (максимальное число линейно независимых векторов в R) называется размерностью пространства R. Записываются $\dim R = n$

Определение. Совокупность произвольных n линейно независимых векторов $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n$ n-мерного пространства R называется базисом R.

Теорема. Каждый вектор $\bar{x}$ n-мерного линейного пространства R можно разложить в виде линейной комбинации векторов базиса.

Доказательство

Пусть размерность $\dim R = n$ и $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n$ -базис пространства R. Тогда для произвольного элемента $\bar{x} \in R$, $rang(\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n) = n$.

Отсюда следует, что $\bar{e}_1,...,\bar{e}_n,\bar{x}$-линейно зависимы, то есть $\lambda_1 e_1+...+\lambda_n\bar{e}_n+\lambda_{n+1}\bar{x}=\bar{0}$, где не все λ равны нулю. Число $\lambda_{n+1}\neq 0$, так как иначе $\lambda_1 e_1+...+\lambda_n\bar{e}_n=\bar{0}$, что противоречит определению базиса. Поэтому $\bar{x}=-\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}}\bar{e}_1-...-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\bar{e}_n$.

Если ввести обозначение $x_i=-\frac{\lambda_i}{\lambda_{n+1}}, i=1,...,n$, то

$\bar{x}=x_1\bar{e}_1+x_2\bar{e}_2+...+x_n\bar{e}_n$, то есть $\bar{x}$ - линейная комбинация векторов базиса.

Это разложение вектора единственно. Если допустить противоположное, что $\bar{x}=y_1\bar{e}_1+...+y_n\bar{e}_n$, то, вычитая из первого равенства второе равенство, получим

$$(x_1-y_1)\bar{e}_1+...(x_n-y_n)\bar{e}_n=\bar{0},$$

а это возможно лишь когда $x_i-y_i=0$, то есть $x_i=y_i,(i=1,...,n)$.

Таким образом, элемент $\bar{x}\in R$ выражается через базис $\bar{e}_1,...,\bar{e}_n$ этого пространства в виде $\bar{x}=x_1\bar{e}_1+x_2\bar{e}_2+...+x_n\bar{e}_n$ ит.д.

Числа $x_1,...,x_n$ называются координатами вектора $\bar{x}$ в базисе $\bar{e}_1,...,\bar{e}_n$ и записывают $\bar{x}(x_1,...,x_n)$.

Из теоремы следует, что два элемента n-мерного пространства с заданным базисом равны тогда и только тогда, когда их координаты в этом базисе равны.

В n-мерном пространстве можно выбирать различные базисы; один и тот же элемент в различных базисах будет иметь различные координаты.

Пусть в линейном пространстве R задан базис $\overline{e}_1,...,\overline{e}_n$ и произвольные элементы (векторы) $\overline{x}$ и $\overline{y}$. Тогда

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + ... + x_n\overline{e}_n$$

$$\overline{y} = y_1\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2 + ... + y_n\overline{e}_n ,$$

Поэтому $\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1)\overline{e}_1 + ... + (x_n + y_n)\overline{e}_n$, то есть координаты суммы двух векторов линейного пространства равны сумме соответствующих координат векторов слагаемых:

$$(\overline{x} + \overline{y}) = ((x_1 + y_1);...;(x_n + y_n)).$$

Аналогично, при произвольном действительном α:

$$\alpha\overline{x} = \alpha x_1\overline{e}_1 + \alpha x_2\overline{e}_2 + ... + \alpha x_n\overline{e}_n$$

$$\alpha\overline{x} = (\alpha x_1; \alpha x_2;...;\alpha x_n)$$

Пусть теперь задано m векторов n-мерного пространства.

$$\begin{array}{l} \overline{x}_1 = (x_{11}; x_{12};...; x_{1n}) \\ \overline{x}_2 = (x_{21}; x_{22};...; x_{2n}) \\ ------------- \\ \overline{x}_m = (x_{m1}; x_{m2};...; x_{mn}) \end{array} \qquad (1)$$

Выясним, каким условиям будут удовлетворять их координаты, чтобы они были линейно зависимы или линейно независимы.

Для этого приравнивают линейную комбинацию к нулю:

$$\lambda_1\bar{x}_1 + \lambda_2\bar{x}_2 + ... + \lambda_m\bar{x}_m = 0 \qquad (2)$$

или

$$\begin{aligned} &\lambda_1\bar{x}_{11} + \lambda_2\bar{x}_{21} + ... + \lambda_m\bar{x}_{m1} = 0 \\ &\lambda_1\bar{x}_{12} + \lambda_2\bar{x}_{22} + ... + \lambda_m\bar{x}_{m2} = 0 \\ &.. \\ &\lambda_1\bar{x}_{1n} + \lambda_2\bar{x}_{2n} + ... + \lambda_m\bar{x}_{mn} = 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

По определению линейной независимости векторов линейного пространства векторы будут линейно независимы, если в равенстве (2) $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0$, то есть однородная система (3) имеет нулевые решения.

А это возможно лишь тогда, когда ранг главной матрицы системы (3) равен числу векторов в системе, то есть r = m.

Если ранг главной матрицы однородной системы

$$M = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & ... & x_{m1} \\ x_{12} & x_{22} & ... & x_{m2} \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{1n} & x_{2n} & ... & x_{mn} \end{pmatrix}$$

меньше числа векторов множества (1), то это множество векторов линейно зависимо. Очевидно, когда число векторов m больше n-мерного пространства, то такие векторы линейно зависимы.

Теорема. Для того, чтобы система векторов была линейно независима, необходимо и достаточно, чтобы определитель, составленный из координат этих векторов, был отличен от нуля.

Задача. Проверить, что векторы $\overline{x}_1(1;1;1), \overline{x}_2(0;0;1), \overline{x}_3(1;2;1)$ образуют базис и выразить вектор $\overline{x}_4(2;-1;0)$ через этот базис.

Решение

►Найдём ранг матрицы (ранг системы векторов равен рангу матрицы, составленной из координат этих векторов), составленной из координат векторов $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$ то есть r(M)=3 и ранг равен числу векторов.

Поэтому векторы $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3$ образуют базис. Разложим вектор $\overline{x}_4$ по этому базису.

I способ. Пусть $x_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, тогда $\overline{x}_4 = \alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + \alpha_3\overline{x}_3$. Имеем:

$$\begin{cases} 1\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + 1\cdot\alpha_3 = 2 \\ 1\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + 2\cdot\alpha_3 = -1 \\ 1\cdot\alpha_1 + 1\cdot\alpha_2 + 1\cdot\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса для нахождения $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Для этого составим расширенную матрицу:

$$R = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

r(A) = r(R), то есть система имеет решение. Соответствующая система имеет вид:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 2 \\ \alpha_2 = -2 \\ \alpha_3 = -3 \end{cases} \quad \text{то есть } \alpha_1 = 5; \alpha_2 = -2; \alpha_3 = -3$$

Таким образом $\bar{x}_4 = 5\bar{x}_1 - 2\bar{x}_2 - 3\bar{x}_3$

II способ.

Выразим связь между базисами.

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \\ \bar{x}_2 = 0\bar{e}_1 + 0\bar{e}_2 + \bar{e}_3 \\ \bar{x}_3 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3 \end{cases}$$

Матрица перехода от базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ к базису $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Найдём A^{-1}. Сначала запишем A':

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, A^{-1} = -\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдём координаты вектора $\overline{x}_4$ в новом базисе:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Тогда разложение вектора $\overline{x}_4$ по базису $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3$ имеет вид: $\overline{x}_4 = 5\overline{x}_1 - 2\overline{x}_2 - 3\overline{x}_3$. ◄

Пусть в n-мерном пространстве R есть два базиса $\overline{e}_1,...,\overline{e}_n$ (старый) и $\overline{e}_1',...,\overline{e}_n'$ (новый). Каждый вектор нового базиса может быть изображён в виде линейной комбинации старого базиса и наоборот:

$$\begin{matrix} \overline{e}_1' = \alpha_{11}\overline{e}_1 + \alpha_{12}\overline{e}_2 + ... + \alpha_{1n}\overline{e}_n \\ \overline{e}_2' = \alpha_{21}\overline{e}_1 + \alpha_{22}\overline{e}_2 + ... + \alpha_{2n}\overline{e}_n \\ .... \\ \overline{e}_n' = \alpha_{n1}\overline{e}_1 + \alpha_{n2}\overline{e}_2 + ... + \alpha_{nn}\overline{e}_n \end{matrix} \quad A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & ... & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{matrix} \overline{e}_1' = \beta_{11}\overline{e}_1' + \beta_{12}\overline{e}_2' + ... + \beta_{1n}\overline{e}_n' \\ \overline{e}_2' = \beta_{21}\overline{e}_1' + \beta_{22}\overline{e}_2' + ... + \beta_{2n}\overline{e}_n' \\ .... \\ \overline{e}_n' = \beta_{n1}\overline{e}_1' + \beta_{n2}\overline{e}_2' + ... + \beta_{nn}\overline{e}_n' \end{matrix} \quad B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & ... & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & ... & \beta_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & ... & \beta_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрицы A и B называются матрицами перехода от базиса $\bar{e}_1,...,\bar{e}_n$ к базису $\bar{e}'_1,...,\bar{e}'_n$ и, наоборот, от второго базиса к первому.

Определитель $\Delta_A \neq 0$ и $B = A^{-1}$.

Далее находят зависимость между координатами вектора $\bar{x}$ в разных базисах.

Пусть $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{e}_i, \bar{x}' = \sum_{i=1}^{n} x'_i \bar{e}'_i$

Если подставить во второе равенство выражение для $\bar{e}'_1,...,\bar{e}'_n$, то получим:

$$\begin{aligned}
&\bar{x} = x'_1(\alpha_{11}\bar{e}_1 + \alpha_{12}\bar{e}_2 + ... + \alpha_{1n}\bar{e}_n) + \\
&+ x'_2(\alpha_{21}\bar{e}_1 + \alpha_{22}\bar{e}_2 + ... + \alpha_{2n}\bar{e}_n) + ... + \\
&+ x'_n(\alpha_{n1}\bar{e}_1 + \alpha_{n2}\bar{e}_2 + ... + \alpha_{nn}\bar{e}) = \\
&= (\alpha_{11}x'_1 + \alpha_{21}x'_2 + ... + \alpha_{n1}x'_n)\bar{e}_1 + \\
&+ (\alpha_{12}x'_1 + \alpha_{22}x'_2 + ... + \alpha_{n2}x'_n)\bar{e}_2 + ... + \\
&+ (\alpha_{1n}x'_1 + \alpha_{2n}x'_2 + ... + \alpha_{nn}x'_n)\bar{e}_n
\end{aligned}$$

Имеем
$$\begin{aligned}
&x_1 = \alpha_{11}x'_1 + \alpha_{21}x'_2 + ... + \alpha_{n1}x'_n \\
&x_2 = \alpha_{12}x'_1 + \alpha_{22}x'_2 + ... + \alpha_{n2}x'_n \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&x_n = \alpha_{1n}x'_1 + \alpha_{2n}x'_2 + ... + \alpha_{nn}x'_n
\end{aligned}$$

Если $\overline{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\overline{X}'=\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$, то $\overline{X}=A^T\,\overline{X}'$ или $\overline{X}'=\left(A^{-1}\right)^T\,\overline{X}$,где A^T и $\left(A^{-1}\right)^T$ -матрицы, транспонированные соответственно к матрицам A и A^{-1}.

Задача. Определить ранг системы векторов и разложить вектор $\overline{a}_1$ по новому базису, если

$\overline{a}_1=(2;5;3);\overline{a}_2=(-1;2;2);\overline{a}_3=(3;8;5);\overline{a}_4=(-9;-6;-1);$
$\overline{a}_5=(2;-17;-14)$

Решение

►Составим матрицу из компонентов данных векторов и определим ранг этой матрицы.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \\ -9 & -6 & -1 \\ 2 & -17 & -14 \end{pmatrix}$$

Так как наивысший порядок минора, который можно составить из элементов матрицы А, равен 3, а по условию нужно вектор $\overline{a}_1$ разложить по линейно независимым векторам, то рассмотрим минор из элементов векторов, не содержащих $\overline{a}_1$.

I способ (см. теорему выше)

$$M=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \\ -9 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 8-36-90+144-30+6=2\neq 0$$

Значит, r(A) = 3 (так как определитель третьего порядка не равен нулю)

II способ (преобразования матрицы)

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \\ -9 & -6 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 14 & 11 \\ 0 & -24 & -19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 14 & 11 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

r(A) = 3

Так как минор составлен из элементов векторов $\overline{a}_2, \overline{a}_3, \overline{a}_4$, то эти векторы линейно независимы и образуют базис. (Базисом в трёхмерном пространстве является любой набор из трёх линейно независимых векторов)

Разложим вектор $\overline{a}_1 = (2;5;3)$, заданный в базисе $\overline{e}_2, \overline{e}_3, \overline{e}_4$ (старый базис), по новому базису $\overline{a}_2, \overline{a}_3, \overline{a}_4$.

Выразим связь между базисами:

$$\begin{cases} \overline{a}_2 = -1\cdot\overline{e}_2 + 2\cdot\overline{e}_3 + 2\cdot\overline{e}_4 \\ \overline{a}_3 = 3\cdot\overline{e}_2 + 8\overline{e}_3 + 5\cdot\overline{e}_4 \\ .\overline{a}_4 = -9\cdot\overline{e}_2 - 6\cdot\overline{e}_3 - 1\cdot\overline{e}_4 \end{cases}$$

Матрица перехода от базиса $\overline{e}_2, \overline{e}_3, \overline{e}_4$ к базису $\overline{a}_2, \overline{a}_3, \overline{a}_4$ имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -9\\ 2 & 8 & -6\\ 2 & 5 & -1\end{pmatrix}, \Delta = 2 \neq 0$$

(мы уже находили определитель, а при транспонировании значение определителя не меняется)

Найдём A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}22 & -42 & 54\\ -10 & 19 & -24\\ -6 & 11 & -14\end{pmatrix}$$

Координаты вектора $\overline{a}_1=(2;5;3)$ в новом базисе находят так:

$$\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{22}{2} & -\frac{42}{2} & \frac{54}{2}\\ -\frac{10}{2} & \frac{19}{2} & -\frac{24}{2}\\ -\frac{6}{2} & \frac{11}{2} & -\frac{14}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 5\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 1{,}5\\ 0{,}5\end{pmatrix}$$

Таким образом, разложение вектора $\overline{a}_1$ по новому базису имеет вид:

$\overline{a}_1=-2\overline{a}_2+1{,}5\overline{a}_3+0{,}5\overline{a}_4$ ◀

Понятие линейного пространства не совсем обобщает понятие плоскости или трёхмерного пространства, так как в линейном пространстве не вводится понятие длины вектора, угла между векторами. Поэтому аксиоматично даётся понятие скалярного произведения и устанавливаются из него формулы для нахождения длины вектора линейного пространства, угла между векторами.

Определение. Скалярным произведением двух векторов $\overline{x}=(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\overline{y}=(y_1, y_2, ..., y_n)$

называется число $(\overline{x}, \overline{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$

Скалярное произведение обладает свойствами:

1. $(\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{y}, \overline{x})$-коммутативность.

2. $(\overline{x}, \overline{y}+\overline{z}) = (\overline{x}, \overline{y}) + (\overline{x}, \overline{z})$ -дистрибутивность.

3. $(\alpha\overline{x}, \overline{y}) = \alpha(\overline{x}, \overline{y})$ для любого действительного числа α.

4. $(\overline{x}, \overline{x}) > 0$ если $\overline{x}$ -ненулевой вектор.

$(\overline{x}, \overline{x}) = 0$ если $\overline{x}$ - нулевой вектор.

Определение. Линейное(векторное) пространство, в котором задано скалярное произведение векторов, удовлетворяющее указанным четырём свойствам(рассматриваемые как аксиомы), называется Евклидовым пространством.

Длиной(нормой) вектора $\overline{x}$ в евклидовом пространстве называется корень квадратный из его скалярного квадрата:

$$|\overline{x}| = \sqrt{(\overline{x}, \overline{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}\ .$$

Свойства длины вектора:

1. $|\overline{x}| = \overline{0}$ тогда и только тогда, когда $\overline{x} = \overline{0}$

2. $|\lambda\bar{x}| = |\lambda| \cdot |\bar{x}|$, где λ - действительное число.

3. $|(\bar{x}, \bar{y})| \le |\bar{x}| \cdot |\bar{y}|$ - неравенство Коши-Буняковского.

4. $|\bar{x} + \bar{y}| \le |\bar{x}| + |\bar{y}|$ - неравенство треугольника.

Угол φ определяется(угол между векторами $\bar{x}$ и $\bar{y}$) :

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{x}, \bar{y})}{|\bar{x}| \cdot |\bar{y}|}, \text{ где } 0 \le \varphi < \pi .$$

Два вектора называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю (угол между векторами равен $\frac{\pi}{2}$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$).

Векторы $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n$ **n-**мерного евклидова пространства образуют <u>ортонормированный базис</u>, если эти векторы попарно ортогональны и длина каждого из них равна единице, то есть если $(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \bar{0}$ при $i \ne j$, $|\bar{e}_i| = 1$ при i=1,2,…,n.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решите неравенство: $\begin{vmatrix} 2x & 2 \\ x & x \end{vmatrix} < 24.$

Вычислите определители:

2. $\begin{vmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} -5 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & 0 \\ -6 & -4 & -8 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} -5 & 4 & -3 \\ -3 & 2 & 0 \\ -6 & 1 & -8 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} -5 & 4 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \\ -6 & 1 & -4 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} -5 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -6 & -4 & -8 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} -4 & 4 & -3 & -2 \\ -5 & 4 & -3 & -3 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & -4 & -8 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ -5 & 2 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 6 & -8 & 3 & 2 \\ -5 & 1 & 0 & -4 \\ 7 & -3 & 1 & 5 \\ -3 & -6 & 2 & -6 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 6 & -2 & -2 & 3 \\ -7 & 1 & 0 & -6 \\ 1 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -4 & -3 \\ -5 & 1 & 0 & -4 \\ 2 & -6 & 1 & -3 \\ -7 & 2 & -5 & -9 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 8 & 15 \\ -5 & 1 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 7 & 3 \end{vmatrix}$

15. Определите минор элемента a_{23} для определителя
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$

16. Определите $\Delta_1 \cdot \Delta_2$, если $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 =$
$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

17. Найти определитель матрицы 2A, если A – матрица 4-ого порядка и $\Delta_A = a$.

18. Найти значение x_4, если
$$3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

19. Найдите $A \cdot B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

20. Решите матричное уравнение
$$3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^T = X\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + X\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

21. Найдите A^{-1}, если $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Определите ранг матрицы:

22. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **23.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ **24.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

25.Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (a+3)x_1 & & & = & 1 \\ 4x_1 + & (a+2)x_2 & & = & 2 \\ 5x_1 + & x_2 + & x_3 & = & 3 \end{cases}$$

методом обратной матрицы, если а = –1; а = 2.

26. Решите систему $\begin{cases} 2x_1 - & 4x_2 + & x_3 & = & -3 \\ x_1 - & 5x_2 + & 3x_3 & = & 0 \\ x_1 - & x_2 + & x_3 & = & 2 \end{cases}$ по формулам Крамера.

27. Векторы $\overline{a}=(2;0;0), \overline{b}=(1;1;0), \overline{c}=(3;3;3)$ образуют базис. Найдите координаты вектора $\overline{x}=(9;5;3)$ в этом базисе.

28. Найдите базисное решение системы

$$\begin{cases} 2x_1 - \ x_2 + \ 4x_3 & = \ 2 \\ x_1 + \ 2x_2 - \ 3x_3 & = \ -4 \\ 4x_1 + \ 3x_2 - \ 2x_3 & = \ -6 \end{cases}$$, если x_1 и x_2 – базисные неизвестные.

29. Исследовать систему на совместность, написать множество решений $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 & = \ 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 & = \ -2 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 & = \ -3 \end{cases}$

30. Исследовать систему на совместность, написать множество решений $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 & = \ 0 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 & = \ 1 \\ 4x_1 + x_2 + 9x_3 + 2x_4 & = \ 2 \end{cases}$

31. Исследовать систему на совместность, написать множество решений $\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 - x_4 & = \ 4 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 & = \ 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = \ 1 \end{cases}$

32.Исследовать систему на совместность, написать множество решений $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 & = \ 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 & = \ 1 \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 & = \ 7 \end{cases}$

33. Исследовать систему на совместность, написать множество решений $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 & = \ 6 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 6x_4 & = \ 7 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 & = \ 1 \end{cases}$

34. Исследовать систему на совместность, написать множество решений $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 & = & 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 & = & 3 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 & = & -1 \end{cases}$

35. Найти решение системы уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 & = & -1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 & = & 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 & = & 1 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 & = & 2 \end{cases}$$

36.Найти решение системы уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 & = & 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 2 \end{cases}$$

37.Найти решение системы уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 & = & 3 \\ x_2 - 3x_3 - 5x_4 & = & 6 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 & = & 2 \\ 3x_1 + 2x_3 + x_4 & = & 5 \end{cases}$$

38. Найти решение системы уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 & = & -2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 3 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 0 \end{cases}$$

39. Проверить, образуют ли векторы e_1, e_2, e_3 ортогональный базис, и найти разложение вектора X по этому базису. e_1=(1, 1, 0), e_2=(3, -3, 4), e_3=(-2, 2, 3), X=(1, 2, 3).

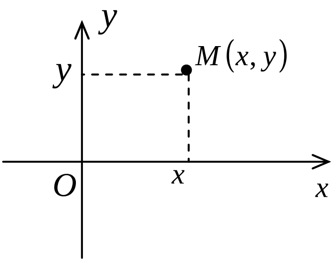
40. Проверить, образуют ли векторы e_1, e_2, e_3 ортогональный базис, и найти разложение вектора X по этому базису. e_1=(1, -1, 1), e_2=(3, 3, 0), e_3=(1, -1, -2), X=(-1, -2, -3).

Раздел 2. Аналитическая геометрия

Тема 1. Прямоугольные координаты

План

1. Прямоугольные координаты на плоскости
2. Прямоугольные координаты в пространстве



Если на плоскости задана прямоугольная декартова система координат xOy, то точку M этой плоскости, имеющую координаты x и y, обозначают $M(x;y)$.

Расстояние d между точками $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ определяется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1.1)$$

Координаты точки $C(x;y)$, делящей отрезок AB в заданном отношении λ ($\lambda = \pm\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$, число λ положительно, если точка C лежит между точками A и B и отрицательно, если точка C лежит на прямой вне отрезка AB), определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \qquad (1.2)$$

В частности, при $\lambda = 1$ получаются формулы для координат середины отрезка:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad (1.3)$$

Задача. Известно, что расстояние d между двумя данными точками $A(3; k)$ и $B(-1;2)$ равно 5. Найти значение k.

Решение

► Воспользовавшись формулой (1.1), получаем

$$d = \sqrt{(-1-3)^2 + (2-k)^2} = \sqrt{16 + (2-k)^2} = 5.$$

Откуда $(2-k)^2 = 9$. Имеем два решения: $k_1 = -1$ и $k_2 = 5$.◄

Задача. Точка $C(2;3)$ служит серединой отрезка AB. Определить координаты точки A, если $B(7;5)$.

Решение

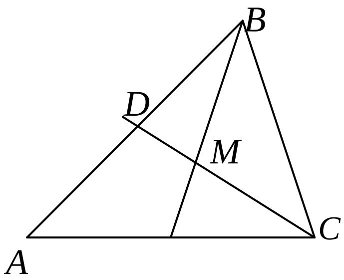
► Здесь $\bar{x} = 2$, $\bar{y} = 3$, $x_2 = 7$, $y_2 = 5$. Откуда по формулам (1.3)

$$2 = \frac{x_1 + 7}{2}, \qquad 3 = \frac{y_1 + 5}{2}.$$

Следовательно, $x_1 = -3$, $y_1 = 1$, т.е. $A(-3,1)$.◄

Задача. Даны вершины треугольника ABC: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$. Определить координаты центра тяжести треугольника (точки пересечения медиан).

Решение



► Находим координаты точки D - середины отрезка AB; имеем

$$x_D = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

$$y_D = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$ Точка M, в которой пересекаются медианы, делит отрезок CD в отношении 2:1, считая от точки C. Следовательно, координаты точки M определяются по формулам

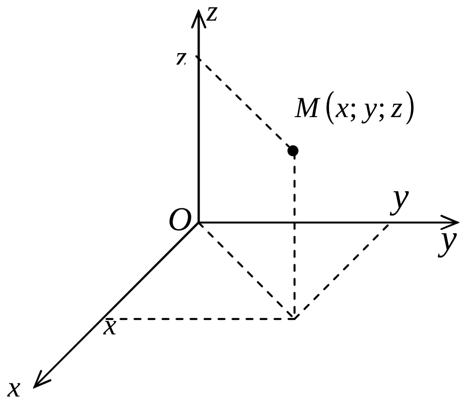
$$\bar{x} = \frac{x_3 + 2x_D}{1+2}, \quad \bar{y} = \frac{y_3 + 2y_D}{1+2},$$

т.е.

$$\bar{x} = \frac{x_3 + 2(x_1 + x_2)/2}{1+2}, \qquad \bar{y} = \frac{y_3 + 2(y_1 + y_2)/2}{1+2}.$$

Окончательно получим

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \qquad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.◄$$



Если в пространстве задана прямоугольная декартова система координат $Oxyz$, то точку M пространства, имеющую координаты x (абсцисса), y (ордината) и z (аппликата), обозначают $M(x; y; z)$.

Расстояние d между точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ определяется по формуле

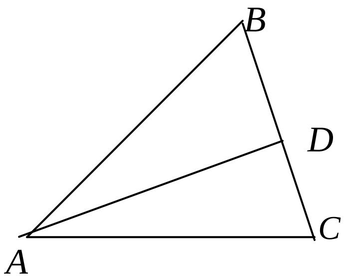
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (1.5)$$

Координаты точки $C(x; y; z)$, делящей отрезок AB в заданном отношении λ, определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \qquad (1.6)$$

В частности, при $\lambda = 1$ получаются формулы для координат середины отрезка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (1.7)$$



Задача. Дан треугольник ABC с вершинами $A(1;1;1)$, $B(5;1;-2)$, $C(7;9;1)$. Найти координаты точки D пересечения биссектрисы угла A со стороной BC.

Решение

►Найдем длины сторон треугольника, образующих угол A:

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2} =$$

$$= \sqrt{(7-1)^2 + (9-1)^2 + (1-1)^2} = 10;$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} =$$

$$= \sqrt{(5-1)^2 + (1-1)^2 + (-2-1)^2} = 5.$$

Следовательно, $CD : DB = 10 : 5 = 2$, так как биссектриса делит сторону BC на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Таким образом,

$$x_D = \frac{x_C + \lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{7 + 2\cdot 5}{1+2} = \frac{17}{3},$$

$$y_D = \frac{y_C + \lambda y_B}{1+\lambda} = \frac{9 + 2\cdot 1}{1+2} = \frac{11}{3},$$

$$z_D = \frac{z_C + \lambda z_B}{1+\lambda} = \frac{1 + 2\cdot(-2)}{1+2} = -1. ◄$$

Задача. На оси Ox найти точку, равноудаленную от точек $A(2;-4;5)$ и $B(-3;2;7)$.

► Пусть M - искомая точка. Для нее должно выполняться равенство $AM = MB$. Так как эта точка лежит на оси Ox, то ее координаты $(x;0;0)$, а потому имеем

$$AM = \sqrt{(x-2)^2 + (-4)^2 + 5^2}\,,\; MB = \sqrt{(x+3)^2 + 2^2 + 7^2}\,.$$

Отсюда после возведения в квадрат получаем

$(x-2)^2 + 41 = (x+3)^2 + 53,$ или $10x = -17,$ т.е. $x = -1{,}7$.

Таким образом, искомая точка $M\,(-1{,}7;0;0)$.◄

Тема 2. Векторы

План

1. Векторы и линейные операции над ними.
2. Разложение вектора по базису.
3. Координаты вектора.
4. Линейные операции над векторами в координатах.

Вектором $\mathbf{a} = \overline{AB}$ называется направленный отрезок, где точка A - начало вектора, B - конец вектора.

Два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются *коллинеарными* ($\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$), если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Три вектора называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

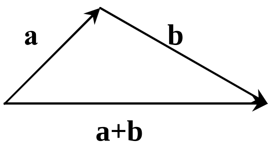
Два вектора называются *равными*, если они:

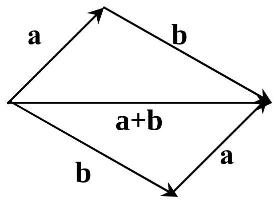
1) имеют равные длины (модули);
2) сонаправлены (коллинеарны и направлены в одну сторону).

Вектор, имеющий нулевую длину, называется *нулевым* вектором и обозначается $\overline{0}$. Его направление неопределено.

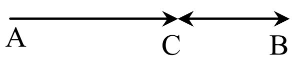
Для векторов определены операции сложения (вычитания) и умножения вектора на число. Они называются линейными операциями.

Сложение двух неколлинеарных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ происходит по правилу треугольника или параллелограмма:



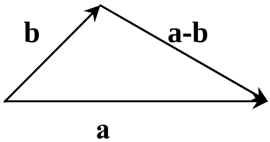


Сумму двух коллинеарных векторов можно найти по правилу аналогичному правилу треугольника, например:



$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

Разность векторов определяется как действие, обратное сложению векторов: $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$. Для неколлинеарных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ геометрически ее можно определить по правилу треугольника



Произведением вектора $\mathbf{a}$ *на число* λ называется вектор $\lambda\mathbf{a}$, модуль которого равен $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda| \, |\mathbf{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\mathbf{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно направлению вектора $\mathbf{a}$, если $\lambda < 0$. Если $\lambda = 0$, то $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, если $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$ и $\lambda \neq 0$.

Свойства сложения векторов и умножения вектора на число

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
2. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
3. $\lambda(t\mathbf{a}) = (\lambda t)\mathbf{a}$
4. $(\lambda + t)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + t\mathbf{a}$
5. $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$

Разложение вектора по базису. Действия над векторами в координатной форме

Любые два ненулевых неколлинеарных вектора $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ образуют *базис* в плоскости этих векторов, т.е. любой вектор $\mathbf{c}$, принадлежащий плоскости этих векторов, может быть единственным образом представлен в виде их линейной комбинации $\mathbf{c} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2$.

Аналогично, любой вектор $\mathbf{c}$ в пространстве может быть разложен в базисе трех некомпланарных векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, т.е. $\mathbf{c} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3$. Числа x_1, x_2, x_3 называются *координатами вектора* $\mathbf{c}$ в соответствующем базисе.

Пусть $\mathbf{a} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ (или $\mathbf{a}\{x_1; y_1; z_1\}$), где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ - единичные взаимно перпендикулярные векторы (орты). Эти векторы определяют соответственно три координатные оси Ox, Oy, Oz. *Координаты вектора* $\mathbf{a}$ суть его проекции на координатные оси, т.е. $x_1 = \text{пр}_{Ox}\mathbf{a}$, $y_1 = \text{пр}_{Oy}\mathbf{a}$, $z_1 = \text{пр}_{Oz}\mathbf{a}$.

1). *Координаты вектора* $\overline{AB}$ находятся по формуле

$$\overline{AB}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}, \qquad (2.1)$$

где $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$.

2). Пусть $\mathbf{a}\{x_1; y_1; z_1\}$, $\mathbf{b}\{x_2; y_2; z_2\}$. Тогда

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}, \qquad (2.2)$$

$$(\lambda\mathbf{a})\{\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1\}, \qquad (2.3)$$

где λ любое действительное число.

3). *Условием коллинеарности* векторов $\mathbf{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\mathbf{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ является пропорциональность его соответствующих координат, т.е.

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \qquad (2.4)$$

4). *Длина вектора* $\mathbf{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ находится по формуле

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\,. \qquad (2.5)$$

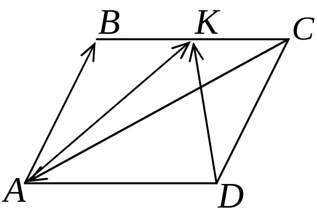
5). Пусть α, β, γ - углы, которые образует вектор $\mathbf{a}\{x; y; z\}$ с осями координат Ox, Oy и Oz соответственно. $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами вектора* $\mathbf{a}$*:*

$$\cos\alpha = \frac{x}{a},\ \cos\beta = \frac{y}{a},\ \cos\gamma = \frac{z}{a}, \qquad (2.6)$$

причем $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Задача. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AK} = \mathbf{b}$, $BK = KC$. Выразить векторы $\overline{CA}$ и $\overline{DK}$ через векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, т.е. разложить по базису $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Решение

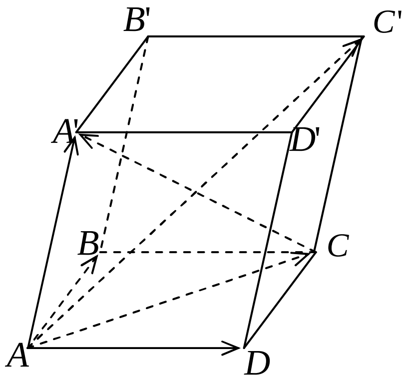


►Так как K середина AB, то $\overline{CK} = \overline{KB}$,$\overline{CB} = 2\overline{KB}$. Из треугольника ABC имеем $\overline{CA} = \overline{CB} + \overline{BA}$; из треугольника ABK: $\overline{KB} = \overline{AB} - \overline{AK} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Отсюда $\overline{CA} = 2(\mathbf{a} - \mathbf{b}) - \mathbf{a} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b}$.

Так как $\overline{CK} = \overline{KB} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\overline{DC} = a$, то из треугольника DKC получаем $\overline{DK} = \overline{DC} + \overline{CK} = \mathbf{a} + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Таким образом, $\overline{CA} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, $\overline{DK} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$. ◄



Задача . Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$, построенный на векторах $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA'} = \mathbf{c}$. Через векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ выразить векторы $\overline{AC'}$ и $\overline{CA'}$.

Решение

►Так как $ABCDA'B'C'D'$, то $\overline{AB} = \overline{CD} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \overline{BC} = \mathbf{b}$, $\overline{AA'} = \overline{CC'} = \mathbf{c}$.

Из треугольника $AC'C$ имеем $\overline{AC'} = \overline{AC} + \overline{CC'} = \overline{AC} + \mathbf{c}$, а из треугольника ABC: $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Откуда $\overline{AC'} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

Аналогично, из треугольника $AA'C$, $\overline{CA'} = \overline{AA'} - \overline{AC} = \mathbf{c} - (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = -\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

Таким образом, $\overline{AC'} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\overline{CA'} = -\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$.◄

Задача. Даны точки $M_1(1;2;3)$ и $M_2(3;-4;6)$. Найти координаты вектора $\overline{M_1M_2}$, его длину и направление.

Решение

► По формуле (2.1) $\overline{M_1M_2}\{3-1;-4-2;6-3\}$, т.е. $\overline{M_1M_2}\{2;-6;3\}$.

Длину вектора $\overline{M_1M_2}$ найдем по формуле (2.5):

$$\left|\overline{M_1M_2}\right| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2} = \sqrt{4+36+9} = \sqrt{49} = 7 .$$

Направляющие косинусы вектора $\overline{M_1M_2}$ (формула (2.6)):

$$\cos\alpha = \frac{2}{7},\ \cos\beta = -\frac{6}{7},\ \cos\gamma = \frac{3}{7}.$$ ◄

Задача. Даны два вектора $\mathbf{a}\{2;3\}$ и $\mathbf{b}\{1;6\}$. Найти разложение вектора $\mathbf{c}\{6;27\}$ по векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Решение

► Неколлинеарные векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ образуют базис в плоскости xOy. Вектор $\mathbf{c}$, принадлежащий этой плоскости, может быть разложен по векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ по формуле $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ единственным образом. При этом одноименные координаты вектора $\mathbf{c}$ и вектора суммы в правой части равенства должны быть равны.

Имеем, $\alpha\mathbf{a}\{2\alpha;3\alpha\}$, $\beta b\{\beta;6\beta\}$. Тогда $(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b})\{2\alpha+\beta;3\alpha+6\beta\}$, но $\mathbf{c}\{6,27\}$.

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 6, \\ 3\alpha + 6\beta = 27; \end{cases}$$

решая которую, получаем $\alpha = 1$, $\beta = 4$.

Таким образом, $\mathbf{c} = \mathbf{a} + 4\mathbf{b}$. ◄

Тема 3. Скалярное произведение векторов

План

1.Определение скалярного произведения
2.Свойства скалярного произведения

Скалярным произведением двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos\varphi . \qquad (3.1)$$

Свойства скалярного произведения

1. $\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2$, $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^2}$ (3.2)
2. *Условие перпендикулярности* двух векторов: если $\mathbf{ab} = 0$, то $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.
3. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
4. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
5. $(m\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (m\mathbf{b}) = m(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ заданы своими координатами $\mathbf{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\mathbf{b}\{x_2; y_2; z_2\}$, то

1) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$; (3.3)

2) $\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$; (3.4)

3) *условие перпендикулярности в координатах*: $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$. (3.5)

4) *проекция вектора* $\mathbf{a}$ *на направление вектора* $\mathbf{b}$:

$$\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cos\varphi = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + x_2^2}}. \qquad (3.6)$$

Задача . Даны векторы $\mathbf{a}\{m;3;4\}$ и $\mathbf{b}\{4;m;-7\}$. При каком значении m эти векторы перпендикулярны?

Решение

► Из условия (3.3) получаем уравнение

$$4m + 3m - 28 = 0,$$

откуда $m = 4$. ◄

Задача . Даны два вектора: $\mathbf{a}\{1;2;3\}$ и $\mathbf{b}\{6;4;-2\}$. Найти:

1). векторы $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ и $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$;

2). угол α между векторами $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$;

3). проекцию вектора $\mathbf{c}$ на направление вектора $\mathbf{d}$.

Решение

► 1). По формуле (2.2) получаем $\mathbf{c}\{7;6;1\}$, $\mathbf{d}\{-5;-2;5\}$.

2). Косинус угла α между векторами $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ вычислим, используя формулу (3.4):

$$\cos\alpha = \frac{7\cdot(-5)+6\cdot(-2)+1\cdot 5}{\sqrt{7^2+6^2+1^2}\cdot\sqrt{(-5)^2+(-2)^2+5^2}} =$$

$$= \frac{-42}{\sqrt{86}\cdot\sqrt{54}} = \frac{-42}{6\cdot\sqrt{43\cdot 3}} = \frac{-7}{\sqrt{129}},$$

откуда

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{7}{\sqrt{129}}\right) = \pi - \arccos\frac{7}{\sqrt{129}}.$$

3). По формуле (3.6) имеем

$$\text{пр}_{\mathbf{d}}\mathbf{c} = \frac{7\cdot(-5)+6\cdot(-2)+1\cdot 5}{\sqrt{(-5)^2+(-2)^2+5^2}} = \frac{-42}{\sqrt{54}} = \frac{-42}{3\sqrt{6}} = \frac{-14}{3\sqrt{6}}.$$ ◄

Задача. Даны векторы $\mathbf{a} = \mathbf{m} + \mathbf{2n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{2m} - \mathbf{3n}$, где $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{m},\mathbf{n}}) = \pi/3$. Найти:

1). $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$;

2). Длины векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;

3). Угол α между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;

4). Проекцию вектора $\mathbf{a}$ на направление вектора $\mathbf{b}$.

Решение

► 1). Используя определение и свойства скалярного произведения, получаем

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(\mathbf{m}+2\mathbf{n})(2\mathbf{m}-3\mathbf{n})=2\mathbf{m}^2+\mathbf{mn}-6\mathbf{n}^2=$$

$$=2|\mathbf{m}|^2+|\mathbf{m}||\mathbf{n}|\cos(\widehat{\mathbf{m},\mathbf{n}})-6|\mathbf{n}|^2=$$

$$=2\cdot2^2+2\cdot1\cdot\frac{1}{2}-6\cdot1^2=8+1-6=3.$$

2). Аналогично, используя формулу (3.2), имеем

$$\mathbf{a}^2=(\mathbf{m}+2\mathbf{n})^2=\mathbf{m}^2+4\mathbf{mn}+4\mathbf{n}^2=|\mathbf{m}|^2+4|\mathbf{m}||\mathbf{n}|\cos(\widehat{\mathbf{m},\mathbf{n}})+4|\mathbf{n}|^2=$$

$$=2^2+4\cdot2\cdot1\cdot\frac{1}{2}+4\cdot1^2=4+4+4=12,$$

$$\mathbf{b}^2=(2\mathbf{m}-3\mathbf{n})^2=4\mathbf{m}^2-12\mathbf{mn}+9\mathbf{n}^2=$$

$$=4|\mathbf{m}|^2-12|\mathbf{m}||\mathbf{n}|\cos(\widehat{\mathbf{m},\mathbf{n}})+9|\mathbf{n}|^2=$$

$$=4\cdot2^2-12\cdot2\cdot1\cdot\frac{1}{2}+9\cdot1^2=16-12+9=13,$$

откуда окончательно получаем $|\mathbf{a}|=2\sqrt{3}$, $|\mathbf{b}|=\sqrt{13}$.

3). По формуле (3.4) $\cos\alpha=\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}=\dfrac{3}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{13}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$.

Откуда $\alpha=\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$.

4). По формуле (3.6) имеем

$$\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{3}{\sqrt{13}}.◄$$

Тема 4. Векторное произведение векторов

План

1.Определение векторного произведения
2.Свойства векторного произведения

Векторным произведением вектора $\mathbf{a}$ на вектор $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$ такой, что:

1) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi$, (4.1)

где φ - угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$

2) $\mathbf{c}\perp\mathbf{a}, \mathbf{c}\perp\mathbf{b}$;

3) векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ образуют правую тройку (ориентированы также как орты $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$).

Свойства векторного произведения

1. $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$.
2. $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = 0$, если $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, либо $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, либо $\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$ (коллинеарность ненулевых векторов).
3. $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\mathbf{c}$
4. $(m\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \mathbf{a}\times(m\mathbf{b}) = m(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$

Модуль векторного произведения $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ численно равен *площади* параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Векторные произведения координатных ортов $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$:

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = \mathbf{0},\ \mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k},\ \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i},\ \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ заданы своими координатами $\mathbf{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\mathbf{b}\{x_2; y_2; z_2\}$, то

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \qquad (4.2)$$

Задача. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1;1;1)$, $B(2;3;4)$, $C(4;3;2)$ и длину высоты, опущенной из вершины C.

Решение

► По формуле (2.1) находим векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB}\{1;2;3\},\ \overline{AC}\{3;2;1\}.$$

Исходя из геометрического смысла векторного произведения, площадь треугольника ABC будет равна половине модуля векторного произведения векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ (формула 4.2):

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

Следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{16+64+16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \text{ (кв.ед.)}$$

Высоту CH найдем, используя известную формулу:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH\ ,$$

откуда

$$CH = \frac{2S_{ABC}}{AB} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{6}}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{14}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{21}}{7}. ◄$$

Задача . Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ и $3\mathbf{a} + \mathbf{b}$, если $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$, $\left(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}\right) = 30^0$.

Решение

►Имеем

$$(\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \times (3\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 3\mathbf{a} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} + 9\mathbf{b} \times \mathbf{a} + 3\mathbf{b} \times \mathbf{b} =$$
$$= \mathbf{a} \times \mathbf{b} - 9\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -8\mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

(по свойствам векторного произведения $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$).

По формуле (4.1), согласно геометрическому смыслу векторного произведения, получаем

$$\mathrm{S} = 8|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 30^0 = 4 \text{ (кв.ед.). ◄}$$

Тема 5. Смешанное произведение трех векторов

План

1.Определение смешанного произведения

2.Свойства смешанного произведения

Смешанным произведением векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ называется скалярное произведение вектора $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ на вектор $\mathbf{c}$, т.е. $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$.

Смешанное произведение трех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ по модулю равно *объему* параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Свойства смешанного произведения

1. Смешанное произведение $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = 0$, если:

   а) хоть один из перемножаемых векторов равен нулю;

   б) два из перемножаемых векторов коллинеарны;

   в) три ненулевых вектора компланарны.

2. Смешанное произведение не изменяется, если в нем поменять местами знаки векторного $(\times)$ и скалярного $(\cdot)$ умножения, т.е. $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$. В силу этого свойства смешанное произведение векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ условимся записывать в виде $\mathbf{abc}$.

3. Смешанное произведение не изменяется, если переставлять перемножаемые векторы в круговом порядке:
$$\mathbf{abc} = \mathbf{cab} = \mathbf{bca}.$$

4. При перестановке любых двух сомножителей смешанное произведение изменяет только знак:
$$\mathbf{abc} = -\mathbf{bac},\ \mathbf{abc} = -\mathbf{acb},\ \mathbf{abc} = -\mathbf{cba}.$$

5. Если векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ заданы своими координатами: $\mathbf{a}\{x_1; y_1; z_1\}$, $\mathbf{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ и $\mathbf{c}\{x_3; y_3; z_3\}$, то

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (5.1)$$

Задача. Дана треугольная пирамида с вершинами $A(2;2;2)$, $B(4;3;3)$, $C(4;5;4)$ и $D(5;5;6)$. Найти ее объем и длину высоты h, опущенной из точки D на грань ABC.

Решение

► Найдем векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, совпадающие с ребрами пирамиды, сходящимися в вершине A: $\overline{AB}\{2;1;1\}$, $\overline{AC}\{2;3;2\}$, $\overline{AD}\{3;3;4\}$. Находим смешанное произведение этих векторов:

$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} -$$

$$-1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 7.$$

Исходя из геометрического смысла смешанного произведения и учитывая, что объем пирамиды $ABCD$ равен 1/6 объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, то

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right| = \frac{7}{6} \text{ (куб.ед.).}$$

Длину высоты h, опущенной из вершины D, найдем, используя формулу

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h.$$

Площадь грани ABC равна половине модуля векторного произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

.

Следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \overline{AB} \times \overline{AC} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{1+4+16} = \frac{\sqrt{21}}{2} \text{ (кв.ед.).}$$

Откуда окончательно получаем

$$h = \frac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}} = \frac{3 \cdot \frac{7}{6} \cdot 2}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}. \blacktriangleleft$$

Задача. Показать, что точки $A(5;7;-2)$, $B(3;1;-1)$, $C(9;4;-4)$ и $D(1;5;0)$ лежат в одной плоскости.

Решение

► Четыре точки A, B, C, D лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда три вектора $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ компланарны. Условие компланарнсти: $\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD} = 0$

Найдем координаты векторов: $\overline{AB}\{-2;-6;1\}$, $\overline{AC}\{4;-3;-2\}$, $\overline{AD}\{-4;-2;2\}$.

Имеем

$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+6 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 20 - 20 = 0.$$

Значит векторы компланарны, а точки лежат в одной плоскости.◄

Тема 6. Прямая на плоскости

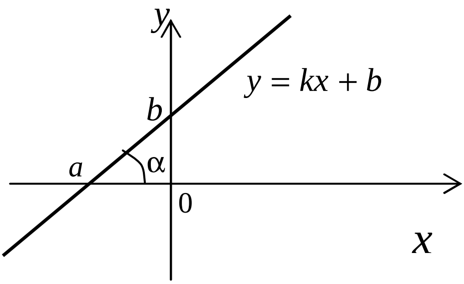
План

1.Уравнение прямой с угловым коэффициентом
2.Общее уравнение прямой
3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки
4. Уравнение прямой в отрезках
5.Угол между прямыми на плоскости
6. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $A(x_0; y_0)$ и имеющей угловой коэффициент k
7. Взаимное расположение прямых на плоскости

8. Пучок прямых
9. Нормальное уравнение прямой
10. Расстояние от точки до прямой
11. Уравнения биссектрис углов между прямыми

1. *Уравнение прямой с угловым коэффициентом*

$$y = kx + b. \qquad (6.1)$$



Угловой коэффициент k прямой – это тангенс угла наклона α прямой к оси Ox.

2. В декартовой системе координат каждая прямая на плоскости определяется уравнением первой степени $Ax + By + C = 0$ ($A^2 + B^2 \neq 0$) и, обратно, каждое уравнение первой степени с двумя переменными определяет прямую.

Уравнение вида

$$Ax + By + C = 0 \; (A^2 + B^2 \neq 0) \qquad (6.2)$$

называется *общим уравнением прямой*. Если в нем $C = 0$, то прямая проходит через начало координат; если $A = 0$, то прямая параллельна оси абсцисс; если $B = 0$, то прямая параллельна оси ординат.

3. *Уравнение прямой, проходящей через две данные точки* $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ имеет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (6.3)$$

4. *Уравнение прямой в отрезках.*

Если прямая пересекает ось Ox в точке $(a;0)$, а ось Oy в точке $(0;b)$ (см. рис.), то ее уравнение имеет вид

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (6.4)$$

5. Острый *угол* φ *между прямыми*, имеющими угловые коэффициенты k_1 и k_2, определяется по формуле

$$tg\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|. \qquad (6.5)$$

Условие параллельности двух прямых, имеющих угловые коэффициенты k_1 и k_2:

$$k_1=k_2. \qquad (6.6)$$

Условие перпендикулярности двух прямых:

$$k_1k_2=-1. \qquad (6.7)$$

6. *Уравнение прямой, проходящей через данную точку* $A(x_0;y_0)$ *и имеющей угловой коэффициент* k *:*

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (6.8)$$

7. *Взаимное расположение прямых на плоскости.*

Если даны две прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то их взаимное расположение определяется системой

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Возможны следующие случаи:

а). система имеет единственное решение, т.е. прямые пересекаются;

б). система имеет множество решений, т.е. прямые совпадают;

в). система не имеет решений, т.е. прямые параллельны.

8. *Пучок прямых.*

Совокупность всех прямых, проходящих через данную точку S, называется пучком прямых. S - центр пучка.

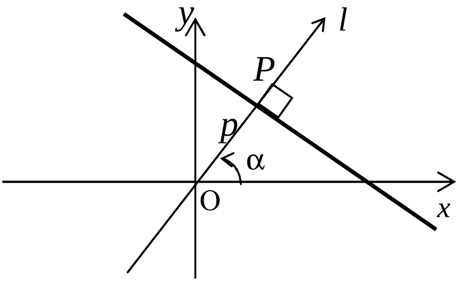
Если $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ - уравнения двух прямых, пересекающихся в точке S, то уравнение любой прямой пучка имеет вид

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \qquad (6.9)$$

где α и β некоторые действительные числа, одновременно неравные нулю.

9. Нормальное уравнение прямой:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0\,. \qquad (6.10)$$



Свойства нормального уравнения:

1). $-p \le 0$;

2). $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Для приведения общего уравнения прямой к нормальному виду, необходимо обе его части поделить на $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$ (знак выбирается противоположным знаку C).

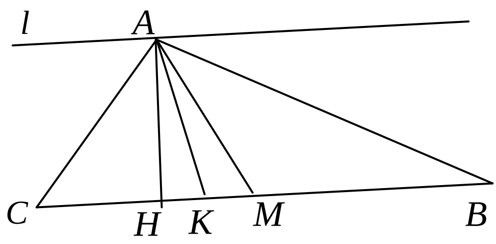
10. Расстояние d от точки $A(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,. \qquad (6.11)$$

11. Уравнения биссектрис углов между прямыми $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ имеют вид

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0\,. \qquad (6.12)$$

Задача. Даны стороны треугольника ABC: (AB) $x+y-6=0$, (BC) $3x-5y+14=0$ и (AC) $5x-3y-14=0$.



Составить уравнения:

1). высоты AH;

2). медианы AM;

3). биссектрис углов между прямыми AC и BC.

4). прямой l, проходящей через точку A параллельно прямой BC.

Найти:

5). длину h высоты AH;

6). угол α между прямыми AC и BC.

Решение

► Найдем вершины треугольника ABC, как точки пересечения соответствующих прямых.

$$A:\begin{cases} x+y-6=0, \\ 5x-3y-14=0; \end{cases} \text{ откуда } A(4;2).$$

$$B:\begin{cases} x+y-6=0, \\ 3x-5y+14=0; \end{cases} \text{ откуда } B(2;4).$$

$$C:\begin{cases} 5x-3y-14=0, \\ 3x-5y+14=0; \end{cases} \text{ откуда } C(7;7).$$

1). Уравнение BC перепишем в виде $y=\frac{3}{5}x+\frac{14}{5}$. Угловой коэффициент k_{BC} прямой BC равен $3/5$. Высота AH по определению является прямой, проходящей через точку A перпендикулярно BC. Используя условие перпендикулярности двух прямых, получаем

$$k_{AH}=-1/k_{BC}=-\frac{1}{3/5}=-\frac{5}{3}.$$

Далее можно использовать уравнения (6.1) или (6.8). Зная, что прямая AH проходит через точку $A(4;2)$, из (6.8) получаем

$$y-2=-\frac{5}{3}\cdot(x-4).$$

Итак, уравнение AH: $y=-\frac{5}{3}x+\frac{26}{3}$.

2). Найдем координаты точки M, как середины отрезка BC.
Получаем $M\left(\frac{9}{2};\frac{11}{2}\right)$.

По формуле (6.3) получаем уравнение прямой AM:

$$\frac{x-4}{\frac{9}{2}-4}=\frac{y-2}{\frac{11}{2}-2}.$$

Окончательно, уравнение AM: $y=7x-26$.

3). Рассматривая формулу (6.12) получаем уравнения биссектрис углов между прямыми AC и BC:

$$\frac{5x-3y-14}{\sqrt{5^2+(-3)^2}}\pm\frac{3x-5y+14}{\sqrt{3^2+(-5)^2}}=0,$$

упрощая которое, получаем две биссектрисы: $y=x$ и $y=-x+14$.

4). Угловой коэффициент k_{BC} прямой BC равен $3/5$. Используя условие параллельности двух прямых, получаем

$$k_l=k_{BC}=\frac{3}{5}.$$

Далее можно поступить как в пункте 1).

Рассмотрим другой способ. Зная, что прямая l с угловым коэффициентом проходит через точку $A(4;2)$, из (6.1) получаем уравнение

$$2 = \frac{3}{5} \cdot 4 + b,$$

откуда $b = -\frac{2}{5}$ и уравнение прямой l выглядит так:

$$y = \frac{3}{5}x - \frac{2}{5}.$$

5). Длину h высоты AH можно найти, используя формулу для расстояния между двумя точками (для этого предварительно нужно искать точку H).

Мы же используем формулу (6.11) для точки $A(4;2)$ и прямой BC: $3x - 5y + 14 = 0$. Получим

$$h = \frac{|3 \cdot 4 - 5 \cdot 2 + 14|}{\sqrt{3^2 + (-5)^2}} = \frac{16}{\sqrt{34}}.$$

6). Угол α между прямыми AC и BC найдем по формуле (6.5). Угловые коэффициенты прямых: $k_{AC} = \frac{5}{3}$, $k_{BC} = \frac{3}{5}$. Получаем

$$tg\alpha = \frac{\left|\frac{5}{3} - \frac{3}{5}\right|}{1 + \frac{5}{3}\cdot\frac{3}{5}} = \frac{16}{2\cdot 15} = \frac{8}{15},$$

откуда $\alpha = arctg\left(\frac{8}{15}\right) \approx 28^0$.◄

Задача . Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $3x - 4y + 7 = 0$ и $5x + 2y + 3 = 0$ и параллельную оси ординат.

Решение

► Прямая принадлежит пучку (см. 6.9)

$\alpha(3x - 4y + 7) + \beta(5x + 2y + 3) = 0$, т.е.
$(3\alpha + 5\beta)x + (-4\alpha + 2\beta)y + (7\alpha + 3\beta) = 0$.

Так как искомая прямая параллельна оси ординат, то коэффициент при y должен быть равен 0: $-4\alpha + 2\beta = 0$, т.е. $\beta = 2\alpha$. Подставив полученное выражение в уравнение пучка, получим $13\alpha x + 13\alpha = 0$. Искомое уравнение: $x = -1$.◄

Задача. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M(5;1)$ и образующих с прямой $2x + y - 4 = 0$ угол $\pi/4$.

Решение

► Очевидно, что таких прямых две. Пусть угловой коэффициент одной из них равен k. Угловой коэффициент заданной прямой равен -2. Так как угол между искомой и заданной прямой равен $\pi/4$, то по формуле (6.5)

$$tg\frac{\pi}{4}=\left|\frac{k+2}{1-2k}\right|, \text{ т.е. } 1=\left|\frac{k+2}{1-2k}\right|,$$

откуда

$$\frac{k+2}{1-2k}=1 \text{ и } \frac{k+2}{1-2k}=-1.$$

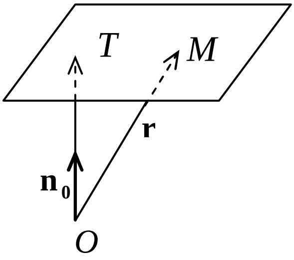
Решая каждое из полученных уравнений, находим $k=-1/3$ и $k=3$. Итак, уравнение одной из искомых прямых запишется (см. 6.8) в виде $y-1=(-1/3)(x-5)$, т.е. $x+3y-8=0$, а уравнение другой прямой в виде $y-1=3(x-5)$, т.е. $3x-y-14=0$.◄

Тема 7. Плоскость

План

1.Нормальное уравнение плоскости
2.Общее уравнение плоскости
3. Исследование общего уравнения
4. Уравнение плоскости в отрезках
5. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно данному вектору $\mathbf{n}\{A;B;C\}$,
6. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки
Взаимное расположение прямых на плоскости
7. Угол между двумя плоскостями
8. Уравнение пучка плоскостей
9. Точка пересечения трех плоскостей
10. Расстояние от точки до плоскости

1. *Нормальное уравнение плоскости.* Положение плоскости в пространстве будет вполне определено, если задать ее расстояние p от начала координат и единичный вектор $\mathbf{n_0}$, перпендикулярный к плоскости и направленный от начала O к плоскости (см. рис.).



Пусть $\mathbf{r}$ - радиус-вектор произвольной точки M плоскости. Ее уравнение может быть переписано в виде

$$\mathbf{r}\mathbf{n_0} - p = 0 \qquad (7.1)$$

Оно называется *нормальным уравнением плоскости*. Если x, y, z координаты точки M, а вектор n_0 образует с осями координат углы α, β и γ, то получим *нормальное уравнение плоскости в координатной форме*

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \qquad (7.2)$$

Выведенные уравнения остаются в силе и тогда, когда $p = 0$, т.е. данная плоскость проходит через начало координат. В этом случае за $\mathbf{n_0}$ можно принять любой из двух единичных векторов, перпендикулярных к плоскости и отличающихся один от другого направлением.

Таким образом, всякая плоскость может быть представлена уравнением первой степени относительно текущих координат.

2. *Общее уравнение плоскости.*

Всякое уравнение первой степени

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (7.3)$$

с тремя переменными определяет некоторую плоскость.

Уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$ ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$) называется общим уравнением плоскости.

Для приведения общего уравнения плоскости к нормальному виду нужно умножить его на множитель $M = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, причем знак множителя нужно взять противоположным знаку свободного члена D.

3. *Исследование общего уравнения плоскости.*

А) Если $D = 0$, то $Ax + By + Cz = 0$ - плоскость проходит через начало координат.

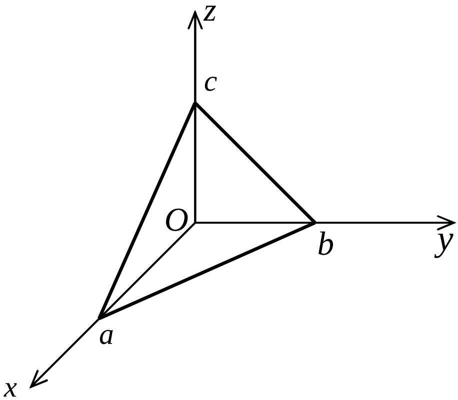
Б) Если $C = 0$, то $Ax + By + D = 0$ - плоскость параллельна оси Oz.

В). Если $C = D = 0$, то $Ax + By = 0$ - плоскость проходит через ось Oz.

Г). Если $B = C = 0$, то $Ax + D = 0$ - плоскость параллельна плоскости yOz.

Д). Если $B = C = D = 0$, то $x = 0$ - плоскость yOz.

4. *Уравнение плоскости в отрезках.*



Если плоскость пересекает ось Ox в точке $(a;0;0)$, ось Oy - в точке $(0;b;0)$, ось Oz - в точке $(0;0;c)$, то ее уравнение имеет вид

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (7.4)$$

5. *Уравнение плоскости, проходящей через данную точку* $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *перпендикулярно данному вектору* $\mathbf{n}\{A;B;C\}$, имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\,, \qquad (7.5)$$

а вектор $\mathbf{n}\{A;B;C\}$ называется нормальным вектором плоскости или вектором нормали.

6. *Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки* $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0\,. \qquad (7.6)$$

7. *Угол* φ *между двумя плоскостями* – это любой из двух двугранных углов, образованных этими плоскостями.

Если $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ - две данные плоскости, то один из углов между ними равен углу между их нормальными векторами $\mathbf{n_1}\{A_1; B_1; C_1\}$ и $\mathbf{n}_2\{A_2; B_2; C_2\}$, т.е.

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{n_1}\cdot\mathbf{n_2}}{|\mathbf{n_1}|\cdot|\mathbf{n_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{7.7}$$

Плоскости *перпендикулярны*, если $\mathbf{n_1} \perp \mathbf{n_2}$, т.е. $\mathbf{n_1}\cdot\mathbf{n_2} = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Плоскости *параллельны*, если $\mathbf{n_1} \parallel \mathbf{n_2}$, т.е. $\mathbf{n_1} = \lambda\mathbf{n_2}$, т.е. $\lambda = \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$.

Плоскости *совпадают*, если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$.

8. *Уравнение пучка плоскостей.* Пучок плоскостей – множество плоскостей, имеющих общую прямую.

Любые две непараллельные плоскости, заданные уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ определяют пучок плоскостей

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda\left(A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) = 0, \tag{7.8}$$

из которого при подходящем λ можно получить уравнение любой (кроме второй) плоскости пучка.

9. *Точка пересечения трех плоскостей*. Чтобы найти координаты точки пересечения трех плоскостей, данных своими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0,$$

нужно решить эти уравнения совместно относительно x, y и z
.

Если определитель системы отличен от нуля, то плоскости пересекаются в одной точке.

10. *Расстояние* d *от данной точки* $M_0(x_0; y_0; z_0)$ *до данной плоскости* $Ax + By + Cz + D = 0$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (7.9)$$

Задача. Даны пять точек $A(3;-1;2)$, $B(4;-1;-1)$, $C(2;0;2)$, $D(1;1;1)$, $E(0;0;1)$. Написать уравнения:

1). плоскости ABC;

2). плоскости α, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC;

3). плоскости β, проходящей через точки E и D перпендикулярно плоскости ABC;

4). плоскости γ, проходящей через линию пересечения плоскостей α и β, параллельно оси Oy.

Найти:

5). расстояние d от точки D до плоскости ABC;

6). угол φ между плоскостями α и γ.

Решение

► 1). Воспользуемся уравнением (7.6):

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-(-1) & z-2 \\ 4-3 & -1-(-1) & -1-2 \\ 2-3 & 0-(-1) & 2-2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-3)\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$3(x-3)+3(y+1)+(z-2)=0.$$

Окончательно, уравнение ABC имеет вид:

$$3x+3y+z-8=0.$$

2). Плоскость α параллельна плоскости ABC, поэтому можно считать, что эти плоскости имеют один и тот же нормальный вектор $\mathbf{n}\{3;3;1\}$. По формуле (7.5) для точки $D(1;1;1)$ и вектора $\mathbf{n}\{3;3;1\}$ получаем уравнение плоскости α:

$$3(x-1)+3(y-1)+(z-1)=0.$$

Итак, уравнение плоскости α, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC, имеет вид

$$3x+3y+z-7=0.$$

3). Необходимо найти вектор нормали $\mathbf{N}$ искомой плоскости β. Он перпендикулярен искомой плоскости, а, следовательно, вектору $\overline{ED}\{1;1;0\}$ и нормальному вектору $\mathbf{n}\{3;3;1\}$ плоскости ABC, т.е. равен их векторному произведению.

Тогда $\mathbf{N}=\mathbf{n}\times\overline{ED}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & 3 & 1\end{vmatrix}=\mathbf{i}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{vmatrix}=\mathbf{i}-\mathbf{j}$, т.е. $\mathbf{N}\{1;-1;0\}$.

Напишем уравнение плоскости, проходящей через точку $E(0;0;1)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{N}\{1;-1;0\}$ (см. 7.5):

$$1\cdot(x-0)-1\cdot(y-0)+0\cdot(z-1)=0.$$

Итак, уравнение плоскости β имеет вид

$$x-y=0.$$

4). Воспользуемся уравнением (7.8) пучка плоскостей, образованного плоскостями $3x+3y+z-7=0$ и $x-y=0$:

$$3x+3y+z-7+\lambda(x-y)=0;$$

$$(3+\lambda)x+(3-\lambda)y+z-7=0.$$

Так как искомая плоскость параллельна оси ординат, то коэффициент при y должен быть равен нулю: $3-\lambda=0$, т.е. $\lambda=3$. Подставив найденной значение λ в уравнение пучка, получаем уравнение искомой плоскости γ: $6x+z-7=0$.

5). По формуле (7.9) для точки $D(1;1;1)$ и плоскости $3x+3y+z-8=0$ имеем

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|3\cdot1+3\cdot1+1-8|}{\sqrt{3^2+3^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{19}}.$$

6). Острый угол φ между плоскостями $3x+3y+z-7=0$ и $6x+z-7=0$ найдем по формуле (7.7):

$$\cos\varphi=\frac{|3\cdot6+3\cdot0+1\cdot1|}{\sqrt{3^2+3^2+1^2}\cdot\sqrt{6^2+1^2}}=\frac{19}{\sqrt{19}\cdot\sqrt{37}}=\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{37}},$$

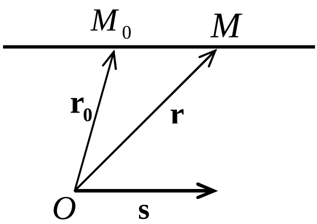
откуда $\varphi=\arccos\left(\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{37}}\right)\approx44{,}2^0$.◄

Тема 8. Прямая и плоскость в пространстве

План

1. Уравнения прямой линии
2. Прямая как линия пересечения двух плоскостей.
3. Угол между двумя прямыми
4. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки
5.Угол между прямой и плоскостью
6. Пересечение прямой с плоскостью
7. Условие принадлежности прямых одной плоскости
8. Расстояние от точки до прямой

1. *Уравнения прямой линии.*



Пусть прямая l проходит через точку M_0 параллельно вектору $\mathbf{s}$, называемому направляющим вектором прямой, M - произвольная точка этой прямой.

Уравнение вида

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + t\mathbf{s},\ t \in \mathbf{R} \qquad (8.1)$$

называется *векторным уравнением прямой* линии.

Если точки и векторы задать в координатах, т.е. $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M(x; y; z)$, $\mathbf{s}\{m; n; p\}$, то получим систему уравнений

$$x = x_0 + mt,$$
$$y = y_0 + nt, \qquad (8.2)$$
$$z = z_0 + pt,$$

называемых *параметрическими уравнениями прямой.*

Если же из последних уравнений исключить параметр t, то получим уравнения

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \qquad (8.3)$$

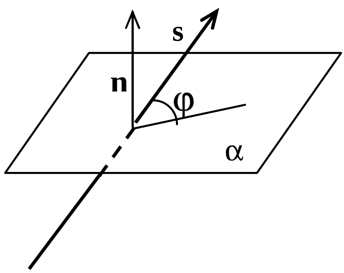
называемые *каноническими уравнениями прямой*.

2. *Прямая как линия пересечения двух плоскостей.*

Любые две непараллельные плоскости с общими уравнениями

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0,$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \qquad (8.4)$$



определяют прямую их пересечения. Эти уравнения, рассматриваемые совместно, называются *общими уравнениями прямой*. От общих уравнений можно перейти к каноническим, найдя точку на прямой (некоторое решение системы) и направляющий вектор прямой ($\mathbf{s} = \mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2}$, где $\mathbf{n_1}$ и $\mathbf{n_2}$ - нормальные векторы данных плоскостей).

3. *Угол* φ *между двумя прямыми.*

Пусть $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$, $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$ - две данные прямые. Один из углов между ними равен углу между их направляющими векторами $\mathbf{s_1}\{m_1;n_1;p_1\}$ и $\mathbf{s}_2\{m_2;n_2;p_2\}$, т.е.

$$\cos\varphi=\frac{\mathbf{s_1}\cdot\mathbf{s_2}}{|\mathbf{s_1}|\cdot|\mathbf{s_2}|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \qquad (8.5)$$

Прямые *перпендикулярны,* если $\mathbf{s_1}\perp\mathbf{s_2}$, т.е. $\mathbf{s_1}\cdot\mathbf{s_2}=m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

Прямые *параллельны,* если $\mathbf{s_1}\parallel\mathbf{s_2}$, т.е. $\mathbf{s_1}=\lambda\mathbf{s_2}$, т.е. $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}=\lambda$.

4. *Уравнение прямой, проходящей через две данные точки* $M_1(x_1;y_1;z_1)$ *и* $M_2(x_2;y_2;z_2)$ имеет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (8.6)$$

5. *Угол* φ *между прямой* l, *заданной уравнением* $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ *и плоскостью* α: $Ax+By+Cz+D=0$.

$$\sin\varphi = \frac{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{s}|}{|\mathbf{n}|\cdot|\mathbf{s}|} = \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \qquad (8.7)$$

Прямая *параллельна* плоскости, если $\mathbf{s}\perp\mathbf{n}$, т.е. $\mathbf{s}\cdot\mathbf{n} = Am+Bn+Cp = 0$.

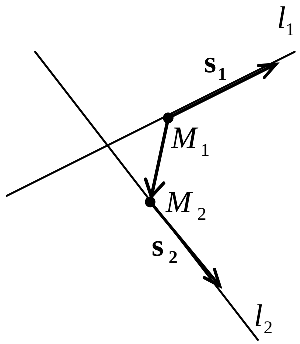
Прямая перпендикулярна плоскости, если $\mathbf{s}\parallel\mathbf{n}$, т.е. $\mathbf{s} = \lambda\mathbf{n}$, т.е. $\frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C} = \lambda$.

6. *Пересечение прямой с плоскостью*. Для нахождения точек пересечения (одной или множества) прямой и плоскости необходимо совместно решить их уравнения. При этом удобнее записать уравнение прямой в параметрическом виде. Пусть дана прямая $x = x_0 + mt,\ y = y_0 + nt,\ z = z_0 + pt$ и плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$. Для нахождения их общих точек необходимо решить систему

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases} \qquad (8.8)$$

7. *Условие, при котором две прямые лежат в одной плоскости.*

Пусть $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$ и $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$ - две данные прямые.



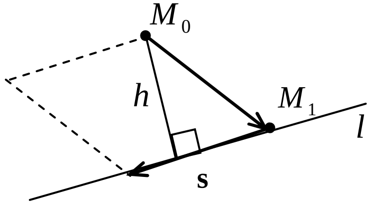
Две данные прямые лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда три вектора $\mathbf{s_1}, \mathbf{s_2}, \overline{M_1M_2}$ компланарны, т.е. их смешанное произведение равно нулю.

Получаем условие

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (8.9)$$

8. *Расстояние* h *от точки* $M_0(x_0; y_0; z_0)$ *до прямой* l, *заданной уравнением* $\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$ вычисляется по формуле

$$h = \frac{\textit{площадь параллелограмма}}{\textit{длина его основания}} = \frac{\left|\overline{M_0M_1} \times \mathbf{s}\right|}{|\mathbf{s}|} \qquad (8.10).$$



В координатах это выглядит так

$$h=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ n & p \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & z_1-z_0 \\ m & p \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

Задача Уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x-y+3z-1=0, \\ 5x+4y-z-7=0; \end{cases}$$

привести к каноническому виду.

Решение

►<u>1 способ.</u> Исключив сначала y, а затем z, имеем

$$\begin{cases} 13x+11z-11=0, \\ 17x+11y-22=0. \end{cases}$$

Если разрешить каждое из уравнений относительно x, то получим

$$x=\frac{11(y-2)}{-17}=\frac{11(z-1)}{-13}, \text{ т.е. } \frac{x}{-11}=\frac{y-2}{17}=\frac{z-1}{13}.$$

<u>2 способ.</u> Найдем вектор $\mathbf{s}\{m;n;\mathrm{p}\}$, параллельный искомой прямой. Так как он должен быть перпендикулярен нормальным векторам $\mathbf{n_1}\{2;-1;3\}$ и $\mathbf{n_2}\{5;4;-1\}$ заданных плоскостей, то за $\mathbf{s}$ можно принять векторное произведение векторов $\mathbf{n_1}$ и $\mathbf{n_2}$:

$$\mathbf{s}=\mathbf{n_1}\times\mathbf{n_2}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & -1 & 3\\ 5 & 4 & -1\end{vmatrix}=-11\mathbf{i}+17\mathbf{j}+13\mathbf{k}$$

Таким образом, $\mathbf{s}\{-11;17;13\}$.

В качестве точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$, через которую проходит искомая прямая, можно взять точку пересечения ее с любой из координатных плоскостей, например с плоскостью yOz. Так как при этом $x_0=0$, то координаты y_0 и z_0 этой точки определятся из системы уравнений заданных плоскостей, если в них положить $x=0$:

$$\begin{cases}-y+3z-1=0,\\ 4y-z-7=0.\end{cases}$$

Решая эту систему, находим $y_0=2$, $z_0=1$. Итак (по формуле (8.3)), искомая прямая определяется уравнениями $\dfrac{x}{-11}=\dfrac{y-2}{17}=\dfrac{z-1}{13}$.

Замечание. В качестве точки M_0 может быть выбрана любая точка на прямой, что немного изменит вид получаемых канонических уравнений◄.

Задача. Дана плоскость $x + y - 2z - 6 = 0$ и вне ее точка $M(1;1;1)$. Найти точку N, симметричную точке M относительно данной плоскости.

Решение

► Запишем уравнения произвольной прямой (см. (8.3)), проходящей через точку M: $\dfrac{x-1}{l} = \dfrac{y-1}{m} = \dfrac{z-1}{n}$. Координаты $\{m; n; p\}$ направляющего вектора прямой, перпендикулярной плоскости, можно заменить координатами нормального вектора $\mathbf{n}\{1;1;-2\}$ данной плоскости. Тогда уравнения этой прямой запишутся в виде $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{-2}$.

Найдем проекцию точки M на данную плоскость, решив систему

$$\begin{cases} x + y - 2z - 6 = 0, \\ \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{-2}. \end{cases}$$

Перепишем уравнения прямой в параметрическом виде (8.2): $x = t + 1$, $y = t + 1$, $z = -2t + 1$. Подставляя эти выражения для x, y и z в уравнение плоскости, найдем $t = 1$, откуда $x = 2$, $y = 2$, $z = -1$.

Координаты симметричной точки найдутся из формул (1.7): $\bar{x} = \dfrac{x_M + x_N}{2}$, $\bar{y} = \dfrac{y_M + y_N}{2}$, $\bar{z} = \dfrac{z_M + z_N}{2}$, т.е. $2 = \dfrac{1 + x_N}{2}$,

$2=\dfrac{1+y_N}{2}$, $-1=\dfrac{1+z_N}{2}$, откуда $x_N=3$, $y_N=3$, $z_N=-3$. Следовательно, $N(3;3;-3)$.◄

Задача. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{3}$ и точку $M(3;4;0)$.

Решение

► Очевидно, что точка $N(2;3;-1)$ принадлежит данной прямой, а, следовательно, искомой плоскости. В качестве нормального вектора $\mathbf{n}$ искомой плоскости можно взять векторное произведение направляющего вектора $\mathbf{s}\{1;2;3\}$ данной прямой и вектора $\overline{NM}\{1;1;1\}$:

$$\mathbf{n}=\mathbf{s}\times\overline{MN}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}.$$

Напишем уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3;4;0)$, перпендикулярно вектору $\mathbf{n}\{-1;2;-1\}$ (см. 7.5), которое и будет искомым:

$-(x-3)+2\cdot(y-4)-(z-0)=0$, т.е. $x-2y+z+5=0$.◄

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить расстояние между точками $A(3;8)$ и $B(-5;14)$.
2. Показать, что треугольник с вершинами $A(4;3)$, $B(7;6)$ и $C(2;11)$ - прямоугольный.
3. Показать, что треугольник с вершинами $A(2;-1)$, $B(4;2)$ и $C(5;1)$ - равнобедренный.
4. Даны вершины треугольника: $A(-1;-1)$, $B(0;-6)$ и $C(-10;-2)$. Найти длину медианы, проведенной из вершины A.
5. Известны точки $A(-2;5)$, $B(4;17)$ - концы отрезка AB. На этом отрезке находится точка C, расстояние которой от A в два раза больше расстояния от B. Определить координаты точки C.
6. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(11;4)$, $B(-1;-1)$, $C(5;7)$. Определить координаты четвертой вершины.
7. Даны вершины треугольника: $A(7;2)$, $B(1;9)$, $C(-8;-11)$. Найти расстояния от точки пересечения медиан до вершин треугольника.
8. Точки $L(0;0)$, $M(3;0)$ и $N(0;4)$ являются серединами сторон треугольника ABC. Вычислить площадь треугольника ABC.
9. Даны точки $M_1(2;4;-2)$ и $M_2(-2;4;2)$. На прямой M_1M_2 найти точку M, делящую отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = 3$.
10. Дан треугольник ABC с вершинами $A(1;2;3)$, $B(7;10;3)$, $C(-1;3;1)$. Показать, что угол A - тупой.
11. В каком отношении точка M, равноудаленная от точек $A(3;1;4)$ и $B(-4;5;3)$ разделит отрезок оси Oy от начала координат до точки $C(0;6;0)$?

12. На оси Oz найти точку, равноудаленную от точек $M_1(2;4;1)$ и $M_2(-3;2;5)$.

13. На плоскости xOy найти точку, равноудаленную от точек $A(1;-1;5)$, $B(3;4;4)$ и $C(4;6;1)$.

14. Даны неколлинеарные векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Построить векторы $2\mathbf{a}+3\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{a}-\mathbf{b}+2\mathbf{c}$.

15. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ неколлинеарные векторы. Выяснить, коллинеарны ли следующие пары векторов:

а). $\mathbf{p_1}=\mathbf{a}-2\sqrt{3}\mathbf{b}$, $\mathbf{p}_2=\sqrt{3}\mathbf{a}-6\mathbf{b}$;

б). $\mathbf{p_1}=7\mathbf{a}$, $\mathbf{p}_2=3\sqrt{5}\mathbf{a}$;

в). $\mathbf{p_1}=2\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{p}_2=\mathbf{a}+2\mathbf{b}$;

г). $\mathbf{p_1}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{p}_2=\mathbf{a}-\mathbf{b}$.

16. Пусть AD, BE и CF - медианы треугольника ABC. Доказать, что $\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CF}=\overline{0}$.

17. Дано: $\overline{AB}=\mathbf{a}+2\mathbf{b}$, $\overline{BC}=-4\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\overline{CD}=-5\mathbf{a}-3\mathbf{b}$. Доказать, что $ABCD$ - трапеция.

18. В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Доказать, что $\overline{SA}+\overline{SC}=\overline{SB}+\overline{SD}$.

19. В треугольнике ABC $\overline{AB}=\mathbf{a}$, $\overline{AC}=\mathbf{b}$. O - точка пересечения медиан. Выразить вектор $\overline{AO}$ через векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

20. Точки M и K - середины сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. $\overline{AM}=\mathbf{a}$, $\overline{AK}=\mathbf{b}$. Выразить вектор $\overline{AC}$ через векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

21. В трапеции $ABCD$ основание AD в два раза больше основания BC, $\overline{AB}=\mathbf{a}$, $\overline{BC}=\mathbf{b}$. Выразить векторы $\overline{CD}$ и $\overline{DB}$ через векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

22. В параллелограмме $ABCD$ $\overline{AB}=\mathbf{a}$, $\overline{AD}=\mathbf{b}$. Выразить $\overline{AK}$ и $\overline{MK}$ через векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, если точка K делит отрезок CD в отношении 1:2, а точка M - середина BC.

23. Даны векторы $\mathbf{a}\{3;-2;6\}$ и $\mathbf{b}\{-2;2;0\}$. Определить координаты и длины следующих векторов: а). $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, б). $\mathbf{a}-\mathbf{b}$, в). $2\mathbf{a}-\frac{1}{2}\mathbf{b}$.

24. Даны точки $A(4;2;5)$, $B(0;7;2)$, $C(1,5,0)$. Найти координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $1/2\overline{AB}-3\overline{AC}$.

25. Проверить коллинеарность векторов:

а). $\mathbf{a}\{3;2;2\}$, $\mathbf{b}\{6;4;4\}$;

б). $\mathbf{a}\{3;0;4\}$, $\mathbf{b}\{6;0;8\}$;

в). $\mathbf{a}\{1;0;0\}$, $\mathbf{b}\{0;1;2\}$.

26. При каких α и β векторы $\mathbf{a}=-2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\beta\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}=\alpha\mathbf{i}-6\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ будут коллинеарны?

27. Определить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$ и $\mathbf{b}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

28. Дан вектор $\overline{AB}\{5;-4\}$. Зная координаты точки $A(-2;3)$, найти координаты точки B.

29. Найти единичный вектор $\mathbf{a}$, параллельный вектору $\mathbf{b}\{-4;3\}$.

30. Проверить, что точки $A(3;-1)$, $B(1;2)$, $C(-1;1)$ и $D(3;-5)$ являются вершинами трапеции.

31. Показать, что точки $A(1;1)$, $B(-1;7)$ и $C(0;4)$ лежат на одной прямой.

32. Найти разложение вектора $\mathbf{z}\{10;-1\}$ по векторам $\mathbf{x}\{-2;5\}$ и $\mathbf{y}\{4;2\}$.

33. Точка B делит дугу окружности $AC=90^0$ в отношении $AB:BC=2:1$, O - центр окружности. Представить вектор $\overline{OA}=\mathbf{a}$ как линейную комбинацию векторов $\overline{OC}=\mathbf{c}$ и $\overline{OB}=\mathbf{b}$.

34. В прямоугольнике $ABCD$ точка M середина стороны $BC=4$, а точка N - середина стороны $CD=6$. Представить вектор $\overline{AC}$ как линейную комбинацию векторов $\overline{AM}=\mathbf{a}$ и $\overline{AN}=\mathbf{b}$.

35. Вектор $\overline{OM}=\mathbf{r}$ составляет с осями координат равные острые углы. Определить эти углы и построить вектор $\mathbf{r}$, если его длина равна $2\sqrt{3}$.

36. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(1;-2;3)$, $B(3;2;1)$ и $C(6;4;4)$. Найти его четвертую вершину.

37. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ образуют угол $\varphi=\pi/3$, $|\mathbf{a}|=3$, $|\mathbf{b}|=4$. Вычислить $(3\mathbf{a}-2\mathbf{b})(\mathbf{a}+2\mathbf{b})$.

38. Найти угол между векторами $\mathbf{a}=3\mathbf{m}-2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}=\mathbf{m}+\mathbf{n}$, если $|\mathbf{m}|=2$, $|\mathbf{n}|=1$, угол φ между векторами $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ равен 60^0.

39. Найти $\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$, если $\mathbf{a}=\mathbf{m}+3\mathbf{n}$, $\mathbf{b}=\mathbf{m}+4\mathbf{n}$, если $|\mathbf{m}|=2$, $|\mathbf{n}|=1$, угол φ между векторами $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ равен 120^0.

40. Даны векторы $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=6\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$. Найти $\text{пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ и $\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$.

41. Определить угол между векторами $\mathbf{a}\{2;-4;4\}$ и $\mathbf{b}\{-3;2;6\}$.

42. Могут ли векторы $\mathbf{a}\{x;2;5\}$ и $\mathbf{b}\{x;x;3\}$ быть перпендикулярными при каком-либо значении x.

43. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}$ и $\mathbf{b}=2\mathbf{j}-\mathbf{k}$.

44. Из вершины прямоугольника со сторонами 6 и 8 проведены прямые, делящие противоположные стороны пополам. Найти угол между этими прямыми.

45. При каком значении n векторы $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+n\mathbf{j}+\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ перпендикулярны?

46. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$, если известно, что он перпендикулярен векторам $\mathbf{a}\{4;-2;-3\}$ и $\mathbf{b}\{0;1;3\}$, образует с осью Oy тупой угол и $|\mathbf{x}|=26$.

47. В плоскости xOy найти вектор $\mathbf{p}$ перпендикулярный вектору $\mathbf{q}\{-3;4;-5\}$ и имеющий с ним одинаковую длину.

48. Найти скалярное произведение векторов $2\mathbf{a}+3\mathbf{b}+4\mathbf{c}$ и $5\mathbf{a}+6\mathbf{b}+7\mathbf{c}$, если $|\mathbf{a}|=1$, $|\mathbf{b}|=2$, $|\mathbf{c}|=3$, а $\left(\mathbf{a},\hat{\ }\mathbf{b}\right)=\left(\mathbf{a},\hat{\ }\mathbf{c}\right)=\left(\mathbf{c},\hat{\ }\mathbf{b}\right)=\dfrac{\pi}{3}$.

49. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

50. Векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ имеют равные длины и образуют попарно равные углы. Найти вектор $\mathbf{c}$, если $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$ и $\mathbf{b}=\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

51. Даны векторы $\overline{OA}=\mathbf{a}$ и $\overline{OB}=\mathbf{b}$, причем $|\mathbf{a}|=2$, $|\mathbf{b}|=4$, а $\left(\mathbf{a},\hat{\ }\mathbf{b}\right)=60^0$. Определить угол между медианой $\overline{OM}$ треугольника AOB и стороной $\overline{OA}$.

52. В равнобедренной трапеции $OACB$ M и N - середины сторон $BC=2$ и $AC=2$. Острый угол трапеции равен 60^0. Определить угол между векторами $\overline{OM}$ и $\overline{ON}$.

53. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ образуют угол $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$, $|\mathbf{a}|=6$, $|\mathbf{b}|=5$. Вычислить $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$.

54. Найти векторное произведение векторов $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+5\mathbf{j}+\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$.

55. Раскрыть скобки и упростить выражения:

1). $\mathbf{i}\times(\mathbf{j}+\mathbf{k})-\mathbf{j}\times(\mathbf{i}+\mathbf{k})+\mathbf{k}\times(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$;

2). $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})\times\mathbf{c}+(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})\times\mathbf{b}+(\mathbf{b}-\mathbf{c})\times\mathbf{a}$;

3). $(2\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a})+(\mathbf{b}+\mathbf{c})\times(\mathbf{a}+\mathbf{b})$;

4). $2\mathbf{i}\cdot(\mathbf{j}\times\mathbf{k})+3\mathbf{j}\cdot(\mathbf{i}\times\mathbf{k})+4\mathbf{k}\cdot(\mathbf{i}\times\mathbf{j})$.

56. Построить параллелограмм на векторах $\mathbf{a}=2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{k}$. Вычислить его площадь.

57. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}=\mathbf{m}+2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}=2\mathbf{m}+\mathbf{n}$, где $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ - единичные векторы, образующие угол 30^0.

58. Вершины треугольника точки $A(1;0;0)$, $B(2;1;3)$, $C(0;1;2)$. Вычислить площадь треугольника ABC и длину высоты, опущенной из вершины B.

59. Найти площадь параллелограмма, диагоналями которого служат векторы $2\mathbf{m}-\mathbf{n}$ и $4\mathbf{m}-5\mathbf{n}$, где $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ - единичные векторы, образующие угол 45^0.

60. Вектор $\mathbf{c}$ перпендикулярен к векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, угол между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равен 30^0, $|\mathbf{a}|=6$, $|b|=3$, $|c|=3$. Вычислить $(\mathbf{abc})$.

61. Показать, что

1). $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot[(\mathbf{a}+\mathbf{c})\times\mathbf{b}]=-\mathbf{abc}$;

2). $(\mathbf{a}+2\mathbf{b}-\mathbf{c})\cdot[(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c})]=3\mathbf{abc}$;

3). $(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{b}+\mathbf{c})(\mathbf{c}+\mathbf{a})=2\mathbf{abc}$.

62. Даны три вектора $\mathbf{a}\{1;-1;3\}$, $\mathbf{b}\{-2;2;1\}$, $\mathbf{c}\{3;-2;5\}$. Вычислить $\mathbf{abc}$.

63. Установить компланарны ли векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, если:

а). $\mathbf{a}\{2;3;-1\}$, $\mathbf{b}\{1;-1;3\}$, $\mathbf{c}\{1;9;-11\}$;

б). $\mathbf{a}\{3;-2;1\}$, $\mathbf{b}\{2;1;2\}$, $\mathbf{c}\{3;-1;-2\}$;

в). $\mathbf{a}\{2;-1;2\}$, $\mathbf{b}\{1;2;-3\}$, $\mathbf{c}\{3;-4;7\}$.

64. Доказать, что четыре точки $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$ и $D(2;1;3)$ лежат в одной плоскости.

65. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$ и $D(4;1;3)$. Построить тетраэдр.

66. Даны вершины треугольной пирамиды $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$. Вычислить ее объем и площадь грани ABC. Найти длину ее высоты h, опущенной из вершины D.

67. Построить параллелепипед на векторах $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ и вычислить его объем.

68. Найти объем тетраэдра, построенного на векторах $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$, если эти векторы направлены по биссектрисам координатных углов и длина каждого вектора равна 2.

69. Показать, что объем параллелепипеда, построенного на диагоналях граней данного параллелепипеда, равен удвоенному объему данного параллелепипеда.

70. Доказать, что для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ векторы $\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{b}-\mathbf{c}$ и $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ компланарны.

71. Вычислить объем параллелепипеда $OABCO_1A_1B_1C_1$, в котором даны три вершины нижнего основания $O(0;0;0)$, $A(2;-3;0)$ и $C(3;2;0)$ и вершина верхнего основания $B_1(3;0;4)$, лежащая на боковом ребре BB_1, противоположном ребру OO_1.

72. При каких значениях a прямая $(a+2)x+(a^2-9)y+3a^2-8a+5=0$ а). параллельна оси абсцисс; б). параллельна оси ординат; в). проходит через начало координат.

73. Принадлежат ли точки $A(3;1)$, $B(0;4)$ прямой $2x-3y-3=0$.

74. Найти точку пересечения прямых $3x-4y-29=0$ и $2x+5y+19=0$.

75. Определить точки пересечения прямых $3x-4y-12=0$, $4x+3y+12=0$, $3x+5y-15=0$ с осями координат. Построить эти прямые.

76. Построить области, координаты точек которых удовлетворяют неравенствам:

а). $y<2-x$, $x>-2$, $y>-2$;

б). $y>2-x$, $x<4$, $y<0$;

в). $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}\le 1$, $y\ge x+2$, $x>-4$.

77. Определить угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый на оси Oy для прямых: а). $5x+2y-10=0$; б). $5x+2y-20=0$; в). $2x-5y+10=0$; г). $3x+2y=0$; д). $y=4$.

78. Даны прямые $2x+y+3=0$, $y=x$, $x=5$, $y=2$. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(2;3)$ и 1). параллельных данным прямым; 2). перпендикулярных данным прямым.

79. Определить угол между прямыми

а). $5x - y + 10 = 0$, $3x + y = 0$;

б). $2x + 3y + 4 = 0$, $4x + 6y - 7 = 0$;

в). $3x + 4y + 5 = 0$, $4x - 3y + 10 = 0$.

80. Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(2;1)$ под углом 45^0 к данной прямой.

81. Найти проекцию точки $P(-6;4)$ на прямую $4x - 5y + 3 = 0$.

82. Найти точку Q, симметричную точке $P(-5;13)$ относительно прямой $2x - 3y - 3 = 0$.

83. $3x - 4y + 5 = 0$ - уравнение стороны прямоугольника. Точки $A(1;-3)$, $B(1;2)$ - его вершины. Написать уравнения других сторон прямоугольника.

84. Даны вершины треугольника $A(1;-1)$, $B(-2;1)$, $C(3;5)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A на медиану, проведенную из вершины B.

85. Вычислить площадь треугольника, отсекаемого прямой $5x - 3y + 15 = 0$ от координатного угла.

86. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $C(8;6)$ и отсекающей от координатного угла треугольник площадью $S = 12$.

87. На оси абсцисс найти точку, расстояние которой от прямой $8x + 15y + 10 = 0$ равно 1.

88. Точка $A(2;-5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x - 2y - 7 = 0$. Вычислить площадь квадрата.

89. Две стороны квадрата лежат на прямых $5x - 12y - 65 = 0$, $5x - 12y + 26 = 0$. Вычислить его площадь.

90. Найти центр пучка прямых, заданного уравнением $\alpha(2x + 3y - 1) + \beta(x - 2y - 4) = 0$.

91. Найти уравнение прямой, принадлежащей пучку прямых $\alpha(x + 2y - 5) + \beta(3x - 2y + 1) = 0$: а). проходящей через точку $A(3;-1)$; б). проходящей через начало координат; в). параллельной оси Ox; г). параллельной оси Oy; д). параллельной прямой $4x + 3y + 5 = 0$; е). перпендикулярной прямой $2x + 3y + 7 = 0$.

92. Написать уравнения биссектрис углов между прямыми $2x + 3y - 10 = 0$, $3x + 2y - 10 = 0$.

93. Составить уравнение прямой, проходящей посередине между параллельными прямыми $2x - y + 3 = 0$ и $2x - y - 9 = 0$.

94. Дан треугольник с вершинами $A(-2;0)$, $B(2;4)$ и $C(4;0)$. Написать уравнения сторон треугольника, медианы AE, высоты AD и найти длину медианы AE и высоты AD.

95. Найти внутренние углы треугольника, стороны которого заданы уравнениями $x + 2y = 0$, $x + 4y - 6 = 0$, $x - 4y - 6 = 0$.

Указание. Чтобы найти внутренние углы треугольника, нужно угловые коэффициенты сторон выписать в порядке убывания $k_1 > k_2 > k_3$, а затем вычислить тангенсы углов по формулам

$$\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}, \quad \frac{k_2 - k_3}{1 + k_2 k_3}, \quad \frac{k_3 - k_1}{1 + k_1 k_3}.$$

96. Через точку $P(2;0)$ провести прямую так, чтобы ее отрезок, заключенный между прямыми $3x+7y+5=0$ и $x+5y-11=0$, делился в точке P пополам.

97. Луч света направлен по прямой $x-2y+5=0$. Дойдя до прямой $3x-2y+7=0$, луч от нее отражается. Составить уравнение прямой, на которой лежит отраженный луч.

98. Даны точки $A(-2;0)$, $B(0;6)$. Через середину отрезка AB провести прямую, отсекающую на оси абсцисс отрезок, вдвое больший, чем на оси ординат.

99. Даны точки $A(-2;0)$ и $B(2;-2)$. На отрезке OA построен параллелограмм $OACD$, диагонали которого пересекаются в точке B. Написать уравнения сторон, диагоналей параллелограмма и найти угол CAD.

100. Даны уравнения боковых сторон равнобедренного треугольника $3x+y=0$ и $x-3y=0$ и точка $(5;0)$, на его основании. Найти периметр и площадь треугольника.

101. Найти вершины прямоугольного равнобедренного треугольника, если дана вершина прямого угла $C(3;-1)$ и уравнение гипотенузы $3x-y+2=0$.

102. Даны две вершины треугольника $A(-4;3)$ и $B(4;-1)$ и точка пересечения высот $M(3;3)$ Найти третью вершину C.

103. Вычислить координаты вершин ромба, если известны уравнения двух его сторон: $x+2y=4$, $x+2y=10$, и уравнение одной из его диагоналей: $y=x+2$.

104. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;1;-1)$ и имеющей нормальный вектор $\mathbf{n}\{1;-2;3\}$. Построить плоскость.

105. Даны две точки $M_1(3;-1;2)$ и $M_2(4;-2;-1)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$.

106. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(3;4;-5)$ параллельно двум векторам $\mathbf{a}\{3;1;-1\}$ и $\mathbf{b}\{1;-2;1\}$.

107. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;-1;3)$ и $M_2(3;1;2)$, параллельно вектору $\mathbf{a}\{3;-1;4\}$.

108. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(1;4;2)$, $M_2(3;0;-1)$ и $M_3(-2;1;1)$.

109. Определить при каком значении k плоскости, заданные уравнениями $3x-5y+kz-3=0$ и $x+3y+2z+5=0$, перпендикулярны.

110. Определить при каких значениях k и m плоскости $2x+ky+3z-5=0$ и $mx-6y-6z+2=0$ параллельны.

111. Определить острый угол между плоскостями, заданными уравнениями $x+2y+2z-3=0$ и $16x+12y-15z-1=0$.

112. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3;-2;-7)$ параллельно плоскости $2x-3z+5=0$.

113. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;-1;1)$ перпендикулярно двум плоскостям $2x-z+1=0$ и $y=0$.

114. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;2;1)$, если эта плоскость 1). параллельна: а). xOy; б). xOz; в). yOz; 2). проходит через: а). ось Ox; б). ось Oy; в). ось Oz.

115. Дано уравнение плоскости $x+3y-5z-15=0$. Найти объем пирамиды, ограниченной этой плоскостью и координатными плоскостями.

116. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(4;3;2)$ и отсекающей на координатных осях отрезки равной длины.

117. Найти расстояние от точки $M(-2;-4;3)$ до плоскости $2x-y+2z+3=0$.

118. Найти расстояние между параллельными плоскостями $x-2y-2z-12=0$ и $x-2y-2z-6=0$.

119. Две грани куба лежат на плоскостях $2x-2y+z-1=0$ и $2x-2y+z+5=0$. Вычислить объем этого куба.

120. На оси Ox найти точку, равноудаленную от двух плоскостей $12x-16y+15z+1=0$ и $2x+2y-z-1=0$.

121. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и составляющей угол 60^0 с плоскостью $y=x$.

122. Написать уравнения плоскостей, параллельных плоскости $2x+2y+z-8=0$ и удаленных от нее на расстояние $d=4$.

123. Написать уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $4x-y+3z-6=0$ и $x+5y-z+10=0$ и перпендикулярной к плоскости $2x-y+5z-5=0$.

124. Найти уравнение плоскости, точки которой одинаково удалены от точек $P(1;-4;2)$ и $Q(7;1;-5)$.

125. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку пересечения плоскостей $2x+2y+z-7=0$, $2x-y+3z-3=0$, $4x+5y-2z-12=0$ и через точки $M(0;3;0)$ и $N(1;1;1)$.

126. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $A(4;3;0)$ параллельно вектору $\mathbf{s}\{-1;1;1\}$

127. Написать параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A(3;-1;4)$ и $B(1;1;2)$.

128. Найти косинус угла между прямыми

$$\begin{cases} x-y+z-4=0, \\ 2x+y-2z+5=0; \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+y+z-4=0, \\ 2x+3y-z+6=0. \end{cases}$$

129. Доказать параллельность прямых $\begin{cases} x=2t+5, \\ y=-t+2, \\ z=t-7; \end{cases}$ и

$$\begin{cases} x+3y+z+2=0, \\ x-y-3z-2=0. \end{cases}$$

130. Доказать перпендикулярность прямых $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{3}$ и

$$\begin{cases} 3x+y-5z+1=0, \\ 2x+3y-8z+3=0. \end{cases}$$

131. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2;3;-5)$ перпендикулярно к плоскости $6x-3y-5z+2=0$.

132. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

а). $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{6}$, $2x+3y+z-1=0$;

б). $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{-5}$, $x-2y+z-15=0$;

в). $\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{2}$, $x+2y-2z+6=0$.

133. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;-1;-1)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+2}{4}$.

134. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;-2;1)$ перпендикулярно прямой $\begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ x+y-z+2=0. \end{cases}$

135. При каком значении m прямая $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{m}=\dfrac{z+3}{-2}$ параллельна плоскости $x-3y+6z+7=0$.

136. При каких значениях k и c прямая $\dfrac{x-2}{k}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-5}{-3}$ перпендикулярна к плоскости $3x-2y+cz+1=0$.

137. Найти проекцию точки $P(5;2;-1)$ на плоскость $2x-y+3z+23=0$.

138. Найти точку Q, симметричную точке $P(2;-5;7)$ относительно прямой, проходящей через точки $M_1(5;4;6)$ и $M_2(-2;-17;-8)$.

139. Вычислить расстояние d от точки $P(2;3;-1)$ до прямых:

а). $x=t+1$, $y=t+2$, $z=4t+13$, где $t\in\mathbf{R}$;

б). $\begin{cases} 2x-2y+z+3=0, \\ 3x-2y+2z+17=0. \end{cases}$

140. Доказать, что прямые $\begin{cases} 2x+2y-z-10=0, \\ x-y-z-22=0; \end{cases}$ и $\dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z-9}{4}$ параллельны и вычислить расстояние d между ними.

141. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;-2;1)$ и прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{-z+3}{2}$.

142. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}$ и $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}$.

143. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую, заданную уравнениями $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{2}$ перпендикулярно к плоскости $3x+2y-z-5=0$.

144. Найти кратчайшее расстояние между прямыми $x=-2y=z$, $x=y=2$.

145. В уравнениях прямой $\frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{n}$ определить параметр n так, чтобы эта прямая пересеклась с прямой $\frac{x+1}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z}{1}$, и найти точку их пересечения.

146. Через прямую $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{3}$ провести плоскость, параллельную прямой $\frac{x}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-3}$.

147. Найти уравнение проекции прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3}$ на плоскость $x+y+2z-5=0$.

148. Даны три последовательные вершины параллелограмма $ABCD$: $A(3;0;-1)$, $B(1;2;-4)$ и $C(0;7;-2)$. Найти уравнения сторон AD и CD.

149. Найти уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $(1;0;-1)$ на прямую $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-3}$.

Ответы

1. 10. **4.** 5. **5.** $C(2;13)$. **6.** $D(17;12)$. **7.** $\sqrt{53}$, $\sqrt{82}$, $\sqrt{185}$. **8.** 24. **9.** $M(-1;4;1)$. **11.** пополам. **12.** $M(0;0;17/8)$. **13.** $(16;-5;0)$. **15.** а), б) коллинеарны; с), д). неколлинеарны. **19.** $1/3(\mathbf{a}+\mathbf{b})$. **20.** $2/3(\mathbf{a}+\mathbf{b})$. **21.** $\mathbf{b}-\mathbf{a}$, $\mathbf{a}-2\mathbf{b}$. **22.** $\dfrac{2}{3}\mathbf{a}+\mathbf{b}$; $-\dfrac{1}{3}\mathbf{a}+\dfrac{1}{2}\mathbf{b}$. **23.** а). $\{1,0,6\}$, $\sqrt{37}$; б). $\{5;-4;6\}$, $\sqrt{77}$; в). $\{7;-5;12\}$, $\sqrt{218}$. **24.** $\overline{AB}\{-4;5;-3\}$, $\overline{AC}\{-3,3,-5\}$, $\left(1/2\overline{AB}-3\overline{AC}\right)\{7;-6,5;13,5\}$. **25.** а), б). коллинеарны; в) не коллинеарны. **26.** $\alpha=4$, $\beta=-1$. **27.** $\sqrt{14}$, $3\sqrt{2}$. **28.** $B\{3;-1\}$. **29.** $\mathbf{a}\{-4/5;3/5\}$. **32.** $\mathbf{z}=-\mathbf{x}+2\mathbf{y}$. **33.** $\mathbf{a}=2\mathbf{b}-\sqrt{3}\mathbf{c}$. **34.** $2/3\mathbf{a}+2/3\mathbf{b}$. **35.** $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

36. $D(4;0;6)$. **37.** -13. **38.** $\arccos\dfrac{11}{14}$. **39.** $3\sqrt{3}/2$. **40.** 20/3 и 20/7.

41. $\arccos 5/21$. **42.** не могут. **43.** 90^0. **44.** $\arccos\dfrac{25}{\sqrt{949}}$. **45.** -1.

46. $\mathbf{x}\{-6;-24;8\}$. **47.** $\pm\sqrt{2}\{4;3;0\}$. **48.** 547. **49.** $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{11}}\right)(\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k})$. **50.** $\mathbf{c}=\mathbf{i}+\mathbf{k}$ или $\mathbf{c}=\dfrac{1}{3}(-\mathbf{i}+4\mathbf{j}-\mathbf{k})$. **51.** $\arccos\dfrac{2}{\sqrt{7}}$. **52.** $\arccos\dfrac{17}{2\sqrt{91}}$. **53.** 15. **54.** $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-17\mathbf{i}+7\mathbf{j}-\mathbf{k}$.

55. 1). $2(\mathbf{k}-\mathbf{i})$; 2). $2\mathbf{a}\times\mathbf{c}$; 3). $\mathbf{a}\times\mathbf{c}$; 4). 3. **56.** 3. **57.** 1,5. **58.** $\dfrac{\sqrt{30}}{2}$,

$\sqrt{5}$. **59.** $1{,}5\sqrt{2}$. **60.** 27. **62.** -7. **63.** а).,в). да; б). нет. **65.** 3. **66.** $V=154/3$, $S=14$, $h=11$. **67.** 51. **68.** $2\sqrt{2}/3$. **71.** 52. **72.** а). –2; б). ± 3; в). 1;5/3. **73.** A принадлежит, B не принадлежит. **74.** $(3;-5)$. **77.** а). $k=-5/2; b=5$; б). $k=-5/2; b=10$; в). $k=2/5; b=2$; г). $k=-3/2; b=0$; д). $k=0; b=4$. **78.** 1). $2x+y-7=0$; $x-y+1=0$; $x=2$; $y=3$; 2). $x-2y+4=0$; $x+y-5=0$; $y=3$; $x=2$. **79.** а). $arctg(4/7)$; б). 0^0; в). 90^0. :**80.** $5x+y-11=0$, $x-5y+3=0$. **81.** $(-2;-1)$. **82.** $(11;-11)$. **83.** $4x+3y-10=0$; $4x+3y+5=0$; $3x-4y-15=0$. **84.** $4x+y-3=0$. **85.** 7,5. **86.** $3x-2y-12=0$, $3x-8y+24=0$.**87.** $(7/8;0)$ и $(-27/8;0)$. **88**. 5. **89.** 49. **90.** $(2;-1)$. **91.** а). $3x+2y-7=0$; б). $2x-y=0$; в). $y=2$; г). $x=1$; д). $4x+3y-10=0$; г). $3x-2y+1=0$. **92.** $x=y$ и $x+y-4=0$. **93.** $2x-y-3=0$. **94.** $AE: 2x-5y+4=0$, $AD: x-2y+2=0$, $AE=\sqrt{29}$, $AD=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$. **95.** $28{,}1^0$, $12{,}5^0$ и $139{,}4^0$. **96.** $2x+y-4=0$. **97.** $29x-2y+33=0$. **98.** $x+2y-5=0$ и $x-2y+7=0$. **99.** $y=0$, $2x+3y+4=0$, $y=-4$, $2x+3y=0$, $x+2y+2=0$, $y=-x$, $\alpha=arctg1/8$. **100.** $4\left(\sqrt{10}+\sqrt{5}\right)$, 20. **101.** $\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{19}{5}\right)$, $\left(-\dfrac{9}{5};-\dfrac{17}{5}\right)$. **102.** $C(4;5)$. **103.** $(0;2)$, $(4;0)$, $(2;4)$, $(-2;6)$. **104.** $x-2y+3z+3=0$. **105.** $x-y-3x+2=0$. **106.** $x+4y+7z+16=0$. **107.** $x-y-z=0$. **108.** $5x-11y+18z+3=0$. **109.** $k=6$. **110.** $k=3, m=-4$. **111.** $\arccos\dfrac{2}{15}$. **112.** $2x-3z-27=0$. **113.** $x+2z-4=0$. **114.** 1).

а). $z=1$; б). $y=2$; в). $x=1$; 2). а). $y-2z=0$; б). $x-z=0$; в). $2x-y=0$. **115.** 37,5. **116.** $x+y+z-9=0$, $x-y-z+1=0$, $x-y+z-3=0$, $x+y-z-5=0$. **117.** 3. **118.** 2. **119.** 8. **120.** $(2;0;0)$ и $(11/43;0;0)$. **121.** $y=\pm z$. **122.** $2x+2y+z=20$ и $2x+2y+z+4=0$. **123.** $7x+14y+24=0$. **124.** $6x+5y-7z-27=0$. **125.** $x-z=0$. **126.** $\frac{x-4}{-1}=y-3=z$. **127.** $x=1+t$, $y=1-t$, $z=2+t$. **128.** 11/26. **131.** $\frac{x-2}{6}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z+5}{-5}$. **132.** а). $(2;-3;6)$; б). прямая параллельна плоскости; в). прямая принадлежит плоскости. **133.** $2x-3y+4z-1=0$. **134.** $x+2y+3z=0$. **135.** $m=-3$. **136.** $k=-6$, $c=3/2$. **137.** $(1;4;-7)$. **138.** $Q(4,1,-3)$. **139.** а). 6; б). 15. **140.** 25. **141.** $4x+6y+5z-1=0$. **142.** $6x-20y-11z+1=0$. **143.** $x-8y-13z+9=0$ **144.** $\frac{6}{\sqrt{5}}$. **145.** $n=1$, $M(2;-3;1)$. **146.** $x-y-z+4=0$. **147.** $\frac{x}{1}=\frac{y-5/3}{-1}=\frac{z-5/3}{0}$. **148.** $\frac{x-3}{-1}=\frac{y}{5}=\frac{z+1}{2}$, $\frac{x}{2}=\frac{y-7}{-2}=\frac{z+2}{3}$. **149.** $\frac{x-1}{5}=\frac{y}{-4}=\frac{z+1}{-1}$

Раздел 3. Введение в анализ

Тема 1. Функция

План

1. *Понятие множества*
2. *Определение функции*
3. *Способы задания функции*
4. *Основные характеристики функции*

Понятие множества

Множеством в математике называют совокупность объектов, объединенных по определенному признаку. Понятие множества принадлежит к числу первичных простейших математических понятий; оно не определяется, но может быть пояснено с помощью примеров.

Примерами множеств являются: множество точек данной линии, множество предприятий некоторой отрасли.

Объекты, составляющие данное множество, называются его элементами, или точками.

Обычно множества обозначают прописными буквами, а входящие в них элементы — строчными.

Задать множество можно перечислением его элементов или указав характеристическое свойство его элементов, т.е. такое свойство, которым обладают все элементы этого множества и только они.

Например, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ — множество, элементами которого являются числа 1, 2, 3, 4 и только они.

Если a есть элемент множества A, то это записывают так: $a \in A$; если a не является элементом множества A, то пишут $a \notin A$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается $\emptyset$.

Например, множество действительных корней уравнения $x^2 + 1 = 0$ есть пустое множество.

Множество называется конечным, если число его элементов конечно, и бесконечным, если число его элементов бесконечно.

Множество A называется подмножеством множества В, если каждый элемент множества A является в то же время элементом множества В. Это записывают так: $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$.

Пустое множество по определению является подмножеством любого множества.

Два множества называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов: $A = B$ означает, что одновременно $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{A}$.

Операции над множествами

Объединением двух множеств A и B называется множество C, которое состоит из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из данных множеств A и B. Объединение множеств записывают в виде $C = A \cup B$.

Пересечением двух множеств A и B называется множество D, которое состоит их всех элементов, одновременно принадлежащих каждому из данных A и B. Пересечение множеств записывают в виде $D = A \cap B$.

Разностью множеств A и B называется множество E, которое состоит их всех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B. Разность событий A и B записывают в виде $E = A\backslash B$.

Задача. Даны множества A={1;3;5;6;8} и B={2;4;6;8}. Найти объединение, пересечение и разность множеств A и B.

Решение

►Объединение двух данных множеств $C = A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8\}$. Пересечение $D = A \cap B = \{6; 8\}$, а разность $E = A\backslash B = \{1; 3; 5\}$.◄

В дальнейшем для сокращения записей мы будем использовать следующие логические символы:

$\forall$ - означает «для любого», «для всякого»;

$\exists$ - «существует», «найдется»;

: - «имеет место», «такое что»;

Например, запись $\forall x \in A{:}\, p$ означает: «для всякого таxиз множестваA имеет место предположение p».

Числовые множества

Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми*.

Примерами числовых множеств являются:

$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \dots; n; \dots\}$ – множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1; \pm 2; \dots; \pm n; \dots\}$ – множество целых чисел;

$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}: m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$ – множество рациональных чисел.

$\mathbb{R}$ – множество действительных (вещественных) чисел.

Отметим наиболее часто употребляемые числовые множества. Пусть a и b – действительные числа, причем $a < b$, тогда:.

отрезок $[a; b]$— это множество всех чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leq x \leq b$;

интервал $(a;\ b)$ — множество всех чисел, удовлетворяющих строгому неравенству $a\ < x\ <\ b;$

полуинтервалы $[a; b)$ и $(a; b]$ — числовые множества, характеризующиеся неравенствами соответственно $a \leq x < b$ и $a < x \leq b$;

Интервалы и полуинтервалы могут быть, в частности, бесконечными: $(-\infty; b]$,$(-\infty; b)$, $[a; +\infty)$, $(a; +\infty)$, $(-\infty; +\infty)$.

Все перечисленные множества принято объединять единым термином промежуток. Говоря «промежуток», мы имеем в виду либо отрезок, либо интервал, либо полуинтервал.

Окрестностью точки x_0 называется всякий интервал, содержащий эту точку x_0. Интервал $(x_0 - \varepsilon\ ; x_0 + \varepsilon)$ называется ε-окрестностью точки x_0.

Проколотой окрестностью точки x_0 называется любая окрестность точки x_0 , без точки x_0. В частности, интервал $(x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$, где $\delta > 0$, называется δ - ***окрестностью*** точки x_0.

Абсолютная величина действительного числа

Абсолютной величиной (или модулем) действительного числа x зазывается само число x, если x неотрицательно, и противоположное число $-x$, если x отрицательно:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Отметим свойства абсолютных величин:

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|,$$
$$|x - y| \geq |x| - |y|, \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Абсолютная величина разности двух чисел $|x - a|$ означает расстояние между точками x и aчисловой прямой как для случая $x < a$, так и $x > a$.

Определение функции

Постоянной величиной называется величина, сохраняющая одно и то же значение.

Переменной называется величина, которая может принимать различные числовые значения.

Пусть даны два непустых множества X и У. Если каждому значению переменной $x \in X$ ставится в соответс твие одно и только одно значение $y \in Y$, то величина y называется ***функцией*** величины x и обозначается $y = f(x)$.

При этом величина x называется ***независимой*** переменной (или ***аргументом),*** величина y – ***зависимой*** переменной (или ***функцией).***

Множество X называется ***областью определения*** функции f и обозначается $D(f)$.

Множество всех $y \in Y$ называется ***множеством значений*** функции f и обозначается $E(f)$.

Способы задания функции

Существуют три основных способа задания функции: аналитический, табличный, графический.

Аналитический способ. Этот способ состоит в задании связи между аргументом и функцией в виде формул. Отметим, что функция может определяться и набором формул – на разных промежутках области определения функции используются разные формулы.

Табличный способ. Функция задается таблицей, содержащей значения аргумента и соответствующих им значений функции. На практике часто приходится пользоваться таблицами значений функций, полученных опытным путем или в результате наблюдений.

Графический способ. Соответствие между аргументом и функцией задается посредством графика.

Часто графики строятся с помощью специальных пакетов математических программ. Значения функции y соответствующие тем или иным значениям аргумента x, непосредственно находятся из этого графика. Преимуществом графического задания является его наглядность, недостатком – его неточность.

Основные характеристики функции

Основными характеристиками функции являются: *область определения, область значений, четность и нечетность; периодичность; монотонность; ограниченность*.

Функция $y = f(x)$ называется ***четной,*** если для любых значений x из области определения справедливо соотно шение $f(-x) = f(x)$, и ***нечетной,*** если $f(-x) = -f(x)$. В противном случае функция $y = f(x)$ называется функцией общего вида.

Например, $y = \sqrt{1 + x^2}$, $y = \ln|x|$ - четные функции; $y = \sin x$, $y = x^3$ – нечетные функции; $y = x + 1$, $y = \sqrt{x}$ - функции общего вида.

Функция называется ***периодической,*** если существует такое число T, что для любого значения x, взятого из области определения, значения $x + T$ и $x - T$ также принадлежат области определения и выполняется равенство $f(x) = f(x + T)$. Число T называется ***периодом функции.***

Например, значение функции $y = \sin x$ не изменится, если к аргументу прибавлять любое число из множества $2\pi n$, где $n \in Z$. Наименьшее положительное из этих чисел 2π есть по определению – период функции.

Функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей (убывающей)*** на промежутке X, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции. Возрастающие и убывающие функции называются ***монотонными.***

Например, функция $y = 5^x$- монотонно возрастает на интервале $(-\infty; +\infty)$.

Функцию $f(x)$, определенную на множестве D, называют ограниченной на этом множестве, если $\exists\ M > 0$ такое, что $\forall\ x \in D\ |f(x)| \leq M$.

Например, для функции $y = \sin x$ выполняется следующее неравенство: $|\sin x| \leq 1$.

Тема 2. Элементарные функции

План

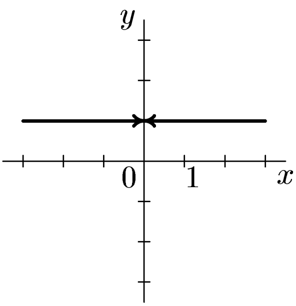
1.Основные элементарные функции
- *а) степенная функция*
- *б) показательная функция*
- *в) логарифмическая функция*
- *г) тригонометрические функции*
- *д) обратные тригонометрические функции*

2.Обратная функция
3.Сложная функция
4.Элементарная функция

Перечислим основные элементарные функции и кратко напомним их основные свойства:

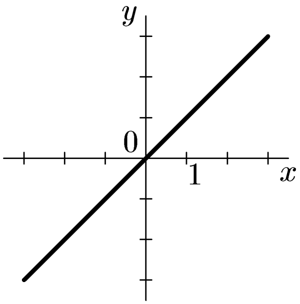
Степенная функция

Степенной функцией называется функция вида $y=x^n$.



$$y = x^0 = 1$$

1) $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0; +\infty)$;
2) $E(f) = \{1\}$;
3) четная: $(-x)^0 = x^0$;
4) постоянна на $D(f)$;
5) ограниченная;
6) непериодическая



$$y = x$$

1) $D(f) = (-\infty, +\infty)$;

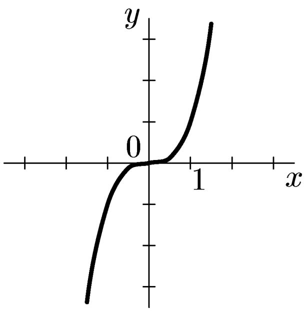
2) $E(f) = (-\infty; +\infty)$;

3) нечетная: $(-x)^1 = -x$;

4) возрастает на $D(f)$;

5) неограниченная;

6) непериодическая



$$y = x^n,$$

$n -$ нечетное натуральное число ≥ 3

1) $D(f) = (-\infty, +\infty)$;

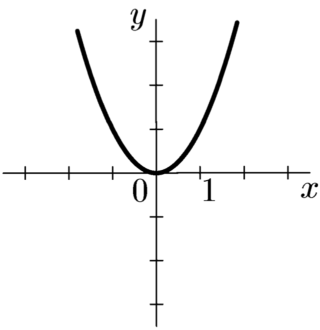
2) $E(f) = (-\infty; +\infty)$;

3) нечетная: $(-x)^n = -x^n$;

4) возрастает на $D(f)$;

5) неограниченная;

6) непериодическая



$$y = x^n,$$

$n -$ четное натуральное число

1) $D(f) = (-\infty, +\infty)$;

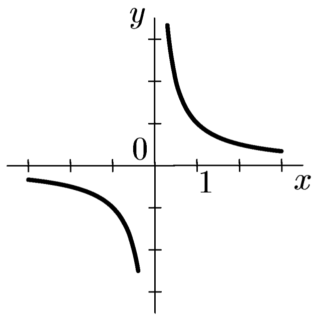
2) $E(f) = [0; +\infty)$;

3) четная: $(-x)^n = x^n$;

4) убывает на $(-\infty; 0)$ и возрастает на $[0; +\infty)$;

5) неограниченная;

6) непериодическая



$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n},$$

$n -$ нечетное натуральное число

1) $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0; +\infty)$;

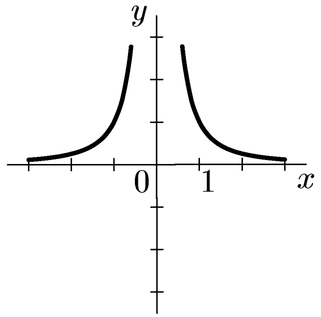
2) $E(f) = (-\infty, 0) \cup (0; +\infty)$;

3) нечетная: $(-x)^{-n} = -x^{-n}$;

4) убывает на $D(f)$;

5) неограниченная;

6) непериодическая



$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n},$$

$n -$ четное натуральное число

1) $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0; +\infty)$;

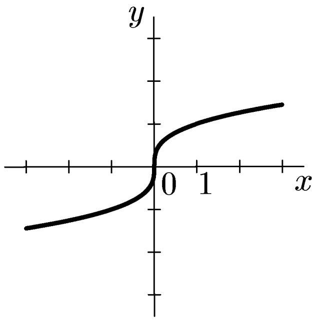
2) $E(f) = (-\infty, 0) \cup (0; +\infty)$;

3) четная: $(-x)^{-n} = x^{-n}$;

4) возрастает на $(-\infty; 0)$ и убывает на $[0; +\infty)$;

5) неограниченная;

6)непериодическая



$$y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}},$$

$n -$ нечетное натуральное число

1) $D(f) = (-\infty, +\infty)$;

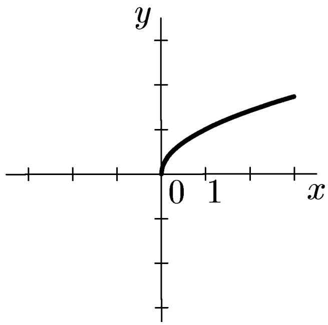
2) $E(f) = (-\infty, +\infty)$;

3)нечетная: $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$;

4) возрастает на $D(f)$;

5) неограниченная;

6) непериодическая



$$y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}},$$

$n -$ четное натуральное число

1) $D(f) = [0;+\infty)$;

2) $E(f) = [0;+\infty)$;

3) общего вида;

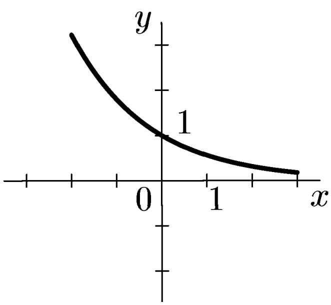
4) возрастает на $D(f)$;

5) неограниченная;

6)непериодическая

Показательная функция

Показательной функцией называется функция вида $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$.



$$y = a^x,\ 0 < a < 1,$$

1) $D(f) = (-\infty, +\infty)$;

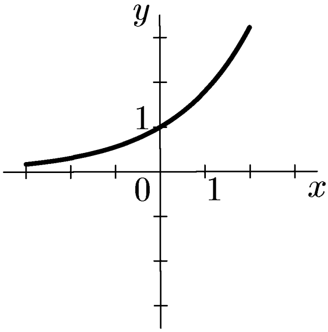
2) $E(f) = (0, +\infty)$;

3) общего вида;

4) убывает на $D(f)$;

5) неограниченная;

6) непериодическая

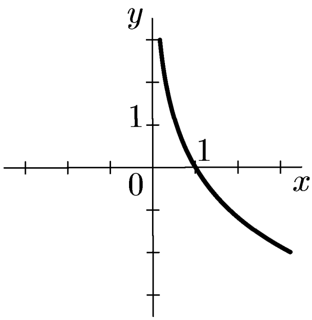


$y = a^x$, $a > 1$,

1) $D(f) = (-\infty, +\infty)$;
2) $E(f) = (0, +\infty)$;
3) общего вида;
4) возрастает на $D(f)$;
5) неограниченная;
6) непериодическая

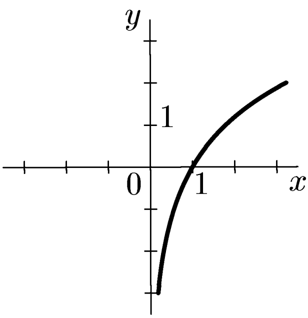
Логарифмическая функция

Логарифмической функцией называется функция вида $y = \log_a x\, (a > 0, a \neq 1)$



$y = \log_a x$, $0 < a < 1$

1) $D(f) = (0, +\infty)$;
2) $E(f) = (-\infty; +\infty)$;
3) общего вида;
4) убывает на $D(f)$;
5) неограниченная;
6) непериодическая

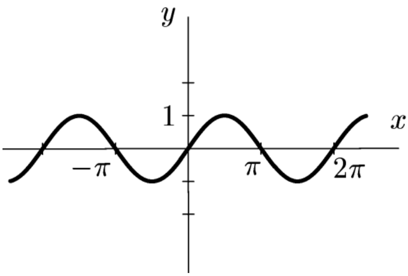


$y = \log_a x$, $a > 1$

1) $D(f) = (0, +\infty)$;
2) $E(f) = (-\infty; +\infty)$;
3) общего вида;
4) возрастает на $D(f)$;
5) неограниченная;
6) непериодическая

Тригонометрические функции

Тригонометрическими функциями называются функции $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=tg\ x$, $y=ctg\ x$.



$y=\sin x$

1) $D(f)=(-\infty,+\infty)$;

2) $E(f)=[-1;1]$;

3) нечетная:

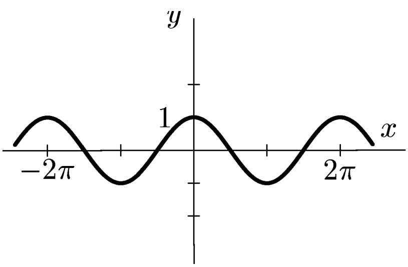
$$\sin(-x)=-\sin x;$$

4) возрастает на $\left[-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, \dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, убывает на $\left[\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, \dfrac{3\pi}{2}+2\pi n\right], n\in Z;$

5) ограниченная: $|\sin x|\le 1$;

6)периодическая:

$\sin(x+T)=\sin x,\ T=2\pi$



$y=\cos x$

1) $D(f)=(-\infty,+\infty)$;

2) $E(f)=[-1;1]$;

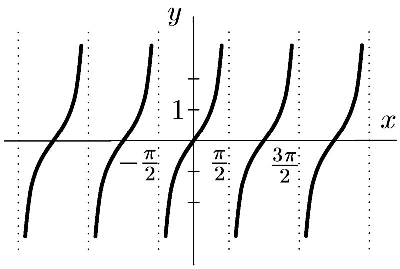
3) четная: $\cos(-x)=-\cos x$;

4)убывает на $[2\pi n, \pi+2\pi n]$, возрастает на $[-\pi+2\pi n, \pi+2\pi n], n\in Z$;

5) ограниченная: $|\cos x|\le 1$;

6)периодическая:

$\cos(x+T)=\cos x,\ T=2\pi$



$y = tgx$

1) $D(f) = \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n, \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right);$

2) $E(f) = (-\infty; +\infty);$

3) нечетная: $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}x;$

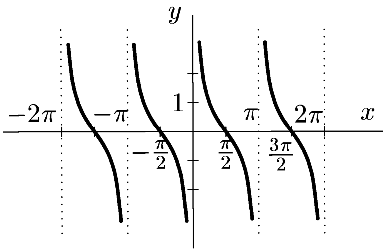
4) возрастает на

$\left[-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$;

5) неограниченная:

6)периодическая:

$\mathrm{tg}(x + T) = \mathrm{tg}x, T = \pi$



$y = \mathrm{ctg}x$

1) $D(f) = (\pi n, \pi + \pi n),\ n \in Z;$

2) $E(f) = (-\infty; +\infty);$

3) нечетная:

$\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}x$;

4)убывает на

$[\pi n, \pi + \pi n]$, $n \in Z$;

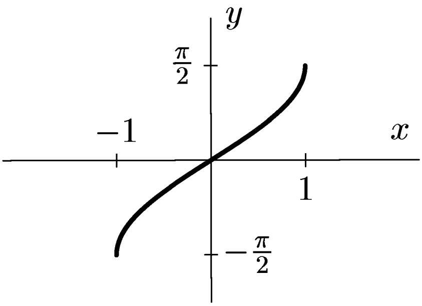
5) неограниченная:

6)периодическая:

$\mathrm{ctg}(x + T) = \mathrm{ctg}x, T = \pi$

Обратные тригонометрические функции

Обратными тригонометрическими функциями называются функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}x$, $y = \mathrm{arcctg}x$.



$y = \arcsin x$

1) $D(f) = [-1;1]$;

2) $E(f) = [-\pi/2; \pi/2]$;

3)нечетная:

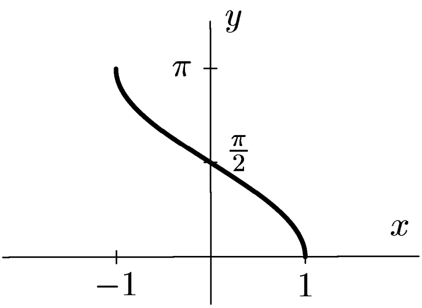
$\arcsin(-x) = -\arcsin x$;

4)возрастает на $D(f)$;

5)ограниченная:

$$|\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}$$

6)непериодическая



$y = \arccos x$

1) $D(f) = [-1;1]$;

2) $E(f) = [0; \pi]$;

3)общего вида:

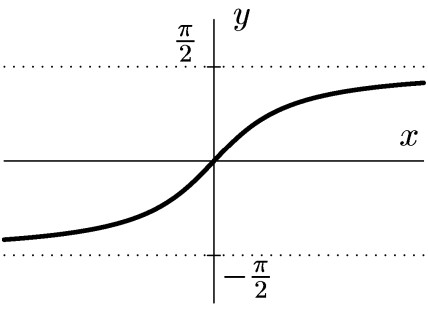
$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

4)убывает на $D(f)$;

5)ограниченная:

$$0 \leq \arccos x \leq \pi$$

6)непериодическая



$y = \mathrm{arctg} x$

1) $D(f) = (-\infty, +\infty)$;

2) $E(f) = (-\pi/2; \pi/2)$;

3)нечетная:

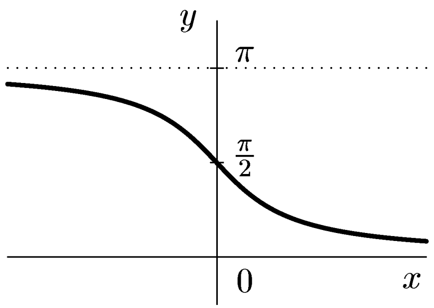
$\mathrm{arc}tg(-x) = -\mathrm{arctg} x$;

4)возрастает на $D(f)$;

5)ограниченная:

$$|\mathrm{arctg}\, x| < \pi/2$$

6)непериодическая



$y = \text{arcctg}x$

1) $D(f) = (-\infty, +\infty)$;

2) $E(f) = (0\ ; \pi)$;

3)общего вида:
$\text{arcctg}(-x) = \pi - \text{arcctg}x$

4)убывает на $D(f)$;

5)ограниченная:
$0 \le \text{arcctg}x \le \pi$

6)непериодическая

Обратная функция

Пусть функция $y = f(x)$ задана на множестве D и пусть E - множество значений этой функции. Если каждому значению $y \in Y$ соответствует единственное значение $x \in X$, то определена функция $x = g(y)$ с областью определения E и множеством значений D. Такая функция $x = g(y)$ называется ***обратной*** к функции $f(x)$ и записывается в следующем виде: $x = g(y) = f^{-1}(y)$. Про функции $y = f(x)$ и $x = g(y)$ говорят, что они являются взаимно обратными.

Чтобы найти функцию $x = g(y)$, обратную к функции $y = f(x)$, достаточно решить уравнение $y = f(x)$ относительно x (если это возможно).

Пример. Для функции $y = \ln x$ обратной функцией является функция $x = e^{y}$.

Сложная функция

Пусть функция $y = f(u)$ есть функция от переменной u, определенной на множестве U с областью значений Y, а переменная u, в свою очередь, является функцией $u = g(x)$ от переменной x, определенной на множестве X с об ластью значений U. Тогда заданная на множестве X функция $y = f(g(x))$ называется сложной функцией аргумента x.

Пример. $y = \ln\cos x$ – сложная функция.

Элементарная функция

Элементарной называется функция, которая получена из основных элементарных функций и констант с помощью конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции.

Задача. Найти область определения функции $y = \frac{x^2+1}{2x-1}$.

Решение

► При каждом значении x из интервала $(-\infty; +\infty)$ числитель и знаменатель являются вещественными числами. Их отношение есть также вещественное число при всех значениях, кроме $x = 1/2$, при котором знаменатель обращается в нуль. значит областью определения функции является множество всех значений x, кроме $x = 1/2$. Записывают это так:

$$D(y) = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$$ ◄

Задача. Найти область определения функции $y = \sqrt{2x-3}$.

Решение

► Данная функция определена для таких значений x, при которых подкоренное выражение неотрицательно. Значит, функция определена при $2x - 3 \geq 0$, т.е. при $x \geq 3/2$.

Таким образом,$D(y) = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.◄

Задача. Найти область определения

$$y = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

Решение

►Так как уравнение $x^2 - x + 1 = 0$ не имеет действительных корней, то знаменатель дроби определен при всех значениях x и не обращается в нуль.

Числитель $\operatorname{tg} x$ не определен при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n\,, n \in Z$.

Следовательно, область определения функции

$$D(y) = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z.◄$$

Задача. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}\,.$$

Решение

► Область определения функции определяется следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} x-2\geq 0 \\ 4-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ x\leq 4 \end{cases}$$

Таким образом, область определения функции $D(y) = [2;4]$.◄

Задача. Найти область определения $y=\lg\left(x^2-9\right)$.

Решение

►Выражение $\lg(x^2-9)$ имеет смысл при $x^2-9>0$. Решая это неравенство, получим, что $x \in (-\infty;-3) \cup (3;+\infty)$.

Таким образом, $D(y) = (-\infty;-3) \cup (3;+\infty)$.◄

Задача. Найти область определения функции $y = \arcsin\frac{2x}{1+x}$.

Решение

►Область определения функции $y = \arcsin x$ определяется неравенством: $|x| \leq 1$. Следовательно, нахождение области определения сводится к решению неравенства $\left|\frac{2x}{1+x}\right| \leq 1$. Решая это неравенство, найдем, что область определения функции $D(y) = \left[-\frac{1}{3};1\right]$.◄

Задача. Найти область определения функции $y=\lg\left(\sin\left(\lg x\right)\right)$.

Решение

►Так как область определения функции $y=\lg x$ определяется неравенством $x>0$, то область определения функции $y=\lg\left(\sin\left(\lg x\right)\right)$ определяется системой неравенств:

$$\begin{cases}\sin(\lg x)>0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\pi n<\lg x<\pi+2\pi n, n\in\mathbb{Z}\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}10^{2\pi n}<x<10^{\pi+2\pi n}, n\in\mathbb{Z}\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow 10^{2\pi n}<x<10^{\pi+2\pi n}, n\in\mathbb{Z}$$

Таким образом, область существования функции $D(y)=\left(10^{2\pi n};10^{\pi+2\pi n}\right)$, где $n\in\mathbb{Z}$.

Задача. Дана функция $f(x)=x^3\cdot 2^x$. Найти: $f(1), f(2x), \dfrac{1}{f(x)}, f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Решение

►

$f(1)=1^3\cdot 2^1=2.$

$f(2x)=(2x)^3\cdot 2^{(2x)}=2^3\cdot x^3\cdot 2^{2x}=8x^3\cdot 4^x$

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x^3 2^x}=\frac{2^{-x}}{x^3}$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^3 2^{\frac{1}{x}}=\frac{2^{\frac{1}{x}}}{x^3}$$

◄

Задача. Исследовать функцию на четность и нечетность:

а) $f(x)=x^4-5|x|$, б) $f(x)=e^x-2e^{-x}$, в) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

Решение

► а) Вычислим $f(-x)$:

$$f(-x)=(-x)^4-5|-x|=x^4-5|x|=f(x).$$

Следовательно, функция четная.

б) $f(-x)=e^{-x}-2e^x$. Так как $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$, то данная функция общего положения.

в)

$$f(-x)=\ln\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\ln\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$$

Следовательно, функция нечетная.◄

Задача. Найти наименьший период функции:

а) $y=\sin 5x$, б) $y=\cos^2 5x$, в) $y=\sin 2x+2\sin 3x$

Решение

► а) Пусть T - наименьший период функции. Тогда для всех значений x имеем:

$$f(x+T)=\sin(5(x+T))=\sin(5x+5T)=\sin 5x=f(x)$$

или

$$\sin(5x+5T)=\sin 5x \Leftrightarrow \sin(5x+5T)-\sin 5x \equiv 0 \Leftrightarrow$$
$$2\sin\frac{5x+5T-5x}{2}\cos\frac{5x+5T+5x}{2} \equiv 0 \Leftrightarrow$$
$$2\sin\frac{5T}{2}\cos\left(5x+\frac{5T}{2}\right) \equiv 0$$

Так как последнее равенство должно выполняться для любых значений x, то $\sin\frac{5T}{2}=0 \Leftrightarrow \frac{5T}{2}=\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$. $\Leftrightarrow T=\frac{2\pi k}{5}$, где $k\in\mathbb{Z}$. Отсюда получаем, что наименьший период функции $T=\frac{2\pi}{5}$.

б) Так как $\cos^2 5x=\frac{1-\cos 10x}{2}$, то наименьший период функции $y=\cos^2 5x$ совпадает с наименьшим периодом функции $y=\cos 10x$.

Пусть T - наименьший период функции $y=\cos 10x$. Тогда для всех значений x имеем:

$$f(x+T)=\cos(10(x+T))=\cos(10x+10T)=\cos 10x=f(x)$$

или

$$\cos(10x+10T)=\cos 10x \Leftrightarrow \cos(10x+10T)-\cos 10x \equiv 0 \Leftrightarrow$$
$$2\sin\frac{10x+10T-10x}{2}\sin\frac{10x+10T+10x}{2} \equiv 0 \Leftrightarrow$$
$$2\sin 5T\cos(10x+5T) \equiv 0$$

Так как последнее равенство должно выполняться для любых значений x, то $\sin 5T = 0 \Leftrightarrow 5T = \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. $\Leftrightarrow T = \dfrac{\pi k}{5}$, где $k \in \mathbb{Z}$. Отсюда получаем, что наименьший период функции $T = \dfrac{\pi}{5}$.

в) Пусть T - наименьший период функции $y = \sin 2x + 2\sin 3x$. Тогда для всех значений x имеем:

$$f(x+T) = \sin(2(x+T)) + 2\sin(3(x+T)) = \\ = \sin 2x + 2\sin 3x = f(x)$$

или

$$\sin(2x+2T) + 2\sin(3x+3T) - \sin 2x - 2\sin 3x \equiv 0$$

В частности, при $x = 0$ и $x = \pi$, получим соответственно уравнения, которым удовлетворяет период функции:

$$\begin{cases} \sin 2T + 2\cos 3T = 0 \\ \sin 2T - 2\sin 3T = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2T = 0 \\ \sin 3T = 0 \end{cases}$$

Решая последние равенства находим, что период T одновременно должен удовлетворять уравнениям:

$$T = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \text{ и } T = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

При $k = 2, n = 3$ получим значение $T = \pi$. Проверим является ли оно периодом функции:

$$f(x+\pi)=\sin(2x+2\pi)+2\sin(3x+3\pi)=$$
$$=\sin 2x-2\sin 3x\neq f(x)$$

Таким образом, $T=\pi$ не является периодом функции. следующее значение T , которое может быть периодом функции получается при $k=4$ и $n=6$: $T=2\pi$. Проверяем является ли данное значение наименьшим периодом функции:

$$f(x+2\pi)=\sin(2x+4\pi)+2\sin(3x+6\pi)=$$
$$=\sin 2x+2\sin 3x=f(x)$$

Таким образом, $T=2\pi$ - наименьший период функции ◄

Тема 3. График функции

План

1. Элементарные преобразования графиков функций
2. Построение графиков функций с помощью элементарных преобразований.
3. График дробно-линейной функции

Рассмотренные графики основных элементарных функций следует помнить. Пользуясь ими, можно легко строить большое количество графиков элементарных функций, представляя последние как преобразованные основные элементарные функции.

Пусть график функции $y=f(x)$ известен. приведем в виде таблицы *важнейшие преобразования* этого графика:

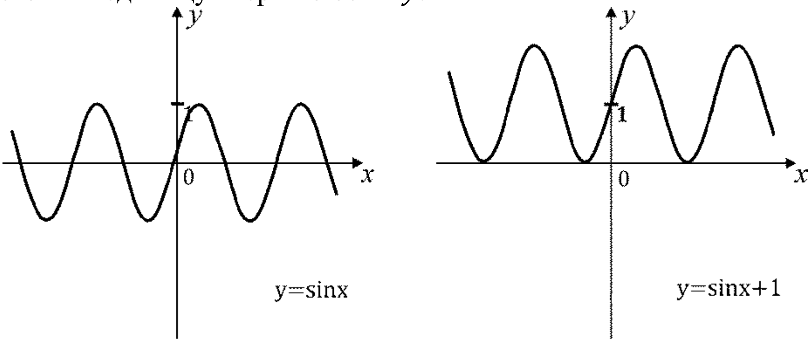
Функция	Преобразование, которое следует провести с графиком функции $y = f(x)$
$y = f(x) + b$ $b \neq 0$	b>0 сдвиг вверх по оси Oy на b единиц b<0 сдвиг вниз по оси Oy на |b| единиц
$y = f(x + a)$ $a \neq 0$	a>0 сдвиг влево по оси Ox на a единиц a<0 сдвиг вправо по оси Ox на |a| единиц
$y = kf(x)$ $k > 0, k \neq 1$	k>1 растяжение вдоль оси Oy относительно оси Ox в k раз 0<k<1 сжатие вдоль оси Oy в 1/k раз
$y = f(kx)$ $k > 0, k \neq 1$	k>1 сжатие вдоль оси Ox относительно оси Oy в k раз 0<k<1 растяжение в 1/k раз вдоль оси Ox
$f(-x)$	симметричное отражение графика относительно оси Oy
$-f(x)$	симметричное отражение графика относительно оси Ox
$\|f(x)\|$	(1) часть графика, расположенная выше оси Ox (включая точки на оси) остается; (2) часть графика, расположенная ниже оси Ox, симметрично отражается наверх.
$f(\|x\|)$	(1) часть графика, расположенная левее оси Oy, отбрасывается; (2) часть графика, расположенная правее оси Oy (включая точки на оси) остается; (3) часть графика, расположенная правее оси

Функция	Преобразование, которое следует провести с графиком функции $y=f(x)$
	Oy (x>0) симметрично отобразить относительно оси Oy в область x<0 .

Задача. Используя элементарные преобразования, построить эскиз графика функции $y=\sin(x)+1$.

Решение

► Воспользуемся правилом построения графика функции $y=f(x)+b$. Построим график функции $y_1=\sin(x)$ и сдвинем его на 1 единицу вверх по оси Oy:

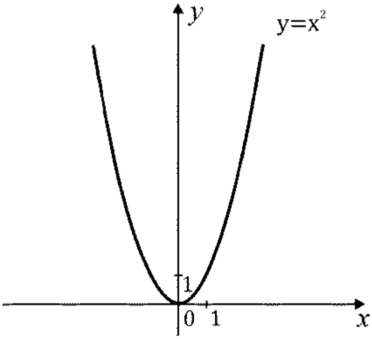


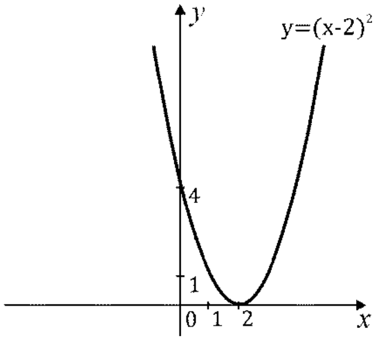
◄

Задача. Используя элементарные преобразования, построить эскиз графика функции $y=(x-2)^2$.

Решение

► Воспользуемся правилом построения графика функции $y = f(x+a)$. Построим график функции $y_1 = x^2$ и сдвинем его на 2 единицы вправо вдоль оси Ox:



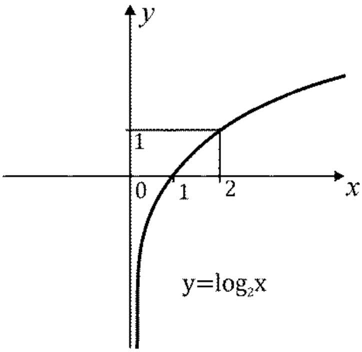


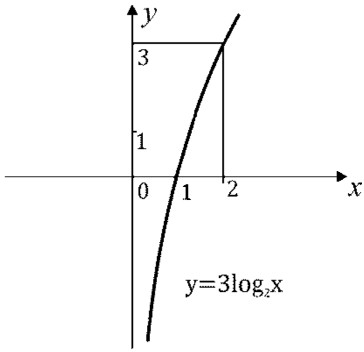
◄

Задача. Используя элементарные преобразования, построить эскиз графика функции $y = 3\log_2 x$.

Решение

►Воспользуемся правилом построения графика функции $y = kf(x)$. Построим график функции $y_1 = \log_2(x)$ и сожмем его вдоль оси Oy относительно оси Oxв 3 раза:



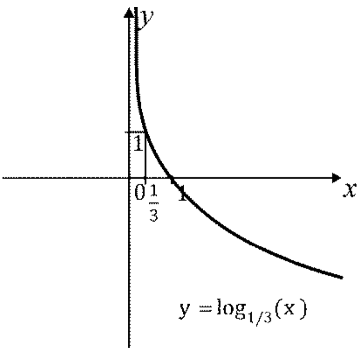


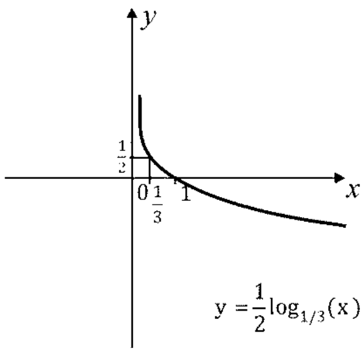
◄

Задача. Используя элементарные преобразования, построить эскиз графика функции $y = \dfrac{1}{2}\log_{1/3} x$.

Решение

►Воспользуемся правилом построения графика функции $y = kf(x)$. Построим график функции $y_1 = \log_{1/3}(x)$ и растянем его вдоль оси Oy относительно оси Ox в 2 раза.(см.рис.1.12)



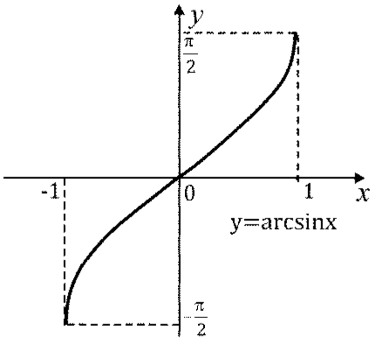


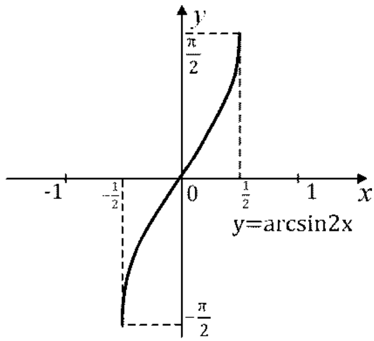
◄

Задача. Используя элементарные преобразования, построить эскиз графика функции $y = \arcsin(2x)$

Решение

► Воспользуемся правилом построения графика функции $y = f(kx)$. Построим график функции $y_1 = \arcsin(x)$ и сожмем его вдоль оси Ox относительно оси Oy в 2 раза:



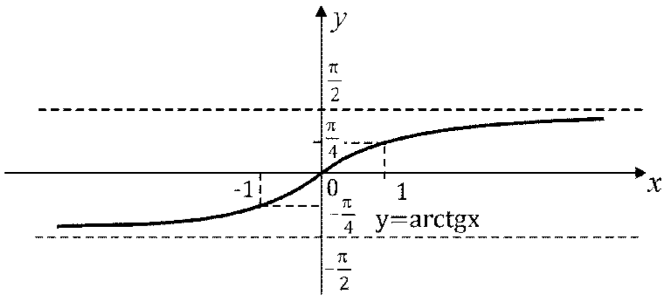


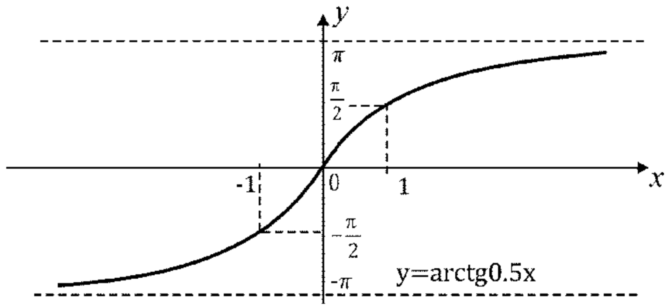
◄

Задача. Используя элементарные преобразования, построить эскиз графика функции $y = \operatorname{arc}tg(0.5x)$

Решение

►Воспользуемся правилом построения графика функции $y = f(kx)$. Построим график функции $y_1 = \operatorname{arc}tg(x)$ и растянем его вдоль оси Ox относительно оси Oy в 2 раза:





◄

Построение графиков функций с помощью элементарных преобразований

Построение графика функции $y = cf(ax+b)+d$ сводится к ряду преобразований графика функции $y = f(x)$.

Представим функцию y в виде $y = cf\left(a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right)+d$. Из такого представления y видно, что для построения графика этой функции достаточно построить график функции $y_1 = cf\left(a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right)$.

Для построения графика функции y_1 достаточно построить график функции $y_2 = f\left(a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)\right)$. В свою очередь для построения графика функции y_2 достаточно построить график функции $y_3 = f(ax)$.

Итак, для построения графика функции $y = cf\left(a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)\right)+d$ необходимо с графиком функции $y = f(x)$ произвести следующие преобразования:

1. Сжать или растянуть график функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox, если $a > 0$; симметрично отобразить относительно оси Oy и сжать или растянуть вдоль оси Ox, если $a < 0$.
2. Сдвинуть по оси Ox полученный график функции $f(ax)$ на $\left|\dfrac{b}{a}\right|$ единиц : влево, если $\left|\dfrac{b}{a}\right| > 0$ и вправо, если $\left|\dfrac{b}{a}\right| < 0$.
3. Сжать или растянуть полученный график функции $f\left(a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)\right)$ вдоль оси Oy, если $\text{c} > 0$; симметрично отобразить относительно оси Oy и сжать или растянуть вдоль оси Ox, если $c < 0$.
4. Сдвинуть полученный график функции $cf\left(a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)\right)$ на d единиц вверх, если $d > 0$, и вниз на $|d|$ единиц, если $d < 0$.

Последовательность этих преобразований при построении графика функции $y = cf\left(a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)\right)+d$ можно представить символически в виде цепочки

$$f(x)\to f(ax)\to f\left(a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right)\equiv$$

$$\equiv f(ax+b)\to cf(ax+b)\to cf(ax+b)+d$$

На практике удобно начинать построение графика функции $y=cf\left(a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right)+d$ с написания цепочки

$$cf(ax+b)+d\leftarrow cf(ax+b)\leftarrow f(ax+b)\equiv$$

$$\equiv f\left(a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right)\leftarrow f(ax)\leftarrow f(x)$$

Задача. Используя элементарные преобразования, построить эскиз графика функции $y=\frac{1}{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)+1$.

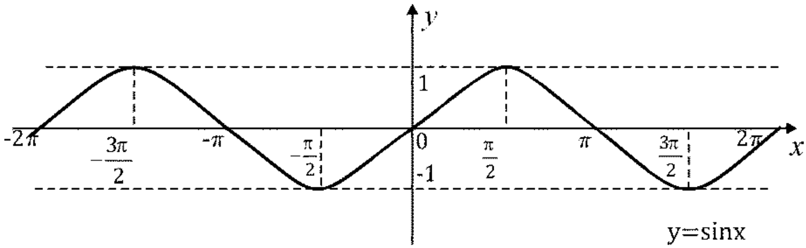
Решение

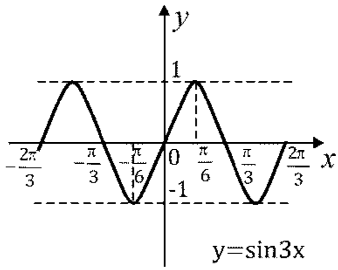
►Напишем цепочку преобразований:

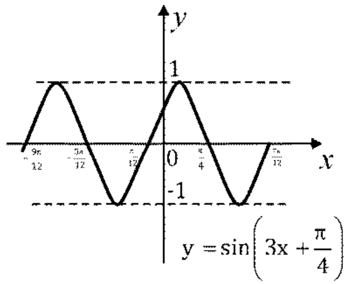
$$y=\frac{1}{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)+1\leftarrow\frac{1}{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\leftarrow\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\equiv$$

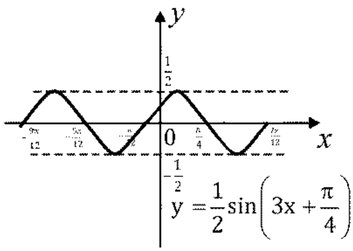
$$\equiv\sin\left(3\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right)\leftarrow\sin 3x\leftarrow\sin x$$

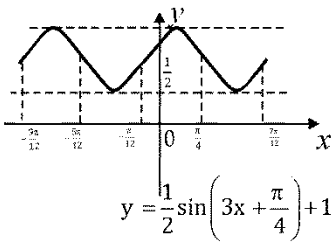
Итак, построение графика функции $y=\frac{1}{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)+1$ начинается с построения графика функции $y_1=\sin(x)$, затем сжатия полученного графика в 3 раза вдоль оси Ox, сдвига графика функции $y_2=\sin(3x)$ на $\frac{\pi}{12}$ влево вдоль оси Ox, растяжения графика функции $y_3=\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$ в 2 раза вдоль оси Oy и сдвигом его на 1 единицу вверх по оси Oy











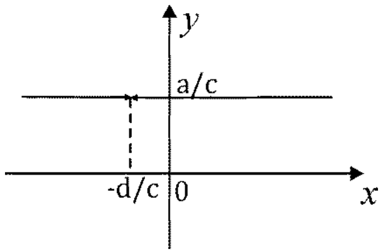
◄

График дробно-линейной функции

Дробно-линейной называется функция вида

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, c \neq 0$$

Если числитель и знаменатель дробно-линейной функции имеют общий множитель $x-\alpha$, то функция всюду, кроме точки $x=-d/c$, есть постоянная a/c и график ее имеет следующий вид:



Если же рассматриваемая дробь несократима (т.е. $bc \neq ad$), то имеют место следующие преобразования

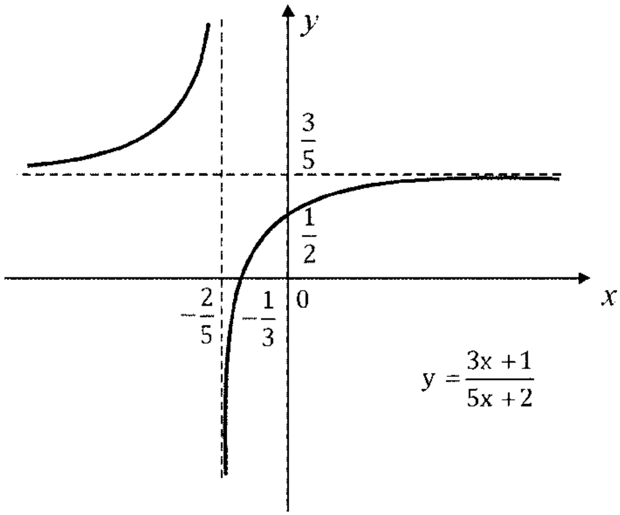
$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{k}{x+\frac{d}{c}}$$

Итак, график дробно-линейной функции – гипербола $y = k/x$, сдвинутая по оси Ox на $|d/c|$ единиц вправо или влево в зависимости от знака d/c и по оси Oy на $|a/c|$ единиц вверх или вниз в зависимости от знака a/c. Таким образом, чтобы построить эскиз графика дробно-линейной функции, достаточно знать ее асимптоты и расположение относительно них одной из ветви гиперболы. Асимптотами являются прямые $x = -d/c$ и $y = a/c$, а положение одной из ветви определяется точкой пересечения гиперболы с осью абсцисс или осью ординат.

Задача. Построить эскиз графика функции $y = \frac{3x+1}{5x+2}$.

Решение

► Асимптотами являются прямые $x=-2/5$, $y=3/5$. Точкой пересечения гиперболы с осью ординат есть точка $A\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$. Эскиз графика функции изображен на следующем рисунке:.



◄

Тема 4. Числовые последовательности

План

1. Понятие числовой последовательности
2. Предел последовательности

Под числовой последовательностью $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ понимается функция $a_n = f(n)$, заданная на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел.

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называют *членами* или *элементами* последовательности, a_n называют *общим членом* последовательности.

Последовательность обозначается так: $\{a_n\}$ или $a_n, n \in \mathbb{N}$.

Графиком последовательности является множество точек плоскости.

Задача. Даны последовательности:

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad a_n = (-1)^n \qquad a_n = n - 1$$

Изобразить первые пять членов на координатной плоскости.

Решение

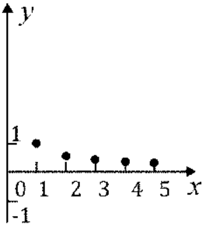
►Придавая n значения 1,2,3,4,5, получим:

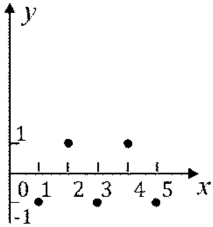
$$a_1 = \frac{1}{1} = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{4}, a_5 = \frac{1}{5}$$

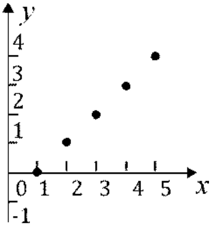
$$a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -1, a_4 = 1, a_5 = -1$$

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 4$$

Графики этих последовательностей изображены на рисунке:







◀

Если для последовательности $\{a_n\}$ справедливо неравенство $a_n \le a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то ее называют *неубывающей* последовательностью.

Если для последовательности $\{a_n\}$ справедливо неравенство $a_n < a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то ее называют *возрастающей* последовательностью.

Если для последовательности $\{a_n\}$ справедливо неравенство $a_n \ge a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то ее называют *невозрастающей* последовательностью.

Если для последовательности $\{a_n\}$ справедливо неравенство $a_n > a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то ее называют убывающей последовательностью.

Эти названия объединяют общим термином *монотонная последовательность*.

Например, последовательность (3) из примера 1 является возрастающей.

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если можно указать число M, такое, что $a_n \le M$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если можно указать число m, такое, что $m \le a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Последовательность $\{a_n\}$ называется ***ограниченной***, если она ограничена и сверху, и снизу, т.е. если существуют числа m и M, такие, что $m \le a_n \le M \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Геометрически это означает, что все точки, изображающие члены последовательности $\{a_n\}$, лежат на отрезке $[m; M]$.

Например, последовательность (2) из примера 1 является ограниченной.

Предел последовательности

Введем понятие предела последовательности.

Число a называется ***пределом числовой последовательности*** $\{a_n\}$, если для любого, сколь угодно малого, положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется такое число N (зависящее от $\varepsilon, N = N(\varepsilon)$), что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ верно неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$.

Если данное условие выполняется, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ или $a_n \to a$ при $n \to \infty$.

С помощью логических символов определение предела последовательности выражается следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ \forall n > N\ \ |a_n - a| < \varepsilon$$

Числовая последовательность имеет *бесконечный предел*, если для любого, сколь угодно большого, положительного числа $\varepsilon > 0$, существует такое число N (зависящее от $\varepsilon, N = N(\varepsilon)$), что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ верно неравенство $|a_n| > \varepsilon$.

Если данное условие выполняется, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ или $a_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Последовательность, имеющая предел называется *сходящейся*, иначе – *расходящейся*.

Задача. Используя определение предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$. Найти номер члена последовательности, начиная с которого $\left|\dfrac{n+2}{2n+1} - \dfrac{1}{2}\right| < 0.001$

Решение

► Покажем, что для произвольного сколь угодно малого действительного числа $\varepsilon > 0$ можно указать порядковый номер N элемента последовательности $a_n = \dfrac{n+2}{2n+1}$, начиная с которого выполняется условие

$$\left|\frac{n+2}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

Имеем $\left|\dfrac{n+2-(2n+1)}{2(2n+1)}\right| = \left|\dfrac{3}{4n+2}\right|$. Так как $n>0$, то $\dfrac{3}{4n+2}>0$.

Следовательно, $\left|\dfrac{3}{4n+2}\right| = \dfrac{3}{4n+2}$.Получаем, что

$$\frac{3}{4n+2}<\varepsilon \Leftrightarrow 3<\varepsilon(4n+2) \Leftrightarrow 4n+2>\frac{3}{\varepsilon} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n>\frac{1}{4}\left(\frac{3}{\varepsilon}-2\right) \Leftrightarrow n>\frac{3-2\varepsilon}{4\varepsilon}$$

Таким образом, начиная с номера $N(\varepsilon)=\left[\dfrac{3-2\varepsilon}{4\varepsilon}\right]+1$ (напомним, что запись $[x]$ обозначает целую часть числа. Например, $[5,46]=5$.) выполняется условие $\left|\dfrac{n+2}{2n+1}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$. То есть по определению предела числовой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{2n+1}=\dfrac{1}{2}$.

Найдем N, начиная с которого $\left|\dfrac{n+2}{2n+1}-\dfrac{1}{2}\right|<0.001$:

$N(0.001)=\left[\dfrac{3-2\cdot 0.001}{4\cdot 0.001}\right]+1=[749.5]+1=750$. То есть начиная с a_{750}, все члены последовательности отличаются от $\dfrac{1}{2}$ менее, чем на 0.001.◄

Последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно малой*, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно большой*, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Теорема 1. Пусть существуют конечные пределы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

1) Если $\exists$ порядковый номер N, такой что $\forall n > N$ выполняется условие $x_n < y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

2) Если $\exists$ порядковый номер N, такой что $\forall n > N$ выполняется условие $x_n = C, C = const$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n \pm y_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n \cdot y_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, где $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \ne 0,\ y_n \ne 0$.

Теорема 2. Всякая сходящаяся числовая последовательность ограничена.

Теорема 3. Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Теорема 4. Числовая последовательность $\{a_n\}$ с общим членом $a_n = \dfrac{1}{n^p}$ $(p > 0,\ p \in \mathbb{R})$ сходится и $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$.

Теорема 5. Если $|q| < 1$ $(q \in \mathbb{R})$, то последовательность с общим членом $a_n = q^n$ сходится и $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Тема 5. Предел функции

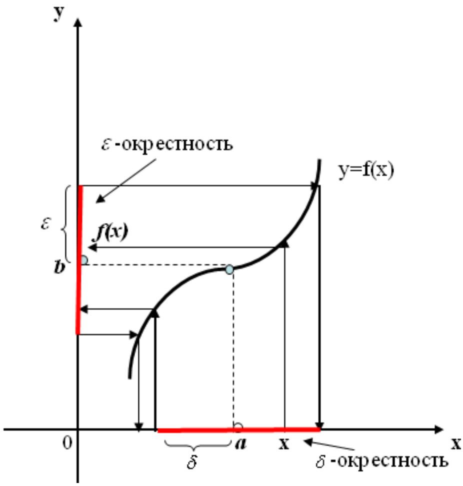
План

1.Понятие предела функции
2.Свойства предела функции
3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Основные свойства
4.Сравнение бесконечно малых функций. Таблица эквивалентных бесконечно малых
5. Первый и второй замечательные пределы
6.Вычисление пределов в случае неопределенности

Пусть функция $f(x)$определена во всех точках интервала $(a,\ b)$, за исключением, быть может, точки $x_0 \in (a,\ b)$.

Число b называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для любого x, удовлетворяющего неравенству $0<|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$, при этом пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x)=b$.

Геометрическая интерпретация



Если $f(x)$ определена в интервале $(a, +\infty)$, то ***число b называется пределом f(x) при $x \to +\infty$***, если для любого $\varepsilon>0$ существует число $M>a$, такое, что неравенство $x>M$ влечет за собой неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

При этом пишут $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=b$ или $f(+\infty)=b$.

Аналогично определяется $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=b$.

Число b *называют пределом функции* $f\left(x\right)$ *в точке* x_0 *слева (справа)* и пишут $\lim\limits_{x\to a-0} f\left(x\right)=b$ или $f\left(a-0\right)=b$ ($\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$, или $f(a+0) = b$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in (a-\delta;\ a)$ (для всех $x \in (a;\ a+\delta)$) справедливо неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Число A является пределом $f(x)$ в точке x_0, если совпадают пределы $f(x)$ в этой точке слева и справа: $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$.

Если функция $f(x)$ определена в интервале $(a;\ x_0)$ (в интервале $(x_0;\ b)$) и для любого M существует $\delta > 0$ такое, что для любого $x \in (x_0-\delta;\ x_0)$ (для любого $x \in (x_0;\ x_0+\delta)$) справедливо неравенство $f(x) > M$, то говорят, что левый (правый) предел функции $f(x)$ в точке x_0 равен $+\infty$, и при этом пишут $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = +\infty$ или $f(x_0 - 0) = +\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = +\infty$ или $f(x_0 + 0) = +\infty$).

Аналогично, определяются $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = -\infty$.

Свойства предела функции

Сформулируем основные теоремы о пределах.

Теорема 1. Если функция $f\left(x\right)$ имеет предел в точке x_0, то этот предел единственный.

Теорема 2. Если существуют конечные пределы функций $f\left(x\right)$ и $g\left(x\right)$ в точке x_0, то

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(c\cdot f(x)\right)=c\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, где $c=const$

4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$

Теорема 3. Если $\lim\limits_{u\to b} f(u)=c$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$,то предел сложной функции $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=c$

Теорема 4. Если в некоторой окрестности точки x_0 $f(x)\le g(x)$,то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

Теорема 5. Если в некоторой окрестности точки x_0 $v(x)\le f(x)\le g(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$,то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$

Теорема 6. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$,то

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=A^B$$

Замечание. Если предельные значения оказываются равными 0 или ∞, то могут возникнуть неопределенности разных видов.

При вычислении пределов могут появляться неопределенности вида

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty\ ,0^0,\ (+\infty)^0,\ 1^\infty.$$

Задача. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to-1}(x^3+5x^2+6x+1)$,б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-1}{x^2-4x+3}$, в) $\lim\limits_{x\to0}\cos x$,

г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} arctgx$, д) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}5^x$, е) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)^{\frac{x^2+1}{x+3}}$.

Решение

► а) Пользуясь утверждениями о пределе суммы и произведения получаем, что

$$\lim_{x\to-1}(x^3+5x^2+6x+1)=(-1)^3+5\cdot(-1)^2+6\cdot(-1)+1=-1$$

б) Пользуясь утверждениями о пределе частного получаем, что $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-1}{x^2-4x+3}=\dfrac{-1-1}{1+4+3}=-\dfrac{2}{8}=-\dfrac{1}{4}$

в) $\lim\limits_{x\to0}\cos x=\cos 0=1$

г) $\lim\limits_{x\to+\infty} arctgx=+\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} arctgx=-\dfrac{\pi}{2}$

д) $\lim\limits_{x\to+\infty} 5^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} 5^x = 0$

е) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)^{\frac{x^2+1}{x+3}} = \lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)^{\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+1}{x+3}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{1/2} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$. ◄

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x) = 0$.

Из определения бесконечно большой и бесконечно малых функций следует, что, если $f(x)$ бесконечно большая функций, то $\dfrac{1}{f(x)}$ бесконечно малая и наоборот.

Основные свойства бесконечно малых функций

1) Сумма двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция
2) Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функция есть бесконечно малая функция
3) Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Основные свойства бесконечно больших функций

1) Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$,то

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=\infty$$

2) Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$,то

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=+\infty$$

3) Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A \neq 0$,то

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\infty$$

4) Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq 0$, $g(x)\neq 0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$,то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$$

5) Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$,то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$

Задача. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+1)$,б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x-2}$, в) $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{c}\,tgx$, г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}\pm 0} tgx$

Решение

►а) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+1)=+\infty+1=+\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x-2}=\left(\dfrac{6}{0}\right)=\infty$

в) $\lim\limits_{x\to 0} ctgx=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{\sin x}=\left(\dfrac{1}{0}\right)=\infty$

г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0} tgx=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\dfrac{\sin x}{\cos x}=\left(\dfrac{1}{-0}\right)=-\infty$ ◄

Сравнение бесконечно малых

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые при $x\to x_0$.

(1) Если отношение $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ двух бесконечно малых величин само бесконечно мало, то $\alpha(x)$ называется ***величиной более высокого порядка малости***, чем $\beta(x)$. При этом $\beta(x)$ называется ***величиной более низкого порядка малости***, чем $\alpha(x)$.

(2) Если отношение $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ двух бесконечно малых величин стремится к конечному пределу, не равному нулю, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка малости*. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными*. Обозначение: $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x)$ бесконечно малая при $x \to 0$. Тогда

$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$	$\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$
$tg\alpha(x) \sim \alpha(x)$	$arctg\alpha(x) \sim \alpha(x)$
$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$	$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \cdot \ln a$
$1 - \cos\alpha(x) \sim \left(\alpha(x)\right)^2 / 2$	$\left(1+\alpha(x)\right)^p - 1 \sim p \cdot \alpha(x)$

Первый и второй замечательный пределы

Имеют место равенства

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{1/x} = e.$$

Правило замены эквивалентных

Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые при $x \to x_0$ и $\alpha(x) \sim \gamma(x),\ \beta(x) \sim \delta(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\gamma(x)}{\delta(x)}$

Задача. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{arctgx^2}$.

Решение

► Функция $1-\cos x \sim x^2/2$, $arctgx^2 \sim x^2$ при $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{arctgx^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2/2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}. ◄$$

Задача. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1-\sin 2x}-1\right)\left(e^{arctg^2 3x}-1\right)}{(1-\cos 2x)\ln(1+5x)}$.

Решение

►Так как $\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x=0$, то $\sqrt{1-\sin 2x}-1 \sim -\dfrac{1}{2}\sin 2x$

$$\sin 2x \sim 2x \Rightarrow \sqrt{1-\sin 2x}-1 \sim -\frac{1}{2}2x=-x$$

Далее, $e^{arctg^2 3x}-1 \sim (arctg3x)^2 \sim (3x)^2=9x^2$;

$$1-\cos 2x \sim \frac{(2x)^2}{2} \sim 2x^2;$$

$$\ln(1+5x) \sim 5x.$$

Учитывая это, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1-\sin 2x}-1\right)\left(e^{arctg^2 3x}-1\right)}{(1-\cos 2x)\ln(1+5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\cdot 9x^2}{2x^2\cdot 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{-9x^3}{10x^3}=-\frac{9}{10}$$

◄

Вычисление пределов в случае неопределенности

Задача. Найти пределы:

$$\text{а)}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-3x+2}{3x^2+x+1}\right),\quad \text{б)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}.$$

Решение

►а) Имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.Разделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень x, т.е. на x^2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+2}{3x^2+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2-3x+2}{x^2}}{\dfrac{3x^2+x+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}=\frac{2-3\cdot0+2\cdot0}{3+0+0}=\frac{2}{3};$$

б) Имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.Разделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень x, т.е. на x^4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^4-2}{x^4}}{\frac{\sqrt{x^8+3x+4}}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x^4}}{\sqrt{\frac{x^8+3x+4}{x^8}}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x^4}}{\sqrt{1+\frac{3}{x^7}+\frac{4}{x^8}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-0}{\sqrt{1+0+0}}=\frac{3}{1}=3.$$

◄

Задача. Вычислить: а) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^3-27}$; б) $\lim\limits_{x\to4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$;
в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

Решение

► а) При подстановке $x=3$ в числитель и знаменатель они обращаются в нуль. Следовательно, мы имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Разложим числитель и знаменатель на множители и перейдем к пределу

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^3-27}=\left|\begin{array}{c}ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),\\ a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x^2+3x+9)}=\lim_{x\to3}\frac{x-2}{x^2+3x+9}=\frac{3-2}{9+9+9}=\frac{1}{27}$$

б) Имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Умножим числитель и знаменатель на произведение $\left(2+\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)$, получим

$$\lim_{x\to 4}\frac{\left(2-\sqrt{x}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}{\left(3-\sqrt{2x+1}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}{\left(2+\sqrt{x}\right)(9-2x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}{\left(2+\sqrt{x}\right)(8-2x)}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(3+\sqrt{2x-1}\right)}{2\left(2+\sqrt{x}\right)(4-x)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{3+\sqrt{2x+1}}{2\left(2+\sqrt{x}\right)}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

в) Имеем неопределенность $[\infty-\infty]$. Умножим числитель и знаменатель на $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0$$

◄

Задача. Найти:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos 2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4^x-64}{x-3}$

Решение

а) Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Воспользуемся соотношениями эквивалентности

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{tgx(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}$$

б) Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Воспользуемся соотношениями эквивалентности

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(5x)^2/2}{(2x)^2/2}=\lim_{x\to 0}\frac{25x^2}{4x^2}=\frac{25}{4}$$

в) Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Введем новую переменную $y=x-3$. Тогда $x=y+3$ и

$$\lim_{x\to 3}\frac{4^x-64}{x-3}=\lim_{y\to 0}\frac{4^{y+3}-64}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{64\cdot 4^y-64}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{64\cdot\left(4^y-1\right)}{y}$$

Теперь воспользуемся соотношениями эквивалентности

$$\lim_{y\to 0}\frac{64\cdot\left(4^y-1\right)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{64y\ln 4}{y}=64\ln 4=128\ln 2$$ ◄

Задача. Найти: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{2x}}$.

Решение

► а) Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3}{2x^2+5}=1,\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(8x^2+3\right)=\infty$, то имеем неопределенность вида $\left[1^\infty\right]$. Представим в виде

$$\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}=e^{\ln\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}}=e^{(8x^2+3)\ln\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)}=e^{(8x^2+3)\ln\left(1-\frac{2}{2x^2+5}\right)}$$

Вычислим $\lim\limits_{x\to\infty}(8x^2+3)\ln\left(1-\dfrac{2}{2x^2+5}\right)$.

Имеем неопределенность $\left[0\cdot\infty\right]$. Введем новую переменную $y=\dfrac{1}{x}$, тогда

$$\lim_{y\to 0}\frac{8+3y^2}{y^2}\ln\left(1-\frac{2y^2}{2+5y^2}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{8+3y^2}{y^2}\cdot\frac{-2y^2}{2+5y^2}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{-2(8+3y^2)}{2+5y^2}=-8$$

Отсюда окончательно получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}=e^{-8}.$$

б) $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{2x}}=\left[1^{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{2x}\ln(1+\sin x)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{2x}}=$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{2x}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$ ◀

Тема 6. Непрерывность функции

План

1. Определение непрерывности функции
2. Свойства непрерывных функций
3. Точки разрыва функции. Классификация точек разрыва.
4. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0 если:

1) $f(x)$ существует в точке x_0;
2) $f(x)$ имеет предел в точке x_0;
3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Так как $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$, то равенство из п.3) можно переписать в следующем виде:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right).$$

Последнее равенство означает, что для непрерывной функции символы предела и функции можно менять местами.

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной на промежутке*** $(a;b)$, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Свойства непрерывных функций

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки. Тогда:

(1) Если $f(x)$ непрерывна в окрестности точки x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то существует окрестность точки x_0, в которой функция не обращается в нуль и сохраняет свой знак (знак числа $f(x_0)$).

(2) Функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (при дополнительном условии $g(x) \neq 0$) непрерывны в точке x_0.

(3) Сложная функция $f(g(x))$ непрерывны в точке x_0, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim\limits_{x \to x_0} g(x)\right) = f(g(x_0))$.

Можно доказать, что все элементарные функции непрерывны в каждой точке своей области определения.

Точки разрыва функции. Классификация точек разрыв.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Согласно определению, непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0 выражается соотношением $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f\left(x_0\right)$. Пользуясь односторонними пределами функции, это равенство можно заменить равносильным ему равенством

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f\left(x_0-0\right) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f\left(x_0+0\right) = f\left(x_0\right)$$

Т.е. функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, тогда и только тогда, когда в этой точке существуют пределы справа и слева, они равны между собой и равны значению функции в точке x_0.

Если в точке x_0 функция $f(x)$ не является непрерывной, то говорят, что $f(x)$ *разрывна* в этой точке. Точку x_0 называют *точкой разрыва* функции $f(x)$, причем функция $f(x)$ может быть не определена в точке x_0.

Точки разрыва функции классифицируются в зависимости от того, какое условие непрерывности нарушено:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f\left(x\right) = A$, но $f\left(x_0\right) \neq A$ либо $f\left(x_0\right)$ не определено. В этом случае говорят, что x_0 – *точка устранимого разрыва*;

(2) $f\left(x_0-0\right)$, $f\left(x_0+0\right)$ – конечные, но не равные между собой пределы. Такая точка называется точкой неустранимого *разрыва первого рода* или точкой разрыва с конечным скачком функции (говорят, что $f\left(x\right)$ терпит в точке x_0 *скачок*);

(3) Если в точке x_0 функция $f(x)$ имеет бесконечный предел справа или слева или один из этих пределов не существует, то точка x_0 называется *точка разрыва второго рода*.

Задача. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases} -x, & x \le -1, \\ x^2, & -1 < x \le 2, \\ \sin\dfrac{\pi x}{4}, & x > 2 \end{cases}$$

и построить её график.

Решение

►Так как функции $-x$, x^2 и $\sin\dfrac{\pi x}{4}$, входящие в определение $f(x)$, являются непрерывными элементарными функциями, то функция $f(x)$ непрерывна всюду кроме, может быть, точек «склейки» $x_1=-1$ и $x_2=2$. Исследуем поведение функции в окрестности этих точек:

а) Рассмотрим точку $x_1=-1$.

$$f(-1-0)=\lim_{x\to -1-0}(-x)=-(-1)=1;$$

$$f(-1+0)=\lim_{x\to -1+0}x^2=(-1)^2=1;$$

$f(-1) = -(-1) = 1.$

Так как $f(-1-0) = f(-1+0) = f(-1) = 1$, то функция непрерывна в точке $x_1 = -1$.

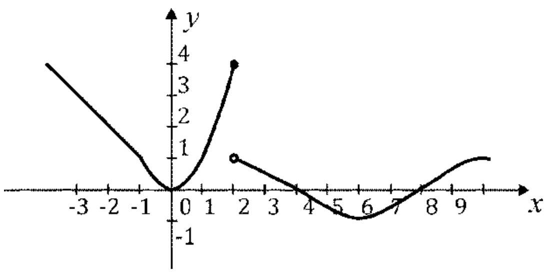
б) Рассмотрим точку $x_2 = 2$.

$$f(2-0) = \lim_{x \to 2-0} x^2 = 2^2 = 4;$$

$$f(2+0) = \lim_{x \to 2+0} \sin\frac{\pi x}{4} = \sin\frac{\pi \cdot 2}{4} = \sin\frac{\pi}{2} = 1;$$

$$f(2) = 2^2 = 4.$$

Так как $f(2-0) = f(2) = 4 \neq f(2+0) = 1$, то $f(x)$ в точке $x_2 = 2$ терпит разрыв первого рода. Сделаем чертёж:



◄

Задача. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = 2^{\frac{1}{x^2(x^2-1)}}$. Сделать эскиз графика.

Решение

►Функция является элементарной, поэтому непрерывна во всех точках, кроме точек $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$, в которых она не определена. Найдём характер разрыва в этих точках.

а) Рассмотрим точку $x_1=-1$.

$$f(-1-0)=\lim_{x\to-1-0}2^{\frac{1}{x^2\left(x^2-1\right)}}=\lim_{x\to-1-0}2^{\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}}=+\infty;$$

$$f(-1+0)=\lim_{x\to-1+0}2^{\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}}=+0$$

(+0 означает, что $f(x)$ стремится к 0, оставаясь больше 0).

Так как $f(-1-0)=+\infty$, $f(-1+0)=0$, то $f(x)$ в точке $x_1=-1$ терпит разрыв второго рода.

б) Рассмотрим точку $x_2=0$.

$$f(-0)=\lim_{x\to-0}2^{\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}}=+0,\ f(+0)=\lim_{x\to+0}2^{\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}}=+0$$

Таким образом, $f(-0)=f(+0)=0$, но $f(0)$ не определена, следовательно, $x_2=0$ является точкой устранимого разрыва.

в) Рассмотрим точку $x_3=1$.

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}}=+0\,;\; f(1+0)=\lim_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}}=+\infty$$

Так как $f(1-0)=+0$, $f(1+0)=+\infty$, то $x_3=1$ является точкой разрыва второго рода.

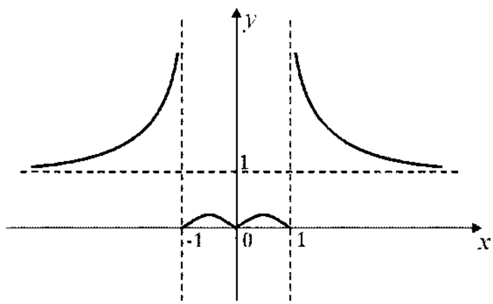
Для построения эскиза графика исследуем поведение функции при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$:

$$f(-\infty)=\lim_{x\to-\infty} 2^{\frac{1}{x^2\left(x^2-1\right)}}=\left[\begin{array}{l} 2^{\frac{1}{(-\infty)^2\left((-\infty)^2-1\right)}}=2^{\frac{1}{(+\infty)(+\infty)}}=2^{\frac{1}{+\infty}}= \\ =2^{+0}=1+0 \end{array}\right]=1+0$$

$$f(+\infty)=\lim_{x\to+\infty} 2^{\frac{1}{x^2\left(x^2-1\right)}}=\left[\begin{array}{l} 2^{\frac{1}{(+\infty)^2\left((+\infty)^2-1\right)}}=2^{\frac{1}{(+\infty)(+\infty)}}=2^{\frac{1}{+\infty}}= \\ =2^{+0}=1+0 \end{array}\right]=1+0$$

(выражение (1+0) означает, что $f(x)$ стремится к 1, оставаясь больше 1).

Опираясь на полученные данные, сделаем эскиз графика :



◄

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Первая теорема Больцано – Коши (о нуле непрерывной функции). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на концах его имеет значения, противоположные по знаку, то $f(x)$ обращается в нуль по крайней мере в одной точке интервала $(a;b)$.

Вторая теорема Больцано – Коши (о промежуточных значениях непрерывной функции). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, причем $f(a)=A$, $f(b)=B$. Тогда, каким бы ни было число C, заключенное между числами A и B, на отрезке $[a;b]$ найдется по крайней мере одна точка c, такая, что $f(c)=C$.

Эти теоремы устанавливают, что, переходя от одного своего значения к другому, функция хотя бы одни раз принимает каждое свое промежуточное значение между ее значениями на концах отрезка.

Первая теорема Вейерштрасса (об ограниченности непрерывной на отрезке функции). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на нем сверху и снизу, т.е. существуют такие числа m и M, что для всех $x\in[a;b]$ справедливо неравенство $m\le f(x)\le M$.

Вторая теорема Вейерштрасса (о достижении непрерывной на отрезке функции своих верхней и нижней граней). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она достигает на этом отрезке свои наименьшее и наибольшее значения.

Тема 7. Производная и дифференциал функции

План

1. Понятие производной функции. Правила вычисления производной
2. Производные основных элементарных функций (таблица производных)
3.Производная сложной функции
4. Производная степенно-показательной функции
5. Производные высших порядков

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на интервале $(a;b)$.

Разность $\Delta x = x - x_0$, где $x, x_0 \in (a;b)$ называется *приращением аргумента в точке* x_0.

Разность $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется *приращением функции* y *в точке* x_0.

Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0}$,

то он называется *производной функции* y *в точке* x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Замечание. Для производной функции $y = f(x)$ используются следующие обозначения: y', $y'(x)$, f', $f'(x)$, y'_x, f'_x, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dy(x)}{dx}$, $\dfrac{df}{dx}$, $\dfrac{df(x)}{dx}$.

Операция нахождения производной называется *дифференцированием.*

Геометрический смысл производной

Для функции $y = f(x)$ ее производная $f'(x)$ для каждого значения x равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в соответствующей точке x.

Поскольку угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла наклона, то уравнение касательной $y = k \cdot x + b$ к кривой дифференцируемой функции $y = f(x)$ в точке x_0 можно записать следующим образом:

$$y = y'(x_0) \cdot x + b$$

Если касательную к кривой в некоторой точке провести нельзя, то это означает, что функция недифференцируема в этой точке.

Механический смысл производной

Для функции $y = f(x)$, меняющейся со временем x, производная $f'(x_0)$ есть скорость изменения $y = f(x)$ в момент времени x_0.

Задача. Найти по определению производной функции $y = \sin x$
.

Решение

► Зафиксируем произвольную точку x_0. Так как $y(x) = \sin x$, то $y(x_0) = \sin x_0$ и $y\left(x_0 + \Delta x\right) = \sin\left(x_0 + \Delta x\right)$, поэтому $\Delta y\left(x_0\right) = y\left(x_0 + \Delta x\right) - y\left(x_0\right) = \sin\left(x_0 + \Delta x\right) - \sin x_0$.

Следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(x_0 + \Delta x\right) - \sin x_0}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$= 1 \cdot \cos x_0 = \cos x_0$$

Так как в качестве x_0 можно взять любое число, то для числа x

$$y'(x) = \left(\sin x\right)' = \cos x. ◄$$

Задача. Функция $y = \dfrac{2x+1}{3x+1}$. Вычислить по определению производную при $x = 1$.

Решение

►Зафиксируем произвольную точку x_0.

Так как $y(x)=\dfrac{2x+1}{3x+1}$, то $y(x_0)=\dfrac{2x_0+1}{3x_0+1}$ и

$y\left(x_0+\Delta x\right)=\dfrac{2\left(x_0+\Delta x\right)+1}{3\left(x_0+\Delta x\right)+1}$, поэтому

$$\Delta y\left(x_0\right)=y\left(x_0+\Delta x\right)-y\left(x_0\right)=\frac{2\left(x_0+\Delta x\right)+1}{3\left(x_0+\Delta x\right)+1}-\frac{2x_0+1}{3x_0+1}.$$

Следовательно,

$$y'\left(x_0\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\dfrac{2\left(x_0+\Delta x\right)+1}{3\left(x_0+\Delta x\right)+1}-\dfrac{2x_0+1}{3x_0+1}}{\Delta x}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(2\left(x_0+\Delta x\right)+1\right)\left(3x_0+1\right)-\left(3\left(x_0+\Delta x\right)+1\right)\left(2x_0+1\right)}{\Delta x\left(3\left(x_0+\Delta x\right)+1\right)\left(3x_0+1\right)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(2x_0+1\right)\left(3x_0+1\right)+2\Delta x\left(3x_0+1\right)-\left(2x_0+1\right)\left(3x_0+1\right)-3\Delta x\left(2x_0+1\right)}{\Delta x\left(3\left(x_0+\Delta x\right)+1\right)\left(3x_0+1\right)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x\left(3\left(x_0+\Delta x\right)+1\right)\left(3x_0+1\right)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{\left(3\left(x_0+\Delta x\right)+1\right)\left(3x_0+1\right)}=\frac{-1}{\left(3x_0+1\right)^2}$$

Таким образом, $y'(x)=-\dfrac{1}{\left(3x+1\right)^2}$; $y'(1)=-\dfrac{1}{16}$. ◄

Производная суммы, разности, произведения и частного функций

Нахождение производной функции непосредственно по определению часто связано с определенными трудностями, поэтому на практике функции дифференцируют с помощью ряда правил и формул.

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ две дифференцируемые функции, тогда

(1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

(2) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;

(3) $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, где c -постоянная;

(4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, v \neq 0$;

Производная сложной функции

Пусть функция $u = \varphi(x)$ имеет производную в некоторой точке $x = x_0$, а функция $y = f(u)$ имеет производную в точке $u_0 = \varphi(u_0)$. Тогда, сложная функция $f(\varphi(x))$ имеет производную в точке $x = x_0$, которая вычисляется по формуле

$$\left(f(\varphi(x_0))\right)' = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0).$$

Для краткости используется следующая запись этой формулы $f_x' = f_u' \cdot u_x'$.

Производные основных элементарных функций (таблица производных)

Приведем производные основных элементарных функций. Во всех перечисленных ниже формулах функция u считается функциями независимой переменной x :. $u = u(x)$ . .

Таблица производных

(1) $y = c$ (c -постоянная), $y' = 0$;

(2) $y = x$, $y' = 1$;

(3) $y = u^n$, $y' = nu^{n-1} \cdot u'$, где $n \in R$;

(4) $y = a^u$, $y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, где $a > 0, a \neq 1$;

(5) $y = e^u$, $y' = e^u \cdot u'$;

(6) $y = \log_a u$, $y' = \dfrac{u'}{u \ln a}$, где $a > 0, a \neq 1$, $x > 0$;

(7) $y = \ln u$, $y' = \dfrac{u'}{u}$;

(8) $y = \sin u$, $y' = \cos u \cdot u'$;

(9) $y = \cos u$, $y' = -\sin u \cdot u'$;

(10) $y = tg\ u$, $y' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$, где $u \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathrm{Z}$;

(11) $y = ctg\ u$, $y' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$, где $u \neq \pi n, n \in \mathrm{Z}$;

(12) $y = \arcsin u$, $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$, где $|u| \leq 1$;

(13) $y = \arccos u$, $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$, где $|u| \leq 1$;

(14) $y = arctg\ u$, $y' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

(15) $y = arcctg\ u$, $y' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

Задача. Найти производные следующих функций :

$$y = 5,\ y = arcctg\ \ln 345,\ y = \log_5 x,\ y = 7^x.$$

Решение

► Производная числа равна нулю, поэтому $(5)' = 0$, $(arcctg\ \ln 345)' = 0$, так как 5 и $arcctg\ \ln 345$ - числа.

Для нахождения производных функций $y = \log_5 x$ и $y = 7^x$ воспользуемся табличными формулами для показательной функции (при $a = 7$) и логарифмической функции (при $a = 5$). Имеем: $(\log_5 x)' = \dfrac{1}{x \ln 5}$, $(7^x)' = 7^x \ln 7$. ◄

Задача. Вычислить производные функций: $x^2, x^{2\pi-3e+1}$, $\dfrac{1}{x}$, $\sqrt{x}, \sqrt[4]{x^3}$.

Решение

► Каждая из данных функций является степенной функцией, поэтому все производные находятся по формуле $y' = nu^{n-1} \cdot u'$.

Имеем:

$u = x \Rightarrow u' = 1;$

$$\left(x^2\right)' = 2x;$$

$$\left(x^{2\pi-3e+1}\right)' = (2\pi - 3e + 1)\, x^{2\pi-3e};$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2};$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\left(\sqrt[4]{x^7}\right)' = \left(x^{\frac{7}{4}}\right)' = \frac{7}{4} x^{\frac{7}{4}-1} = \frac{7}{4} x^{\frac{3}{4}} = \frac{7}{4}\sqrt[4]{x^3}.$$

◄

Задача. Найти производную функции $y=\left(1+7x\right)^4$.

Решение

► Данная функция является степенной, поэтому производная находятся по формуле $y' = nu^{n-1}\cdot u'$:

$$y'=\left(\left(1+7x\right)^4\right)' = \left[u=1+7x\right]=4\left(1+7x\right)^3\cdot\left(1+7x\right)' =$$
$$=4\left(1+7x\right)^3\cdot 7=28\left(1+7x\right)^3.$$
◄

Задача. Найти производную функции $y=\operatorname{tg}5x$.

Решение

►Применяя таблицу производных, находим

$$y'=(\operatorname{tg}5x)'=\left[u=5x\right]=\frac{1}{\cos^2 5x}\cdot(5x)'=\frac{5}{\cos^2 5x}.$$ ◄

Задача. Найти производную функции $y=\cos^2 x$.

Решение

► Применяя правило дифференцирования сложной функции и таблицу производных, находим

$$y'=(\cos^2 x)'=\left[u=\cos x\right]=2\cos x(\cos x)'=$$
$$=2\cos x(-\sin x)=-\sin 2x.$$
◄

Задача. Найти производную функции $y = \left(2x^2 + x + 5\right)\cos x$.

Решение

►Применяя правило дифференцирования произведения функций и таблицу производных, находим

$$y' = \left(\left(2x^2 + x + 5\right)\cdot\cos x\right)' = \left(2x^2 + x + 5\right)'\cdot\cos x +$$

$$+\left(2x^2 + x + 5\right)\cdot\left(\cos x\right)' = (4x+1)\cos x - \left(2x^2 + x + 5\right)\sin x.$$ ◄

Задача. Найти производную функции

$$y = 3\ln x + 5\sqrt{x}\cdot\cos x + e^3.$$

Решение

►Применяя правила дифференцирования и таблицу производных, находим

$$y' = \left(3\ln x + 5\sqrt{x}\cos x + e^3\right)' = 3\left(\ln x\right)' + 5\left(x^{\frac{1}{2}}\cos x\right)' + \left(e^3\right)' =$$

$$= 3\frac{1}{x} + 5\left(\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'\cos x + x^{\frac{1}{2}}\left(\cos x\right)'\right) + 0 =$$

$$= \frac{3}{x} + 5\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}\cos x + x^{\frac{1}{2}}\left(-\sin x\right)\right) = \frac{3}{x} + \frac{5\cos x}{2\sqrt{x}} - 5\sqrt{x}\cdot\sin x.$$ ◄

Задача. Найти производную функции $y = \frac{arctgx}{x^3}$.

Решение

►Применяя правила дифференцирования частного функций и таблицу производных, находим

$$\left(\frac{arctgx}{x^3}\right)' = \frac{(arctgx)'\,x^3 - (x^3)'\,arctgx}{(x^3)^2} = \frac{\frac{x^3}{1+x^2} - 3x^2 \cdot arctgx}{x^6} =$$

$$= \frac{1}{x^3(1+x^2)} - \frac{3 \cdot arctgx}{x^4}.$$

◄

Задача. Найти производную функции $y = \cos\log_6 5x - \cos\log_6 5$

Решение

► $y' = (\cos\log_6 5x - \cos\log_6 5)' = (\cos\log_6 5x)' - (\cos\log_6 5)'$

Так как выражение $\cos\log_6 5$ является числом, то

$(\cos\log_6 5)' = 0$. Получаем, что

$$y' = (\cos\log_6 5x)' - 0 = -\sin\log_6 5x(\log_6 5x)' =$$

$$= -\sin\log_6 5x \cdot \frac{1}{5x \cdot \ln 6}(5x)' = -\sin\log_6 5x \cdot \frac{1}{5x\ln 6} \cdot 5 = -\frac{\sin\log_6 5x}{x\ln 6}$$

◄

Задача. Найти производную функции $y = arctg^2 e^{-x}$

Решение

►Применяя правила дифференцирования и таблицу производных, находим

$$y' = \left(\text{arctg}^2 e^{-x}\right)' = \left[u_1 = \text{arctg} e^{-x}\right] = 2\text{arctg} e^{-x} \cdot u_1';$$

$$u_1' = \left(\text{arctg} e^{-x}\right)' = \left[u_2 = e^{-x}\right] = \frac{1}{1+\left(e^{-x}\right)^2} \cdot u_2' = \frac{1}{1+e^{-2x}} \cdot u_2';$$

$$u_2' = \left(e^{-x}\right)' = [u_3 = -x] = e^{-x} \cdot u_3' = e^{-x} \cdot (-x)' = -e^{-x}.$$

Таким образом,

$$y' = 2\text{arctg } e^{-x} \cdot \frac{1}{1+e^{-2x}} \cdot \left(-e^{-x}\right) = -\frac{2e^{-x}\text{arctg } e^{-x}}{1+e^{-2x}}. ◄$$

Задача. Показать, что функция $y = \sqrt{2\ln\frac{1+e^x}{2}+1}$ удовлетворяет уравнению $\left(1+e^x\right) y \cdot y' = e^x$.

Решение

►Найдём производную функции

$$y' = \left(\left(2\ln\frac{1+e^x}{2}+1\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(2\ln\frac{1+e^x}{2}+1\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2\ln\frac{1+e^x}{2}+1\right)' =$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\ln\frac{1+e^x}{2}+1}}\cdot\left(2\frac{2}{1+e^x}\ \frac{e^x}{2}\right)=\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)\sqrt{2\ln\frac{1+e^x}{2}+1}}.$$

Подставив это выражение в уравнение, получим

$$\left(1+e^x\right)\sqrt{2\ln\frac{1+e^x}{2}+1}\cdot\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)\sqrt{2\ln\frac{1+e^x}{2}+1}}=e^x\text{, или }\ e^x=e^x.$$

Это доказывает, что наша функция удовлетворяет уравнению.◄

Производная степенно-показательной функции

Для вычисления производной функции вида $f(x)^{g(x)}$ существуют два способа.

Способ 1. Так как в соответствии с основным логарифмическим тождеством $f(x)=e^{\ln f(x)}$, то функцию $f(x)^{g(x)}$ можно представить в следующем виде

$$f(x)^{g(x)}=\left(e^{\ln f(x)}\right)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$$

Таким образом, нахождение производной сводится к дифференцированию сложной функции $e^{g(x)\ln f(x)}$.

Задача. Найти производную функции $y=x^{x}$.

Решение

►Данная функция не является ни функцией вида x^n, ни функцией вида a^x, поэтому будет ошибкой вычислять производной данной функций одним из следующих способов:

$$(x^x)' = x \cdot x^{x-1}, \quad (x^x) = x^x \cdot \ln x.$$

Представим функцию $y = x^x$ в виде $y = e^{x\ln x}$.

$$y' = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln x} \cdot \left(x\ln x\right)' = e^{x\ln x} \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = e^{x\ln x}\left(\ln x + 1\right).$$

◄

Задача. Найти производную функции $y = \left(\sin x\right)^{\ln x}$.

Решение

►

$$y' = \left(\left(\sin x\right)^{\ln x}\right)' = \left(e^{\ln x \ln \sin x}\right)' = e^{\ln x \ln \sin x} \cdot \left(\ln x \cdot \ln \sin x\right)' =$$

$$= \left(\sin x\right)^{\ln x} \cdot \left(\ln x \cdot \ln \sin x\right)' =$$

$$= \left(\sin x\right)^{\ln x} \cdot \left(\left(\ln x\right)' \ln \sin x + \ln x\left(\ln \sin x\right)'\right) =$$

$$= \left(\sin x\right)^{\ln x} \cdot \left(\frac{1}{x}\ln \sin x + \ln x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \left(\sin x\right)'\right) =$$

$$= \left(\sin x\right)^{\ln x} \cdot \left(\frac{\ln \sin x}{x} + \ln x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

◄

Способ 2. Данный способ связан с так называемой *логарифмической производной* функции, т.е. производной от логарифма этой функции: $\left(\ln f(x)\right)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow f'(x) = f(x)\cdot\left(\ln f(x)\right)'$.

В частности, $\left(f(x)^{g(x)}\right)' = f(x)^{g(x)}\cdot\left(g(x)\cdot\ln f(x)\right)'$.

Задача. Найти производную функции $y = (x+1)^{arctgx}$.

Решение

►Предварительно прологарифмируем обе части равенства $y = (x+1)^{arctgx}$, имеем $\ln y = (arctgx)\,\ln(x+1)$.

Продифференцируем обе части последнего равенства:

$$\left(\ln y\right)' = \frac{1}{1+x^2}\ln(x+1) + \frac{arctgx}{x+1};$$

Так как $y' = y\cdot\left(\ln y\right)'$, то $y' = y\left(\dfrac{\ln(x+1)}{1+x^2} + \dfrac{arctgx}{x+1}\right)$.

Подставив $y = (x+1)^{arctgx}$, получим

$$y' = (x+1)^{arctgx}\left(\frac{\ln(x+1)}{1+x^2} + \frac{arctgx}{x+1}\right).◄$$

Задача. Найти производную функции $y = \dfrac{x^{\sin x}\cdot\sqrt[3]{x-1}\cdot\cos^2 x}{\left(1+x^2\right)\sqrt{(x+2)^3}}$.

Решение

►Действуя так же, находим

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x + \frac{1}{3}\ln(x-1) + 2\ln|\cos x| - \ln\left(1+x^2\right) - \frac{3}{2}\ln|x+2|\,;$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{3(x-1)} + \frac{2(-\sin x)}{\cos x} - \frac{2x}{1+x^2} - \frac{3}{2(x+2)}\,;$$

$$y' = y\left[\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{3(x-1)} - 2tgx - \frac{2x}{1+x^2} - \frac{3}{2(x+2)}\right] =$$

$$= \frac{x^{\sin x}\cdot\sqrt[3]{x-1}\cdot\cos^2 x}{\left(1+x^2\right)\sqrt{(x+2)^3}}\left[\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{3(x-1)} - \right.$$

$$\left. -2tgx - \frac{2x}{1+x^2} - \frac{3}{2(x+2)}\right].$$

◄

Производные высших порядков

Производную от производной $f'(x)$ называют второй производной от функции f(x) и обозначают $f''(x)$: $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$. Производную от $f''(x)$ называют третьей производной функции f(x) и обозначают $f'''(x)$. Таким образом,

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)',\quad f'''(x) = \left(f''(x)\right)',\ \ldots,\ f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)',\ \ldots$$

Общепринятыми являются и другие обозначения производной n-го порядка функции $y = f(x)$: $\frac{d^n y}{dx^n}$ или $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$.

Задача. Найти y'', y''', если $y = \ln(\sin x)$.

Решение

►$y' = \frac{1}{\sin x}\cos x = ctg\ x;$

$y'' = (y')' = (ctg\ x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$

$y''' = (y'')' = \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)' = -((\sin x)^{-2})' =$
$-(-2)(\sin x)^{-3}\cos x = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}.$◄

Тема 8. Производная функции, заданной параметрически. Производная функции, заданной неявно

План

1.Производная функции, заданной параметрически
2. Производная функции, заданной неявно

Производная функции, заданной параметрически

Пусть даны две функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ одной независимой переменной t, определенные и непрерывные на некотором промежутке. Предположим теперь, что функции $x = x(t)$ и

$y = y(t)$ имеют производные, причем $x(t) \neq 0$ на этом промежутке. Тогда y можно рассматривать как функцию, зависящую от переменной x посредством переменной t, называемой параметром. В этом случае говорят, что функция y от x задана *параметрически.*

Производная функции y по переменной x вычисляется по формуле

$$y'_x(t) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}$$

Вторая производная функции y, заданной параметрически, по переменной x находится по следующей формуле:

$$y''_{xx} = \frac{\left(y'_x(t)\right)'_t}{x'_t(t)}$$

или

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt}(t)x'_t(t) - x''_{tt}(t)y'_t(t)}{(x'_t(t))^3}$$

Задача. Найти $y'_t(t)$ и $y''_{tt}(t)$ функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = 1/t, \qquad t \in (-1;\, 0) \cup (0;\, 1). \end{cases}$$

Решение

►Находим производные $x'_t(t)$ и $y'_t(t)$:

$$x'_t(t) = \left(\sqrt{1-t^2}\right)' = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}; y'_t(t) = -\frac{1}{t^2};$$

Таким образом, в точках, в которых $x'_t(t) \neq 0$, имеем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{1}{t^2} : \left(-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right) = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t^3}.$$

Для нахождения производной $y''_{xx}(t)$ вычислим производные $x''_{tt}(t), y''_{tt}(t)$:

$$x''_{tt}(t) = (x'_t)' = \left(-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)' = -\frac{\sqrt{1-t^2} - t\left(\sqrt{1-t^2}\right)'}{1-t^2}$$
$$= -\frac{\sqrt{1-t^2} + \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}}{1-t^2} = -\frac{1-t^2+t^2}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}$$
$$= -\frac{1}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$y''_{tt} = \left(-\frac{1}{t^2}\right)' = \frac{2}{t^3}$$

Подставляя найденные производные в формулу , получаем:

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt}(t)x'_t(t) - x''_{tt}(t)y'_t(t)}{\left(x'_t(t)\right)^3}$$
$$= \frac{\frac{2}{t^3} \cdot \left(-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right) + \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)}{\left(-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^3} =$$

$$= \frac{-\dfrac{2}{t^2\cdot(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{1}{t^2\cdot(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}}{-\dfrac{t^3}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}} = \frac{2(1-t^2)+1}{t^2(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} : \frac{t^3}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{3-2t^2}{t^2(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}{t^3} = \frac{3-2t^2}{t^3}.$$

◄

Производная функции, заданной неявно

Пусть функция $y = f(x)$ задана уравнением $F(x, y) = 0$. Это означает, что $F(x, f(x)) \equiv 0$ на некотором интервале. Тогда функция $y = f(x)$ называется *неявно заданной функцией*.

Для нахождения производной функции $y = f(x)$, заданной неявно, следует продифференцировать обе части равенства $F(x,y) = 0$, считая y функцией от x. Затем полученное уравнение, в которое будут входить x, y и y' , следует разрешить относительно y' .

Для нахождения y'' равенство $F(x,y) = 0$ дифференцируется дважды, в результате чего получается уравнение, содержащее x, y, y', y'' , которое следует разрешить относительно y'', затем вместо y' подставить функцию от x и y, найденную указанным выше способом.

Задача. Найти значения y', y'', если функция у задана неявно уравнением $x^2 + y^2 = 5xy^3$.

Решение

► Пусть $y = f(x)$, тогда $x^2 + \left(f(x)\right)^2 = 5x\left(f(x)\right)^3$.

Продифференцируем обе части данного равенства:

$$\left(x^2 + \left(f(x)\right)^2\right)' = \left(5x\left(f(x)\right)^3\right)' \Leftrightarrow$$

$$2x + 2f(x)f'(x) = 5\left(f(x)\right)^3 + 15x\left(f(x)\right)^2 f'(x) \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{2x - 5\left(f(x)\right)^3}{15x\left(f(x)\right)^2 - 2f(x)}$$

Отсюда находим, что $y' = \dfrac{2x - 5y^3}{15xy^2 - 2y}$.

Найдём y''. Имеем, что

$$y'' = \left(f'(x)\right)' = \left(\frac{2x - 5f^3(x)}{15xf^2(x) - 2f(x)}\right)' =$$

$$= \frac{\left(2 - 15f^2(x)f'(x)\right)\left(15xf^2(x) - 2f(x)\right)}{\left(15xf^2(x) - 2f(x)\right)^2} -$$

$$- \frac{\left(2x - 5f^3(x)\right)\left(15\left(f(x)\right)^2 + 2xf(x)f'(x) - 2f'(x)\right)}{\left(15xf^2(x) - 2f(x)\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(20f^3(x) - 75xf^4(x) - 60x^2 f(x) + 4x\right)f'(x) - 4f(x) + 75f^5(x)}{\left(15xf^2(x) - 2f(x)\right)^2}$$

Подставив в последнем равенстве значение $f'(x)$, окончательно получаем

$$f''(x) = \frac{1500xf^6(x) - 120x^3 + 150x^2 f^3(x) - 250f^5(x)}{\left(15xf^2(x) - 2\right)^3 f^2(x)},$$

Итак, $y' = \dfrac{2x-5y^3}{15xy^2-2y}$, $y'' = \dfrac{1500xy^6-120x^3+150x^2y^3-250y^5}{\left(15xy^2-2\right)^3 y^2}$. ◄

Тема 9. Дифференциал функции

План

1.Правила вычисления дифференциала
2.Дифференциалы высших порядков.
3.Формула Тейлора

Придадим аргументу x в точке x_0 приращение $\vartriangle x$, тогда функция $y = f(x)$ получит приращение

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0).$$

Если существует число A, такое, что $\Delta f = A\cdot\Delta x + o(\Delta x)$, то говорят, что $f(x)$ *дифференцируемая в точке* x_0. Линейная часть $A\cdot\Delta x$ приращения функции называется *дифференциалом функции в точке* x_0 и обозначается df или dy.

Если x – независимое переменное (т.е. не зависит от других переменных), то полагают $dx = \Delta x$.

Вычисление дифференциала

Правила дифференцировании функций аналогичны правилам нахождения производных. Для функций u, v и f справедливы свойства:

$$d(u+v)=du+dv; \qquad d(u-v)=du-dv;$$
$$d(uv)=udv+vdu; \quad d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{udv-vdu}{v^2}, v\neq 0;$$

Теорема1. Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 в том и только в том случае, если $f(x)$ имеет производную в этой точке. При этом $df = f'(x_0)dx$.

Задача. Найти дифференциал функции $f = x^3$

Решение

► Дифференциал df функции $f(x)$ находится по формуле $df = f'(x)dx$, поэтому

$$df = \left(x^3\right)' dx = 3x^2 dx. ◄$$

Задача. Найти дифференциал функции $f = 5\cos 3x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Решение

►По правилу нахождения дифференциала функции в точке, имеем $df = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)dx$.

Находим, $f'(x) = -15\sin 3x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -15\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 15$.

Следовательно, дифференциал df функции $f = 5\cos 3x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$ равен $15dx : df = 15dx$. ◄

Задача. Найти дифференциал функции $f = x\sin^2 x^3$.

Решение

►

$$df = f'dx = \left(x\sin^2 x^3\right)' dx =$$
$$= \left(\sin^2 x^3 + x \cdot 2\sin x^3 \cos x^3 \cdot 3x^2\right) dx =$$
$$= \left(\sin^2 x^3 + 3x^3 \sin^2 2x^3\right) dx$$

◄

Если в равенстве $\Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$ отбросить бесконечно малую величину $o(\Delta x)$, то получим приближённое равенство $\Delta f \approx df$, которое применяется для нахождения приближённого значения функции.

Задача. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенно значение x, если $g(-5) = -3$, $g(x) = -2{,}96$ и $g'(-5) = 2$.

Решение

►По определению приращение функции g(x): $\Delta g = g(x) - g(x_0)$. Заменим приращение функции дифференциалом, т.е. будем считать, что $\Delta g \approx dg$.

Тогда, $dg = g(x) - g(x_0)$.

Дифференциал dg функции $g(x)$ находится по формуле $dg = g'(x)dx$, поэтому

$$g'(x_0)\,dx = g(x) - g(x_0).$$

Учитывая, что $dx = \Delta x = x - x_0$, получаем

$$g'(x_0)\cdot(x - x_0) = g(x) - g(x_0) \Rightarrow 2\cdot\left(x - (-5)\right) = -2{,}96 - (-3)$$

Т.е.

$$2\cdot(x+5) = 0{,}02 \Leftrightarrow 2x + 10 = 0{,}02$$
$$\Leftrightarrow 2x = -9{,}88 \Leftrightarrow x = -4{,}98 \qquad ◄$$

Задача. Найти приближённое значение $\sqrt{15{,}75}$.

Решение

►Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x}$. Положим $x_0 = 16$, тогда $\Delta x = 15{,}75 - 16 = -0.25$.

Имеем, $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df$, где $f(x_0) = \sqrt{16} = 4$,

$$df = f'(x_0)\,dx, \quad dx = \Delta x = -1/4,$$

$$f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = 1/\left(2\sqrt{x}\right), \quad f'(x_0) = 1/\left(2\sqrt{16}\right) = 1/8.$$

Таким образом, $df = \dfrac{1}{8}\left(-\dfrac{1}{4}\right) = -1/32$.

Окончательно находим

$$\sqrt{15,75} \approx 4 - 1/32 = 127/32 = 3,96875 \approx 3,97 \text{ .} ◄$$

Дифференциалом второго порядка $d^2 f$ функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала df, где df рассматривается как функция от x: $d^2 f = d(df)$.

Дифференциалом третьего порядка $d^3 f$ называется дифференциал от второго дифференциала: $d^3 f = d\left(d^2 f\right)$ и т.д.

Если переменная x является независимой, то $d^2x = d^3x = \ldots = d^n x = \ldots = 0$. В этом случае $d^2 f = f''(x)(dx)^2$, $d^3 f = f'''(x)(dx)^3, \ldots, \; d^n f = f^{(n)}(x)(dx)^n, \ldots$

Для краткости вместо $(dx)^n$ принято писать dx^n, т.е. $d^n f = f^{(n)}(x)dx^n$.

Задача. Найти дифференциал $d^3 y$ функции $y = x^4 - 3x^2 + 4$.

Решение

► Последовательно дифференцируя, получаем

$$y'(x) = 4x^3 - 6x, \; y''(x) = 12x^2 - 6, \; y'''(x) = 24x.$$

Следовательно, $d^3 y = y'''(x)dx^3 = 24x dx^3$.◄

Формула Тейлора

Если функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и в этой окрестности имеет производные до $(n+1)$-го порядка включительно (т.е. дифференцируема $(n+1)$ раз), то справедлива ***формула Тейлора***

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x)$ – остаточный член, являющийся бесконечно малой величиной при $x \to x_0$.

Остаточный член обычно записывают в виде

$R_{n+1}(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$ (в форме Пеано)

или в виде

$R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ (в форме Лагранжа),

где c – некоторое число между x_0 и x.

Формула Тейлора допускает и другую запись через дифференциалы

$$\Delta f = \frac{df}{1!} + \frac{d^2 f}{2!} + \frac{d^3 f}{3!} + \cdots + \frac{d^n f}{n!} + R_{n+1}(x).$$

Формулу Тейлора применяют для приближенных вычислений.

Задача. Функцию $f(x)=e^{\sin x}$ в окрестности точки $x=0$ приближенно замените многочленом третьей степени.

Решение

► Положив в формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано $x_0=0$, получим

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+o(x^3),$$

Последовательно дифференцируя $f(x)$, получаем

$$f'(x)=\left(e^{\sin x}\right)'=\cos x\cdot e^{\sin x}\Rightarrow f'(0)=\cos 0\cdot e^{\sin 0}=1;$$

$$f''(x)=\left(\cos x e^{\sin x}\right)'=-\sin x\cdot e^{\sin x}+\cos^2 x\cdot e^{\sin x}\Rightarrow$$

$$f''(0)=0+\cos^2 0\cdot e^{\sin 0}=1;$$

$$f'''(x)=\left(\left(-\sin x+\cos^2 x\right)e^{\sin x}\right)'=$$

$$=\left(-\cos x-2\cos x\sin x\right)\cdot e^{\sin x}+\left(-\sin x+\cos^2 x\right)\cos x\cdot e^{\sin x}\Rightarrow$$

$$f'''(0)=\left(-1-0\right)\cdot 1+\left(-0+1\right)\cdot 1\cdot 1=0$$

Учитывая, что $f(0)=1$, имеем

$$f(x)=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{0}{3!}x^3+R_4(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)$$ ◄

Задача. С помощью формулы Тейлора найти приближённое значение sin 1 с точностью до 0,001.

Решение

►Введём в рассмотрение функцию $f(x)=\sin(x)$. Положив $x_0=0$, получим

$$f(1)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}+\frac{f''(0)}{2!}+\frac{f'''(0)}{3!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

где $0<c<1$(формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа).

Имеем

$$f(0)=\sin 0=0,\ f'(0)=\cos 0=1,\ f''(0)=-\sin 0=0,$$

$$f'''(0)=-\cos 0=-1,\quad f^{IV}(0)=\sin 0=0,\ \ldots,$$

$$\left|R_{n+1}\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\right|\le\frac{1}{(n+1)!}.$$

Для вычисления требуемого значения нужно взять n таким, чтобы $\left|R_{n+1}\right|<0{,}001$, или $\frac{1}{(n+1)!}<\frac{1}{1000}$; $(n+1)!>1000$.

Это неравенство достигается при $n=6$, так как $6!=720<1000$, а $7!=5040>1000$. Поэтому

$$\sin 1 \approx 1-\frac{1}{6}+\frac{1}{120}=\frac{101}{120}\approx 0{,}8417\approx 0{,}842 \quad \blacktriangleleft$$

Задача. Напишите разложение многочлена четвертой степени $P(x)$ по степеням $x-10$, используя формулу Тейлора. Найдите $P''(10)$, если $P(10)=4$, $P'(10)=1$, $P'''(10)=18$, $P^{(4)}(10)=48$ и $P(11)=11$.

Решение

► Положив в формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа $x_0=10$, получим

$$P(x)=P(10)+\frac{P'(0)}{1!}(x-10)+\frac{P''(0)}{2!}(x-10)^2+$$
$$+\frac{P'''(0)}{3!}(x-10)^3+\frac{P^{(4)}(0)}{4!}(x-10)^4+\frac{P^{(5)}(c)}{5!},$$

где $0<c<1$.

Учитывая, что по условию задачи степень многочлена равна четырем, а $P(10)=4$, $P'(10)=1$, $P'''(10)=18$, $P^{(4)}(10)=48$, имеем

$$P(x)=4+\frac{1}{1!}(x-10)+\frac{P''(0)}{2!}(x-10)^2+\frac{18}{3!}(x-10)^3+\frac{48}{4!}(x-10)^4=$$

$$=4+(x-10)+\frac{P''(0)}{2}(x-10)^2+\frac{18}{6}(x-10)^3+\frac{48}{24}(x-10)^4=$$

$$=x-6+\frac{P''(0)}{2}(x-10)^2+3(x-10)^3+2(x-10)^4$$

Так же нам известно, что $P(11)=11$. С другой стороны, по формуле Тейлора

$$P(11)=11-6+\frac{P''(0)}{2}(11-10)^2+3(11-10)^3+2(11-10)^4\Rightarrow$$

$$P(11)=\frac{P''(0)}{2}+11-6+3+2\Rightarrow$$

$$P(11)=\frac{P''(0)}{2}+10$$

Получаем, что $\dfrac{P''(10)}{2}+10=11\Rightarrow\dfrac{P''(10)}{2}=1\Rightarrow P''(10)=2$.◄

Тема 10. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя

План

1. Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$. *Первое правило Лопиталя*

2.Раскрытие неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$. *Второе правило Лопиталя*

3. Раскрытие неопределенностей вида $0\cdot\infty$ *и* $\infty-\infty$

4.Раскрытие неопределенностей вида $0^0, 1^\infty$ *и* ∞^0

Будем говорить, что отношение двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to a$ есть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0.$$

Раскрыть неопределенность – значит вычислить предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, если он существует, или установить, что он не существует.

Сформулируем ***первое правило Лопиталя***. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a. Пусть, далее,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \text{ и } g'(x) \neq 0$$

в указанной окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a. Тогда, если существует предел отношения производных $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный), то существует и предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем справедлива формула

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Замечание. Формула (правило Лопиталя) остается верной и в случае, когда $x \to a-0, x \to a+0, x \to \infty, x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

Задача. Найти предел $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-5x+4}$.

Решение

$$\blacktriangleright\ \lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-5x+4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{\left(x^2-16\right)'}{\left(x^2-5x+4\right)'}=\lim_{x\to 4}\frac{2x}{2x-5}=\frac{8}{3}\ .\blacktriangleleft$$

Задача. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

Решение

$$\blacktriangleright\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=\lim_{x\to 0}e^x=1.\ \blacktriangleleft$$

Задача. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(e-x)+x-1}$.

Решение

$$\blacktriangleright\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(e-x)+x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)'}{\left(\ln(e-x)+x-1\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{-\frac{1}{e-x}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{1+1}{-\frac{1}{e}+1}=\frac{2e}{e-1}.\ \blacktriangleleft$$

*Замечание***.** Если производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и сами функции $f(x)$ и $g(x)$, то правило Лопиталя можно применить повторно. При этом получаем:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Задача. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Решение

▶

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Напомним, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ и по первому замечательному пределу.◀

Задача. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

Решение

▶

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{\left(x^3\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{\left(3x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{6}.$$

◀

Будем говорить, что отношение двух функций $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to a$ есть неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, $+\infty$ или $-\infty$.

Сформулируем ***второе правило Лопиталя***. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a. Пусть, далее,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty \text{ и } g'(x) \neq 0$$

в указанной окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a. Тогда, если существует предел отношения производных $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный), то существует и предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем справедлива формула

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Замечание. Приведенное правило раскрытия неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ аналогично правилу раскрытия неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$. Замечания, относящиеся к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ остаются в силе и для всех других неопределенностей.

Задача. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2-11}{5x^2+4}$.

Решение

► $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2-11}{5x^2+4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(6x^2-11\right)'}{\left(5x^2+4\right)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x}{10x}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$. ◄

Задача. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$.

Решение

► $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$. ◄

Неопределенности вида $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$ можно свести к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Задача. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0+0}x\ln x$.

Решение

► Имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Так как $x\ln x=\frac{\ln x}{1/x}$, то получаем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя второе правило Лопиталя, имеем

$$\lim_{x\to 0+0} x\ln x = \lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0+0}\frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \lim_{x\to 0+0}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+0} x = 0. ◄$$

Задача. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0+0}\sqrt{x}\ln x$.

Решение

►

$$\lim_{x\to 0+0}\sqrt{x}\ln x = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{x^{-1/2}} = \lim_{x\to 0+0}\frac{(\ln x)'}{\left(x^{-1/2}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0+0}\frac{1/x}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}} = \lim_{x\to 0+0}\frac{-2x^{3/2}}{x} = -2\lim_{x\to 0+0} x^{1/2} = 0.$$

◄

Задача Найти предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x} - tgx\right)$.

Решение

►Имеем неопределенность вида $\infty - \infty$. Так как

$$\frac{1}{\cos x} - tgx = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1-\sin x}{\cos x},$$

то при том же условии $x \to \dfrac{\pi}{2}$ получаем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Воспользуемся первым правилом Лопиталя

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-tgx\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)'}{(\cos x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}=0.◀$$

Задача. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

Решение

▶

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1-\ln x)'}{((x-1)\cdot\ln x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{1-1/x}{\ln x+(x-1)/x}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x\ln x+x-1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{(x\ln x+x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+1+1}=\frac{1}{2}.$$

◀

Неопределенности вида $0^0, 1^\infty$ и ∞^0 имеют место при рассмотрении функций вида $y=f(x)^{g(x)}$, если при $x\to a$ функция $f(x)$ стремится к 0,1 и ∞, а функций $g(x)$ - соответственно к 0, ∞ и 0.

Эти неопределенности сводятся к неопределенности вида $0\cdot\infty$ с помощью тождества $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$.

Задача. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{e^x-1-x}}$.

Решение

Имеем неопределенности вида 1^{∞}. Так как

$\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{e^x-1-x}}=e^{\frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x}}$, то в показателе степени получена неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Применяя первое правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{e^x-1-x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\left(1+x^2\right)\left(e^x-1\right)}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{2x\left(e^x-1\right)+\left(1+x^2\right)e^x}=\frac{2}{1}=2.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{e^x-1-x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{e^x-1-x}}=e^2$. ◄

Задача Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tgx\right)^{2\cos x}$

Решение

► Имеем неопределенности вида ∞^0.

Так как $(tgx)^{2\cos x} = e^{2\cos x \ln tgx} = e^{\frac{2\ln tgx}{1/\cos x}}$, то в показатели степени получена неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя второе правило Лопиталя, имеем

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\ln tgx}{1/\cos x} = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\ln tgx)'}{(1/\cos x)'} = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{\cos^2 x}\cdot(-\sin x)} =$$

$$= 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{tgx\cdot\sin x} = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x\cdot\sin x} = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} = 2\cdot\frac{0}{1} = 0$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (tgx)^{2\cos x} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} 2\cos x \ln tgx} = e^0 = 1.$ ◄

Тема 11. Исследование функции. Построение графика функции

План

1. Возрастание и убывание функции. Точки экстремума
2.Интервалы выпуклости функции. Точки перегиба
3.Асимптоты. Нахождение горизонтальных и наклонных асимптот
4. Полное исследование функции и построение ее графика

Возрастание и убывание функции. Точки экстремума

Говорят, что функция $y = f(x)$ *возрастает (убывает) на интервале* $(a;b)$, если для любых различных точек x_1, x_2 из $(a;b)$ справедливо неравенство $(f(x_2) - f(x_1))(x_2 - x_1) > 0$

$\left(\left(f(x_2)-f(x_1)\right)\left(x_2-x_1\right)<0\right)$, т.е. если большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции**.**

Теорема 1 Если функция $f(x)$ дифференцируема на $(a;b)$ и $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) для любого $x\in(a;b)$, то $f(x)$ возрастает (убывает) на $(a;b)$.

Точка x_0 называется ***точкой максимума (минимума)*** функции $f(x)$, определённой в некоторой окрестности x_0, если существует некоторая окрестность $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ этой точки, такая, что для любого $x\in(x_0-\delta;x_0+\delta), x\neq x_0$ справедливо неравенство $f(x)<f(x_0)$ ($f(x)>f(x_0)$); при этом $f(x_0)$ называют ***максимумом (минимумом) функции***. Точки максимума и точки минимума называют ***точками экстремума***.

Теорема 2 (необходимое условие экстремума) Если функция $f(x)$ дифференцируема в промежутке $(a;b)$ и $x_0\in(a;b)$ является точкой экстремума $f(x)$, то $f'(x_0)=0$.

Точки, в которых $f'(x_0)=0$, называются ***стационарными точками*** $f(x)$. Не всякая стационарная точка является точкой экстремума.

Точкой экстремума $f(x)$ может оказаться и точка, в которой $f'(x)$ не определена. Стационарные точки и точки, в которых $f'(x)$ не определена, называют ***критическими точками*** функции.

Теорема 3 (достаточное условие экстремума) Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в окрестности стационарной точки

x_0. Если при переходе через точку x_0 производная функции $f'(x)$ меняет свой знак, то x_0 является точкой экстремума. А именно, если при переходе через точку x_0:

1) если $f'(x)$ меняет свой знак с минуса на плюс (т.е. $f'(x)(x-x_0)>0$ при достаточно малых значениях $|x-x_0|$, $x \neq x_0$), то x_0 является точкой минимума;
2) если $f'(x)$ меняет свой знак с плюса на минус (т.е. $f'(x)(x-x_0)<0$ при достаточно малых значениях $|x-x_0|$, $x \neq x_0$), то x_0 является точкой максимума функции;
3) если $f'(x)$ не меняет своего знака, то x_0 не является точкой экстремума.

Иногда удобно пользоваться другим достаточным условием экстремума.

Теорема 4 (достаточное условие экстремума) Пусть x_0 – стационарная точка функции $f(x)$, дважды дифференцируемой в точке x_0. Если $f''(x_0) \neq 0$, то x_0 является точкой экстремума. А именно, если:

1) $f''(x_0)>0$, то x_0 – точка минимума;
2) $f''(x_0)<0$, то x_0 – точка максимума.

Задача. Найти точки экстремума функции $f(x)=x^3-3x$.

Решение

► Найдем производную:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3\left(x^2 - 1\right) = 3(x+1)(x-1)$$

Производная определена при всех x. Найдём стационарные точки. Для этого решим уравнение

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x+1)(x-1) = 0$$

Стационарными точками являются $x_1 = 1, x_2 = -1$. При переходе через точку $x = 1$ (слева направо) производная $f'(x)$ меняет свой знак с «–» на «+», следовательно, $x = 1$ – точка минимума. При переходе через точку $x = -1$ производная $f'(x)$ меняет свой знак с «+» на «-», следовательно, $x = 1$ – точка максимума.

Далее находим значения функции в точках экстремума:

$$f_{\min} = f(1) = -2, f_{\max} = f(-1) = 2. \blacktriangleleft$$

Задача. Найти точки экстремума функции $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4}$.

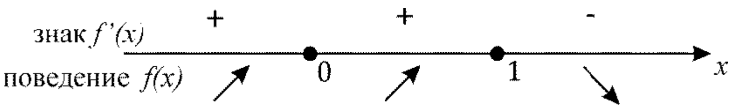
Решение

► Найдем производную: $f'(x) = x^2 - x^3 = x^2(1-x)$

Производная определена при всех x. Найдём стационарные точки. Для этого решим уравнение

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2(1-x) = 0$$

Таким образом, возможными точками экстремума являются точки: $x = 0, x = 1$. Рассмотрим знаки производной на интервалах $(-\infty;0),(0;1)$ и $(1;+\infty)$:



↗- функция возрастает
↘ - функция убывает

При переходе через критическую точку $x = 0$ (слева направо) производная $f'(x)$ не меняет свой знак, следовательно, точка $x = 0$ не является ни точкой минимума, ни точкой максимума.

При переходе через точку $x = 1$ (слева направо) производная $f'(x)$ меняет свой знак с «+» на «-», следовательно, $x = 1$ – точка максимума.

Находим значения функции в точках экстремума:

$$f_{\max} = f(1) = \frac{1}{12}. ◄$$

Задача. Найти точки экстремума функции $f(x) = x - \sqrt[3]{x^2}$.

Решение

►Найдем производную:

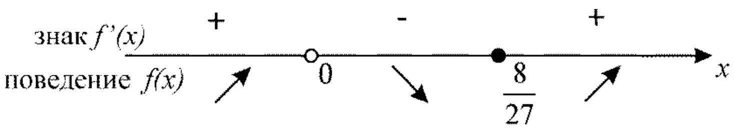
$$f' = \left(x - \sqrt[3]{x^2}\right)' = 1 - \frac{2}{3}x^{-1/3} = 1 - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{3\sqrt[3]{x} - 2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Находим критические точки функции:

$$f' = 0 \Rightarrow \frac{3\sqrt[3]{x} - 2}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3\sqrt[3]{x} - 2 = 0 \\ \sqrt[3]{x} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\sqrt[3]{x} = 2 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x} = \dfrac{2}{3} \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{8}{27} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Рассмотрим знаки производной на интервалах:



Отсюда получаем, что точка $x = 0$ – точка максимума, а точка $x = \dfrac{8}{27}$ - точка минимума.

Находим значения функции в точках экстремума:

$$f_{\min} = f\left(\frac{8}{27}\right) = \frac{8}{27} - \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{8}{27} - \left(\sqrt[3]{\frac{8}{27}}\right)^2 = \frac{8}{27} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{4}{27}$$

$$f_{\max} = f(0) = 0.$$

◄

Задача. Найти интервалы монотонности и исследовать на экстремум функцию $y = x^3 - 9x^2 + 24x$.

Решение

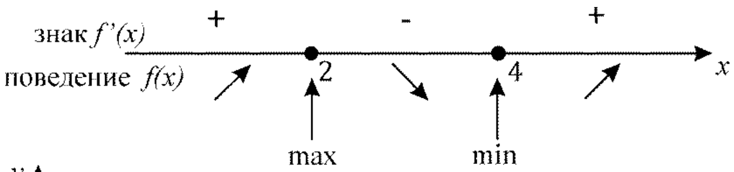
► Находим критические точки:

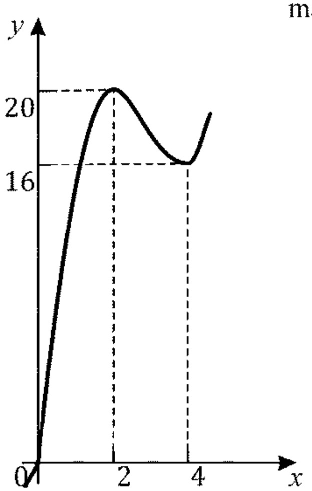
1. $y' = 3x^2 - 18x + 24 = 3\left(x^2 - 6x + 8\right) = 3(x-2)(x-4)$;

2. $y' = 0 \Rightarrow 3(x-2)(x-4) = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 4$;

Производная определена всюду, следовательно, других критических точек нет.

3.Изменение знака производной, поведение функции и точки экстремума изображены на следующем рисунке:





4.Находим значение функции в точках экстремума:

$f_{\min} = f(4) = 16, f_{\max} = f(2) = 20.$

5.Эскиз графика функции:

◄

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[a, b]$ находят значения функции в критических точках, принадлежащих этому отрезку, и на концах отрезка, после чего сравнивают эти значения и выбирают наибольшее и наименьшее.

Задача. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4 - 8x^2$ на отрезке [–1; 3].

Решение

►1. Найдем производную:

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x-2)(x+2).$$

2.Производная существует при всех *x*. Найдем стационарные точки:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -2.$$

Отрезку [–1; 3] принадлежат точки $x_1 = 0, x_2 = 2$.

3.Вычисляем значения функции в точках $x = -1, x = 0$, $x = 2, x = 3$:

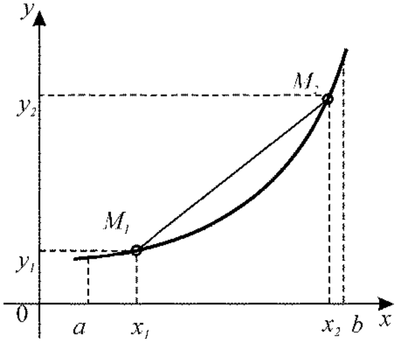
$$f(-1) = -7; f(0) = 0; f(2) = -16; f(3) = 9.$$

Сравнив полученные значения, находим:

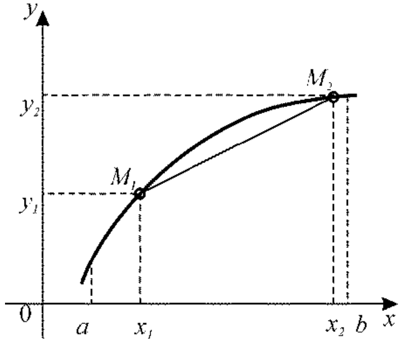
$$\max_{x\in[-1;\,3]} f(x) = f(3) = 9, \quad \min_{x\in[-1;\,3]} f(x) = f(2) = -16. \ ◄$$

Интервалы выпуклости функции. Точки перегиба

Дифференцируемая функция $y = f(x)$ называется *выпуклой (вогнутой) или выпуклой вверх (вниз) на интервале* $(a;b)$, если она удовлетворяет следующему условию: для любых различных точек $x_1, x_2 \in (a;b)$ часть графика функции $y = f(x)$, соответствующая интервалу $(x_1; x_2)$, расположена выше (ниже) отрезка M_1M_2, где $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$



функция выпукла вниз на отрезке



функция выпукла вверх на отрезке

Точка графика функции, разделяющая выпуклый и вогнутый участки графика, называется *точкой перегиба* (часто точкой перегиба называют абсциссу этой точки графика функции).

Теорема 5 Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале $(a;b)$. Тогда, если $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) для всех $x \in (a;b)$, то функция $f(x)$ является выпуклой (вогнутой) на $(a;b)$.

Теорема 6 Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на $(a;b)$. Точка $x_0 \in (a;b)$ является точкой перегиба в том и только в том случае, если одновременно выполняются два условия:

(1) $f''(x_0) = 0$;

(2) при переходе через точку x_0 $f''(x)$ меняет свой знак.

В последней теореме при условии трижды дифференцируемости функции условие (2) можно заменить на $f'''(x_0)\neq 0$.

Задача. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $y=\dfrac{1}{x^2+1}$.

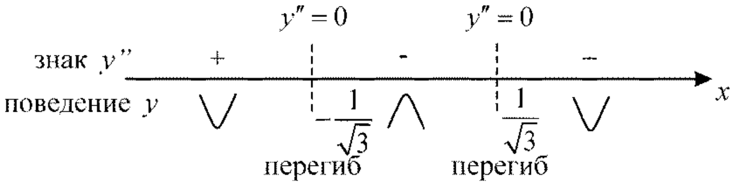
Решение

►1.Находим вторую производную:

$$y''=(y')'=\frac{2\left(3x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^3}.$$

2.Вторая производная определена при любом *x*, и обращается в нуль при $x_1=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, x_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

3.Проверим являются ли найденные точки – точками перегиба графика функции. Для этого определим знак второй производной на получившихся интервалах: $\left(-\infty;-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$. Рисуем схему:



На интервалах $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$ функция выпукла вниз, на интервале $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ - выпукла вверх. В точках $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}, x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ функция имеет перегибы.

4.Находим ординаты точек перегиба: $y\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{3}{4}$.◄

Асимптоты

Прямая $x=x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y=f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

Прямая $y=kx+b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y=f(x)$ при $x\to\infty$, если $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)-(kx+b)\big)=0$.

Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$, если $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x) - (kx+b)\right) = 0$.

Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - (kx+b)\right) = 0$.

При $k = 0$ наклонная асимптота называется *горизонтальной*.

Нахождение горизонтальных и наклонных асимптот

1. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Если этот предел существует и равен числу b, то $y = b$ - горизонтальная асимптота. Если предел не существует или равен бесконечности, то перейти к п.2.
2. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$. Если этот предел не существует или равен бесконечности, то наклонной асимптоты нет. Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k$, то перейти к п.3.
3. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right)$. Если этот предел не сущесвует или равен бесконечности, то асимптоты нет. Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right) = b$, то перейти к п.4.
4. Записать уравнение наклонной асимптоты $y = kx + b$.

Замечание. данный алгоритм позволяет найти прямую, являющуюся асимптотой при $x \to \infty$, то есть и при $x \to -\infty$, и при $x \to +\infty$. На практике функция может иметь разные асимптоты при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$, или иметь асимптоту только в одном из случаев.

Поэтому на практике искать асимптоты не при $x \to \infty$, а при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$, применяя данный алгоритм.

Задача. Найти асимптоты графика функции $y = x + \dfrac{1}{x}$.

Решение

► Положим $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

1.Точка $x = 0$ является точкой разрыва данной функции. Найдем пределы $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to 0-} f(x)$. Имеем

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-}\left(x + \frac{1}{x}\right) = -\infty, \lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+}\left(x + \frac{1}{x}\right) = +\infty.$$

Т.е. прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой.

2. Найдем наклонные асимптоты.

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$

Следовательно, горизонтальных асимптот нет.

2) $k=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+\frac{1}{x}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)=1$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{x}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

Следовательно, прямая $y=x$ - наклонная асимптота графика функции и при $x\to-\infty$.

3) $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+\frac{1}{x}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)=1$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Следовательно, прямая $y=x$ - наклонная асимптота графика функции при $x\to+\infty$.◄

Задача. Найти асимптоты графика функции $f(x)=\dfrac{|x|(x-1)}{x+1}$.

Решение

►1. Точка $x=-1$ является точкой разрыва данной функции. Найдем пределы $\lim\limits_{x\to1+}f(x)$ и $\lim\limits_{x\to1-}f(x)$. Имеем

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to -1-}\left(\frac{|x|(x-1)}{x+1}\right) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to -1+}\left(\frac{|x|(x-1)}{x+1}\right) = +\infty.$$

Т.е. прямая $x=-1$ является вертикальной асимптотой.

2. Найдем наклонные асимптоты.

Напомним, что $|x| = \begin{cases} x, x \ge 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$.

Поэтому, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x(x-1)}{x+1}, x \ge 0 \\ \dfrac{-x(x-1)}{x+1}, x < 0 \end{cases}$.

1) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x(x-1)}{x+1}\right) = +\infty$,

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\left(-\frac{x(x-1)}{x+1}\right) = -\infty$$

Следовательно, горизонтальных асимптот нет.

2) $k = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x(x-1)}{x(x+1)}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = 1$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x(x-1)}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-x^2-x}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x+1}=-2$$

Следовательно, прямая $y=x-2$ - наклонная асимптота графика функции при $x\to+\infty$.

$$3)\ k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x(x-1)}{x(x+1)}\right)=\lim_{x\to=\infty}\left(-\frac{x-1}{x+1}\right)=-1$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x(x-1)}{x+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+x+x^2+x}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x+1}=2$$

Таким образом, прямая $y=-x+2$ - наклонная асимптота графика функции при $x\to-\infty$.◄

Полное исследование функции и построение ее графика

График функции, заданной формулой $y=f(x)$, строится по точкам, которые затем соединяются линией. Но если брать точки, как попало, то можно допустить грубую ошибку, пропустив какие-то важные особенности графика.

Чтобы построить график с помощью небольшого числа точек, полезно предварительно выяснить его характерные особенности по следующей общепринятой схеме:

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функции на периодичность.

3. Исследовать функцию на четность.
4. Найти точки пересечения графика с осями координат.
5. Найти точки разрыва.
6. Исследовать поведение функции на границах области определения. Найти асимптоты.
7. Найти промежутки возрастания и убыванию функции, точки экстремума.
8. Исследовать направление выпуклости графика функции, найти точки перегиба.
9. Вычислить значения функции для некоторых значений ее аргумента.
10. Используя все полученные результаты, построить график функции

Задача. Построить график функции $y=\dfrac{x^3}{x^2-4x-32}$.

Решение

►

1. Область определения функции:

$$D(f)=(-\infty;-4)\cup(-4;8)\cup(8;+\infty)$$

2. Функция не является периодической.
3. $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-4(-x)-32}=\dfrac{-x^3}{x^2+4x-32}\Rightarrow f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$. Следовательно, функция является функцией общего положения.
4. Найдем точки пересечения функции с осями координат и определим интервалы знакопостоянства функции. Для того, чтобы найти точки пересечения с осью 0x, приравняем

функцию к нулю. Получим $\dfrac{x^3}{x^2-4x-32}=0 \Rightarrow x=0$. Для нахождения общей точки графика функции и оси 0у следует найти $f(0)$: $f(0)=\dfrac{0}{-32}=0$.

5. Функция непрерывна всюду, за исключением нулей знаменателя: $x=-4$ и х = 8. Найдём левые и правые пределы в этих точках.

Для точки $x=-4$:

$$\lim_{x\to -4-0} f(x)=\lim_{x\to -4-0}\frac{x^3}{(x+4)(x-8)}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to -4+0} f(x)=\lim_{x\to -4+0}\frac{x^3}{(x+4)(x-8)}=+\infty.$$

Отсюда получаем, что $x=-4$ является точкой разрыва второго рода.

Для точки $x=8$:

$$\lim_{x\to 8-0} f(x)=\lim_{x\to 8-0}\frac{x^3}{(x+4)(x-8)}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 8+0} f(x)=\lim_{x\to 8+0}\frac{x^3}{(x+4)(x-8)}=+\infty.$$

Поэтому $x=8$ является точкой разрыва второго рода.

6. Из п.5. получаем, что $x = -4$ и $x = 8$ - вертикальные асимптоты графика функции.

   Найдем наклонные асимптоты.

   1) При $x \to -\infty$:

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4x - 32} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - kx \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 4x - 32} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2 - 32x}{x^2 - 4x - 32} = 4.$$

   Таким образом, прямая $y = x + 4$ является наклонной асимптотой при $x \to -\infty$.

   2) Аналогично, получаем, что при $x \to +\infty$ прямая $y = x + 4$ так же является наклонной асимптотой.

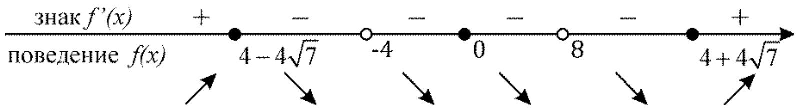
7. Найдем производную y'. Имеем

$$y' = \left(\frac{x^3}{x^2 - 4x - 32} \right)' = \frac{x^2 \left(x^2 - 8x - 96 \right)}{(x+4)^2 (x-8)^2} =$$

$$= \frac{x^2 \left(x - 4 + 4\sqrt{7} \right) \left(x - 4 - 4\sqrt{7} \right)}{(x+4)^2 (x-8)^2}.$$

Приравнивая производную к нулю, находим критические точки: $\dfrac{x^2\left(x-4+4\sqrt{7}\right)\left(x-4-4\sqrt{7}\right)}{(x+4)^2(x-8)^2}=0$,

откуда $x_1=4-4\sqrt{7}$, $x_2=4+4\sqrt{7}$, $x_3=0$, $x_4=-4, x_5=8.$



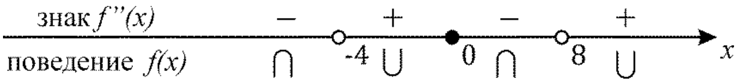
Из схемы следует, что функция возрастает на промежутках $\left(-\infty; 4-4\sqrt{7}\right)$ и $\left(4+4\sqrt{7};+\infty\right)$ и убывает на промежутках $\left(4-4\sqrt{7};-4\right)$, $(-4;8)$, $\left(8;4+4\sqrt{7}\right)$. Следовательно, точка $x=4-4\sqrt{7}$ является точкой максимума, а точка $x=4+4\sqrt{7}$ – точкой минимума. Найдем ординаты экстремальных точек:

$y_{\max}=f(4-4\sqrt{7})=-7{,}57$; $y_{\min}=f(4+4\sqrt{7})=25{,}35$.

8. Найдем вторую производную:

$$y''=(y')'=\frac{96x\left(x^2+8x+64\right)}{(x+4)^3(x-8)^3}.$$

Вторую производная равна нулю при x=0.



Из схемы (следует, что функция выпукла в интервалах (–∞; –4) и (0; 8) и вогнута в интервалах (–4; 0) и (8; +∞).

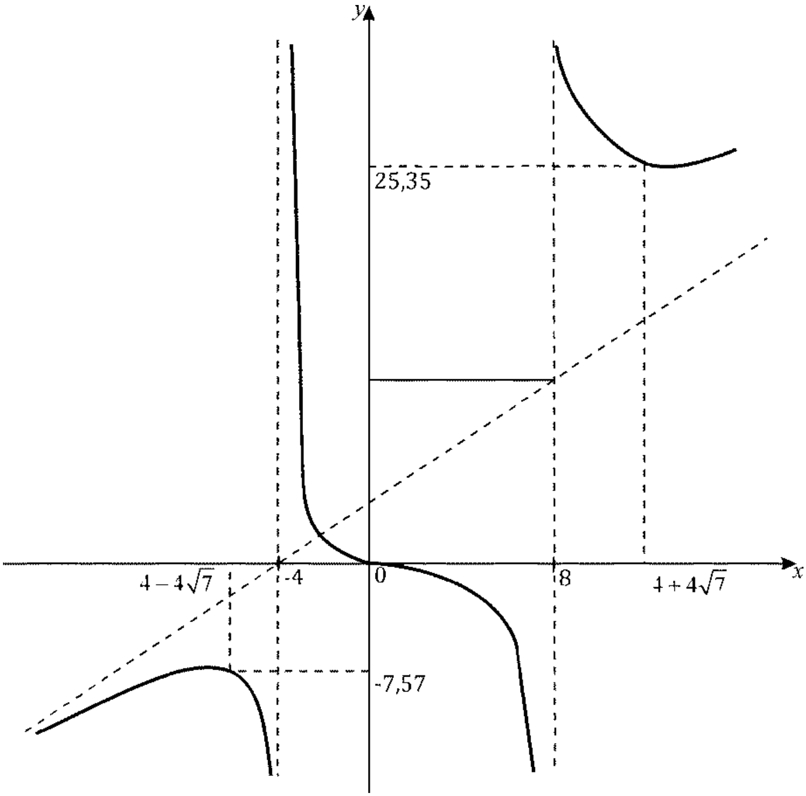
При переходе через точки – 4, 8, 0 y'' меняет свой знак. Поэтому точка x = 0 является точкой перегиба (в точках x = –4, x = 8 функция не определена).

9. Сгруппируем все полученные данные в виде таблицы и построим график функции:

x	$\left(-\infty; 4-4\sqrt{7}\right)$	$4-4\sqrt{7}$	$\left(4-4\sqrt{7}; -4\right)$	-4	$(-4;0)$
y'	+	0	-	не сущ	-
y''	-	-	-	не сущ	+
y	↑∩	$y_{\max} = -7{,}57$	↓∩	не сущ	↓∪

x	0	$(0;8)$	8	$\left(8; 4+4\sqrt{7}\right)$	$4+4\sqrt{7}$	$\left(4+4\sqrt{7}; +\infty\right)$
y'	0	-	не сущ	-	0	+
y''	0	-	не сущ	+	+	+
y	0,	↓ ∩	не сущ	↓∪	$y_{\min} = 25{,}35$	↑∪

	перегиб					



Задача. Построить график функции $y = e^{-(x-2)^2}$.

Решение

1. Область определения $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2. Функция не является периодической.

3. $f(-x)=e^{(-x-2)^2}=e^{(x+2)^2} \Rightarrow f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$. Следовательно, функция является функцией общего положения.

Найдем точки пересечения функции с осями координат и определим интервалы знако постоянства функции. Для того, чтобы найти точки пересечения с осью 0, приравняем функцию к нулю. Получим $e^{-(x-2)^2}=0$.

Данное уравнение корней не имеет, следовательно функция не имеет общих точек с осью 0х. Для нахождения общей точки графика функции и оси 0у следует найти $f(0)$: $f(0)=e^{-4}\approx 0,0183$.

4. Функция является суперпозицией непрерывных функций, поэтому она непрерывна на всей числовой оси.
5. Из п.5. следует, что вертикальных асимптот нет. Найдем наклонные асимптоты:

1)При $x\to-\infty$:

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-(x-2)^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{xe^{(x-2)^2}}=0,$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to-\infty}e^{-(x-2)^2}=0.$$

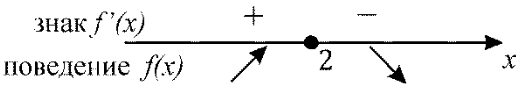
Таким образом, прямая $y=0$ является наклонной асимптотой функции при $x\to-\infty$.

2)Аналогично, получаем, что при $x\to+\infty$ прямая $y=0$ так же является наклонной асимптотой.

6. Найдем производную y'. Имеем

$$y' = \left(e^{-(x-2)^2}\right)' = -2(x-2)e^{-(x-2)^2}.$$

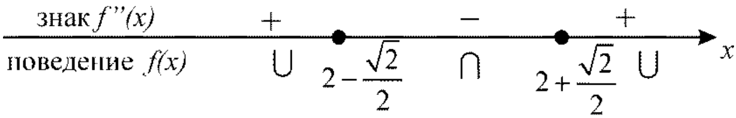
Приравнивая производную к нулю, находим критические точки: $x = 2$.



Из схемы следует, что функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке (–∞; 2) и убывает на промежутке (2; +∞), точка $x = 2$ является точкой максимума. Максимум функции равен $f(2) = 1$.

7. Найдем вторую производную:

$$y'' = (y')' = 2\left(2x^2 - 8x + 7\right)e^{-(x-2)^2}.$$



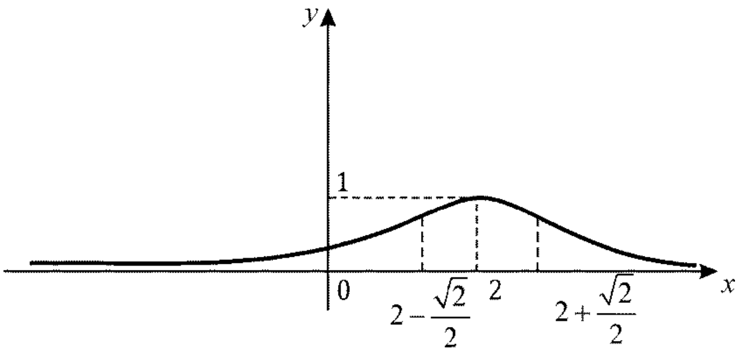
Функция y'' имеет нули $x = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. Из схемы следует, что функция выпукла на интервале $\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}; 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и вогнута на интервалах $\left(-\infty; 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

$\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$. Точки $x=2-\frac{\sqrt{2}}{2}, x=2+\frac{\sqrt{2}}{2}$ являются точками перегиба. Вычислим значение функции в точках перегиба: $f\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=e^{-0,5}\approx 0,61$

8. Сгруппируем все полученные данные в виде таблицы и построим график функции:

x	$\left(-\infty;2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$2-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2};2\right)$	2
y'	+	+	+	0
y''	+	0	-	-
y	$\uparrow\cup$	0,61: перегиб	$\uparrow\cap$	$y_{\max}=1$

x	$\left(2;2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$2+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$
y'	-	-	-
y''	-	0	+
y	$\downarrow\cap$	0,61: перегиб	$\downarrow\cup$



Задачи для самостоятельного решения

Установите соответствие между заданными числами и множествами, которым они принадлежат:

1. $x=-10$ $\qquad A=\{x\in\mathbb{Z}:-14<x<-9\}$

$x=\sqrt{14}$ $\qquad B=\{x\in\mathbb{R}:2{,}1<x\le 4{,}85\}$

$x=6$ $\qquad C=\{x\in\mathbb{N}:4\le x<7\}$

$x=-6{,}3$ $\qquad D=\{x\in\mathbb{R}:-7{,}1\le x<-6{,}2\}$

$E=\{x\in\mathbb{N}:-10\le x<6\}$

2. $x=-15$ $\qquad A=\{x\in\mathbb{Z}:-15<x<0\}$

$x=\sqrt{7}$ $\qquad B=\{x\in\mathbb{R}:-3<x\le -2{,}5\}$

$x=6$ $\qquad C=\{x\in\mathbb{N}:-15\le x<6\}$

$x=-2{,}7$ $\qquad D=\{x\in\mathbb{R}:-1<x\le 3\}$

$E=\{x\in\mathbb{N}:1\le x<7\}$

Установите соответствие между списками двух множеств, заданных различным образом:

3. $A=\{x: x^2-2x-8=0\}$ $\quad$ $I_1=(-\infty;-2]\cup[4;\infty)$

$B=\{x: x^2-2x-8>0\}$ $\quad$ $I_2=[-2;4]$

$C=\{x: x^2-2x-8<0\}$ $\quad$ $I_3=(-\infty;-2)\cup(4;\infty)$

$D=\{x: x^2-2x-8\le 0\}$ $\quad$ $I_4=(-2;4)$

$I_5=\{-2;4\}$

4. $A=\{x: x^2+9x-22=0\}$ $\quad$ $I_1=(-\infty;-11]\cup[2;\infty)$

$B=\{x: x^2+9x-22>0\}$ $\quad$ $I_2=[-11;2]$

$C=\{x: x^2+9x-22<0\}$ $\quad$ $I_3=(-\infty;-11)\cup(2;\infty)$

$D=\{x: x^2+9x-22\le 0\}$ $\quad$ $I_4=(-11;2)$

$I_5=\{-11;2\}$

5. $A=\{x: 6x^2-5x-1=0\}$ $\quad$ $I_1=\left(-\infty;-\frac{1}{6}\right]\cup[1;\infty)$

$B=\{x: 6x^2-5x-1>0\}$ $\quad$ $I_2=\left[-\frac{1}{6};1\right]$

$C=\{x: 6x^2-5x-1<0\}$ $\quad$ $I_3=\left(-\infty;-\frac{1}{6}\right)\cup(1;\infty)$

$D=\{x: 6x^2-5x-1\le 0\}$ $\quad$ $I_4=\left(-\frac{1}{6};1\right)$

$I_5=\left\{-\frac{1}{6};1\right\}$

Укажите множества, являющиеся ε -окрестностью точки x_0:

6. $x_0=-2$, $I_1=(-4;0]\setminus[-3;-2]$, $I_2=(-3;0)\cup(-4;-1]$, $I_3=(-3;0)\cap(-4;-1]$, $I_4=[-3;0)\setminus[-2;1)$.

7. $x_0=2$, $I_1=(0;3]\cup[1;4)$, $I_2=(0;3)\cap(1;4)$, $I_3=(1;3)\setminus[-2;2]$, $I_4=(0;3)\setminus[2;3)$.

8. Найдите $A\cup B, A\cap B, A\cap C, B\cup C,\ \ A\cap B\cap C,\ (A\cup B)\cap C$ и изобразите эти множества на координатной прямой, если $A=[0;3];\ \ B=(1;5); C=(-2;0]$.

9. Найдите $A\cup B, A\cap B, A\cap C, B\cup C,\ \ A\cap B\cap C,\ (A\cup B)\cap C$ и изобразите эти множества на координатной прямой, если $A=[-\infty;1]$; $B=[1;+\infty]$; $C=(0;1)$.

10. Даны функции $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$ и $g(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$. Найти: $f(0); f(1);\ \ f(2); f(-2); f\left(-\dfrac{1}{2}\right); f(\sqrt{2}); g(0); g(1); g(2); g(4).$

11. Дано: $y=z^2, z=x+1$. Выразить y как функцию x.

Найти области определения следующих функций:

12. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-5x}}$.

13. $f(x)=\dfrac{tgx}{3x^2-2x-1}$, если $x\in[-\pi;\pi]$.

14. $f(x)=\log_{\frac{x+1}{2x}}(3+5x-2x^2)$.

15. $f(x)=2^{\frac{1}{x}}+\arcsin\dfrac{x+2}{3}$.

16. $f(x)=\dfrac{5}{\sqrt[3]{2x-x^2}}-7\cos 2x$.

17. $f(x)=\dfrac{\log_5\left(x^2+4x\right)}{\sqrt{25-x^2}}$.

Исследовать функцию на четность и нечетность:

18. $f(x)=\cos x+x\sin x$.

19. $f(x)=x\cdot 2^{-x}$.

20. $f(x)=3^{-x}-3^{x}$.

21. $f(x)=\left(x-2\right)^{\frac{2}{3}}+\left(x+2\right)^{\frac{2}{3}}$

22. $f(x)=2x\sin^2 x-3x^3$.

23. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

24. $f(x)=x\cdot 4^{-x^2}$.

25. $f(x)=5\log_2\left(x+1\right)$.

Найти наименьший период функции:

26. $y=\sin 4x$.

27. $y=tg\,\dfrac{x}{2}$.

28. $y=\sin x+\cos 2x$.

29. $y=\sin(3x+1)$.

30. $y=\sin^2\dfrac{x}{3}$.

31. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

32. $y=\cos^2 3x$.

33. $y=\left|\sin x\right|$.

34. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентным соотношением $a_{n+1} = 5a_n - 4, a_1 = 2$. Найти пятый член этой последовательности.

Написать первые десять членов последовательностей с общими членами:

35. $a_n = \dfrac{n}{n+2}$.

36. $a_n = \dfrac{2n}{3n-2}$.

37. $a_n = n!$.

38. $a_n = -2^n$.

39. $a_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$.

40. $a_n = \dfrac{1}{(3n-1)(3n+1)}$.

41. $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$.

42. $a_n = \dfrac{1}{2^n}$.

43. $a_n = \sin\dfrac{\pi n}{2}$.

Написать формулу общего члена последовательности по данным ее первым членам:

44. $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{12}, \dfrac{1}{15}, \ldots$

45. $\dfrac{1}{3\cdot4}, \dfrac{1}{5\cdot6}, \dfrac{1}{7\cdot8}, \dfrac{1}{9\cdot10}, \ldots$

46. $\dfrac{1}{6}, \dfrac{4}{11}, \dfrac{7}{16}, \dfrac{10}{21}, \dfrac{13}{26}, \ldots$

47. $\dfrac{3}{5}, \dfrac{7}{8}, \dfrac{11}{11}, \dfrac{15}{14}, \dfrac{19}{17}, \ldots$

48. $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{27}, \dfrac{1}{81}, \dfrac{1}{243}, \dfrac{1}{729}, \ldots$

49. $0, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{4}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{6}, \dfrac{5}{7}, \ldots$;

Найти пределы:

50. $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^3+5x^2+6x+1\right)$

51. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4}{x^2+x-3}$

52. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x+2}{x^2-1}$

53. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$

54. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2+x-3}$

55. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+4x-1}{3x^2+x+2}$

56. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5x^2}{1-x^2}+4^{\frac{1}{x}}\right)$.

57. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$.

58. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+2x}-1}$.

59. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x+4}$

60. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x-4}{x-2}$

61. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$.

62. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^2+5x+1}{3+14x^2+2x}$.

63. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^3-7x}{1-2x^3}$

64. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x-3}{x^2+2}$

65. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3+4}{x^2+5}$

66. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}-x}{3x+5}$

67. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\left(x^2+1\right)^{50}}{\left(x+1\right)^{100}}$.

68. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x^2+1}{1-x^2}+4^{\frac{1}{x-1}}\right)$

69. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

70. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{19x}$.

71. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x^2)}{7x^2+x}$.

72. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$

73. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(4x)}{x^2+x^3}$

74. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\cos x-\sin x}$;

75. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 10x}{\sin 9x}$.

76. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-3x+1}\right)$

77. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

78. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)$

79. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2-3x-4}\right)$

80. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right).$

81. $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4}{x^2-4}\right).$

82. $\lim\limits_{x\to\infty}5^{\frac{2x}{x+3}}.$

83. $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{1-2\sin x}{\pi/6-x}.$

84. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}.$

85. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}.$

86. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

87. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x^2-5}\right)^{x^2}$

88. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{2x^2}$

Определить при $x\to0$ порядки малости бесконечно малых функций относительно бесконечно малой функции x:

89. $\dfrac{x^5}{x^7+1}\arcsin x.$

90. $\ln\dfrac{1+x}{1-x}.$

91. $\left(2^x-1\right)\ln\left(1+\sin 5x\right)$

92. $\left(3^x-1\right)\ln\cos 2x.$

Пользуясь методом замены бесконечно малых эквивалентными, найти пределы:

93. $\lim\limits_{x\to1/2}\dfrac{arctg(2x-1)}{4x^2-1}.$

94. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\sqrt[5]{\cos 2x}-1}.$

95. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-2x}-1}{\arcsin x}.$

96. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{2^{\sin 3x}-1}.$

97. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{3x}+x\right)^{1/x}$.

98. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin 2x}{\sin 5x-\sin 4x}$

99. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{2x}$.

100. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-9}+4^{-\frac{1}{(x-3)^2}}\right)$

101. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{\dfrac{1}{\cos 2x}-1}$

102. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\sqrt{1-3x^2}-1}$

103. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt[5]{x}-1\right)\left(2^{x-1}-1\right)}{\cos(x-1)-1}$

104. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3tgx\right)^{\frac{2}{\sin x}}$.

105. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\left(tgx\right)^{tg\,2x}$

106. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 3x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

Найти и классифицировать точки разрыва:

107. $y=-\dfrac{6}{x}$.

108. $y=2-\dfrac{|x|}{x}$.

109. $y=\dfrac{1}{1+2^{1/x}}$.

110. $y=\dfrac{x^3-x^2}{2|x-1|}$.

111. $y=\dfrac{4}{4-x^2}$.

112. $y=1-2^{1/x}$.

113. Найти по определению производные функций:

а) $y=x^2$; б) $y=x^4$; в) $y=\dfrac{1}{x^2}$; г) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; д) $y=\cos\dfrac{x}{2}$;

е) $y=\frac{1}{3x+4}$; ж) $y=\sqrt{1+x^2}$; з) $y=x\cdot\sin x$.

Найти производную функции:

114. $y=x^4+3x^2-2x+1$

115. $y=7x^7+3x^2-4x+1$

116. $y=3\sqrt{x}+4\cos x-2tgx+3$

117. $y=4x^2+\sin x+\ln x+\frac{1}{x^2}$

118. $y=x\cdot\sin x$

119. $y=\ln tg\,\frac{2x+1}{4}$

120. $y=\sin 2x-\cos^2 x$

121. $y=\sqrt{3x+\cos 3x}$

122. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2-3}\right)$

123. $y=3^{\cos^2 x}$

124. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\,\frac{x}{\sqrt{2}}$

125. $y=\frac{1}{6\sqrt{2}}\arcsin\frac{x^3}{\sqrt{8}}$

126. $y=\ln\frac{x^2}{1-x^2}$

138. $y=\sqrt[3]{\ln^5\sin\left(\frac{3}{5}x\right)}$

127. $y=\ln\left(3x^2+\sqrt{9x^4+1}\right)$

128. $y=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)$

129. $y=\frac{1}{2}e^{x^2}\left(\sin 2x+\cos 2x\right)$

130. $y=\frac{2^x}{\ln 2}\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)$

131. $y=tg^3\,\frac{x}{3}$

132. $y=2^{3x^2}+\ln\sin x$

133. $y=\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$

134. $y=\ln\sin(3x+2)$

135. $y=\frac{e^{-x^2}}{x-3}$

136. $y=\arcsin\sqrt{2x+1}$

137. $y=\ln\operatorname{arc\,tg}\sqrt{1+x^2}$

Указание. В примерах 24. – 27. прежде чем вычислять производную, целесообразно выполнить логарифмирование.

139. $y = \left(3x^2 + 3x - 1\right)^x$

140. $y = (x+1)^{\ln x}$

141. $y = \dfrac{2^x \sqrt{4x+1}}{\left(2x-1\right)^3 \sqrt[3]{x^3+2}}$

142. $y = \dfrac{\left(x^2-1\right)^3 \arcsin\sqrt{x}}{x^4\left(3x+2\right)}$

Найти производные второго порядка:

143. $y = tgx$

144. $y = \dfrac{1}{5}x^5\left(5\ln x - 1\right)$

145. $y = \sqrt{1+x^2}\,arctgx$

Найти производные третьего порядка:

146. $y = x\ln x$

147. $y = \arcsin x$

148. $y = xe^{-x}$

Найти $y'_x(t)$ и $y''_{xx}(t)$ функции, заданной параметрически:

149. $x(t) = 3\cos t, y(t) = -2\sin t$

150. $x(t) = t^2, y(t) = \dfrac{t^3}{3} - t$

151. $x(t) = e^{2t}, y(t) = e^{3t}$

152. $x(t)=t^2,\ y(t)=t^3+t$

153. $x(t)=4\cos^3 t,\ y(t)=4\sin^3 t$

154. $x(t)=\dfrac{1-t}{(t+1)^2},\ y(t)=\dfrac{t(1-t)}{(t+1)^2}$

155. $x(t)=\dfrac{t}{t^2+1},\ y(t)=\dfrac{t^2}{t^2+1}$

Найти производные неявно заданных функций:

156. $x^2y^4+10=3x^4y^3+x^5-5$

157. $x^3+x^2y-4=2x^2y^2-6x+1$

158. $e^{xy}=\ln\left(y^2+x^2\right)$

159. $\arcsin y=x^2y^3-7yx^2$

Найти дифференциал функции:

160. $y=x^5$

161. $y=tgx$

162. $y=\sin^3 2x$

163. $y=\ln x$

164. $y=\ln\left(\sin\sqrt{x}\right)$

165. $y=e^{-\frac{1}{\cos x}}$

166. $y=2^{-x^2}$

Найти дифференциал функции в точке x_0:

167. $y = x^{-4}, x_0 = -1$

168. $y = x^3 - 3x^2 + 3x, x_0 = 0$

169. $y = \sqrt{1+x^2}, x_0 = -3$

170. $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}, x_0 = 2$

171. $y = \ln\cos x, x_0 = \frac{\pi}{4}$

172. $y = e^{-2x}, x_0 = -\frac{1}{2}$

173. $y = \sqrt{x} + 1, x_0 = 4$

174. $y = arctg\sqrt{4x-1}, x_0 = 3$

Найти дифференциал второго порядка:

175. $y = ctgx$

176. $y = \cos^2 x$

177. $y = \ln(2x-3)$

Найти дифференциал третьего порядка:

178. $y = e^x \cos x$

179. $y = x\ln x$

180. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенно значение *x*, если $g(5) = 2$, $g(x) = 2{,}04$ и $g'(5) = -4$.

181. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенно значение *x*, если $g(-5) = 2$, $g(x) = 2{,}04$ и $g'(-5) = -4$.

182. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенно значение *x*, если $g(-3) = 5$, $g(x) = 5{,}04$ и $g'(-3) = -2$.

183. Напишите разложение функции $f(x) = \frac{1}{x-2}$ по степеням $x-1$ до члена четвертого порядка включительно.

184. Найдите три члена разложения функции $f(x)=\sqrt{x}$ по степеням разности $x-1$.

185. Функцию $f(x)=e^{2x-x^2}$ в окрестности точки $x=0$ приближенно замените многочленом третьей степени.

186. Напишите разложение многочлена четвертой степени $P(x)$ по степеням $x-11$, используя формулу Тейлора. Найдите $P'''(11)$, если $P(11)=5$, $P'(11)=4$, $P''(11)=6$, $P^{(4)}(11)=72$ и $P(10)=5$.

Используя правило Лопиталя, вычислите пределы:

187. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 2x)}{\sin 2x}$

188. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-arctg\,x}{x^3}$

189. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\arcsin 2x}$

190. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{2x}-2}$

191. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{tg\,3x}{tg\,x}$

192. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^5}{e^{x/100}}$

193. $\lim\limits_{x\to 1-0}\ln x\,\ln(1-x)$

194. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 7x}{tg5x}$

195. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\sin 3x}{x^3}$

196. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x-\sin x}$

197. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{tgx-1}{\sin 4x}$

198. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-1+\cos 3x}{e^x-e^{-x}}$

199. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{\sin x-x}$

200. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-3x}-e^{\sin x}}{x}$

201. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{\ln x}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

202. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

203. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

204. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+x^2}{(1+x)^5-1+x^2}$

205. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}$

206. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^2}{2}-x-1}{\cos x+\dfrac{x^2}{2}-1}$

207. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1-x\ln 2}{\left(1-x\right)^{10}-1+10x}$

Найти наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке:

208. $y=2x-1,\left[0;1\right]$

209. $y=x^2-6x+8,\left[1;4\right]$

210. $y=3x^3-4x+8,\left[-1;1\right]$

211. $y=3x^4+4x^3+1,\left[0;1\right]$

212. $y=3x^4+4x^3+1,\left[-2;1\right]$

213. $y=\sin x+2x,\left[-\pi;\pi\right]$

214. $y=\sin^2 x,\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{2\pi}{3}\right]$

215. $y=\sin x-x-\dfrac{x^3}{3},\left[0;\pi\right]$

216. $y=x+\dfrac{1}{x},\left[0{,}1;10\right]$

217. $y=-\dfrac{x}{x^2-x+1},\left[-2;2\right]$

218. $y=x\ln x-x,\left[\dfrac{1}{e};e\right]$

Найти асимптоты графика функции:

219. $y=1-\dfrac{4}{x^2}$

220. $y=\dfrac{x^2}{x^2+2}$

221. $y=\dfrac{2}{|x|}-1$

222. $y=\dfrac{1-4x}{1+2x}$

223. $y=\frac{x^2+x}{x}$

224. $y=\frac{x^2}{x+1}$

225. $y=\frac{x^2-x-1}{x}$

226. $y=\frac{3-5x}{7x+4}$

227. $y=\frac{x^3}{x^2+1}$

228. $y=\frac{4x-x^3}{x^2+4}$

229. $y=\frac{1}{x^2}-x$

230. $y=\frac{x^4+1}{3x^2+1}$

231. $y=\frac{x-4}{2x+4}$

232. $y=\frac{x^2}{2-2x}$

233. $y=\frac{x^2}{x^2-4}$

234. $y=\frac{x^3}{1-x^2}$

Проведя необходимое исследование, постройте графики следующих функций:

235. $y=\frac{x}{x^2+1}$

236. $y=\frac{5}{x^6}-\frac{6}{x^5}$

237. $y=\frac{4x^2+3x}{2x+2}$

238. $y=\frac{x^3+4}{x^2}$

239. $y=\frac{x^3}{x^2-4}$

240. $y=\frac{x^3}{x^2+1}$

241. $y=\frac{x^3}{(x-2)^2}$

242. $y=\frac{27-2x^3}{6x^2}$

243. $y=\frac{x^2}{(x+4)^2}$

244. $y=\frac{2x^2+3x-5}{x-4}$

245. $y=\frac{x^2-3x-18}{x-9}$

246. $y=\frac{x^4}{(x+1)^3}$

247. $y=\dfrac{x^3-x^2}{(x+1)^2}$

248. $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

249. $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

250. $y=e^{2x-x^2}$

251. $y=xe^{-x}$

252. $y=\dfrac{e^x}{x+1}$

253. $y=(x+1)e^{\frac{1}{x}}$

254. $y=(x-2)e^{\frac{9}{x}}$

255. $y=x^2\,e^{\frac{1}{x}}$

256. $y=xe^{-x^2}$

257. $y=x^2\,e^{-x^2}$

258. $y=x\ln x$

259. $y=x^2\ln x$

260. $y=\dfrac{\ln x}{x}$

261. $y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$

262. $y=x+arctg(x)$

263. $y=x-arctg(2x)$

Ответы

12. $(-\infty;0)\cup(5;+\infty)$.

13. $\left[-\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{\pi}{2};-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{3};1\right)\cup\left(1;\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$.

14. $(0;1)\cup(1;3)$.

15. $[-5;0)\cup(0;1]$

16. $(-\infty;0)\cup(0;2)\cup(2;+\infty)$

17. $(-5;-4)\cup(0;5)$.

18. Функция четная.

19. Функция не является ни четной, ни нечетной.

20. Функция нечетная.

21. Функция четная.

22. Функция нечетная.

23. Функция четная.
24. Функция нечетная.
25. Функция не является ни четной, ни нечетной.

26. $\frac{\pi}{2}$.

27. 2π.

28. 2π.

29. π.

30. 3π.

31. $\frac{\pi}{2}$.

32. $\frac{\pi}{3}$.

33. π.

44. $a_n = \frac{1}{3n}$.

45. $a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$.

46. $a_n = \frac{3n-2}{5n+1}$.

47. $a_n = \frac{4n-1}{3n+2}$.

48. $a_n = \frac{1}{3^n}$.

49. $a_n = \frac{n-1}{n+1}$.

50. -1.

51. -5.

52. ∞

53. 10.

54. 0.

55. $\frac{2}{3}$

56. -4.

57. -12.

58. 0.

59. 0.

60. 3.

61. 3

62. $\frac{1}{2}$.

63. $-\frac{5}{2}$

64. 0.

65. ∞

66. $\frac{1}{3}$

67. 1.

68. -2.

69. 1.

70. $\frac{3}{19}$.

71. 0.

72. $\frac{2}{3}$.

73. 8.

74. $-\sqrt{2}$.

75. $-\frac{10}{9}$.

76. $-\frac{3}{2}$.

77. $\frac{15}{2}$.

78. 0.

79. 3.

80. $\frac{1}{2}$.

81. $-\frac{1}{4}$.

82. 25.

83. $\sqrt{3}$.

84. $\frac{5}{3}$.

85. e^2.

86. e.

87. e^{10}

88. e^{-2}

89. 6.

90. 1.

91. 2.

92. 3.

93. $\frac{1}{2}$.

94. $\frac{5}{12}$.

95. -2.

96. $\frac{1}{3\ln 2}$.

97. e^4.

98. 1.

99. $\frac{1}{2}$.

100. $\frac{1}{6}$.

101. 1.

102. -6.

103. $-\frac{2\ln 2}{5}$

104. e^8.

105. e^{-1}.

106. e^4

107. 0 – разрыв второго рода.

108. 0 – разрыв первого рода (скачок).

109. 0 – разрыв первого рода (скачок).

110. 1- разрыв первого рода (устранимый разрыв)

111. -2,2 – разрывы второго рода.

112. 0 – разрыв второго рода.

114. $4x^4+6x-2$

115. $49x^6+6x-4$

116. $\frac{3}{2\sqrt{x}}-4\sin x-\frac{2}{\cos^2 x}$

117. $6x+\cos x+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}$

118. $\sin x+x\cos x$.

119. $\dfrac{1}{\sin\frac{2x+1}{2}}$.

120. $2\cos 2x-\sin 2x$.

121. $\frac{3}{2}\frac{1-\sin 3x}{\sqrt{3x+\cos 3x}}$.

122. $\frac{1}{\sqrt{x^2-3}}$.

123. $-\sin 2x\cdot 3^{\cos^2 x}\ln 3$.

124. $\frac{1}{2+x^2}$.

125. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{x^2}{\sqrt{8-x^6}}$.

126. $\frac{2}{x\left(1-x^2\right)}$.

127. $\frac{6x}{\sqrt{9x^4+1}}$.

128. $\sqrt{1-x^2}$.

129. $e^{x^2}\left((x-1)\sin 2x+(x+1)\cos 2x\right)$.

130. $2^x\left(\ln x-\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln 2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right)$

131. $\dfrac{tg^2\frac{x}{3}}{\cos^2\frac{x}{3}}$.

132. $6x\cdot 2^{3x^2}\ln 2+ctgx$.

133. $\frac{e^{\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$.

134. $3ctg\left(3x+2\right)$.

135. $-e^{-x^2}\dfrac{(2x-1)(x-1)}{(x-3)^2}$.

136. $\dfrac{1}{\sqrt{-4x^2-2x}}$.

137. $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}\,(2+x^2)arctg\sqrt{1+x^2}}$.

138. $ctg\dfrac{3x}{5}\cdot\sqrt[3]{\ln^2\sin\dfrac{3x}{5}}$.

139. $\left(3x^2+3x-1\right)^x\ln\left(3x^2+3x-1\right)+\left(3x^2+3x-1\right)^{x-1}\left(6x^2+3x\right)$

140. $(x+1)^{\ln x}\left(\dfrac{\ln(x+1)}{x}+\dfrac{\ln x}{x+1}\right)$.

141. $\dfrac{2^x\sqrt{4x+1}}{\left(2x-1\right)^3\sqrt[3]{x^3+2}}\left(\ln 2+\dfrac{1}{4x+1}-\dfrac{6}{2x-1}-\dfrac{x^2}{x^2+2}\right)$.

142. $\dfrac{\left(x^2-1\right)^3\arcsin\sqrt{x}}{x^4\left(3x+2\right)}\left(\dfrac{6x}{x^2-1}+\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}\arcsin\sqrt{x}}-\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{3x+2}\right)$

143. $\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$.

144. $5x^3\left(4\ln x+1\right)$

145. $\dfrac{xarctgx+1}{\sqrt{1+x^2}}$

146. $-\dfrac{1}{x^2}$

147. $\dfrac{1+2x^2}{\left(1-x^2\right)^{5/2}}$.

148. $e^{-x}\left(3-x\right)$

149. $\dfrac{2}{3}\text{ctg }t;\dfrac{2}{9\sin^3 t}$.

150. $\dfrac{t^2-1}{2t};\dfrac{1+t^2}{4t^3}$.

151. $\dfrac{3}{2}e^t;\dfrac{3}{4}e^{-t}$.

152. $\dfrac{3t^2+1}{2t};\dfrac{3t^2-1}{4t^3}$.

153. $-\text{tg }t;\dfrac{1}{12\cos^4 t\sin t}$.

154. $\dfrac{1-3t}{t-3};\dfrac{8\left(t+1\right)^2}{\left(t-3\right)^3}$.

155. $\dfrac{2t}{1-t^2};\dfrac{2(t^2+1)^3}{(1-t^2)^3}$

156. $\dfrac{12xy^3-2y^4-5x^2}{4y^3-9x^2y^2}$

157. $\dfrac{4xy^2-3x^2-2xy-6}{x^2-4x^2y}$

158. $-\dfrac{2x-\left(x^2y+y^3\right)e^{yx}}{2y-\left(x^3+xy^2\right)e^{yx}}$

159. $\dfrac{\left(2xy^3-14xy\right)\sqrt{1-y^2}}{\left(7x^2-3x^2y^2\right)\sqrt{1-y^2}+1}$

160. $5x^4dx$

161. $\dfrac{dx}{\cos^2 x}$

162. $3\sin 2x\sin 4xdx$

163. $\dfrac{dx}{x}$

164. $\dfrac{ctg\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$

165. $-\dfrac{tgx\cdot e^{-\frac{1}{\cos x}}}{\cos x}dx$

166. $-2x\cdot 2^{-x^2}\ln 2dx$

167. $4dx$

168. $3dx$

169. $-\dfrac{3}{\sqrt{10}}dx$

170. 0

171. $-dx$

172. $-2edx$

173. $\dfrac{1}{4}dx$

174. $\dfrac{dx}{6\sqrt{11}}$

175. $\dfrac{2\cos x}{\sin^3 x}dx^2$

176. $-2\cos 2xdx^2$

177. $\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}dx^2$

178. $-2e^x\left(\cos x+\sin x\right)dx^3$

179. $-\dfrac{1}{x^2}dx^3$

180. 4,99.

181. -5,01.

182. -3,02.

183. $f(x)=-1-(x-1)-(x-1)^2-(x-1)^3-(x-1)^4+o((x-1)^4)$

184. $f(x)=1+\dfrac{1}{2}(x-1)-\dfrac{1}{8}(x-1)^2+o((x-1)^2)$

185. $f(x)=1+2x+x^2-\dfrac{2}{3}x^3+o(x^3)$.

186. $P'''(11)=12$.

187. 0
188. 1/3
189. 3/2
190. 3/2
191. 1/3
192. 0
193. 0
194. $-\dfrac{7}{5}$
195. 4,5
196. 3
197. -0,5
198. 0,5
199. -2
200. -4

201. 1

202. 0,5

203. $\frac{1}{6}$

204. $-\frac{1}{5}$

205. $\frac{1}{128}$

206. 1

207. $\frac{\ln^2 2}{90}$

208. $y_{\min} = y(0) = -1, y_{\max} = y(1) = 1$

209. $y_{\min} = y(3) = -1, y_{\max} = y(1) = 3$

210. $y_{\min} = y\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{56}{9}, y_{\max} = y\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{88}{9}$

211. $y_{\min} = y(0) = 1, y_{\max} = y(1) = 8$

212. $y_{\min} = y(-1) = 0, y_{\max} = y(-2) = 17$

213. $y_{\min} = y(-\pi) = -2\pi, y_{\max} = y(\pi) = 2\pi$

214. $y_{\min} = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, y_{\max} = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

215. $y_{\min} = y(\pi) = -\frac{\pi\left(\pi^2 + 3\right)}{3}, y_{\max} = y(0) = 0$

216. $y_{\min} = y(1) = 2, y_{\max} = y(0{,}1) = 10{,}1$

217. $y_{\min} = y(1) = -1, y_{\max} = y(-1) = \frac{1}{3}$

218. $y_{\min} = y(1) = -1, y_{\max} = y(e) = 0$

219. $x = 0, y = 1$

220. $y = 1$

221. $x = 0, y = -1$

222. $x = -\frac{1}{2}, y = -2$

223. $x = 0, y = x$

224. $x = -1, y = x - 1$

225. $x = 0, y = x - 1$

226. $x = -\frac{4}{7}, y = -\frac{5}{7}$

227. $y = x$

228. Асимптот нет

229. $x = 0, y = -x$

230. Асимптот нет.

231. $x = -2, y = \frac{1}{2}$

232. $x=1, y=-\frac{x+1}{2}$

233. $x=2, x=-2, y=1$

234. $x=1, x=-1, y=-x$

235. $y=0$ - горизонтальная асимптота, $y'=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, $y''=\frac{-2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$, $x_{\min}=-1$, $x_{\max}=1$, точки перегиба: $x=\pm\sqrt{3},\quad x=0$.

236. $y=0$ - горизонтальная асимптота, $x=0$ - вертикальная асимптота, $y'=30\frac{x-1}{x^7}$, $y''=30\frac{7-6x}{x^8}$, $x_{\min}=1$, точка перегиба: $x=\frac{7}{6}$.

237. $y=2x-\frac{1}{2}$ - наклонная асимптота,

$y'=\frac{4x^2+8x+3}{2(x+1)^2}$, $y''=\frac{1}{(x+1)^3}$, $x_{\min}=-\frac{1}{2}$, $x_{\max}=-\frac{3}{2}$.

238. $y=x$ - наклонная асимптота, $x=0$ - вертикальная асимптота, $y'=\frac{x^3-8}{x^3}$, $y''=\frac{24}{x^4}$, $x_{\min}=2$.

239. $y=x$ - наклонная асимптота, $x=\pm 2$ - вертикальные асимптоты, $y'=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$, $y''=\frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$, $x_{\min}=2\sqrt{3}$, $x_{\max}=-2\sqrt{3}$, $x=0$ - точка перегиба.

240. $y=x$ - наклонная асимптота, $y'=\frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$, $y''=\frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$, $x=0;\pm\sqrt{3}$ - точки перегиба.

241. $y = x + 4$ - наклонная асимптота, $x = 2$ - вертикальная асимптота, $y' = \dfrac{x^2(x-6)}{(x-2)^3}$, $y'' = \dfrac{24x}{(x-2)^4}$, $x_{\min} = 6$, $x = 0$ - точка перегиба.

242. $y = -\dfrac{1}{3}x$ - наклонная асимптота, $x = 0$ - вертикальная асимптота, $y' = \dfrac{-x^3 - 27}{3x^3}$, $y'' = \dfrac{27}{x^4}$, $x_{\min} = -3$.

243. $y = 1$ - горизонтальная асимптота, $x = -4$ - вертикальная асимптота, $y' = \dfrac{8x}{(x+4)^3}$, $y'' = \dfrac{16(2-x)}{(x+4)^4}$, $x_{\min} = 0$, $x = 2$ - точка перегиба.

244. $y = 2x + 11$ - наклонная асимптота, $x = 4$ - вертикальная асимптота, $y' = \dfrac{2x^2 - 16x - 7}{(x-4)^2}$, $y'' = \dfrac{78}{(x-4)^3}$,

$x_{\min} = \dfrac{8 + \sqrt{78}}{2}$, $x_{\max} = \dfrac{8 - \sqrt{78}}{2}$.

245. $y = x + 6$ - наклонная асимптота, $x = 9$ - вертикальная асимптота, $y' = \dfrac{x^2 - 18x + 45}{(x-9)^2}$, $y'' = \dfrac{72}{(x-9)^3}$, $x_{\min} = 15$, $x_{\max} = 3$.

246. $y = x - 3$ - наклонная асимптота, $x = -1$ - вертикальная асимптота, $y' = \dfrac{x^3(x+4)}{(x+1)^4}$, $y'' = \dfrac{12x^2}{(x+1)^5}$, $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = -4$.

247. $y = x - 3$ - наклонная асимптота, $x = -1$ - вертикальная асимптота, $y' = \dfrac{x(x^2 + 3x - 2)}{(x+1)^3}$, $y'' = \dfrac{10x - 2}{(x+1)^4}$, $x_{\min} = \dfrac{-3 + \sqrt{17}}{2}$, $x_{\max} = 0$, $x_{\max} = \dfrac{-3 - \sqrt{17}}{2}$, точка перегиба: $x = \dfrac{1}{5}$.

248. $y=x+5$ - наклонная асимптота, $x=1$ - вертикальная асимптота, $y'=\dfrac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$, $y''=\dfrac{24(x+1)}{(x-1)^4}$, $x_{\min}=5$, $x=-1$ - точка перегиба.

249. $x=\pm1$ - вертикальные асимптоты, $y'=\dfrac{x^2-3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$, $y''=\dfrac{2x(9-x^2)}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^7}}$, $x_{\min}=\sqrt{3}$, $x_{\max}=-\sqrt{3}$, точки перегиба: $x=0;\pm3$.

250. $y=0$ - горизонтальная асимптота, $y'=2(1-x)e^{2x-x^2}$, $y''=2(2x^2-4x+1)e^{2x-x^2}$, $x_{\max}=1$, точки перегиба: $x=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}$.

251. $y=0$ - горизонтальная асимптота при $x\to+\infty$, $y'=(1-x)e^{-x}$, $y''=(x-2)e^{-x}$, $x_{\max}=1$, точка перегиба: $x=2$.

252. $y=0$ - горизонтальная асимптота при $x\to-\infty$, $x=-1$ - вертикальная асимптота, $y'=\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$, $y''=\dfrac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^3}$, $x_{\min}=0$.

253. $y=x+2$ - наклонная асимптота, $x=0$ - вертикальная асимптота при $x\to0+0$, $y'=\left(\dfrac{x^2-x-1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$, $y''=\left(\dfrac{3x+1}{x^4}\right)e^{\frac{1}{x}}$, $x_{\min}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_{\max}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, точка перегиба: $x=-\dfrac{1}{3}$.

254. $y=x+7$ - наклонная асимптота, $x=0$ - вертикальная асимптота при $x\to0+0$, $y'=\left(\dfrac{x^2-9x+18}{x^2}\right)e^{\frac{9}{x}}$,

$y'' = \left(\dfrac{45x - 144}{x^4}\right) e^{\frac{9}{x}}$, $x_{\min} = 6$, $x_{\max} = 3$, точка перегиба: $x = 3{,}2$.

255. $x = 0$ - вертикальная асимптота при $x \to 0 + 0$, $y' = (2x - 1)e^{\frac{1}{x}}$, $y'' = \left(\dfrac{2x^2 - 2x + 1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}}$, $x_{\min} = \dfrac{1}{2}$.

256. $y = 0$ - горизонтальная асимптота, $y' = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$, $y'' = (4x^3 - 6x^2)e^{-x^2}$, $x_{\min} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x_{\max} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, точки перегиба: $x = 0; \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

257. $y = 0$ - горизонтальная асимптота, $y' = 2(x - x^3)e^{-x^2}$, $y'' = 2(2x^4 - 5x^2 + 1)e^{-x^2}$,

$x_{\min} = 0$, $x_{\max} = \pm 1$, точки перегиба: $x = \pm\sqrt{\dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{4}}$.

258. $y' = \ln x + 1$, $y'' = \dfrac{1}{x}$, $x_{\min} = \dfrac{1}{e}$.

259. $y' = x(2\ln x + 1)$, $y'' = 2\ln x + 3$, $x_{\min} = e^{-\frac{1}{2}}$, точка перегиба: $x = e^{-\frac{3}{2}}$.

260. $y = 0$ - горизонтальная асимптота при $x \to +\infty$, $x = 0$ - вертикальная асимптота при $x \to 0 + 0$, $y' = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$, $x_{\max} = e$, точка перегиба: $x = e^{\frac{3}{2}}$.

261. $y'=\dfrac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$, $y''=\dfrac{10x+2}{9\sqrt[3]{x^4}}$, $x_{\min}=\dfrac{2}{5}$, $x_{\max}=0$, точка перегиба: $x=-\dfrac{1}{5}$.

262. $y=x+\dfrac{\pi}{4}$ - наклонная асимптота при $x\to+\infty$, $y=x-\dfrac{\pi}{4}$ - наклонная асимптота при $x\to-\infty$, $y'=\dfrac{x^2+2}{x^2+1}$, $y''=-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$, точка перегиба: $x=0$.

263. $y=x-\dfrac{\pi}{4}$ - наклонная асимптота при $x\to+\infty$, $y=x+\dfrac{\pi}{4}$ - наклонная асимптота при $x\to-\infty$, $y'=\dfrac{4x^2-1}{4x^2+1}$, $y''=\dfrac{16x}{(4x^2+1)^2}$, $x_{\min}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x_{\max}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, точка перегиба: $x=0$.

Литература

[1] Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа // СПб.: «Профессия», 2007 г.

[2] Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу.Часть 1. // М.: Дрофа, 2001 г.

[3] Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике //СПб.: «Лань», 2005 г.

[4] Малугин В.А. Математика для экономистов: Математический анализ. Курс лекций // М.: «Эксмо», 2005 г.

[5] Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике // М.: Издательство Физико-математической литературы, 2009 г.

[6] Сборник задач по высшей математике для экономистов под редакцией В.И. Ермакова// М.: ИНФА-М, 2003с

[7] Шипачев В.С. Высшая математика // М.: «Высшая школа», 1990 г.

Оглавление

Св. план 2013 г,   поз. 176

Ишханян Маргарита Владимировна,
Кекух Лариса Владимировна,
Фроловичев Александр Иванович

МАТЕМАТИКА

Часть I.

Учебное пособие для направления 080200.62 «Менеджмент»

Подписано в печать   Формат 60 Х 84 / 16

Заказ №   Усл. - печ. л. -

Тираж -200 экз.