ФГП ОУ ВПО «Московский
государственный
университет путей сообщения»

Кафедра «Математика»

Д.З. Каган

РЯДЫ

ЧАСТЬ 1

Рекомендовано редакционно-издательским
советом университета
в качестве методических указаний

для студентов экономических специальностей

Москва – 2011

УДК 517.9

К 12

Каган Д.З. Ряды. Часть 1. Методические указания. - М.: МИИТ, 2011 - 47 с.

В работе рассматриваются различные методы решения задач про числовые ряды, признаки сходимости и свойства сходящихся рядов. Приводятся все необходимые теоретические сведения. Каждый раздел содержит большое количество разобранных задач и примеров для самостоятельного решения.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Если задана бесконечная последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, выражение $\mathbf{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots}$ **называется числовым рядом**. Элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются членами ряда.

Для обозначения ряда можно применять краткую запись: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$

Для любого числа n>0 можно ввести понятие **n–ой частичной суммы ряда**

$\mathbf{S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$.

Ряд называется сходящимся, если существует конечный предел частичных сумм.

Тогда этот предел называется суммой ряда. Если предел равен бесконечности или не существует, то ряд называется расходящимся.

В некоторых случаях можно непосредственно посчитать сумму ряда, во многих других можно установить сходится ряд или расходится.

При исследовании сходимости ряда важно правильно установить, какой именно метод или признак сходимости подходит для рассматриваемого ряда.

Приведем основные свойства сходящихся числовых рядов. Они будут часто использоваться при решении задач.

Свойства сходящихся рядов.

1. ***Приписывание или отбрасывание конечного числа членов не влияет на сходимость ряда.***

Если сходится ряд $\boldsymbol{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots}$,
то сходится и ряд $\boldsymbol{a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+n} + \ldots}$, *получаемый из данного ряда отбрасыванием конечного числа членов (этот последний ряд называют m-м остатком исходного ряда); наоборот, из сходимости m-го остатка ряда вытекает сходимость данного ряда.*

Пример. Ряд $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$ сходится.

Тогда сходятся ряды:

$$500+\ 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots,$$

$$1000+500+300+100+1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots,$$

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

Сходимость ряда $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$ будет показана позже. А в этом примере мы видим, что **если к сходящемуся ряду прибавить или отбросить от него несколько слагаемых, ряд все равно будет сходиться.**

2. *Если ряд* $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ *сходится и имеет сумму* S, *то и ряд* $\lambda a_1+\lambda a_2+\ldots+\lambda a_n+\ldots$

(полученный умножением данного ряда на число λ) также сходится и имеет сумму λS.

Таким образом, если сходящийся ряд умножить на число, он также будет сходиться.

Пример. Ряд $\frac{1}{2}+\frac{2}{9}+\frac{3}{28}+\ldots+\frac{n}{n^3+1}+\ldots$ сходится.

Значит также сходится ряд

$$\frac{2}{2}+\frac{4}{9}+\frac{6}{28}+\ldots+\frac{2n}{n^3+1}+\ldots,$$

полученный из исходного умножением на 2.

3. *Если сходятся ряды*

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \quad \textit{и} \quad b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots,$$

имеющие, соответственно, суммы $S1$ и $S2$, то сходится и ряд

$$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\ldots+(a_n+b_n)+\ldots$$

причем его сумма равна $S1+S2$.

Пример. Ряды $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$ и

$\frac{1}{2}+\frac{2}{9}+\frac{3}{28}+\ldots+\frac{n}{n^3+1}+\ldots$ сходятся.

Тогда также сходится ряд

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{3}{28}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n^2}+\frac{n}{n^3+1}\right)+\ldots$$

(Представляющий сумму данных рядов).

ТЕМА 1

НАХОЖДЕНИЕ ОБЩЕГО ЧЛЕНА РЯДА.

В задачах на исследование сходимости ряда очень важно правильно записать общий член ряда. Надо понять закономерность, по которой изменяются члены ряда. И записать эту закономерность в виде равенства $a_n=$, по которому для любого номера $n=1,2,3,\ldots$ можно найти соответствующее число a_n. Если элементы ряда являются произведением двух множителей, то нужно установить, как зависят от номера n оба множителя, и a_n представить также в виде произведения двух множителей, зависящих от n. Если элементы рада представляются в виде дробей, то надо найти, чему равны числитель и знаменатель для произвольного n. Обычно, нумерация ряда начинается с $n=1$. Иногда с $n=0$. Это несложно исправить, заменив в записи общего члена ряда a_n все встречающиеся там n на $n-1$ или $n+1$.

Пример 1. Найти общий член ряда по первым нескольким членам.

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots$$

Членами этого ряда являются дроби. Первый элемент ряда, имеющий индекс a_1, можно представить в виде $\frac{1}{1}$. Числитель любого элемента ряда равен 1, а знаменатель элемента a_n равен $2n-1$. Поэтому общий член ряда имеет вид $a_n=\frac{1}{2n-1}$.

Пример 2. Найти общий член ряда по первым нескольким членам.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\ldots$$

В числителе каждого элемента a_n стоит 1, знаменатель каждый раз увеличивается на 3 и равен 3n. Поэтому, $a_n=\frac{1}{3n}$.

Пример 3. Найти общий член ряда по первым нескольким членам.

$$1+3+5+7+\ldots$$

Элементы этого ряда составляют арифметическую прогрессию с разностью 2 и начальным элементом $a_1=1$. При переходе к новому элементу, члены ряда увеличиваются на 2. Следовательно, $a_n=2n-1$.

Пример 4. Найти общий член ряда по первым нескольким членам.

$$1-\frac{4}{4}+\frac{16}{9}-\frac{64}{16}+\ldots$$

Заметим, что элементы этого ряда имеют чередующиеся знаки: элементы с нечетными номерами входят с плюсом, элементы с четными номерами – с минусом. Это представляется с помощью добавления в запись общего члена множителя $(-1)^{n-1}$. Легко увидеть, что в числителях дробей стоят степени четверки, причем, начиная с нулевой степени $4^0=1$, а в знаменателях стоят квадраты целых чисел, начиная с 1. Учитывая это, получаем общий член ряда $a_n=(-1)^{n-1}\frac{4^{n-1}}{n^2}$.

Пример 5. Найти общий член ряда по первым нескольким членам. $\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}$

Числители элементов ряда каждый раз увеличиваются на единицу, и совпадают с номером элемента. Знаменатели умножаются на 2 и образуют геометрическую прогрессию, причем первым членом является $4=2^2$. Таким образом, для любого номера n, начиная с n=1 $a_n=\frac{n}{2^{n+1}}$.

Пример 6. Найти общий член ряда по первым нескольким членам. $\frac{2}{1}+(\frac{3}{4})^2+(\frac{4}{7})^3+\ldots$

Показатель степени каждого члена ряда совпадает с номером этого члена, поэтому показатель степени n-го члена равен n. Числители дробей образуют арифметическую прогрессию 2,3,4,... n-ый член прогрессии находим по формуле $b_n=b_1+d(n-1)$; $b_1=2, d=1$; значит, $b_n=n+1$. Знаменатели также образуют арифметическую последовательность с начальным членом $b_1=1$ и разностью $d=3; b_n=3n-2$. Дроби имеют вид $\frac{n+1}{3n-2}$, а n-ый член ряда: $a_n=(\frac{n+1}{3n+2})^n$.

УПРАЖНЕНИЯ.

Записать общий член ряда.

1) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\dots$

2) $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{11}+\dots$

3) $1+\frac{3}{5}+\frac{5}{9}+\dots$

4) $\frac{1}{2}+\frac{4}{4}+\frac{9}{6}+\dots$

5) $\frac{3}{11}+\frac{8}{18}+\frac{15}{27}\dots$

6) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\dots$

7) $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\dots$

8) $\frac{4}{2}+\frac{7}{8}+\frac{10}{18}+\frac{13}{32}\dots$

ТЕМА 2

РАЗЛОЖЕНИЕ НА ПРОСТЕЙШИЕ ДРОБИ.

Во многих случаях можно не только установить сходимость или расходимость ряда, но и непосредственно посчитать сумму. Можно выделить два типа рядов, для которых достаточно просто посчитать сумму. Это – геометрические прогрессии, и дроби, общий член которых раскладывается в разность простейших дробей.

Пример 1. Найти сумму ряда $\frac{6}{1\cdot 3}+\frac{6}{2\cdot 4}+\frac{6}{3\cdot 5}+\ldots$

Решение. В числителе каждого из элементов стоит 6, а в знаменателе произведение n(n+2). Таким образом, $a_n=\frac{6}{n\cdot(n+2)}$. Выполним разложение на простейшие дроби. $\frac{6}{n\cdot(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+2}$. Теперь, надо найти числа А и В. Для этого приводим дроби, стоящие в правой части к общему знаменателю: $\frac{6}{n\cdot(n+2)}=\frac{A(n+2)+Bn}{n(n+2)}$,

$\frac{6}{n\cdot(n+2)}=\frac{n(A+B)+2A}{n(n+2)}$. Тогда получаем систему уравнений: $\begin{cases} A+B=0 \\ 2A=6 \end{cases}$. Решение: А=3, В=-3.

Таким образом, $a_n=\frac{6}{n\cdot(n+2)}=3\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$.

n-ая частичная сумма $S_n=a_1+\ldots+a_n$ имеет вид

$$S_n=3\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$=3\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$. Сумма ряда равна

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}3\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=3\left(1+\frac{1}{2}+\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right)=3\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{2}.$$

Таким образом, сумма ряда равна $9/2$.

Пример 2. Найти сумму ряда

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\dots$$

Решение. Здесь $a_n=\dfrac{1}{n^2-1}$, n=2,3,... Такую дробь можно записать через разность дробей $\dfrac{1}{n-1}$ и $\dfrac{1}{n+1}$.

Действительно, $a_n=\dfrac{1}{n^2-1}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1})$,

$a_2=\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3})$, Таким образом, n-ая частичная сумма будет равна: $S_n=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\dots+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1})$.

Очевидно, что все слагаемые, кроме двух первых и последних взаимно сокращаются. Поэтому,

$S_n=\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$. При стремящимся к бесконечности номере n дроби $\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n+1}$ очевидно будут стремиться к 0.

Таким образом, $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{2})=\dfrac{3}{4}$. Значит, сумма ряда равна $\dfrac{3}{4}$.

Пример 3. Найти сумму ряда

$$\frac{1}{1\bullet 2}+\frac{1}{2\bullet 3}+\frac{1}{3\bullet 4}+\ldots$$

Решение. Сначала запишем общий член ряда $a_n=\frac{1}{n\bullet(n+1)}$. Для таких элементов выполняется разложение на простейшие дроби. $\frac{1}{n\bullet(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}$. Теперь, надо найти числа A и B. Для этого приводим дроби, стоящие в правой части к общему знаменателю:

$\frac{1}{n\bullet(n+1)}=\frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)}$, $\frac{1}{n\bullet(n+1)}=\frac{n(A+B)+A}{n(n+1)}$. Тогда получаем систему уравнений: A+B=0, A=1. Решение: A=1, B=-1.

Таким образом, $\frac{1}{n\bullet(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

n-ая сумма ряда равна:

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

По определения сумма ряда равна пределу частичных сумм: $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1-0=1$. Таким образом, ряд сходится и сумма ряда равна 1.

Пример 4. Найти сумму ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$$

Решение. Несложно убедиться, что общий член ряда имеет вид $a_n=\dfrac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$. Разложим дробь $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$ на простейшие слагаемые. Для этого надо приравнять следующие дроби: $\dfrac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=\dfrac{A}{n}+\dfrac{B}{n+1}+\dfrac{C}{n+2}$ и найти коэффициенты A,B,C. После приведения к общему знаменателю и решения системы уравнений получим A=0,5; B=-1; C=0,5. Тогда выходит следующее разложение:

$$a_n=\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=$$

$=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n+1}+\dfrac{1}{n+2})$. Следовательно,

$S_n=\frac{1}{2}\left(1-\dfrac{2}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{4}\right)+\ldots$ Сумма дробей с одинаковыми знаменателями будет равна 0, т.е. будет сокращаться, например для дробей со знаменателем 3: $\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}$. Единственными элементами, которые не сократятся, будут $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{2}{2}+\dfrac{1}{2}\right)$. Таким образом, после всех сокращений сумма ряда будет равна:

$$S=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

УПРАЖНЕНИЯ.

Найти сумму ряда.

1) $\sum\limits_{3}^{\infty}\frac{3}{(n-2)(n+3)}$ 2) $\sum\limits_{2}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n-6}$

3) $\frac{1}{1\cdot2\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot5}+\frac{1}{3\cdot4\cdot6}+\ldots$ 4) $\sum\limits_{3}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

5) $\sum\limits_{3}^{\infty}\frac{n+1}{n^2(n+2)^2}$ 6) $1+\frac{1}{3\cdot6}+\frac{1}{4\cdot7}+\ldots$

7) $\sum\limits_{2}^{\infty}\frac{6}{(n-1)(n+5)}$ 8) $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{5}{n^2+4n}$

ТЕМА 3

НЕОБХОДИМЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМСТИ.

Теорема. *Для того, чтобы ряд сходился необходимо, чтобы общий член ряда стремился к нулю. Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Отметим, что этот признак является ***необходимым, но не достаточным***. То есть, если этот признак не выполняется, то ряд расходится, однако если признак выполняется, то ряд может, как сходиться, так и расходиться.

Пример 1. Проверить выполнение необходимого признака сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{3n+5} = \frac{4}{8} + \frac{5}{11} + \frac{6}{14} + \ldots$

Решение. Найдем предел, к которому стремится общий член этого ряда. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{3n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n} = \frac{1}{3} \neq 0$.

Поскольку этот предел не совпадает с 0, то ряд $\sum \frac{n+3}{3n+5}$ является расходящимся.

Пример 2. Проверить выполнение необходимого признака сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \ldots$

Решение. Для этого ряда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3n+1} =$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3n} = 0$. То есть необходимый признак сходимости выполняется. Тем не менее, этот ряд расходится. Он эквивалентен гармоническому ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n} = \frac{1}{3}\text{, и так как}$$

гармонический ряд расходится, то данный ряд также расходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+7}{2n^2+4n} = \frac{8}{6}+\frac{11}{16}+\frac{16}{30}+\ldots$$

Решение. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Главными частями числителя и знаменателя элементов ряда являются n^2 и $2n^2$. Поэтому при больших n определять значения членов ряда будет отношение $\frac{n^2}{2n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+7}{2n^2+4n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Необходимый признак сходимости не выполняется, поэтому ряд расходится.

УПРАЖНЕНИЯ.

Проверить, выполняется ли необходимое условие сходимости ряда:

1) $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5n+35}=\frac{1}{40}+\frac{2}{45}+\frac{3}{50}+\ldots$

3) $\frac{3}{2}+\frac{6}{5}+\frac{9}{10}+\frac{12}{17}+\ldots$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^2+4n+1}$

ТЕМА 4

ОБОБЩЕННЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ РЯДЫ.

Ряды, имеющие вид $\sum\frac{1}{n^p}$ можно назвать обобщенными гармоническими. Они сходятся или расходятся в зависимости от значения числа α. Если это число больше 1, то ряд сходится; если число меньше или равно 1, то ряд расходится. Это можно проверить, применив интегральный признак сходимости, однако поскольку такие ряды очень часто используются, то лучше знать условия сходимости таких рядов.

Общее правило:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\begin{cases}\text{сходится при } p>1\\ \text{расходится при } p\le 1\end{cases}$$

Примеры. **1)** $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ Такой ряд называется гармоническим рядом и он расходится. Этот ряд имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, и для него $p=1$.

2) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots$ Такой ряд имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, для него $p=2>1$, и он сходится.

3) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ В данном случае $p=\frac{1}{2}<1$, поэтому ряд расходится.

УПРАЖНЕНИЯ.

Определить, какие из приведенных рядов сходятся, а какие расходятся:

1) $1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\ldots$

2) $1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots$

3) $1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots$

4) $1+\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{27}}+\ldots$

5) $1+\frac{1}{\sqrt[7]{4}}+\frac{1}{\sqrt[7]{9}}+\ldots$

6) $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$

ТЕМА 5

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОГРЕССИИ.

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \quad (a \neq 0)$$

Такой ряд называется геометрической прогрессией со знаменателем q и первым членом a. Более точно, члены этого ряда образуют геометрическую прогрессию $a, aq, aq^2, \ldots, aq^{n-1}, \ldots$.

Ряды, состоящие из членов геометрической прогрессии, являются примерами бесконечных рядов, кроме того, они используются при применении признаков сравнения ко многим другим рядам.

Напомним некоторые сведения из школьной программы.

Определение. Геометрической прогрессией называется последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число q. *При этом, число* q *называется знаменателем прогрессии.*

Примерами рядов, члены которых образуют геометрическую прогрессию, являются, например, ряды

$$1 + 2 + 4 + 8 + \ldots 2^{n-1} + \ldots \text{ или } 3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \ldots + \frac{3}{4^{n-1}} + \ldots$$

n-ый член геометрической прогрессии равен

$$b_n = b_{n-1} \cdot q \text{ или } b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Сумма n первых членов прогрессии вычисляется по формуле:

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1-q}.$$

Сходимость таких рядов зависит только от значения их знаменателей. **Если $|q| < 1$, то ряд, состоящий из членов геометрической прогрессии** $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$, **является сходящимся рядом, если $|q| \geq 1$, такой ряд расходится. Для сходящихся геометрических прогрессий есть формула для вычисления суммы ряда:**

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

Это число называют суммой бесконечной геометрической прогрессии.

Пример 1. Исследовать на сходимость и найти сумму ряда $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$

Решение. Данный ряд состоит из членов геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{2}$ и первым членом 1.

Абсолютная величина знаменателя прогрессии меньше 1, поэтому ряд сходится. Следовательно, можно посчитать сумму ряда.

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1 - 1/2} = \frac{1}{1/2} = 2.$$

Пример 2. Исследовать на сходимость и найти сумму ряда
$8-\frac{8}{3}+\frac{8}{9}+\ldots$

Решение. Члены этого ряда образуют геометрическую прогрессию с первым членом 8 и знаменателем $-\frac{1}{3}$.

Абсолютная величина знаменателя прогрессии равна $\frac{1}{3}<1$.

Поэтому, ряд сходится.

$$S=\frac{a}{1-q}=\frac{8}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{8}{1+\frac{1}{3}}=\frac{8}{\frac{4}{3}}=\frac{24}{4}=6.$$

Пример 3. Исследовать на сходимость и найти сумму ряда
$\frac{1}{100}+\frac{7}{200}+\frac{49}{400}+\ldots$

Решение. Несложно убедиться в том, что данный ряд состоит из членов геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{7}{2}$ и первым членом $\frac{1}{100}$. Знаменатель больше 1, поэтому ряд расходится, следовательно, и сумму посчитать нельзя.

УПРАЖНЕНИЯ.

Исследовать на сходимость ряды, состоящие из членов геометрической прогрессии и, в случае сходимости, найти сумму ряда:

1) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots$

2) $-3+\frac{3}{2}-\frac{3}{4}+\ldots$

3) $40+20+10+5+\ldots$

4) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\ldots$

5) $0{,}46+0{,}0046+0{,}000046+\ldots$

6) $-\frac{8}{7}+\frac{10}{7}+\frac{25}{14}+\frac{125}{56}+\ldots$

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

Рассмотрим 4 основных признака – признак сравнения, предельный признак сравнения, признак Даламбера и интегральный признак. Эти признаки можно применить только к положительным рядам, все элементы которых - положительные числа.

Признаки сравнения.

Признаки сравнения являются, наверное, наиболее используемыми при исследовании сходимости рядов. Многие такие задачи сначала сводятся с помощью признаков сравнения к более простым рядам, к которым уже применяется другой признак. Есть два признака сравнения – просто сравнения и предельный признак. При применении этих признаков, главное – увидеть, что составляет «главную» часть членов ряда. Т.е. какая из функций, входящих в запись элементов ряда, дает наибольший прирост при бесконечном возрастании номера n элемента. Увидев главную часть, можно подобрать ряд для сравнения и, далее, сделать вывод о сходимости или расходимости исходного ряда. В рядах, где общий член представлен в виде дроби, надо выделить наиболее растущее, главное слагаемое в числителе и знаменателе, и отбросить все остальные слагаемые. Полученный ряд можно сравнить с исходным, и исследовать его на сходимость.

Существуют два типа рядов, которые используются при применении признаков сравнения, как «эталонные». Это – обобщенные гармонические ряды и геометрические прогрессии.

К первому типу относятся ряды вида $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, где p – произвольное число. Ко второму – ряды вида $a+aq+aq^2+aq^3+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$. Такие ряды называются геометрической прогрессией с начальным членом a и знаменателем q.

ТЕМА 6

ПРИЗНАК СРАВНЕНИЯ.

Смысл этого признака очень прост: *если больший ряд сходится, то и меньший ряд сходится; если меньший ряд расходится, то и больший тоже расходится*. Для исследуемого ряда надо подобрать или больший ряд, который сходится, или меньший ряд который расходится. Для сравнения используются, прежде всего, обобщенные гармонические ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ и геометрические прогрессии, например, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$.

Теорема. Признак сравнения рядов.
Пусть даны два ряда с положительными членами

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

(1)

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \qquad (2)$$

причем члены первого ряда не превосходят членов второго ряда, т.е. при любом n выполняется

$$u_n \le v_n \qquad (3)$$

Тогда: а) если сходится ряд (2), то сходится и ряд (1);
б) если расходится ряд (1), то расходится и ряд (2).

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд
$\frac{1}{5}+\frac{1}{17}+\frac{1}{65}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n+1}$

Решение. Чем больше знаменатель, тем меньше дробь, поэтому члены данного ряда меньше соответствующих членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots$. Но последний ряд сходится, как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, где знаменатель $q=\frac{1}{4}$ меньше 1. Раз больший ряд сходится, то и рассматриваемый ряд
$\frac{1}{5}+\frac{1}{17}+\frac{1}{65}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n+1}$ сходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3-\cos^2 n}{n}$

Решение. Очевидно, что неравенство $\cos^2 n \le 1$ выполняется при любых n. Значит, $\frac{3-\cos^2 n}{n} \ge \frac{2}{n}$.

Рассмотрим ряд с меньшими членами $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$. Этот ряд получен из расходящегося гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ умножением каждого члена на 2, и, следовательно, расходится. Раз меньший ряд расходится, значит и исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3-\cos^2 n}{n}$ также расходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+2\sin^2 n}{n^2+1}$

Решение. $\sin^2 n \le 1$ при любом n, поэтому $3+2\sin^2 n \le 3+2=5$, а общий член ряда $\frac{3+2\sin^2 n}{n^2+1} \le \frac{5}{n^2+1} < \frac{5}{n^2}$. Исследуем на сходимость ряд с большими членами $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n^2}$. Этот ряд получен из ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ умножением каждого члена на 5, поэтому ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходятся и расходится одновременно. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, как обобщенный гармонический $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ с $p>1$, следовательно ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n^2}$ сходится. Значит, и меньший ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+2\sin^2 n}{n^2+1}$ также сходится.

УПРАЖНЕНИЯ.

Исследовать ряд на сходимость с помощью признака сравнения.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+7}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n+5}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 6^n}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n^3+n^2}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n^2}$ 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{2n^2-n}$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n+5}{n^3}$ 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+3n+\cos n}{7n^5+n^4}$ 11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n+n^3}$

ТЕМА 7

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПРИЗНАК СРАВНЕНИЯ.

Теорема. Предельный признак сравнения.

Если $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ ряды с положительными членами и существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=k\neq 0$, то ряды сходятся или расходятся одновременно.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^3-n^2+1}=\frac{4}{1}+\frac{5}{5}+\frac{6}{19}+\dots$$

Решение. Очевидно, что для элементов этого ряда главным слагаемым, имеющим наибольший рост при больших n, в числителе будет n, а в знаменателе – n^3. Поэтому при больших номерах элементы нашего ряда будут приближаться к числам $\frac{n}{n^3}=\frac{1}{n^2}$. Таким образом, логично сравнить исследуемый ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Действительно,

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n^3-n^2+1}:\frac{1}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^3}\cdot n^2\right)=1$, а значит, эти ряды

эквивалентны. Ряд с эквивалентными членами $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

сходится, так как ряды вида $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ сходятся при $p>1$.

Следовательно, сходится и исходный ряд.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+5n}{100n^3-n^2+50}=\frac{8}{149}+\frac{22}{846}+\ldots$$

Решение. Подсказкой для выбора ряда, с которым можно сравнить данный ряд, является то, что в числителе старшей функцией является x^2, а в знаменателе - x^3. Поэтому сравним наш ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3}$, т.е. с $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Предел отношений n-ых элементов рядов равен

$\lim(\frac{3n^2+5n}{100n^3-n^2+50}:\frac{1}{n})=\lim\frac{3n^3}{100n^3}=\frac{3}{100}$. Таким образом, существует конечный, не равный 0 предел, а значит ряды эквивалентны. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - гармонический расходящийся, значит и рассматриваемый ряд – расходящийся.

Пример 3. Исследовать на сходимость

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n \cdot n^2} = \frac{3}{2} + \frac{5}{16} + \frac{7}{72} + \ldots$

Решение. При больших n старшими членами в числителе и знаменателе будут $2n$ и $2^n \cdot n^2$. Поэтому сравним наш ряд с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n \cdot n^2}$ и с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n}$. Пусть $u_n = \frac{2n+1}{2n \cdot n^2}, v_n = \frac{1}{2^n \cdot n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1) \cdot n \cdot 2^n}{n^2 \cdot 2^n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+2n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2} = 2 \neq 0.$$

Поскольку предел – конечный и отличен от 0, эти ряды эквивалентны.

Исследуем на сходимость ряд с эквивалентными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n}.$$

Элементы этого ряда не превосходят элементов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

- геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{2} < 1$,

которая, таким образом, сходится. По признаку сравнения

ряд с меньшими членами $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n}$ также сходится. Но,

следовательно, и исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n \cdot n^2}$ сходится.

УПРАЖНЕНИЯ.

Исследовать ряды на сходимость с помощью предельного признака сравнения:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+n}{3n^3-n+1}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+15}{n^3-2n^2+3n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+7)\cdot 2^n}{n^3\cdot 3^n}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^3+4n-1)\cdot 4^n}{(n^3-3n^2+5n)\cdot 2^n}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+4n^2-2}{2n^4-n^3+6n^2}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^3+12n^2+40}{(n^3-3n^2-2n+7)\cdot 4^n}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+15n}{5n^4-n^2+2}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+3n^2-7n+1}{15n^4+6n^3+3n^2-7n+16}$

ТЕМА 8

ПРИЗНАК ДАЛАМБЕРА.

Этот признак прежде всего используется для рядов, в общих членах которых присутствует *показательная функция или факториал,* например 3^n, $(2n+1)!$

Теорема. Признак Даламбера.

Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *- ряд с положительными членами и существует предел отношения (n+1)-го члена к n-му:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L,$$

то 1) ряд сходится при L<1,

2) ряд расходится при L>1,

3) при L=1 вопрос о сходимости остается нерешенным. В этом случае надо воспользоваться другими признаками.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum \frac{6n}{3^n} = \frac{6}{3} + \frac{12}{9} + \frac{18}{27} + \ldots.$$

Решение. В знаменателе элементов ряда есть показательная функция 3^n, поэтому логично применить признак Даламбера.

Здесь $a_n = \frac{6n}{3^n}, a_{n+1} = \frac{6n+6}{3^{n+1}}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{6(n+1)}{3^{n+1}}}{\frac{6n}{3^n}} = \frac{6(n+1)}{6n} \bullet \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\frac{n+1}{n} \text{ Тогда}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

Получившийся предел меньше 1, поэтому ряд сходится.

Пример 2. Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n!}=\frac{4}{1}+\frac{16}{2}+\frac{64}{6}+\ldots$$

Решение. Заметим, что члены этого ряда содержат показательную функцию и факториал, поэтому логично воспользоваться признаком Даламбера. $a_n=\dfrac{4^n}{n!}$,

$a_{n+1}=\dfrac{4^{n+1}}{(n+1)!}=\dfrac{4\cdot 4^n}{(n+1)n!}$. Тогда

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{4^{n+1}}{4^n}\cdot\dfrac{n!}{(n+1)!}=\dfrac{4}{n+1}$, и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{n+1}=0<1.$

Поскольку вычисленный предел отношения следующего элемента ряда к предыдущему меньше 1, ряд сходится.

Пример 3. Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^3+4n^2+7}{7^n}=\frac{13}{1}+\frac{39}{7}+\frac{97}{49}+\ldots$$

Решение. В записи членов ряда присутствует показательная функция 7^n, поэтому можно попробовать применить признак Даламбера. Для данного ряда

$$a_n=\frac{2n^3+4n^2+7}{7^n},$$

$$a_{n+1}=\frac{2(n+1)^3+4(n+1)^2+7}{7^{n+1}}=\frac{2n^3+10n^2+14n+13}{7^{n+1}}.$$

Найдем предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2n^3+10n^2+14n+13}{7^{n+1}}}{\dfrac{2n^3+4n^2+7}{7^n}}=$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3}{2n^3}\cdot\dfrac{7^n}{7^{n+1}}=1\cdot\dfrac{1}{7}=\dfrac{1}{7}<1.$ Ряд сходится.

УПРАЖНЕНИЯ.

Исследовать ряд на сходимость с помощью признака Даламбера

1) $\dfrac{5}{1}+\dfrac{18}{2}+\dfrac{67}{6}+\ldots$ $\quad a_n=\dfrac{4^n+n}{n!}$

2) $\sum\dfrac{1}{(2n+1)!}$

3) $\sum\dfrac{3^n}{n!}$

4) $\sum\dfrac{n+3^n}{2^n}$

5) $\sum\dfrac{2^n+n^3}{4^n}$

6) $1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{11}+\ldots$ $\quad a_n=\dfrac{1}{n^2+n-1}$

7) $\sum\dfrac{3^n}{(n+1)!}$

8) $\sum\dfrac{n^4}{2^n}$

ТЕМА 9

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ПРИЗНАК.

Этот признак удобно применять, когда общий член ряда похож на некоторую хорошо интегрируемую функцию от n.

Теорема 1. Интегральный признак сходимости Коши
Если члены ряда $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ *положительны и убывают, а y=f(x) - непрерывная, положительная, убывающая функция при* $x \in (1; \infty)$ *и такая, что* $a_n = f(n)$, *то ряд и несобственный интеграл*

$$Y = \int_1^\infty f(x)dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} = 0 + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \ldots$$

Решение. Способ 1. Данный ряд сходится или расходится одновременно с интегралом $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x} dx.$

Сделаем замену переменной $\int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{x}dx = \left| \begin{matrix} t = \ln x \\ dt = \dfrac{dx}{x} \end{matrix} \right|$. Таким образом, наш интеграл представляется в виде

$$\int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{x}dx = \int\limits_0^\infty t dt = \frac{t^2}{2}\Bigg|_0^\infty = \infty$$

Интеграл расходится, значит и ряд расходится.

Способ 2. Очевидно, что $\ln n > 1$ при $n > 2$. Поэтому, $\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$. Таким образом, члены исходного ряда больше членов гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$, который расходится. Значит, исходный ряд также расходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \cdot \ln^3 n} = \frac{1}{2 \cdot \ln^3 2} + \frac{1}{3 \cdot \ln^3 3} + \frac{4}{4 \cdot \ln^3 4} + \dots$$

Решение. В данном случае $a_n = \frac{1}{n \cdot \ln^3 n}$, поэтому $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln^3 x}$. Исследуем интеграл $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x \cdot \ln^3 x}$. Сделаем замену переменной $t = \ln x, dt = \frac{dx}{x}$.

$$\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x \cdot \ln^3 x} = \int\limits_{\ln 2}^\infty t^{-3} dt = \frac{t^{-2}}{-2}\Bigg|_{\ln 2}^\infty = -\frac{1}{2t^2}\Bigg|_{\ln 2}^\infty = -\frac{1}{\infty} + \frac{1}{2\ln 2} = \frac{1}{2\ln 2}.$$

Интеграл сходится, значит и ряд сходится.

УПРАЖНЕНИЯ.

Исследовать ряд на сходимость с помощью интегрального признака:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n}$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7}{1+n^2}$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{12+7n^4}$

ТЕМА 10

ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ.

Ряд называется знакопеременным, если любой его член u_n может быть как положительным, так и отрицательным. Причем положительные и отрицательные члены могут следовать в любом порядке.

Знакочередующиеся ряды являются частным случаем знакопеременных рядов.

В общем случае для знакопеременных рядов уже неприменим признак Лейбница, который является основным для знакочередующихся рядов (см. следующую тему).

Теорема.

Если ряд $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ *- знакопеременный, и ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда* $|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots+|u_n|+\ldots$, *сходится, то сходится и данный ряд.*

В этом случае исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *называется* ***абсолютно сходящимся.***

Сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *называется* ***условно сходящимся****, если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *расходится.*

Для сходимости знакопеременного ряда достаточно, чтобы сходился ряд модулей его членов. Поэтому мы будем такие ряды исследовать, прежде всего, на абсолютную сходимость.

В то же время для знакопеременных рядов действует необходимый признак сходимости $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Поэтому, если общий член ряда не стремится к 0, то ряд расходится.

Сформулируем алгоритм исследования знакопеременных рядов на сходимость.

1) Исследуем на сходимость ряд модулей. Если он сходится, значит, исходный ряд сходится абсолютно.

2) Исследуем сам ряд или ряд модулей на необходимый признак сходимости. Если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$***, ряд расходится.***

Пример 1. Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$

Решение. Ряд является знакопеременным, т к. $\sin n$ принимает, как положительные, так и отрицательные значения. Рассмотрим ряд модулей $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$. При любых

n $|\sin n| \le 1$, поэтому $\frac{|\sin n|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$. Поскольку оба ряда – положительные, можем воспользоваться признаком сравнения. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, значит меньший $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^2}$ ряд тоже сходится. Таким образом, исходный ряд сходится абсолютно.

Пример 2. Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\cos n$

Решение. Необходимый признак сходимости не выполняется. Действительно, функция $\cos n$ не имеет предела при $n \to \infty$. Она принимает любые значения от -1 до 1. Ряд расходится.

Пример 3. Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot\sin n}{n^3+5}$

Решение. Поскольку $|\sin n| \le 1$, то $|n\cdot\sin| \le n$.

Поэтому, модули членов ряда не превосходят $\frac{n}{n^3+5}$. Таким образом, $\left|\frac{n\cdot\sin n}{n^3+5}\right| \le \frac{n}{n^3+5} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$. Используем признак сходимости. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, как обобщенный гармонический. Значит, меньший ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n\cdot\sin n}{n^3+5}\right|$ также сходится. Исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot\sin n}{n^3+5}$ сходится абсолютно.

УПРАЖНЕНИЯ.

Исследовать знакочередующийся ряд на абсолютную и условную сходимость.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{\sqrt{n^3+5n+6}}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\sin n+1}{n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{tgn-100}{7n^4}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^3\cos n+5n}{n^5+2n^2+1}$

ТЕМА 11

ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ РЯДЫ.

Знакочередующимся рядом называется ряд вида:

$$\pm(u_1-u_2+u_3-u_4+...+(-1)^{n-1}u_n+...), \qquad (1)$$

где u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ... положительные числа. Т.е. в знакочередующихся рядах строго поочередно следуют положительные и отрицательные числа.

Основным инструментом исследования знакочередующихся рядов является признак Лейбница. Для сходимости таких рядов достаточно выполнения двух условий: невозрастания и сходимости общего члена ряда к нулю: $u_n \ge u_{n+1}$ $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

Признак сходимости знакочередующегося ряда (признак Лейбница).

Знакочередующийся ряд $u_1 - u_2 + u_3 - ... + (-1)^{n-1}u_n + ...$ *сходится, если абсолютные величины его членов монотонно убывают, а общий член стремится к нулю, т.е. если выполняются следующие два условия:*

1) $u_1 > u_2 > u_3 > ...$ *и 2)* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Также знакочередующиеся ряды можно исследовать на абсолютную и условную сходимости (подробнее в предыдущем разделе).

Напомним, что если ряд сходится абсолютно, то есть сходится ряд, составленный из модулей элементов, то сходится и сам ряд. Поэтому при исследовании сначала смотрим абсолютную сходимость, если ее нет, то выясняем, является ли ряд условно сходящимся.

Алгоритм исследования знакочередующихся рядов на сходимость.

1) Исследуем на сходимость ряд модулей. Если он сходится, значит, исходный ряд сходится абсолютно.

2) Применяем признак Лейбница. Если этот признак выполняется, а ряд модулей расходится, значит, исходный ряд сходится условно.

3) Исследуем сам ряд или ряд модулей на необходимый признак сходимости, совпадающий со вторым условием признака Лейбница. Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, ***ряд расходится.***

Пример 1. Исследовать ряд на сходимость

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots$$

Решение. Ряд, составленный из модулей

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ - это гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится. Таким образом, исследуемый ряд не является абсолютно сходящимся.

Теперь исследуем этот ряд просто на сходимость. Во-первых, $1>\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}>\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1},\ldots$, то есть $u_n>u_{n+1}$ для любого n, а значит условие монотонности (монотонного убывания членов ряда) выполнено. Надо проверить, что n–ый член ряда сходится к нулю. Очевидно, что

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$ Все условия признака Лейбница выполнены. Следовательно, ряд сходится условно.

Пример 2. Исследовать ряд на сходимость

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}-\frac{1}{17}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2+1}+\ldots$$

Решение. Абсолютные значения элементов ряда равны

$\frac{1}{n^2+1}, n=1,2,3,\ldots.$ Для каждого элемента этого ряда

выполняется $\frac{1}{n^2+1}\le\frac{1}{n^2}$. Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, следовательно, и ряд, составленный из меньших членов $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ также сходится. Значит, исследуемый ряд $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}-\frac{1}{17}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2+1}+\ldots$ сходится абсолютно.

Пример 3. Исследовать ряд на сходимость

$$1-\frac{3}{4}+\frac{5}{7}-\frac{7}{10}+\ldots$$

Решение. Этот ряд также является знакочередующимся. В числителе этого ряда стоит арифметическая прогрессия с разностью 2 и начальным членом 1. Поэтому числитель для n-ого члена ряда равен 2(n-1)+1=2n-1. В знаменателях элементов ряда стоят числа, увеличивающиеся на 3, то есть также арифметическая прогрессия с разностью 3: $3n-2$. Таким образом, $|u_n|=\frac{2n-1}{3n-2}$. Применим к этому ряду признак Лейбница. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n-2}=\frac{2}{3}\neq 0.$ Не выполнен необходимый признак сходимости. Следовательно, ряд расходится.

Пример 4. Исследовать ряд на сходимость

$$1{,}1-1{,}01+1{,}001-\ldots+(-1)^{n-1}(1+(0{,}1)^n)+\ldots.$$

Решение. Применим к этому ряду признак Лейбница. Первое условие выполняется: $1{,}1>1{,}01>1{,}01>\ldots>\ldots$. Проверим выполнение необходимого признака сходимости.

$u_n = 1 + \frac{1}{10^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{10^n}\right) = 1 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{10^n} = 1 + 0 = 1.$

Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, необходимый признак сходимости не выполнен. Ряд расходится.

УПРАЖНЕНИЯ.

Исследовать знакочередующийся ряд на абсолютную и условную сходимость.

1) $\frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{13} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{3n+4}$

2) $1 - \frac{1}{6} - \frac{2}{9} + \frac{3}{14} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+5}$

3) $\frac{4}{2} - \frac{5}{16} + \frac{6}{54} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{n+3}{2n^3}$

4) $0 - \frac{\ln 2}{4} - \frac{\ln 3}{5} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n+2}$

5) $0 - \frac{\ln 2}{8} + \frac{\ln 3}{15} - \frac{\ln 4}{24} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n^2+2n}$

6) $2 - \frac{5}{7} + \frac{8}{13} - \frac{11}{19} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{3n-1}{6n-5}$

7) $4 - \frac{16}{2} - \frac{64}{6} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{4^n}{n!}$

8) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n-1}}$

9) $\frac{2}{4} - \frac{3}{14} + \frac{4}{36} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^3+3n} + \ldots$

10) $\frac{5}{23} - \frac{8}{38} + \frac{11}{53} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{3n+2}{15n+8} + \ldots$

11) $0-\frac{\ln^3 2}{2}+\frac{\ln^3 3}{3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{\ln^3 n}{n}$

12) $\frac{5}{4}-\frac{40}{16}+\frac{135}{64}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{5n^3}{4^n}+\ldots$

ОТВЕТЫ.

К теме «Нахождение общего члена ряда»:

1) $a_n=\frac{1}{3n-2}$ 2) $a_n=\frac{2n-1}{4n-3}$ 3) $a_n=\frac{1}{n^2+n-1}$

4) $a_n=\frac{n^2}{2n}$ 5) $a_n=\frac{n^2-1}{(n+1)^2+2}$ 6) $a_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}$

7) $a_n=\frac{n}{2n-1}$ 8) $a_n=(-1)^{n+1}\frac{3n+1}{2n^2}$

К теме «Разложение на простейшие дроби»

1) $S=\frac{137}{100}$ 2) $S=\frac{363}{140}$ 3) $S=\frac{7}{36}$ 4) $S=\frac{1}{21}$

К теме «Необходимый признак сходимости»:

1) да 2) нет 3) да 4) нет

К теме «Обобщенные гармонические ряды»

1), 2), 4) сходятся; остальные - расходятся

К теме «Геометрические прогрессии».

1) сходится, $S=\frac{4}{3}$ 2) сходится, $S=-2$ 3) сходится, $S=80$

4) сходится, $S=\frac{4}{3}$ 5) сходится, $S=\frac{46}{99}$ 6) расходится

К теме «Признак сравнения»

1) сходится 2) сходится 3) сходится
4) расходится 5) сходится 6) расходится
7) расходится 8) расходится 9) сходится
10) сходится 11) сходится

К теме «Предельный признак сравнения»
1) расходится 2) сходится 3) сходится
4) расходится 5) расходится 6) сходится
7) сходится 8) расходится

К теме «Признак Даламбера»
1) сходится 2) сходится 3) сходится
4) расходится 5) сходится
6) нужно применять другие признаки (сходится)
7) сходится 8) сходится

К теме «Интегральный признак»
1) расходится 2) сходится 3) сходится 4) сходится

К разделу «Знакопеременные ряды»
1) сходится абсолютно 2) сходится условно
3) расходится 4) сходится абсолютно

К теме «Знакочередующиеся ряды»
1) сходится условно 2) сходится условно 3) сходится абсолютно 4) сходится условно 5) сходится абсолютно 6) расходится
7) сходится абсолютно 8) сходится абсолютно
9) сходится абсолютно 10) расходится
11) сходится условно 12) сходится абсолютно

Учебно-методическое издание

Каган Дмитрий Зиновьевич

РЯДЫ.

ЧАСТЬ 1.

Методические указания.

Подписано в печать	Формат 60*84 / 16
Заказ №	Усл. печ. л. -
Тираж - 100 экз.	Изд. № 198-11

150048, Ярославль, Московский пр. д. 151
Типография Ярославского ж.д. техникума-филиала МИИТ