Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский государственный университет путей сообщения»

Кафедра «Математика»

Д.З. Каган

Теория вероятностей
Часть 1

Случайные события

Рекомендовано редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия для студентов экономических специальностей

Москва – 2012

УДК 519.21

К 12

Каган Д.З. Теория вероятностей. Часть 1. Случайные события: Учебное пособие. – М.: МИИТ, 2012. – 73с.

Учебное пособие предназначено для студентов всех специальностей ИЭФ, изучающих курс теории вероятностей.

Содержит изложение основных теоретических сведений, примеры решения задач и варианты индивидуальных заданий.

По всем темам, содержащимся в пособии, приводятся большое количество решенных задач с подробными комментариями, а также задачи для самостоятельного решения.

Рецензенты:

Клячко А.А.- кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ.

Корниенко Н.А.- кандидат технических наук, доцент кафедры "Высшая математика" МИИТ.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1

Элементы комбинаторики

Число размещений

Начнем с конкретных примеров. Рассмотрим основные понятия комбинаторики на примере группы из 15 студентов.

Пусть в группе 15 студентов.

Есть три билета в театр на один спектакль. Первый билет – на первый ряд, второй билет – на десятый ряд и третий билет – в партер.

Сколькими способами можно выбрать трех человек, которые получат билеты.

В данной задаче важно, кто именно какой билет получит, то есть, кто будет на первом ряду, кто – на десятом, а кто – в партере.

Первый билет может получить любой из 15 студентов.

Таким образом, имеем 15 различных вариантов. На каждый из этих 15 вариантов приходится по 14 вариантов, кому достанется второй билет. Ведь второй билет должен достаться другому человеку. Всего получается 15*14=210 вариантов распределения первых двух билетов. При каждом из этих вариантов третий билет может достаться любому, кроме двоих – тех, кто получил первые два билета, то есть для любой выбранной первой пары возможно 13 вариантов, кому достанется третий билет.

Всего получается $15*14*13=2730$ различных возможных троек.

Это число называется **числом размещений из 15 по 3** и обозначается A_{15}^{3}.
Теперь сформулируем общее определение.

Определение. *Размещениями* *называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком.*

Число размещений из n по m ($m \le n$) - это число способов выбрать m элементов из n различных элементов, если порядок, в котором они выбраны, имеет значение

Число всех возможных размещений равно

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)$$

n! – это произведение всех целых чисел от 1 до n, $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$. Такое произведение называется факториалом.

Определение. *Факториалом* *целого положительного числа n (обозначается n!) называется произведение* $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$

Для факториала выполнено свойство: n! = n*(n – 1)!

Формулу числа размещений нужно применять в тех случаях, когда мы выбираем несколько предметов из группы, и *важно, в каком порядке мы их выберем*.

Приведем примеры использования и подсчета числа размещений.

Пример 1. Из группы в 14 человек выбирают старосту и профорга. Сколько вариантов?

Решение. Можно выбрать любых двух студентов. Естественно, один человек не может быть и старостой, и профоргом, поэтому выбрать нужно двух разных студентов. При этом важен порядок, ведь важно, кто именно – староста, а кто – профорг. Например, вариант «Миша – староста, Оля – профорг» отличается от варианта «Оля – староста, Миша – профорг».

Таким образом, из 14 человек мы выбираем двух разных с учетом порядка.

Старостой может быть любой из 14 студентов. Значит, у нас 14 вариантов. При любом выборе старосты остается по 13 вариантов профорга. То есть на каждый из 14 вариантов выбора старосты приходится по 13 вариантов выбора профорга. Таким образом, нужно перемножить 14 и 13.

$$\mathbf{N} = 14 \cdot 13 = 182$$

Также можно воспользоваться формулой для числа размещений:

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}_{14}^{2} = \frac{14!}{(14-2)!} = \frac{14!}{12!} = 14 \cdot 13 = 182$$

Пример 2. Сколько можно составить четырехзначных чисел, так чтобы среди них не разу не повторялись цифры.

Решение. Всего цифр -10. Порядок нам естественно важен. Ведь числа 1234 и 2341 или 3241, разумеется, не равны. По условию все цифры должны быть разные, поэтому практически мы можем выбрать любые 4 разные цифры из 10. Однако общее число не будет равно $N \neq A_{10}^{4} = \frac{10!}{6!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$

Дело в том, что числа не могут начинаться с нуля, поэтому для первой цифры вариантов не десять, а девять. Для каждого варианта выбранной первой цифры имеем по 9 вариантов второй цифры (сюда не входит цифра, выбранная первой, но входит 0). Для любых первых двух цифр есть по 8 вариантов третьей цифры и по 7 вариантов четвертой цифры.

Таким образом, общее число вариантов равно

$$N = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$$

Пример 3. Составить различные размещения по 3 из букв {a,b, c, d} и подсчитать их число.

Решение. Из четырех букв можно образовать следующие размещения по три элемента: abc, abd, acb, acd, adb, adc, bca, bcd, bdc, bda, bad, bac, cad, cab, cbd, cba, cda, cdb, dab, dac, dba, dbc, dca, dcb.

Общее число можно найти по формуле (1)

$$N = A_{4}^{3} = 4 \cdot 3 = 24$$

Далее, во многих задачах мы еще будем возвращаться к числу размещений и вычислять его. Теперь мы перейдем к наиболее часто используемому в теории вероятностей понятию.

Число сочетаний

Вернемся к нашей группе из 15 студентов. Предположим, что этой группе снова повезло, и у них опять есть три билета в театр. Но на этот раз – все билеты на один ряд.

Сколькими способами теперь можно выбрать трех обладателей этих билетов.

А почему, собственно, это число изменилось?

Дело в том, что теперь нам не важно, кто какой билет получит, т.е. нам не важен порядок. Ведь все билеты – одинаковые. В примере с числом размещений, наоборот, порядок был важен.

В данной задаче варианты «Катя, Света, Миша» и «Света, Катя, Миша» - одинаковые. А варианты «Катя, Света, Миша» и «Катя, Витя, Миша» - разные. *Таким образом, разные тройки теперь отличаются только составом, но не порядком.*

Посчитаем число способов. Так же, как в первом примере, первый билет может получить любой из 15 студентов.

Для любого из этих 15 вариантов приходится по 14 вариантов, кому достанется второй билет. Третий билет может достаться любому, кроме тех, кто получил первые два билета, то есть для любой выбранной первой пары возможно 13 вариантов, кому достанется третий билет. Получается $A_{15}^3 = 15*14*13 = 2730$ различных возможных троек с учетом порядка.

Однако на каждую тройку студентов приходится по несколько вариантов различных порядков. Для любой выбранной тройки студентов, первый билет может получить любой из трех. На каждый из этих трех вариантов есть по два варианта, кто получит второй билет – один из двух оставшихся студентов. При выбранных первых двух, третий определен однозначно. То есть третий билет автоматически остается у последнего оставшегося студента из этой тройки.

Таким образом, на каждую тройку студентов приходится 3*2*1=6 различных порядков.

Число различных троек (без учета порядка) равно количество возможных троек с учетом порядка, деленному на количество разных порядков, соответствующих одной тройке.

$$N = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{2730}{6} = 455$$

Такое число называется **числом сочетаний из 15 по 3** и обозначается через C_{15}^3.

Определение. Сочетаниями *называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом.*

Определение. Число сочетаний C_n^m *из n различных элементов по m элементов (m ≤ n) – это число способов выбрать m элементов из n различных элементов,* ***если порядок, в котором они выбраны, не имеет значения, а важно лишь, какие элементы выбраны.***

Число сочетаний из n элементов по m равно

$$C_n^m = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot 1}$$

Или
$$C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$$

Считается по определению, что 0!=1. Тогда $C_n^0 = 1$ Логично считать, что для выбора 0 элементов из n есть 1 вариант.

Число сочетаний используется в очень многих задачах на вычисление вероятностей. Поэтому нужно владеть этим понятием и правильно его использовать.

Свойства числа сочетаний:

1) $C_n^m = C_n^{n-m}$

Действительно, число способов выбрать из 15 предметов 12 равно число способов выбрать из 15 предметов 3.

2) $C_n^m + C_n^{n-m} = C_{n+1}^{m+1}$

3) $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^{n-k} a^{n-k} b^k + \ldots C_n^n b^n$ **(бином Ньютона)**

4) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$

Пример 1. Из колоды в 36 карт вытащили 3 карты. Сколько разных вариантов того, какие карты это будут?

Решение. Можно вытащить любые 3 карты из 36. Для первой карты – 36 вариантов. На каждый вариант выбранной первой карты приходится по 35 вариантов второй карты. При выбранных первых двух картах, любая из 34 оставшихся может быть выбрана третьей. Получаем $36\cdot 35\cdot 34 = 42860$ варианта. Однако это количество вариантов – с учетом порядка. Например, тройки «валет червей, туз бубновый, десять пик» и «туз бубновый, десять пик, валет червей» учитываются здесь, как разные.

Важен ли в этой задаче порядок? Нет, потому что нас спрашивают только про сами три карты, а не про то, в каком порядке их вытащили. То есть, если вытащили тройку «валет червей, туз бубновый, десять пик», то нам не важно какую из этих карт вытащили первой, какую второй, а какую третьей. А вот тройка «валет червей, туз бубновый, семь пик» будет уже другой тройкой, ведь она отличается от предыдущей тройки одной картой.

Для любой тройки карт существует $3\cdot 2\cdot 1 = 6$ различных порядков, в которых их вытащили. Ведь первой могли вытащить любую из трех. На каждый вариант вытащенной первой карты приходится по 2 варианта, какую карту выбрали второй. Если известны первые две выбранные карты из трех, то третья определена однозначна.

Таким образом, с учетом порядка, существует 42860 вариантов для выбора трех карт, и для каждой тройки карт существует 6 вариантов порядка, в котором они могут быть выбраны.

Чтобы получить количество различных троек карт нужно поделить 42860 на 6. Это число равно числу сочетаний из 36 по 3.

$$N = C_{36}^3 = \frac{36!}{33!\cdot 3!} = \frac{36\cdot 35\cdot 34}{3\cdot 2\cdot 1} = 7140$$

Пример 2. Составить различные сочетания по 3 из букв {a, b, c, d} и подсчитать их число.

Решение. Из четырех букв можно составить следующие сочетания по 3 (напомним, что порядок букв не важен): (a,b,c); (a,b,d); (a,c,d); (b,c,d). Их число равно

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!\cdot 1!} = 4$$

Пример 3. Сколькими способами можно отобрать 4 человек из 30 студентов для участия в олимпиаде.

Решение. Для участия в олимпиаде можно выбрать любых четырех студентов из 30. При этом, не важно, кого отберут первым, кого – вторым, а кого – четвертым, поэтому порядок не важен. Значит, число способов равно числу сочетаний из 30 по 4.

$$\mathbf{N} = C_{30}^4 = \frac{30!}{26!\cdot 4!} = \frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 27405$$

Пример 4. В шахматном турнире участвуют 12 человек. Сколько партий должно быть сыграно в турнире, если между любыми двумя участниками должна быть сыграна одна партия?

Решение. В каждой партии играют два участника из 12 и любая такая пара отличается от других только составом пар участников (ведь между двумя игроками играется всего одна пара). Значит, два участника одной игры представляют собой сочетание из 12 элементов по 2. Каждый должен сыграть с каждым, поэтому число партий равно общему числу сочетаний из 12 по 2. Находим это число по формуле для числа сочетаний $n = C_{12}^2 = \frac{12\cdot 11}{2\cdot 1} = 66$.

Перестановки

Вернемся к группе из 15 студентов. *Сколько различных очередей можно составить из этих 15 студентов?*

В любой очереди должны быть все 15, и каждый должен занимать ровно одно место.

На первое место в очереди может встать любой из 15 – 15 вариантов. На любой вариант, кто станет первым, приходиться по 14 вариантов, кто станет вторым, итого 15*14 вариантов для первых двух. Для каждой возможной пары первых двух студентов есть по 13 вариантов третьего в очереди. На четырнадцатое место в очереди, при любом варианте первых 13, будет два варианта. При выбранных первых 14, для последнего 15 -го места будет 1 вариант.

Всего различных очередей будет

$N = 15\cdot 14\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1 = 1307674368000$

Из группы в 15 студентов можно получить больше 1 триллиона очередей!

Если в группе будет n студентов, то из них можно составить

$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{n}-1)\cdot(\boldsymbol{n}-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = \boldsymbol{n!}$ различных очередей. Каждая такая очередь называется перестановкой из n элементов.

Определение. ***Число перестановок*** *– это количество способов расставить n различных предметов по порядку.*

Оно обозначается через $\boldsymbol{P_n}$

Определение. ***Перестановками*** *называют комбинации, состоящие из одних и тех же* ***n*** *различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения.*

Число всех возможных перестановок из n элементов равно.

$$P_n = n!$$

Пример 1. Составить различные перестановки из 3 букв {a,b,c} и подсчитать их число.

Решение. Из этих трех букв мы можем составить следующие перестановки: abc, bca, cab, acb, bac, cba.

Число перестановок можно подсчитать по формуле

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Пример 2. Четыре студента в группе получили на экзамене разные оценки. По одной «5», «4», «3» и «2». Сколько разных вариантов, кто какую оценку получил.

Решение. В этой задаче, каждый студент получает по одной оценке, причем все оценки - разные. Число вариантов – такое же, как число очередей из этих четырех студентов. Пятерку может получить любой из 4, на любой из 4 вариантов, кто получил «5», приходится по 3 варианта, кто получил «4». На любой из $4 \cdot 3 = 12$ вариантов того, кто получил пятерку и четверку, приходится по 2 варианта, кто получил тройку.

$$N = P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Размещения с повторениями

Определение. *Если в размещениях из n элементов по m некоторые из элементов могут оказаться одинаковыми, то такие размещения называют* ***размещениями с повторениями*** *из n элементов по m.*

Число размещениями с повторениями из n элементов по m обозначается $\tilde{A}_n^m$.

Вернемся снова к нашему примеру.

Представим, что у группы из 15 студентов есть 3 билета в театр, но на разные спектакли и разные дни. Сколько вариантов распределить эти билеты.

В этом примере добавляются дополнительные варианты по сравнению с числом размещений. Ведь два или даже все три билета могут достаться одному студенту. Порядок в данном случае важен. Ведь все спектакли – разные, и важно, кому – на какой спектакль достанется билет.

Первый билет может получить любой из 15 студентов – 15 вариантов. При выбранном первом студенте, есть также 15 вариантов, кто получит второй билет, ведь тот, кто получил билет №1, может получить и второй билет. На каждый вариант распределения первых двух билетов приходится по 15 вариантов, кто получит третий билет. Общее число всех вариантов равно $N = 15 \cdot 15 \cdot 15 = 15^3 = 3375$

В данном случае среди возможных различных вариантов есть, например, такие ; ««Света – 1-ый билет, Света – 2-ой билет, Катя – 3-ий билет» или «Света – 1-ый билет, Света – 2-ой билет, Света – 3-ий билет».

Если выбираем m элементов из n с возможными повторениями и учетом порядка, то первым можем выбрать любой из m элементов - n вариантов. На каждый из n вариантов первого выбора приходится по n вариантов выбора второго элемента. При выбранных (m-1) элементах остается также n вариантов для выбора последнего m-го элемента.

Всего получается вариантов:

$$\widetilde{A}_n^m = n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^m = 3375$$

Пример 1. Составить различные размещениями с повторениями по 3 из букв {a,b,c} и подсчитать их число

Решение. Возможны следующие размещения aaa, aab, aac, abb, abc, aba, aca, acb, acc, baa,bab, bac, bba, bbb, bbc, bca, bcb, bcc, caa, cab, cac, cba, cbb, cbc, cca, ccb, ccc.

Общее число равно

$$\mathbf{N} = \widetilde{\mathbf{A}}_3^3 = 3^3 = 27$$

Пример 2. В конкурсе по 5 номинациям участвуют 10 кинофильмов. Сколько существует вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены различные призы.

Решение. Каждый из вариантов распределения призов является комбинацией 5 фильмов из 10, отличающуюся от других комбинаций как составом фильмов, так и их порядком по номинациям. Одни и те же фильмы могут получить по нескольку призов, т.е. могут повторяться несколько раз. Таким образом, каждый из вариантов распределения призов представляет собой размещение с повторениями из 10 элементов по 5. Их число равно $\mathbf{N} = \widetilde{A}_{10}^5 = 10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10 = 10^5 = 100\,000$

Сочетания с повторениями.

***Определение. Сочетаниями** из **n** элементов по **m** с повторениями называются комбинации, содержащие m элементов (без учета порядка следования), причем любой элемент может входить в соединение некоторое число раз, но не больше m*

***Число всех сочетаний с повторениями** из n элементов по m вычисляется по формуле*

$$\widetilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{m}} = C_{n+m-1}^m$$

Пример 1. Составить различные сочетания с повторениями по 3 из букв {a, b, c, d} и подсчитать их число.

Решение. Из четырех данных букв можно составить следующие сочетания по 3 (напомним, что порядок букв не важен): (a,a,a), (a,a,d); (a,a,b); (a,a,c); (a,b,b); (a,c,c); (a,d,d); (a,b,c); (a,b,d); (a,c,d); (b,b,b), (b,b,c); (b,b,d); (b,c,c), (b,c,d); (b,d,d); (c,c,c); (c,c,d), (c,d,d); (d,d,d). Их число находим по формуле $\widetilde{C}_4^3 = C_{4+3-1}^3 = C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$

Пример 2. В продаже имеются фрукты: апельсины, лимоны, яблоки, персики, бананы. Сколькими способами можно купить набор из 10 фруктов?

Решение. Покупка не зависит от того, в каком порядке будут уложены фрукты. Покупки будут отличаться друг от друга только количеством купленных фруктов хотя бы одного вида.

Следовательно, количество различных покупок равно числу сочетаний из 5 по 10 с повторениями. Определяем это число по приведенной выше формуле.

Таким образом, количество различных покупок

$$\tilde{C}_5^{10} = C_{10+5-1}^{10} = C_{14}^{5} = \frac{14!}{10!\cdot 4!} = 1001$$

Правила суммы и произведения

При решении комбинаторных задач часто применяется два важных правила - правила суммы и произведения.

Правило суммы. *Если некоторый объект A может быть выбран из совокупности объектов m способами, а объект B может быть выбран n способами, то выбрать либо A, либо B можно m+n способами.*

Правило произведения. *Если объект A можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара объектов (A, B) может быть выбрана m×n способами.*

Пример 1. На книжной полке стоят 10 различных книг по математике и 6 – по экономике. Сколькими способами можно выбрать 2 книги по одному предмету?

Решение. Порядок выбора в этой задаче не важен, т.к. не важно, какую книгу выбрали первой, а какую второй. Поэтому две книги по математике можно выбрать $C_{10}^2 = \frac{10\cdot 9}{2} = 45$ способами, а по экономике – $C_6^2 = \frac{6\cdot 5}{2} = 15$ способами.

Нужно выбрать две книги по одному предмету: или по математике, или по экономике. Подойдет любой из 45 вариантов выбора двух книг по математике или любой из 15 по экономике. Согласно правилу сложения их можно выбрать **45+15=60** способами.

Пример 2. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1,3,5,7,9, если а) цифры могут повторяться; б) цифры в числе не повторяются?

Решение. а) Для получения четырехзначного числа нужно последовательно выбрать 4 цифры. Цифрой разряда тысяч, сотен, десятков и единиц может быть любая из 5 данных, то есть для каждой цифры четырехзначного числа имеется по 5 возможных вариантов. Согласно правилу произведения число четырехзначных чисел равно $\mathbf{N} = 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5 = 625$

б) На первом месте может быть любая из пяти цифр: {1,3,5,7,9}. Поскольку цифры не могут повторяться, то при каждом варианте выбранной первой цифры на втором месте может быть любая из оставшихся четырех цифр. При выбранных первых двух для третьего места остается выбор из трех цифр, для последнего четвертого места выбираем из 2 цифр, поэтому имеем **5· 4·3· 2 = 120** способов – 120 различных чисел.

Примечание. Пример 2 можно решить с помощью комбинаторных понятий: числа размещений с повторениями и без повторений.

Решение задач

В этом параграфе мы рассмотрим различные задачи, связанные с комбинаторикой. В некоторых из них нужно будет применить сразу несколько комбинаторных понятий. Главное – четко понять условие задачи, и, соответственно, определить, какие именно формулы из комбинаторики нужно применять.

Пример 1. Сколько различных слов можно получить, если переставлять буквы в слове «перестановка»?

Решение. Если бы в этом слове все буквы были разные, то общее количество слов было бы равно $\mathbf{P_{12}}=12!=12\cdot 11\cdot 10\cdot\ldots\cdot 1$ – количеству перестановок из 12. Действительно, в слове «перестановка» 12 букв. На первое место можно поставить любую из 12. При каждой выбранной первой букве на вторую позицию можно поставить любую из 11 оставшихся букв. На каждый из $12\cdot 11$ вариантов двух первых букв приходится по 10 вариантов для третьей буквы. И так далее, до последней буквы. При выбранных первых одиннадцати буквах, двенадцатая будет определена однозначно.

Однако, в слове «перестановка» по две буквы «е» и «а», еще 8 букв встречаются по одному разу. Для двух букв «е» можно выбрать любые две позиции из 12, например, эти буквы могут занять 1-ое и 2-ое место или 1-ое и 7-ое место. Порядок не важен, поскольку две буквы «е» - одинаковые. Действительно, если буквы «е» займут 3-ое и 10-ое места, или, наоборот, 10-ое и 3-ое, то это будет одно и то же слово. Число способов расставить две буквы «е» равно $C_{12}^2=\dfrac{12\cdot 11}{2\cdot 1}=66$ - число способов выбрать любые два числа из 12.

При любых выбранных двух позициях для букв «е» остается 10 свободных позиций, на которые нужно расставить оставшиеся буквы. Две буквы «а» могут занять любые две позиции из 10. Всего $C_{10}^2=\dfrac{10\cdot 9}{2\cdot 1}=45$ различных вариантов. На каждый возможный вариант расположения двух букв «е» приходится по 45 вариантов расположения букв «а». Всего для букв «а» и «е» есть $66\cdot 45=2970$ различных расположений, т.е. возможных 4 позиций из 12, которые эти буквы могут занять.

При любом таком варианте остается 8 свободных позиций и 8 различных букв, которые нужно расставить на эти позиции. На первую из оставшихся позиций можно поставить любую из 8 букв – 8 вариантов. При выбранной первой букве для второй позиции есть по 7 вариантов, на третью позицию может встать любая из 6 оставшихся букв и т.д. Число способов расставить 8 различных букв на 8 позиций равно числу всех возможных расстановок этих 8 букв в очередь – числу перестановок из 8: $\mathbf{P_8}=8!=40320$

На каждый из 2970 вариантов расстановок букв «а» и «е» есть по 8!=40320 вариантов расстановки остальных 8 букв на 8 позиций. Общее количество различных слов: $\mathbf{N}=\mathbf{C_{12}^2}\cdot\mathbf{C_{10}^2}\cdot 8!=2970\cdot 40320=119\,750\,400$

Пример 2. Сколькими способами можно выбрать 5 студентов из группы, в которой учатся 12 мальчиков и 15 девочек? А сколькими способами можно выбрать 5 студентов, если среди них должны быть 2 девочки и 3 мальчика?

Решение. Можно выбрать любых 5 студентов из 27. Порядок, очевидно, не важен. Поэтому, число различных пятерок равно числу сочетаний из 27 по 5.

$$\mathbf{N} = \mathbf{C}_{27}^{5} = \frac{27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 80730$$

Если среди выбранных студентов должны быть 2 девочки и 3 мальчика, нужно посчитать количество пятерок, в которых будут как раз 2 девочки и 3 мальчика. Можно выбрать любые 2 девочки из 15, число вариантов равно числу сочетаний из 15 по 2, $\mathbf{C}_{15}^{2} = 105$. Различных троек мальчиков из 12 будет $\mathbf{C}_{12}^{3} = 220$. На каждую пару девочек может прийтись любая тройка мальчиков. То есть на любой из 105 вариантов выбранных девочек приходится по 220 вариантов выбранной тройки мальчиков. Согласно правилу произведения выбрать 2 девочек и 3 мальчиков можно $105 \cdot 220 = 23100$ способами.

Пример 3. Сколькими способами можно распределить 6 пятерок среди 5 студентов, если пятерки считаются одинаковыми, а студенты – разными?

Решение. Сначала переберем принципиально различные варианты. Возможны следующие распределения пятерок:
6,0,0,0,0 – все 6 пятерок достаются одному студенту;
5,1,0,0,0 – 5 пятерок достаются одному студенту, еще одна - другому;
4,1,1,0,0 – 4 пятерки достаются одному студенту, еще два студента получают по одной пятерке;
4,2,0,0,0 – 4 пятерки достаются одному студенту, оставшиеся две пятерки получает второй студент;
3,3,0,0,0 – два студента получают по 3 пятерки, остальные ничего не получают; другие варианты:
3,2,1,0,0
3,1,1,1,0
2,2,2,0,0
2,2,1,1,0
2,1,1,1,1.

Теперь нужно для каждого из принципиально различных вариантов подсчитать число возможных распределений среди 5 студентов и сложить их.

6,0,0,0,0 – все 6 пятерок достаются одному студенту, например 6 пятерок у Лены или 6 пятерок у Васи. 6 пятерок могут достаться любому из 5 студентов – 5 вариантов.

5,1,0,0,0 – 5 пятерок у одного студента, и еще одна – у другого. Например, «5 пятерок у Лены, 1 пятерка – у Васи» Пятерки могут получить любые 2 студента из 5, причем порядок важен, ведь важно, кто получит 5 пятерок, а кто получит 1 пятерку. Общее число возможных вариантов равно $\mathbf{A}_{5}^{2} = 5 \cdot 4 = 20$

4,1,1,0,0 Любой студент из пятерых может получить 4 пятерки, из оставшихся четырех любые 2 получают по одной пятерке. Поскольку, пятерки – одинаковые, разницы между вторым и третьим студентом нет, среди двух студентов, получивших по одной пятерке, порядок не важен. Общее число равно $\mathbf{A}_{5}^{1} \cdot \mathbf{C}_{4}^{2} = 5 \cdot \dfrac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 30$

4,2,0,0,0 4 пятерки может получить любой из 5 студентов, любой из 4 оставшихся может получить 2 пятерки. Число вариантов: $\mathbf{A}_{5}^{2} = 5 \cdot 4 = 20$

3,3,0,0,0 – Любые два студента получают по 3 пятерки, разницы между ними нет. Число вариантов: $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ То есть выбираем двух студентов из 5 без учета порядка.

3,2,1,0,0 Любой студент из 5 может получить 3 пятерки. Для каждого выбранного первого студента есть по 4 варианта, кто получит 2 пятерки При выбранных первых двух есть по 3 варианта, кто получит 1 пятерку. Вариантов получается $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Фактически мы выбираем любых 3 студентов из 5 с учетом порядка. Число возможных выборов равно число размещений из 5 по 3. $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

3,1,1,1,0 Выбираем 1 студента, получающего 3 пятерки, - 5 вариантов. Из оставшихся 4 можем выбрать любых трех, они получают по 1 пятерке. Число вариантов:
$A_5^1 \cdot C_4^3 = 5 \cdot 4 = 20$.

2,2,2,0,0 Можно выбрать любых 3 студентов из 5, порядок не важен. Число вариантов:
$C_5^3 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

2,2,1,1,0 Можно выбрать любых 2 студентов из 5 (они получают по 2 пятерки), из 3 оставшихся также выбираем любых двух (получат по одной пятерке). Число вариантов:
$C_5^2 \cdot C_3^2 = \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 3 = 30$.

2,1,1,1,1 Любой студент из 5 может получить 2 пятерки. Все остальные «автоматически» получают по одной. Число вариантов: $A_5^1 = 5$.

Складываем все возможные варианты и получаем **210** способов распределения пятерок.

Пример 3. В группе учатся 7 девушек и 5 юношей Для участия в конференции нужно выбрать 3 человек.

1.Сколькими способами можно осуществить этот выбор?

2. Сколькими способами можно осуществить этот выбор, если среди 3 участников должны быть 2 юноши и 1 девушка?

3. Должны быть 2 девушки и 1 юноша?

4. Должно быть не менее 2 юношей?

Решение. 1. Общее число возможных выборов трех человек равно числу сочетаний из 12 (число студентов в группе) по 3. $C_{12}^3 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$.

2. Можем выбрать любых 2 юношей из 5 и любую девушку из 7. Для выбора 2 юношей имеем $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ вариантов. Девушку можно выбрать любую из 7 – 7 разных вариантов. На каждую возможную пару юношей (из 10) приходится по 7 вариантов выбора одной девушки. Согласно правилу произведения, число различных вариантов выбора 2 юношей и 1 девушки равно $10 \cdot 7 = 70$.

3. Данная задача аналогична предыдущей. Для выбора 2 девушек имеем $C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ вариант. Для выбора 1 юноши – 5 вариантов. На конференцию с каждой из 21 пары девушек может быть послан любой из 5 юношей. Всего вариантов $21 \cdot 5 = 105$.

4. Подходят два принципиальных варианта, когда среди 3 выбранных - 2 юноши и 1 девушка или 3 юноши. Для выбора 2 юношей и 1 девушки есть 70 вариантов, как

подсчитано в предыдущей задаче. Число способов выбрать трех юношей из 5 равно $C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$.

Может быть выбрана любая тройка студентов из 70 троек с 2 юношами или 1 девушкой, или из 10 троек с 3 юношами. Всего способов: 70+10=80

Упражнения для самостоятельного решения.

1. Перед очередной игрой в сборную по футболу приглашены 28 игроков: 3 вратаря, 9 защитников, 11 полузащитников и 5 нападающих. Известно, что сборная будет играть по схеме 1-4-4-2, т.е. на поле выйдет 1 вратарь, 4 защитника, 4 полузащитника и 2 нападающих. Сколько имеется вариантов стартового состава сборной. Разными вариантами считаются составы, которые отличаются хотя бы одним футболистом из 11.

2. Сколько различных «слов», состоящих из трех букв, можно образовать из букв слова КАТЕР? А если слова содержат не менее трех букв?

3. В группе учатся 7 девушек и 5 юношей. Для участия в конференции нужно выбрать 3 человек. Сколькими способами можно осуществить этот выбор? Сколькими способами можно осуществить этот выбор, если среди 4 участников должны быть 2 юноши и 1 девушка? 1 девушка и 2 юноши?

4. Из 10 мальчиков и 10 девочек надо составить три команды для участия в эстафете. В каждой команде должны быть 1 мальчик и 1 девочка. Сколькими способами это можно сделать?

5. Сколько можно составить четырехзначных чисел так, чтобы любые две соседние цифры были разными?

6. Сколько можно составить различных четырехзначных чисел, используя цифры 0, 1, 2, 3, 7, 8?

7. В соревновании участвуют 10 спортсменов. Сколькими способами могут быть распределены награды: золото, серебро и бронза между 10 участниками соревнования?

8. Сколько различных слов можно получить, если переставлять буквы в слове «математика»?

9. Из 8 юношей и 15 девушек нужно выбрать 6 человек для участия в экскурсии. Сколькими способами можно осуществить этот выбор, если среди выбранных должны быть 2 девушки и 4 юноши?

10. Сколькими способами можно расставить на полке 7 различных книг, чтобы определенные три книги стояли рядом?

11. В группе учатся 15 девушек и 12 юношей. Для участия в конференции нужно выбрать 5 человек. Сколькими способами можно осуществить этот выбор? Сколькими способами можно осуществить этот выбор, если среди 5 участников должны быть 1 юноша и 4 девушки? 1 девушка и 4 юноши? 2 юноши и 3 девушки?

12. Сколькими способами можно рассадить 7 человек за круглым столом?

13. 10 студентов, среди которых Миша и Катя случайным образом занимают очередь в библиотеку. Сколько имеется вариантов расстановки студентов, чтобы между Мишей и Катей было ровно 5 студентов?

14. В электричке 16 вагонов. Сколько существует способов размещения 7 пассажиров, если в одном вагоне должно быть не более одного пассажира?

15. Сколькими способами можно выбрать один цветок из корзины, в которой имеется 16 тюльпанов, 5 роз и 10 хризантем?

16. На полке стоят 17 различных книг, из которых 3 книги – по геометрии, 5 книг – по математическому анализу и 9 книг – по теории вероятностей. для обмена, а у другого 16. Сколькими способами можно а) расставить эти книги на полке; б) расставить их так, чтобы книги по геометрии стояли рядом; в) чтобы все книги по теории

вероятностей стояли рядом друг с другом? Сколькими способами они могут осуществить обмен:

17. В ящике 15 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать 5 шаров, чтобы среди них было: а) 5 белых б) 5 черных; в) 2 белых и 3 черных?

18. На танцы пришли 40 мальчиков и 40 девочек. Сколько различных пар можно составить?

19. В группе учатся 7 мальчиков и 14 девочек Сколько различных пар «мальчик, девочка» можно составить?

20. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

21. Сколькими способами 12 человек могут встать в очередь друг за другом?

22. Из 5 первокурсников, 6 второкурсников и 7 третьекурсников надо выбрать 4 студентов на конференцию. Сколькими способами можно осуществить этот выбор, если среди выбранных должны быть студенты разных курсов?

23. Сколькими способами можно распределить 8 двоек среди 7 студентов, если двойки считаются одинаковыми, а студенты – разными?

24. Сколькими способами можно купить набор из пяти пирожных, если в продаже имеются 7 сортов пирожных, и сорта пирожных в наборе могут повторяться?

25. Сколько способами можно расставить в очередь 8 человек.

26. В ящике 7 белых и 8 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать из них 3 шара?

27. В ящике 8 белых и 6 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать из них 3 шара, так чтобы среди них были 2 белых и 1 черный?

28. В группе учатся 8 девушек и 6 юношей. Для участия в конференции нужно выбрать 4 человек. Сколькими способами можно осуществить этот выбор? Сколькими способами можно осуществить этот выбор, если среди 4 участников должны быть 2 юноши и 2 девушки? 3 девушки и 1 юноша?

29 Сколько различных слов можно получить, если переставлять буквы в слове «математика»?

30. Сколько различных слов можно получить, если переставлять буквы в слове «бухгалтерия»?

31. Группа студентов изучает 10 различных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание занятий в понедельник, если в этот день должно быть 4 разных занятия?

Глава 2

Виды случайных событий.

Одним из основных и самых используемых понятий в теории вероятностей является понятие случайного события.

Определение. Под случайными событиями понимается любое событие, которое может произойти или не произойти.

Можно дать более четкое *определение*.

Определение. Случайным событием (или просто событием) *называется любой факт, который в результате некоторого испытания, опыта может произойти или не произойти.*

Примерами случайных событий могут быть:

- Получение пятерки на экзамене
- Сдача или несдача экзамена
- Победа одной из команд в футбольном матче
- Появление «орла» при бросании монеты
- Выпуск бракованного изделия

Далее мы будем рассматривать и более сложные события, являющиеся различными комбинациями простых событий, например

- Студент сдает три экзамена на пятерки
- Студент сдает один экзамен на 5, один на 4, и один на 3
- Команда выигрывает два матча подряд

Событие — это не какое-нибудь происшествие, а лишь возможный **исход**, результат испытания (опыта). События, обычно, обозначаются прописными (заглавными) буквами латинского алфавита: A, B, C.

Теперь, подумаем о том, какие могут быть виды событий и как их можно классифицировать.

Классификация событий

Совместные события

Несколько событий могут быть совместными или несовместными.

Определение. *Два события называются* ***несовместными,*** *если они не могут произойти одновременно в одном опыте, т.е. появление одного из них исключает появление другого события.*

В противном случае, если два события могут произойти одновременно, события называются ***совместными.***

Пример 1. Студент сдает экзамен.

Рассмотрим следующие события

A: «Студент сдает экзамен на пятерку»
B: «Студент сдает экзамен на четверку »
C: «Студент сдает экзамен на тройку»
D: «Студент получает двойку, т.е. не сдает экзамен»
E: «Студент получает на экзамене пять или четыре»
F: «Студент сдает экзамен, т.е. получает «5», «4» или «3»

События **A и B** – очевидно несовместные, ведь студент не может на одном и том же экзамене получить и «5» и «4». Точно также несовместными являются события **B** и **C** или **B** и **D**.

А вот события **A** и **E** являются совместными.

Также совместными являются события **E** и **F**.

Равновозможные события

Определение. События называются равновозможными*, если в результате испытания по условиям симметрии ни одно из этих событий не является объективно более возможным.*

Приведем также другой вариант определения.

Определение. *События называют равновозможными, если есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.*

Например, *при бросании игральной кости появление того или иного числа очков (скажем, выпадение «3» и «4») – равновозможные события*. Это – очевидно в силу симметрии кубика. Все грани кубика – абсолютно одинаковые, и вероятности выпадения любой грани – одинаковы.

При бросании монеты, *выпадение «орла» и «решки»* - также равновозможные события.

А вот получение на экзамене 5, 4, 3 или 2 не являются равновозможными и зависят от сложности экзамена и уровня подготовки по конкретному предмету студента.

Полная группа событий

Определение. *Несколько событий образуют полную группу, если в результате испытания обязательно должно произойти одно и только одно из этих событий.*

Эти события являются единственно возможными и несовместными исходами испытания. Это означает, что в результат испытания обязательно должно произойти одно из них и, при этом, не могут произойти сразу два события из этой группы.

Пример 2. Студент сдает экзамен. Обязательно произойдет одно и только одно из следующих событий: «Студент получит 5»,
«Студент получит 4»,
«Студент получит 3»,
«Студент не сдаст экзамен».

Эти события образуют полную группу.

Пример 3. Стрелок произвел выстрел по цели. Тогда обязательно должно произойти одно из следующих двух событий: попадание, промах. Эти два несовместных события образуют полную группу.

Пример 4. Из колоды карт вытащили одну карту. Полную группу событий образуют следующие события: «вытащенная карта - пика», «черва», «трефа», «бубна».

Пространство элементарных событий

*Непосредственные возможные исходы опыта называются **элементарными событиями**, если они являются взаимно исключающими и в результате опыта одно из них обязательно происходит.*

Совокупность всех элементарных событий в опыте называется пространством элементарных событий.

Элементарные события обозначается через w, а пространство элементарных событий обозначается через Ω.

Пример 5. Снова воспользуемся примером с игральной костью. Опыт бросание игральной кости.

Здесь 6 элементарных событий w1, w2, w3, w4, w5, w6. Событие w1 состоит в том, что при бросании выпало 1 очко. Событие w2 означает, что при бросании выпало 2 очка, и т.д. При бросании кубика обязательно должно выпасть какое-то число очков от 1 до 6. При этом выпасть должно одно и только одно число. Поэтому, все события w1, w2, w3, w4, w5, w6 несовместны и, очевидно, равновероятны. Эти 6 событий и составляют пространство элементарных событий

$$\Omega = \{\omega1, \omega2\omega3\omega4, \omega5, \omega6\}$$

Противоположные события

Определение. *Если одно из двух событий обязательно должно произойти, и эти два события - несовместные, то эти события называются **противоположными**.*

Событие, противоположное событию А, обозначается через Ā.

Пример 6. При бросании монеты выпадение «орла» и «решки» - противоположные события. Их можно обозначить:

А – «выпал орел»

Ā – «выпала решка»

Пример 7. Стрелок произвел выстрел по цели. Тогда обязательно должно произойти одно из следующих двух событий: попадание, промах. Эти два несовместных события образуют полную группу.

Пример 8. «В группе есть хотя бы один отличник» и «в группе нет отличников» - события противоположные.

Достоверное и невозможное события

Также нужно определить понятия достоверного и невозможного событий.

Определение. *Событие называется **достоверным**, если в результате испытания оно обязательно должно произойти.* То есть достоверное происходит с вероятностью 100%.

Совокупность всех элементарных событий в любом опыте является достоверным событием, и обозначается через Ω.

Определение. *Невозможным* *событием называется событие, вероятность которого равна 0*, в результате испытания оно вообще не может произойти. Оно обозначается знаком пустого множества $\varnothing$.

В главе 4 мы рассмотрим многие важные понятия, связанные с событиями и с операциями над событиями. А в следующей главе 3 мы используем введенные понятия для определения «классической вероятности».

Глава 3

Классическое определение вероятности

Определение. ***Вероятностью события А называется отношение***

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

числа m - элементарных исходов, благоприятствующих этому событию к числу n – общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов испытания, образующих полную группу.

Решение задач

Для того, чтобы пояснить рассматриваемые понятия, начнем с решения совсем простых задач, а потом перейдем к немного более сложным.

Пример 1. В группе учится 30 студентов, из них 12 юношей и 18 девушек. Случайным образом выбирают одного студента. Какая вероятность, что это будет девушка, а какая – юноша?

Решение. В данном случае, испытание – выбор одного студента. Число равновозможных элементарных исходов равно числу студентов в группе. Выбрать можно любого из тридцати, т.е. общее число равновозможных исходов равно $n=30$. Среди этих исходов благоприятствуют событию «выбрали девушку» 18 исходов, а событию «выбрали юношу» благоприятствуют 12 исходов.

Значит, вероятность выбрать девушку равна $P = \frac{18}{30} = 0{,}6$, а вероятность выбрать юношу равна $P = \frac{12}{30} = 0{,}4$.

Пример 2. Из колоды в 36 карт вытащили одну карту. Какая вероятность, что это карта - бубна?

Решение. Всего 36 карт, вероятность вытащить для каждой карты – одинаковая, поэтому общее число элементарных исходов $n=36$. Бубновых карт – 9, поэтому число благоприятствующих исходов $m=9$. Вероятность вытащить бубну равна $P = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

Пример 3. Один раз бросили игральную кость. Какова вероятность появления нечетного числа очков?

Решение. Возможны шесть исходов — выпадение 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков. Эти 6 исходов единственно возможны, несовместны и равновозможны. Поэтому $n=6$. Событию А - «появление нечетного числа очков» благоприятствуют 3 исхода (случая) - 1, 3 и 5 очков. По формуле классической вероятности P(A)=3/6=1/2=0,5

Пример 4. В урне содержится 20 шаров, из них 10 белых, 3 черных и 7 красных. Из урны наугад вынимается один шар. Какова вероятность появления белого шара?

Решение. Событие А – «из урны вынут белый шар». Общее число равновозможных несовместных исходов равно $n=20$. Среди них 10 благоприятствуют событию А, $m=10$.

$$P(A)=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}=0{,}5$$

Теперь рассмотрим примеры, в которых *используются формулы комбинаторики.*

Пример 5. В группе учится 30 студентов, из них 10 юношей и 20 девушек. 3 студента группы получили пятерки на экзамене. Найти вероятность, что пятерки получили 2 девушки и 1 юноша.

Решение. Событие А – «пятерки получили 2 девушки и 1 юноша». Пятерки могли получить любые три студента из группы, причем порядок значения не имеет. Поэтому, элементарные случаи – любой набор, сочетание из 3 студентов. Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно выбрать трех студентов из тридцати без учета порядка, т.е. равно числу сочетаний из 30 по 3:

$$n=C_{30}^{3}=\frac{30!}{3!\cdot 27!}=\frac{30\cdot 29\cdot 28}{3\cdot 2\cdot 1}=4060.$$

Значит, есть 4060 вариантов того, какие именно 3 студента получили пятерки. Каждый из этих вариантов равновозможен. Теперь, нужно подсчитать, сколько из этих вариантов будет соответствовать событию: «2 девушки + 1 юноша».

Среди девушек, пятерки могут получить любые 2 из 20, число вариантов равно числу сочетаний из 20 по 2 $C_{20}^{2}=\frac{20!}{2!\cdot 18!}=\frac{20\cdot 19}{2\cdot 1}=190$. Единственным юношей, получившим пятерку, может стать любой из 10, поэтому для выбора одного юноши имеем 10 вариантов. Каждый вариант выбранных двух девушек может совмещаться с любым вариантом выбора юноши. То есть на каждый из 190 вариантов выбора двух девушек приходится по 10 вариантов выбора одного юноши Общее число случаев, благоприятствующих искомому событию А равно $m=C_{20}^{2}\cdot 10=190\cdot 10=1900$

Вероятность события «пятерки получили 2 девушки и 1 юноша» равна доле возможных троек, состоящих из 2 девушек и 1 юноши, среди всех возможных троек студентов.

$$P(A)=\frac{190\cdot 10}{4060}=\frac{1900}{4060}\approx 0{,}47$$

Ответ. $P(A)\approx 0{,}47$

Пример 6. В группе учится 12 студентов, из них 5 юношей и 7 девушек. Для участия в олимпиаде по математике отбирают 4 студентов. Найти вероятность, что выберут

а) 3 юношей и 1 девушку,

б) 4 девушек,

в) 2 юношей и 2 девушек.

Решение. Это задача аналогично предыдущей.

а) Выбрать можно любых 4 студентов из 12. Общее количество элементарных случаев – это количество возможных четверок студентов. Оно равно числу сочетаний из 12 по 4. $n=C_{12}^{4}=\frac{12!}{4!\cdot 8!}=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=495$

Благоприятствующими случаями для нашего события «выбрали 3 юношей и 1 девушку» будут любые четверки, в которых 3 юношей и 1 девушка. Выбрать 3 юношей из 5 можно C_5^3 способами. Выбрать 1 девушку из 7 можно 7 способами. Каждой тройке юношей может соответствовать любая из 7 девушек. По правилу умножения общее количество подходящих четверок равно $m = C_5^3 C_7^1 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot 7 = 10 \cdot 7 = 70$.

Теперь можем посчитать вероятность события А - «выбрали 3 юношей и 1 девушку»: $P(A) = \frac{70}{495} \approx 0{,}14$.

б) Общее количество случаев, разумеется, остается таким же. Это по-прежнему число всех возможных четверток студентов: $n = C_{12}^4 = 495$. Пусть событие В — «выбрали 4 девушек». Можно выбрать любых 4 девушек из 7. Поэтому, число вариантов выбрать для участия в олимпиаде 4 девушек из 7 равно числу сочетаний из 7 по 4.

$m = C_7^4 = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$

Вероятность, что среди 4 выбранных студентов будут только девушки равна:

$P(B) = \frac{35}{495} \approx 0{,}07$

в) Пусть событие С — «выбрали 2 юношей и 2 девушек». Итак, $n = C_{12}^4 = 495$. Можно выбрать любых 2 юношей из 5 и любых 2 девушек из 7. Число вариантов выбора пары юношей равно числу сочетаний из 5 по 2: $C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. Для выбора пары девушек существует $C_7^2 = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$. К любой из 10 пар юношей на олимпиаде может присоединиться любая из 21 пары девушек. Число случаев, благоприятствующих событию С, равно $m = C_5^2 C_7^2 = 10 \cdot 21 = 210$. Итак, вероятность события «выбрали 2 юношей и 2 девушек» равна $P(C) = \frac{210}{495} \approx 0{,}42$.

Пример 7. В лифт на 1-м этаже девятиэтажного дома вошли 4 человека, каждый из которых может выйти независимо друг от друга на любом этаже с 2-ю по 9-й. Найти вероятность того, что все пассажиры выйдут:
а) на разных этажах;
б) на одном и том же этаже
в) на 5-ом этаже.

Решение. а) Пусть событие А — «все пассажиры выйдут на разных этажах». Каждый пассажир может выйти со 2-го по 9-й этаж — 8 вариантов. По правилу произведения общее число способов выхода четырех пассажиров из лифта равно $n = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^4 = 4096$. Это число можно подсчитать, как количество размещений с повторениями из 8 по 4: $n = \widetilde{A}_8^4 = 8^4 = 4096$. Ведь для каждого пассажира есть по 8 вариантов, причем каждый этаж может повторяться.

Вообще, каждый вариант выхода пассажиров можем обозначить 4 числами: номера этажей, на которых выйдут пассажиры. Например, (7, 5, 4, 5) означает, что 1-ый пассажир выйдет на 7-ом этаже, 2-ой пассажир - на 5-ом этаже, 3-ий пассажир - на 4-ом этаже, 4-ый пассажир - на 5-ом этаже. Для этого нужно условно пронумеровать пассажиров.

Теперь подсчитаем число случаев, благоприятствующих событию А. Первый пассажир может выйти на любом из 8 этажей. Для того чтобы все пассажиры вышли на разных этажах, второй пассажир должен выйти на любом этаже, кроме того, на котором вышел первый. То есть для любого из 8 вариантов, где выйдет первый пассажир, подходит по 7 вариантов для второго пассажира. При любом подходящем варианте для первых двух пассажиров, для третьего пассажира остается 6 вариантов — ведь два этажа из 8 уже заняты. Для 4-го пассажира остается 5 вариантов. Таким образом, $m = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$. Это число можно подсчитать, как количество размещений с повторениями из 8 по 4. Нам нужно выбрать 4 числа из 8 (2,3,…,9), причем числа не могут повторяться, и порядок важен. $m = A_8^4 = \frac{8!}{4!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$

Вероятность события А равна $P(A) = \frac{1680}{4096} \approx 0{,}41$.

б) Пусть событие В — «все пассажиры выйдут на одном этаже». Событию В будут благоприятствовать следующие случаи: все пассажиры выйдут на 2-м этаже, все пассажиры выйдут на 3-м,..., все пассажиры выйдут на 9-м этаже. Всего таких случаев будет $m=8$. Поэтому $P(B) = \frac{8}{4096} \approx 0{,}001$

в) Пусть событие С — «все пассажиры выйдут 5-ом этаже». Этому событию будет благоприятствовать один случай, собственно, когда все 4 пассажира выйдут 5-ом этаже (его можно обозначить через (5, 5, 5, 5)). $P(C) = \frac{1}{4096}$

Пример 8. Из колоды 36 карт вытащили 3 карты. Найти вероятность, что все карты – черви.

Решение. Мы можем выбрать любые 3 карты из 36. Порядок нам не важен. Общее количество равновозможных исходов n равно количеству различных троек карт (различных по составу). А количеству различных троек карт равно C_{36}^3 - количеству сочетаний из 36 по 3 $n = C_{36}^3 = \frac{36 \cdot 35 \cdot 34}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 3570$. Событию «все карты – черви» соответствуют только тройки, состоящие из трех червей. Могут быть любые 3 из 9. $m = C_9^3 = 84$ $\mathbf{P} = \frac{84}{2570} \approx 0{,}02$.

Пример 9. В коробке 5 синих, 3 красных и 4 зеленых карандаша. Наудачу вынимают 3 карандаша. Какова вероятность того, что: а) все они одного цвета; б) все они разных цветов; в) среди них 2 синих и 1 зеленый карандаш.

Решение. Прежде всего определим, что число способов выбрать 3 карандаша из 12 имеющихся в наличии равно $n = C_{12}^3 = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$. Обозначим через А событие «3 вынутых карандаша – одного цвета»; через В – «все шары разных цветов»; и через С - «вынули 2 синих и 1 зеленый».

а) Выбрать 3 синих карандаша из 5 можно $\mathbf{C}_5^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ способами; 3 красных из имеющихся 3 можно выбрать 1 способом; 3 зеленых из 4 зеленых - $\mathbf{C}_4^3 = 4$ способами.

По правилу сложения общее число случаев, благоприятствующих событию А = {все три вынутых карандаша - одного цвета}, равно $\mathbf{m} = 10 + 1 + 4 = 15$. Тогда $P(A) = \frac{15}{220} \approx 0{,}07$.

б) Итак, событие В (все три вынутых карандаша разных цветов). Синий карандаша может быть выбран любой из 5, на каждый вариант синего карандаша приходится по 3 варианта красного карандаша, для зеленого карандаша – 4 варианта. Число исходов, благоприятствующих наступлению события В, по правилу умножения равно

$m = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60, \quad P(B) = \dfrac{60}{220} \approx 0{,}27.$

в) Зеленый карандаш может быть любой из четырех – 4 варианта. Для 2 синих карандашей - $\mathbf{C}_5^2 = 10$ вариантов. На каждый вариант зеленого карандаша может прийтись любая пара синих. по правилу умножения $m = 10 \cdot 4 = 40$,

$\mathbf{P(C)} = \dfrac{\mathbf{40}}{\mathbf{220}} \approx 0{,}18.$

Пример 10. Слово «арифметика» составлено из карточек, на каждой из которых написана одна буква. Затем карточки смешиваются, вынимаются без возврата по одной и выкладываются. Найти вероятность, что снова появится слово "арифметика".

Решение. Событие А – появление слова "арифметика".

Некоторые буквы в слове "арифметика" повторяются (а – 2 раза, и – 2 раза). Найдем общее количество слов, которые можно получить, если переставлять буквы в слове "арифметика". (см. пример 1 из решения задач в главе 1)

Две буквы «а» могут занять любые две позиции из 10, число возможных расстановок этих двух букв равно числу сочетаний из 10 по 2 - $C_{10}^2 = \dfrac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$. При любых выбранных двух позициях для букв «а» остается 8 свободных позиций. Две буквы «и» могут занять любые две позиции из 8. Всего $C_8^2 = \dfrac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$ различных вариантов. Остается 6 свободных позиций и 6 различных букв, которые нужно расставить на эти позиции. Число способов расставить 6 различных букв на 6 позиций равно числу всех возможных расстановок этих 6 букв в очередь – числу перестановок из 6: $P_6 = 6! = 720$.

Общее количество различных слов согласно правилу умножения равно

$N = \mathbf{C}_{10}^2 \cdot \mathbf{C}_8^2 \cdot 6! = 45 \cdot 28 \cdot 720 = 907\,200$

Одно из этих слов - "арифметика". Поэтому число случаев, благоприятствующих событию А равно 1, $m = 1$.

Вероятность появления слова "арифметика" равна $\mathbf{P(A)} = {}^{1}\!/_{907200}$

Задачу можно решить другим способом, если рассматривать комбинации букв как все возможные перестановки из 10. Тогда N равно числу перестановок из 10 букв, $N = 10! = 3\,628\,800$.

Поскольку некоторые буквы в слове "арифметика" повторяются, возможны перестановки, при которых слово не изменяется. Их число по правилу произведения равно $m = 2! \cdot 2! = 4$. Тогда $\mathbf{P(A)} = \dfrac{4}{3628880} = \dfrac{1}{907200}$

Наряду с классическим определением вероятности также используется (хотя и значительно реже) *геометрическое и статистическое определения вероятности*.

Геометрическое определение вероятности

Пусть отрезок m составляет часть отрезка L. На отрезок L наудачу поставлена точка. Это означает, что поставленная точка может оказаться в любой точке отрезка L, вероятность попадания точки на отрезок m пропорциональна длине маленького отрезка и не зависит от его расположения относительно отрезка L. В этих предположениях вероятность попадания поставленной точки на отрезок m равна отношению длин отрезков:

P = Длина m / Длина L

Пусть, плоская фигура g составляет часть плоской фигуры G. На фигуру G наудачу бросается точка. Это означает, что все точки области G «равноправны» в отношении попадания туда брошенной точки. Вероятность попадания брошенной точки на фигуру g пропорциональна площади этой фигуры и не зависит ни от ее расположения относительно G, ни от формы g. Тогда вероятность события A - попадания брошенной точки на фигуру g равна отношению площадей фигур.

P(A) = Площадь g/Площадь G, $P = \dfrac{S_g}{S_G}$

Фигуру g называют благоприятствующей событию A.

Область, на которую распространяется понятие геометрической вероятности, может быть и одномерной (прямая, отрезок), и двумерной (любая плоская фигура, прямоугольник, круг), и трехмерной (некоторое тело в пространстве). Обозначая меру (длину, площадь, объем) области через mes, приходим к общему определению геометрической вероятности.

Определение. ***Геометрической вероятностью*** *события A называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события A, к мере всей области:*

$$P(A) = \frac{\text{mes}\, g}{\text{mes}\, G}$$

Пример 11. Миша и Женя договорились о встрече между 11 и 11.30 часами дня. Пришедший первым ждет второго 15 минут и уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится (событие A), если каждый наудачу выбирает момент своего прихода.

Решение. Обозначим через x момент прихода Миши, а через y – время прихода Жени. Время будем измерять в минутах ($0 \le x \le 30$, $0 \le y \le 30$). Изобразим x и y на плоскости (см. рисунок).

Все возможные исходы изобразятся точками квадрата $0 \le x,\ y \le 30$. Встреча состоится, если $|x - y| \le 15$. На рисунке заштрихована соответствующая область. Она определяется неравенством $x - 15 \le y \le x + 15$.

Площадь квадрата $S = 30^2 = 900$, площадь заштрихованной фигуры равна $S_A = 900 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 15 = 900 - 225 = 675$.

Искомую вероятность определим по формуле геометрической вероятности:

$$\mathbf{P(A)} = \frac{\mathbf{S_A}}{\mathbf{S}} = \frac{675}{900} = 0{,}75$$

Упражнения для самостоятельного решения

1. В группе учится 23 студента, из них 10 юношей и 13 девушек. Случайным образом выбирают одного студента. Какая вероятность, что выбранным студентом окажется девушка, а какая – что юноша?

2. Один раз бросили кубик. Какая вероятность, что выпавшее число очков будет делиться на 3?

3. 8 студентов, среди которых Миша, Андрей и Катя рассаживаются за круглым столом. Какова вероятность того, что Миша, Андрей и Катя окажутся рядом, причем Катя займет место между Мишей и Андреем?

4. Из группы, где учатся 14 юношей и 16 девушек отбирают 4 человек для участия в соревнованиях по математики. Найти вероятность, что в эту четверку попадут 3 девушки и 1 юноша.

5. В группе учатся 15 юношей и 12 девушек. Для участия в олимпиаде по математики отбирают 5 человек. Найти вероятность, что среди отобранных студентов будут а) 4 юноши и 1 девушка; б) 4 девушки и 1 юноша; в) 5 девушек; г) 2 девушки и 3 юноши; д) хотя бы одна девушка; е) не менее трех юношей.

6 В железнодорожном депо есть 15 купейных и 7 плацкартных вагонов. В состав формируется из 8 вагонов, выбранных произвольным образом. Найти вероятность, что в составе будут а) 5 купейных и 3 плацкартных вагона; б) 4 купейных и 4 плацкартных; в) только купейные вагоны.

7. Петя создает свой портфель акций. Он случайным образом выбирает любые 5 акций из 7 акций Газпрома, 6 акций Лукойла и 4 акций Ростелекома. Найти вероятность, что у Пети будут а) ровно 3 акции Газпрома; б) 2 акции Газпрома, 2 - Ростелекома и 1 - Лукойла; в) акции всех трех компаний.

8. Из колоды 36 карт вытащили 4 карты. Найти вероятность, что среди этих карт ровно один туз, две дамы и 1 семерка.

9. В ящике содержится 14 шаров, из них 10 белых и 4 красных. Из урны наугад вынимаются три шара. Какова вероятность, что среди них будут 2 белых и 1 красный шар?

10. В группе учатся 28 студентов. Среди них 11 юношей и 15 девушек. Известно, что на экзамене эта группа получила 6 пятерок. Какова вероятность, что пятерки получили 4 юноши и 2 девушки.

11. Найдите вероятность того, что в группе из 27 студентов найдутся, по крайней мере, два, которые имеют общий день рождения.

12. В группе из 7 юношей и 14 девушек по жребию разыгрываются 3 билета в кино. Какова вероятность, что билеты достанутся 1 юноше и 2 девушкам?

13. Из колоды 36 карт вытащили 3 карты. Найти вероятность, что все 3 карты будут разных мастей.

14. Из колоды 36 карт вытащили 5 карт. Найти вероятность, что среди этих карт будут ровно 3 туза.

15. Оля вытащила из колоды в 36 карт 4 карты. Найти вероятность, что среди них будут две пики и две бубны.

16. Из колоды 36 карт вытащили 3 карты. Найти вероятность, что все карты будут одного достоинства.

17. Миша вытащил из колоды в 36 карт 3 карты. Найти вероятность, что среди них будут две карты одной масти, и еще одна карта - другой.

18. В группе студентов 5 юношей и 12 девушек. Есть 3 билета в театр на один спектакль. Какова вероятность, что в театр пойдут 1 юноша и 2 девушки.

19. В урне лежат 7 белых и 3 черных шара. Наугад вынимают 3 шара. Какова вероятность, что все шары будут белого цвета?

20. В урне лежат 8 белых и 3 черных шара. Наугад вынимают 2 шара. Какова вероятность, что они разных цветов?

21. Катя формирует портфель акций, выбирая случайным образом 3 акции из 6 акций Транснефти, 5 акций ВТБ и 4 акций КАМАЗа. Найти вероятность, что у Кати будут а) ровно 1 акция Транснефти; б) 2 акции Транснефти и 1 - ВТБ; в) акции всех трех компаний.

22. В урне лежат 6 белых, 5 красных и 3 черных шара. Наугад вынимают 3 шара. Какова вероятность, что они одного цвета?

23. В группе из 6 юношей и 5 девушек по жребию разыгрываются 4 билета в кино. Какова вероятность, что билеты достанутся 2 юношам и 2 девушкам?

24. Для поездки по обмену опытом необходимо сформировать делегацию из 7 человек. Делегацию выбирают из трех ректоров, пяти деканов и восьми научных сотрудников. Какова вероятность того, что в делегацию войдут 4 научных сотрудника, два декана и 1 ректор?

25. На 100 лотерейных билетов приходится 7 выигрышных. Найти вероятность, что среди случайно выбранных 4 билетов будет ровно 1 выигрышный.

26. В группе из 12 юношей и 8 девушек выбирается по жребию спортивная команда из 8 человек. Найти вероятность, что в этой команде окажутся: а) 5 юношей и 3 девушки; б) только девушки; в) только юноши.

27. В группе 15 студентов: 6 юношей и 9 девушек. 6 студентов учатся отлично. Найти вероятность, что среди отличников 1 юноша и 5 девушек.

28. Из колоды в 36 карт вытащили 4 карты. Найти вероятность, что среди этих карт ровно один туз.

29. В лифт 12-этажного дома вошли 4 человека. Каждый из них независимо друг от друга может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Какова вероятность того, что все вышли: а) на разных этажах; б) на одном и том же этаже; в) на 7-ом этаже; г) 3 вышли на 4-ом, а один - на 11-ом этажах д) трое вышли на одном, а еще один - на другом этаже?

30. В коробке лежит 7 одинаковых изделий, из них 4 окрашены. Наудачу вынули 3 изделия. Найти вероятность, что среди вынутых изделий окажутся: а) одно окрашенное изделие; б) два окрашенных изделия; в) три окрашенных изделия; г) хотя бы одно окрашенное изделие.

31. Проводится соревнование по футболу среди студенческих команд. Участвуют 10 команд. С помощью жеребьевки команды распределяются на 2 группы по 5 команд в каждой. Жеребьевка проводится случайным образом. Среди команд есть 4 фаворита. Найти вероятность того, что 3 фаворита попадут в одну группу, а еще 1 - в другую.

32. Из 60 экзаменационных вопросов студент знает 50. Каждый билет содержит произвольно выбранные 3 вопроса. Найти вероятность, что студенту выпадет билет, в котором он знает: а) все три вопросы; б) два вопроса.

33. Студент знает 35 вопроса из 50, входящих в программу экзамена. Каждый билет содержит случайно выбранные 3 вопроса. Чтобы получить четверку, студенту нужно ответить по билету на 2 вопроса из 3. Найти вероятность, что студент получит четверку.

34. Кубик бросили 3 раза. Найти вероятность, что сумма выпавших чисел будет больше 14.

35. Кубик бросили 2 раза. Найти вероятность, что сумма выпавших чисел будет меньше 7

36. Кубик бросили 3 раза. Найти вероятность, что все 3 числа выпавших очков будут разными

37. Кубик бросили 4 раза. Найти вероятность, что ровно три раза выпадет 4 очка.

38. Кубик бросили 3 раза. Найти вероятность, что два раза выпадет одно и то же число очков, и один раз - другое.

39. Кубик бросили 3 раза. Найти вероятность, что два раза выпадет тройка, а один раз - пятерка.

40. Семь человек, в том числе Витя и Вася, рассаживаются в произвольном порядке на скамейке. Найти вероятность, что Витя и Вася окажутся рядом.

41. Из колоды в 36 карт вытаскивают наудачу 5 карт Какова вероятность того, что будут вытащены 3 туза, 1 девятка и 1 восьмерка?

42. Слово "математика" составлено из карточек, на каждой из которых написано по одной букве. Карточки перемешиваются и вынимаются без возврата по одной. Найти вероятность, что снова появится слово "математика".

43 Слово "акционерное" составлено из карточек, на каждой из которых написано по одной букве. Карточки перемешиваются и вынимаются без возврата по одной Найти вероятность, что снова появится слово "акционерное".

44. Найти вероятность, что при произвольной перестановке букв в слове «обществоведение» получится то же самое слово.

45. Слово "течение" составлено из карточек, на каждой из которых написана одна буква. Затем карточки смешиваются и вынимаются без возврата по одной. Найти вероятность, что снова появится слово "течение".

46. Найти вероятность, что при произвольной перестановке букв в слове *«телевидение» получится то же самое слово.*

47. Миша должен позвонить приятелю, но забыл первую и последнюю цифры телефонного номера. Он помнит, что первая цифра номера или 1, или 3, или 7, а последняя от 3 до 9. Какова вероятность, что наудачу набранный номер оказался верным?

48. Из промежутка [0, 1] наудачу выбирается два числа. Какова вероятность того, что их произведение больше 0,16?

49. На отрезок ОА длины 5 числовой оси Ох наудачу поставлена точка В. Найти вероятность того, что отрезок ОВ имеет длину, меньшую, чем 3. Вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

50. Лена и Оля договорились о встрече между 14 и 16 часами. Пришедшая первой ждет вторую час и уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждая из девушек может прийти в любой момент в течении договоренных 2 часов.

51. Автобус приходит на остановку каждые 15 минут и сразу же отходит. Найти вероятность, что подошедший к остановке человек будет ждать автобус не более 5 минут.

Глава 4

Сумма и произведение событий

Напомним определение случайного события.

Под случайными событиями понимается любое событие, которое может произойти или не произойти.

Теперь рассмотрим простейшие операции над событиями: суммы и произведения.

Сумма событий

Определение. ***Суммой A + B** двух событий A и B называют событие, состоящее в появлении события A, или события B, или обоих этих событий сразу.*

Определение. ***Суммой нескольких событий** называют событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий.*

Вообще, сумма событий означает, что между событиями можно поставить союз «или». Событие A+B означает, что произошло или A или B, или они оба вместе.

Например, если событие A – выбранное число делится на 3, событие, B - выбранное число делится на 2, то событие ***A + B*** означает, что выбранное число делится или на 3, или на 2

*Если события A и B – несовместные, то **A + B**—событие, состоящее в появлении одного из этих событий, безразлично какого.*

Например, если событие A - студент сдал экзамен на пятерку, событие B - студент сдал экзамен на четверку, событие C - студент сдал экзамен на тройку, то

Событие ***A + B*** означает, что студент сдал экзамен на пятерку или четверку;

Событие ***A + B + C*** означает, что студент сдал экзамен, т.е. не получил двойку.

Сумма событий также называется объединением, а произведение событий – пересечением.

Произведение событий

Определение. *Произведением двух событий A и B называют **событие AB**, состоящее в том, что произошли оба события A и B одновременно **(совместном** появлении этих событий).*

Произведение событий означает, что между событиями можно поставить союз «и». Событие AB означает, что произошло и A и B.

Например, если событие A – выбранное число делится на 3, событие B - выбранное число делится на 2, то

событие **AB** означает, что выбранное число делится на 6 (т.е. оно делится и на 2, и на 3). Подходят числа 6, 12, 18, ...

Обобщим определение произведения для нескольких событий.

Определение. *Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном наступлении всех этих событий.*

Разность событий

Сформулируем теперь определение разности событий.

Определение. *Разностью* ***A - B*** *двух событий A и B называется событие, состоящее в том, что событие A происходит, а событие B не происходит.*

Например, если событие А – выбранное число делится на 3, событие В - выбранное число делится на 2, то

событие ***А - В*** означает, что выбранное число делится на 3, и не делится на 2. Подходят числа 3, 9, 15, 21, 27, 33,…

Противоположное события

Напомним также определение **противоположного события**, оно также называется дополнением к событию.

Определение. *Событием, противоположным событию A, называется непоявление A (то, что событие A не произошло).*

Событие, противоположным событию А (или дополнение к событию А) обозначается через $\bar{A}$.

Например, если событие А – студент сдал экзамен, то событие $\bar{A}$ – студент не сдал экзамен.

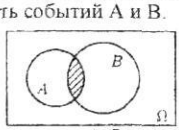
Если событие А – число делится на 3, то событие $\bar{A}$ – число не делится на 3

Для наглядного графического изображения основных действий над событиями используются диаграммы Эйлера-Венна.

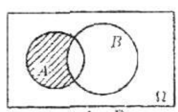
На этих иллюстрациях событие А представляет собой попадание случайной точки в область, обозначенную буквой А, а событие В — попадание в область, обозначенную буквой В.

На представленных ниже диаграммах показаны, соответственно, сумма, произведение и разность событий А и В.

$A + B$



$A \cdot B$



$A - B$

Достоверное и невозможное события

Напомним определения достоверного и невозможного событий.

Событие, которое обязательно произойдет в результате испытания, называется достоверным и обозначается через символ Ω.

Событие, которое не может произойти в испытании называется невозможным и обозначается знаком пустого множества $\varnothing$.

Свойства операций над событиями

1) $\mathbf{A+B=B+A,\ \ A\cdot B=B\cdot A;}$

2) $\mathbf{(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C;}$

3) $\mathbf{(A+B)+C=A+(B+C),\ (A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C);}$

4) $\mathbf{A+A=A,\ \ A\cdot A=A;}$

5) $\mathbf{A+\Omega=\Omega,\ A\cdot\Omega=A;}$

6) $\mathbf{A+\bar{A}=\Omega\ ,\ \ A\cdot\bar{A}=\varnothing;}$

7) $\mathbf{B-A=B\cdot\bar{A};}$

8) $\mathbf{\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}\ ,\ \ \overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}}$
(законы де Моргана).

В этой главе мы рассматриваем сами понятия суммы, произведения, разности событий. А в следующих двух главах мы будем изучать способы нахождения вероятности сумм и произведений событий.

Решение задач

Пример 1. Случайным образом выбирают одного студента. Пусть событие А означает, что «студент - юноша». Событие B_1 - «студент с первого курса», B_2 - «студент со второго курса», … Событие С - «студент - отличник». Что означают события а) AB_1C, б) $A+B_1+C$, в) $\bar{A}+B_2$, г) $\bar{A}B_3$, д) $\bar{A}B_3C$, е) AC, ж) $A+C$, з) $A+B_1C+\bar{A}B_2C$?

Решение. а) Событие AB_1C является произведением трех событий. Оно означает их совместное наступление. Это событие означает, что «студент – юноша, первокурсник и отличник»

б) Событие $A+B_1+C$ является суммой и означает, что произойдет хотя бы одно из слагаемых. Случайно выбранный студент – или юноша, или первокурсник, или отличник, или выполняется любая комбинация этих событий.

в) Событие $\bar{A}+B_2$ означает, что выполняется хотя бы одно из двух событий: $\bar{A}$ или B_2. Событие $\bar{A}$, противоположное событию А, очевидно, означает, что выбранный студент – девушка. Значит, событие $\bar{A}+B_2$ имеет смысл: студент – или девушка, или второкурсник, или и то и другое одновременно.

г) Событие $\bar{A}B_3$ означает, что произойдет и $\bar{A}$ и B_3, т.е. выбранный студент – девушка, которая учится на третьем курсе. Значит, $\bar{A}B_3$ означает, что выбранный студент – третьекурсница.

д) $\bar{A}B_3C$ является произведением трех событий, т.е. означает их совместное появление. Значит, случайно выбранный студент оказался девушкой, третьекурсницей и учится на отлично. Таким образом, $\bar{A}B_3C$ - «студент - третьекурсница, отличница».

е) Событие АС означает совместное наступление событий А и С. Значит, выбранный студент - и юноша, и отличник.

ж) Событие А+С означает наступление хотя бы одного из событий А и С. Или студент - юноша, или отличник, или и то и другое одновременно. Если разбить А+С на сумму несовместных событий, то А+С означает: «студент - или юноша и отличник, или юноша и не отличник, или девушка и отличница».

з) Событие $A+B_1C+\bar{A}B_2C$ означает наступление хотя бы одного из событий A, B_1C и $\bar{A}\,B_2C$. Первое слагаемое A: «студент - юноша». Второе слагаемое B_1C: «студент - первокурсник, отличник». Третье слагаемое $\bar{A}B_2C$: «студент - девушка, второкурсница, отличница». Частично эти события пересекаются. Таким образом, событие $A+B_1C+\bar{A}B_2C$ означает, что выбранный студент является или юношей, или девушкой, отличницей с первого или второго курса.

Пример 2. Стрелок производит три выстрела по мишени. Пусть, событие A_k означает попадание при k-ом выстреле, k = 1,2,3. Пусть событие A означает, что все три попадания – точные, B означает хотя бы одно точное попадание, C – ровно одно попадание, D – три промаха, E – ровно два попадания.

Выразить события A, B, C, D, E через A_k.

Решение.

а) Событие A означает совместное наступление всех трех событий A_1, A_2, A_3, т.е. является их произведением. Между событиями A_k можно поставить союз и: первый выстрел - точный и второй выстрел - точный, и третий выстрел - точный.

$\mathbf{A = A_1A_2A_3}$

б) Событие B означает наступление любого из трех событий A_1, A_2, A_3 или любой их комбинации, т.е. является их суммой. Действительно, «хотя бы одно точное попадание» означает, что стрелок или попал в первый раз (A_1), или во второй раз (A_2), или в третий раз (A_3), или два или три раза, т.е. между событиями A_k можно поставить союз или. Значит, $\mathbf{B = A_1+A_2+A_3}$

в) Событие C – ровно одно попадание, означает, что стрелок один раз попал точно, а два других раза - промахнулся. Он мог попасть первым выстрелом и промахнуться вторым и третьим. Или он мог попасть со второго выстрела, а с первого и третьего - промахнуться. Третий подходящий вариант: стрелок попал точно в третий раз, а в первый и второй промахнулся. выполняется одно из трех несовместных событий.

Событие C происходит, когда происходит или первый, или второй, или третий вариант. Значит, событие C является их суммой. Каждый из этих вариантов является произведением трех событий: одно из попаданий - точное, при этом два других - мимо.

$$\mathbf{C = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3}$$

г) Событие D – три промаха, совместное ненаступление всех событий A_1, A_2, A_3, или совместное наступление трех противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$. Поэтому, D является произведением этих трех событий:

$$D = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$$

е) Событие E – ровно два попадания, аналогично событию C (ровно одно попадание). Оно означает, что стрелок два раза попал точно, а один раз промахнулся. Это произойдет, если случится один из трех вариантов. Первый вариант: два первых выстрела - точные, третий - промах. Второй вариант: первый и третий выстрелы - точные, второй - промах. Третий вариант: второй и третий выстрелы - точные, первый - промах. Событие E является суммой трех этих событий.

$$E = A_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2A_3 + A_1\overline{A}_2A_3$$

Пример 3. Из колоды в 36 карт вытащили 1 карту. Событие A означает – «взятая карта - туз», событие B - «взятая карта - дама», и событие C - «взятая карта - бубна». Какой смысл имеют события а) AB, б) A+B, в) AC, г) A+C, д) A+B+C, е) ABC?

Решение. а) Событие AB означает, что выполняется и A и B. То есть AB означает, что вынутая карта является тузом и дамой одновременно. Но это невозможно. Поэтому AB=Ø (пустое множество).

б) Событие A+B = {вынутая карта – или туз, или дама}.

в) Событие AC означает, что вынутая карта является одновременно тузом и бубной; это означает, что вынули бубновую даму. AC= {вынули бубновую даму}.

г) Событие A+C={вынули или туз или карту бубновой масти}. Под это событие подходят, например, такие варианты: вынули червонный туз, вынули бубновую восьмерку; вынули бубнового валета, вынули бубнового туза,...

д) Событие A+B+C={вынули или туз, или даму, или карту бубновой масти}.

е) Событие ABC означает, что вынутая карта является одновременно и тузом и дамой и картой бубновой масти. Но одна карта не может быть и тузом и дамой. Поэтому, ABC= Ø.

Пример 4. Из колоды в 36 карт студентка Лена взяла 3 карты. Событие A означает – «У Лены один туз», событие B - «у Лены две дамы», и событие C - «у Лены все карты - бубны». Что означают события а) AB, б) A+B, в) A+B+C, г) ABC, е)AC?

Решение. а) Событие AB означает, что у Лены одновременно есть и туз, и две дамы. Значит, три карты, которые вытащила Лена - это 1 туз и 2 дамы.

б) Событие A+B означает, что у Лены или есть туз, или есть две дамы, или и туз и две дамы. То есть у Лены или туз и любые другие две карты, или две дамы и любая третья карта

в) Событие A+B+C означает выполнение хотя бы одного из трех слагаемых. Для того, чтобы Событие A+B+C произошло достаточно, чтобы у Лены был один туз, или две дамы, или все три карты были бубновыми.

г) Событие ABC - совмещение трех событий. Означает, что у Лены есть один туз, две дамы и все три карты - бубны. Однако, бубновая карта в колоде - только одна. Поэтому, невозможно, чтобы три карты были бубновыми, и среди них были бы две дамы. Значит, событие ABC - невозможное, ABC = Ø.

е) Событие AC - совмещение двух событий: A и C. Значит, среди трех карт есть туз, и все три карты - бубны. Поэтому событие AC означает: у Лены есть бубновый туз и еще две бубновые карты.

Упражнения для самостоятельного решения.

1. Винни-Пух решил поступить в университет на специальность пчеловодство. Ему нужно сдать 3 экзамена: математику, информатику и историю. Пусть событие A означает, что Винни-Пух сдал математику, событие B - информатику, C - историю. Выразить через A, B и C следующие события:

Винни-Пух сдал все три экзамена;
Винни-Пух сдал хотя бы один экзамена;
Винни-Пух сдал ровно два экзамена,
Винни-Пух сдал математику, но не сдал информатику;
Винни-Пух сдал ровно один экзамен;
Винни-Пух сдал не менее двух экзаменов;
Винни-Пух не сдал ни одного экзамена;

2. Бросили два кубика. *Событие А: «Выпала четная сумма очков». Событие В:* «Среди выпавших чисел не было пятерок». Что означает события А+В, АВ?

3. Случайным образом выбирают одного студента. Пусть событие А означает, что «студент - юноша». Событие B_1 - «студент с первого курса», B_2 - «студент со второго курса», ... Событие С - «студент - отличник». Что означают события а) $A+B_3+C$, б) AB_2C, в) AB_1+C $\bar{A}+B_2$, г) $\bar{A}B_1$, д) $\bar{A}B_1C$, е) $A+B_2C$, ж) $\bar{A}(B_1C+B_2)$, з) $AB_1+\bar{A}B_3C$?

4 В коробке лежит 5 белых, 3 красных и 4 зеленых шара. Вытащили один шар. Событие А означает, что вытащили белый шар, событие В - красный шар. С - зеленый шар. Объяснить смысл событий: а) $A+B$, б) $A+C$, в) $B+C$, г) $\bar{A}B$, д) $\bar{A}$, е) ABC, ж) $A+B+C$, з) $\overline{C}$?

5. *Экзаменационный билет содержит 5 вопросов: 2 теоретических и 3 практических.* Событие A_k – студент знает k-тый теоретический вопрос, B_k – знает k-тый практический вопрос (k = 1, 2, 3). С помощью A_k и B_k записать события: а) А – студент знает все вопросы в билете, б) *В* – знает только практические вопросы; в) С – не знает ни одного вопроса в билете; г) D – знает только один вопрос из билета; д) студент знает ровно 4 вопроса.

6. Катя вытащила 3 карты из колоды в 36 карт. Событие А означает – «У Кати все карты одной масти», событие В - «у Кати две семерки», и событие С - «у Кати один валет». Что означают события а) AB, б) $A+B$, в) BC, г) ABC, д) AC, е) $A+B+C$, ж) $\bar{A}$?

7. Брокерская фирма интересуется владельцами акций. Событие А означает, что интересующий компанию человек имеет акции Газпрома, событие В - владеет акциями Лукойла и событие С - акциями Роснефти. Что означают события а) AB, б) $A+B$, в) BC, г) ABC, д) AC, е) $A+B+C$, ж) $\bar{A}$?

Глава 5

Вероятность суммы событий и сложных событий

Вероятность суммы несовместных событий

Напомним, что если события А и В – несовместные, то $\boldsymbol{A+B}$ - событие, состоящее в появлении одного из этих событий.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий. *Вероятность появления одного из двух несовместных событий (любого из них) равна сумме вероятностей этих событий:*

$$\mathbf{P(A+B)=P(A)+P(B)}$$

Следствие (для многих событий). *Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, равна сумме вероятностей этих событий:*

$$\mathbf{P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)}$$

Вероятность суммы совместных событий

Теорема сложения вероятностей совместных событий. *Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления (их произведения):*

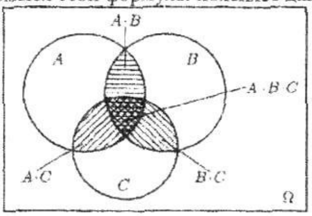
$$\mathbf{P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)}$$

Действительно, если события **А и В** – совместные, то когда мы складываем их вероятности, вероятность их совместного наступления, пересечения этих событий мы учитываем дважды. Если после сложения мы один раз вычтем эту вероятность, то она будет учтена ровно один раз.

Теорема может быть обобщена для любого конечного числа совместных событий. Для трех совместных событий она имеет вид:

$$\mathbf{P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)}$$
$$\mathbf{-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)}$$

Смысл этой формулы поясняет данный ниже рисунок.



Вероятность наступления хотя бы одного события

Теорема о вероятности появления хотя бы одного события. *Вероятность наступления события А, состоящего в появлении хотя бы одного из событий $A_1, A_2, ..., A_n$, равна разности между единицей и вероятностью произведения противоположных событий*

$$P(A)=1-P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot...\cdot\overline{A}_n).$$

Вероятность произведения независимых событий

Напомним, что произведением нескольких событий называют событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Сформулируем понятие независимых событий.

Определение. *Событие В называется независимым от события А, если его вероятность не меняется от того, произошло событие А или нет.*

Например, если два студента сдают экзамен, то вероятность того, что второй студент сдаст экзамен, не зависит от того, сдал ли экзамен первый студент. Таким образом, события «первый студент сдал экзамен» и «второй студент сдал экзамен» являются независимыми друг от друга.

Фактически определить независимость событий, как правило, можно по смыслу задачи. Если два события с точки зрения здравого смысла не зависят друг от друга, то они и будут независимыми с точки зрения теории вероятностей.

В следующей главе мы вернемся к понятиям независимости событий, вероятности произведения, и рассмотрим условные вероятности. В этой главе мы будем использовать только произведение независимых событий.

Теорема умножения вероятностей для независимых событий. *Если события А и В являются независимыми, то вероятность их произведения равна произведению вероятностей.*

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

Эта теорема распространяется на любое число событий.

Если события $A_1, A_2, \dots A_n$ являются независимыми в совокупности, то вероятность их совместного наступления (произведения) равна произведению вероятностей.

События $A_1, \dots, A_n$ называются независимыми, если каждое из них не зависит от каждого из остальных и от всех возможных их пересечений.

Заметим, что для независимости событий $A_1, \dots, A_n$ их попарная независимость необходима, но недостаточна.

Решение задач

Вероятность суммы событий

Пример 1. Студент получает на экзамене пятерку с вероятностью 0,07; четверку – с вероятностью 0,3; а тройку – с вероятностью 0,5. Какова вероятность, что студент сдаст экзамен?

Решение. Пусть событие А – сдача экзамена, В – получение пятерки, С – четверки, D – тройки. Сдача экзамена означает, что студент получает любую оценку выше двойки. То есть событие А является суммой В, С и D.

A=B+C+D, причем события В, С и D – несовместные (ведь студент не может одновременно получить тройку и четверку). Поэтому

$$P(A) = P(B) + P(C) + P(D) = 0,07 + 0,3 + 0,5 = 0,87$$

Ответ. $P(A) = 0,87$

В следующих двух задачах мы очень подробно рассмотрим решение задач на самые популярные темы, связанные с вероятностью сумм событий и других комбинаций событий.

Пример 2. Студент сдаст три экзамена: математику, экономику и информатику. Вероятность сдать математику равна 70%, экономику – 90%, а информатику – 40%. Найти вероятность, что студент сдаст хотя бы один экзамен.

Решение. Пусть событие А означает сдачу экзамена по математике, событие В – сдачу экзамена по экономике, а событие С – соответственно, сдачу экзамена по информатике.

То, что студент сдаст хотя бы один экзамен, означает, что он сдаст или первый экзамен, или второй, или третий, или какие-нибудь два из трех, или все три. Значит, это событие является суммой трех событий: А+В+С. Теперь найдем вероятность этого события: $\mathbf{P(A+B+C)}$. Сразу заметим, что эта вероятность, конечно, не будет равна сумме трех вероятностей.

Из условия имеем $\mathbf{P(A)}=0{,}7$ $\mathbf{P(B)}=0{,}9$ $\mathbf{P(C)}=0{,}4$

Приведем три способа решения. Полезно знать и понимать каждый из этих способов, тем более, что все они – совсем несложные.

Первый способ. Представим наше событие – «сдать хотя бы один экзамен из трех» в виде суммы несовместных, непересекающихся событий. Если студент сдал первый экзамен – математику, то один сданный экзамен у него уже есть, и событие «сдать хотя бы один экзамен» выполнено, независимо от результатов двух следующих экзаменов. Значит, вероятность сдать математику можно включить, как слагаемое в искомую вероятность: $P(A+B+C)=0{,}7+...$

Если студент не сдал математику, зато сдал экономику, то событие «сдать хотя бы один экзамен» также выполнено. Это событие (математика не сдана, экономика сдана) является несовместным с событием «математика сдана». А значит, вероятность этого события можно также включить в сумму.

$\mathbf{P(A+B+C)=P(A)+P(\overline{A}B)}=0{,}7+0{,}3\cdot 0{,}9=0{,}7+0{,}27+\mathbf{...}=0{,}97+\mathbf{...}$

Какое еще подходящее событие мы не учли? Остается вариант, когда студент не сдал первые два экзамена, но сдал третий. То есть событие «математику не сдал, экономику не сдал, информатику сдал». Это событие является произведением трех событий «математику не сдал», «экономику не сдал», «информатику сдал». Вероятность этого события равна $\boldsymbol{P(\overline{A}\overline{B}C)}=0{,}3\cdot 0{,}1\cdot 0{,}4=0{,}012$.

Итоговая вероятность равна

$P(A+B+C)=P(A)+P(\overline{A}B)=0{,}7+0{,}3\cdot 0{,}9+0{,}3\cdot 0{,}1\cdot 0{,}4=0{,}7+0{,}27+0{,}012=0{,}982$

Мы учли все возможные ситуации, когда студент «сдает хотя бы один экзамен».

Получили ответ: 0,982

Второй способ. Воспользуемся формулой для суммы событий

$\mathrm{P}(A+B+C)=$

$\mathrm{P}(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

События А, В и С независимы друг от друга. Действительно, сдаст или не сдаст студент экзамен по экономике, не зависит от того, сдаст ли он экзамен по математике. Поэтому, вероятность события АВ – «студент сдал и математику, и экономику» равна произведению вероятностей двух событий А и В $\mathbf{P(AB)}=\mathbf{P(A)}\cdot\mathbf{P(B)}=0{,}7\cdot 0{,}9=0{,}63$

Аналогично, получаем $\mathbf{P(AC)}=0{,}7\cdot 0{,}4=0{,}28$ $\mathbf{P(BC)}=0{,}9\cdot 0{,}4=0{,}36$

$\mathrm{P(ABC)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)}=0{,}7\cdot 0{,}9\cdot 0{,}4=0{,}252$

Теперь по формуле для суммы событий находим вероятность

$$\mathbf{P(A+B+C)} = \mathbf{0},7+0,9+0,4-0,63-0,28-0,36+0,252 = 0,982$$

Конечный результат, разумеется совпадает

Ответ. **0,982**

Третий способ. Какое событие будет противоположным для события «студент сдаст хотя бы один экзамен»? Таким событием является «студент не сдаст ни одного экзамена». Эти два события дополняют друг друга до полной группы. Действительно, или студент сдаст хотя бы один экзамен, или не сдаст ни одного. Для любого события R сумма вероятностей R и противоположного к нему события $\overline{R}$ равна 1 или 100%.

Событие «студент не сдаст ни одного экзамена» является произведением трех событий: студент не сдаст математику и не сдаст экономику и не сдаст информатику. Поэтому нужно посчитать обратные вероятности (вероятности противоположных событий), перемножить их и вычесть из единицы. Вероятность, что студент не сдаст математику, $P(\overline{A})$ равна 1-0,7 (от 100 процентов отнимаем вероятность сдать математику), $P(\overline{A}) = 0,3$ Аналогично, $P(\overline{B}) = 0,1; P(\overline{C}) = 0,6$ Значит,

$$P(A+B+C) = 1 - P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = 1 - 0,3 \cdot 0,1 \cdot 0,6 = 1 - 0,018 = 0,982$$

Ответ. **0,982**

Рассмотрим на примере со студентом и тремя экзаменами, как искать вероятность других событий. Возьмем такие же данные, как в примере 2.

Пример 3. Студент сдает три экзамена: математику, экономику и информатику. Вероятность сдать математику равна 70%, экономику – 90%, а информатику – 40%. Найти вероятность, что студент а) сдаст ровно один экзамен; б) не сдаст ни одного экзамена; в) сдаст все 3 экзамена.

Решение. Напомним применявшиеся обозначения. Событие А означает сдачу экзамена по математике, событие В – сдачу экзамена по экономике, а событие С – соответственно, сдачу экзамена по информатике. $\boldsymbol{P(A)} = 0,7$ $\boldsymbol{P(B)} = 0,9$ $\boldsymbol{P(C)} = 0,4$

Найдем также вероятности не сдать экзамены: $P(\overline{A}) = 1-0,7 = 0,3; P(\overline{B}) = 0,1; P(\overline{C}) = 0,6$.

а) Обозначим через D событие «студент сдал ровно один экзамен». Это событие происходит, если выполняется один из трех вариантов: студент сдал математику, но не сдал экономику и информатику; студент сдал экономику, но не сдал математику и информатику; студент сдал информатику, но не сдал математику и экономику. Событие D выполняется, если выполняется любое их этих трех событий, т.е. событие D является их суммой.

$$\mathbf{D} = \mathbf{A\overline{B}\overline{C}} + \mathbf{\overline{A}B\overline{C}} + \mathbf{\overline{A}\overline{B}C}$$

Эти три варианта – несовместные, поэтому вероятность D равна сумме вероятностей трех слагаемых. Событие «студент сдал математику, но не сдал экономику и информатику» происходит при одновременном выполнении трех событий: студент должен сдать математику, и при этом не сдать экономику, и не сдать информатику. То есть это событие является произведением трех событий: $\mathbf{A\overline{B}\overline{C}}$. Найдем его вероятность. В этой задаче, исходя из условия, сдача или несдача одного экзамена не зависит от двух других. Поэтому события А, В и С являются независимыми. То есть

$$\mathbf{P(A\overline{B}\overline{C})} = \mathbf{P(A)} \cdot \mathbf{P(\overline{B})} \cdot \mathbf{P(\overline{C})} = 0,7 \cdot 0,1 \cdot 0,6 = 0,042$$

Аналогично находим вероятность события «**студент сдал экономику, но не сдал** математику и информатику» - $\mathbf{\overline{A}B\overline{C}}$.

$\mathbf{P(\overline{A}B\overline{C}) = P(\overline{A}) \cdot P(B) \cdot P(\overline{C})} = 0{,}3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}6 = 0{,}162$

Вероятность третьего слагаемого - $\mathbf{\overline{A}\overline{B}C}$ находим таким же образом.

$\mathbf{P(\overline{A}\overline{B}C) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(C)} = 0{,}3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}4 = 0{,}012$

Теперь находим суммарную вероятность, что студент сдаст **ровно 1 экзамен**.

$\mathbf{P(D) = P(A\overline{B}\overline{C}) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(\overline{A}\overline{B}C)} = 0{,}042 + 0{,}162 + 0{,}012 = 0{,}216$

Ответ. P=0,216 или 21,6%

б) Обозначим через E событие «студент не сдаст ни одного экзамена». Это значит, что студент не сдаст математику и не сдаст экономику и не сдаст информатику. Значит E является произведением трех событий – несдачи трех экзаменов, $\mathbf{E = \overline{A}\overline{B}\overline{C}}$

$\mathbf{P(E) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C})} = 0{,}3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}6 = 0{,}018$. Поскольку, все множители являются независимыми друг от друга, то вероятность E является просто произведением вероятностей множителей, $\mathbf{P(E) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C})} = 0{,}3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}6 = 0{,}018.$

в) Событие состоит в одновременном наступлении событий A,B и C, т.е. в их произведении. Поскольку эти события независимы друг от друга, то вероятность их произведения равна произведению вероятностей.

$\mathbf{P(F) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)} = 0{,}7 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}4 = 0{,}252.$

Пример 4. У Петра Николаевича есть акции Газпрома и ЛУКОЙЛа. Вероятность, что акции Газпрома вырастут в цене равна 70% (событие A), вероятность роста акций ЛУКОЙЛа равна 40%(событие B). Найти вероятность, что у Петра Николаевича
а) вырастут обе акции; б) вырастет хотя бы одна из акций; в) вырастет только одна из акций.

Решение. Введем обозначения:

D - вырастут обе акции;

E - вырастет хотя бы одна из акций;

F - вырастет только одна из акций.

а) Событие «вырастут обе акции» состоит в одновременном росте акций Газпрома и ЛУКОЙЛа - наступлении событий A и B, т.е. в их произведении, **D=AB**. Поскольку эти события независимы друг от друга, то вероятность **AB** равна произведению вероятностей. $\mathbf{P(D) = P(A) \cdot P(B)} = 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}28$

б) Событие E - «вырастет хотя бы одна из акций» является суммой событий A и B. Его вероятность можно найти, как вероятность наступления хотя бы одного события из двух.

$P(E) = P(A + B) = 1 - P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 1 - 0{,}18 = 0{,}82$

в) Событие F - «вырастет только одна из акций» - является суммой двух событий: одновременный рост Газпрома и снижение Лукойла или одновременное снижение Газпрома и рост Лукойла. Поскольку эти два события - несовместные, то вероятность события F будет равна сумме их вероятностей.

$\mathbf{P(D) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B)} = 0{,}7 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}42 + 0{,}12 = 0{,}54$

Пример 4. В группе учатся 15 студентов, среди них 10 юношей и 5 девушек. Выбирают 3 студентов случайным образом. Найти вероятность, что среди выбранных студентов будет хотя бы одна девушка.

Решение. Первый способ. Требование – среди 3 студентов хотя бы одна девушка произойдет, если будет выполнено одно из трех несовместных событий: A – 1 девушка и 2 юноши; B – 2 девушки и 1 юноша; C – 3 девушки. Интересующее нас событие D можно представить в виде суммы событий:

D=A+B+C. По теореме сложения, поскольку A,B и C – несовместные,

$$\mathbf{P(D) = P(A) + P(B) + P(C)}$$

Теперь найдем вероятности A, B и C. Мы можем выбрать любых 3 студентов из 15, поэтому общее количество возможных троек равно $\mathbf{n} = C_{15}^3 = \dfrac{15!}{3!\cdot 12!} = \dfrac{15\cdot 14\cdot 13}{3\cdot 2\cdot 1} = 455$.

Для события A – 1 девушка и 2 юноши, может быть выбрана любая пара юношей из 10: $\mathbf{C_{10}^2}$, на любой вариант пары юношей приходится по $5 = \mathbf{C_5^1}$ вариантов выбора девушки. Всего $\mathbf{m_B} = \mathbf{C_{10}^2}\cdot \mathbf{C_5^1} = 45\cdot 5 = 225$ троек студентов, соответствующих событию A. Таким образом, $\mathbf{P(A)} = \dfrac{225}{455}$. Аналогично, находим $\mathbf{P(B)} = \dfrac{\mathbf{C_{10}^1}\cdot \mathbf{C_5^2}}{455} = \dfrac{10\cdot 10}{455} = \dfrac{100}{455}$,

$\mathbf{P(D)} = \dfrac{\mathbf{C_5^3}}{455} = \dfrac{10}{455} = \dfrac{10}{455}$. Подставляем найденные вероятности в сумму и получаем ответ

$\mathbf{P(D)} = \dfrac{225}{455} + \dfrac{100}{455} + \dfrac{10}{455} = \dfrac{335}{455}$.

Второй способ. Противоположным событием для **D** (среди 3 выбранных хотя бы одна девушка) будет событие $\mathbf{\overline{D}}$ - ни одной девушки. События **D** и $\mathbf{\overline{D}}$ являются противоположными, поэтому сумма их вероятностей равна 1. Значит, $\mathbf{P(D) = 1 - P(\overline{D})}$.

Для выполнения события $\mathbf{\overline{D}}$ подходит только такие тройки, где три студента выбраны из 10 юношей. $\mathbf{P(\overline{D})} = \dfrac{\mathbf{C_{10}^3}}{455} = \dfrac{120}{455}$. Отсюда находим нужную вероятность

$\mathbf{P(D) = 1 - P(\overline{D})} = 1 - \dfrac{120}{455} = \dfrac{335}{455}$.

Пример 5. Из колоды в 36 карт вытащили 3 карты. Найти вероятность, что среди них будет или ровно один туз, или ровно один валет

Решение. Пусть событие **A** – «среди 3 карт будет ровно один туз», событие **B** – «среди 3 карт будет ровно один валет». Искомое событие(обозначим через **C**) является суммой событий **A** и **B**, **C= A+B**.

Найдем вероятность события **A**. Вынимаем любые 3 карты из 36, поэтому, общее число исходов равно $n = C_{36}^3 = \dfrac{36\cdot 35\cdot 34}{3\cdot 2\cdot 1} = 7140$. Для события **A** подходит любой туз из 4 и любые 2 карты из 32 «нетузов», $\mathbf{m_A} = \mathbf{C_4^1}\cdot \mathbf{C_{32}^2} = 4\cdot \dfrac{32\cdot 31}{2} = 1984$. $\mathbf{P(A)} = \dfrac{1984}{7140} \approx 0{,}28$

Для события **B** все симметрично: 1 валет и 2 карты - не валеты.

$\mathbf{m_B} = \mathbf{C_4^1}\cdot \mathbf{C_{32}^2} = 1984$. $\mathbf{P(B)} = \dfrac{1984}{7140} \approx 0{,}28$. Теперь найдем вероятность пересечения **AB**.

Событие **AB** означает, что среди трех карт: 1 карта - туз, 1 карта - валет, и еще одна карта - не туз и не валет. В колоде есть 4 туза, 4 валета и 28 карт, которые не являются ни тузами, ни валетами. Поэтому, туз может быть любой из 4, валет - любой из 4, третья карта - любая из 28. $m_{AB} = C_4^1\cdot C_4^1\cdot C_{28}^1 = 4\cdot 4\cdot 28 = 448$. $P(AB) = \dfrac{448}{7140} \approx 0{,}06$.

Применим формулу для суммы совместных событий

$\mathbf{P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)}$. $\mathbf{P(C)}=\frac{1984}{7140}+\frac{1984}{7140}-\frac{448}{7140}=\frac{3520}{7140}\approx 0{,}49$

Ответ. $P\approx 0{,}49$

Пример 6. Бросили 3 игральных кубика. Найти вероятность того, что на них в сумме не выпадет 5 очков.

Решение. Через событие А обозначим «в сумме не выпадет 5 очков». Вероятность события равна 1-вероятность противоположного события $P(A)=1-P(\overline{A})$.

Поэтому нужно найти вероятность, что при 3 бросаниях в сумме выпадет 5 очков. Находим по формуле классического определения вероятности $p=\mathbf{m}/\mathbf{n}$

Общее количество равновозможных элементарных случаев равно 6 в кубе, $\mathbf{n}=6^3=216$

Посчитаем все варианты, когда в сумме получится пятерка. Каждый результат трех бросаний будем обозначать, как набор из 3 чисел. Например (1,5,2) означает, что при 1-ом бросании выпала 1, при втором – 5, а при третьем – 2.

1 вариант – 1 раз выпала тройка и дважды – единица. Таких случаев – 3: (3,1,1); (1,3,1); (1,1,3)

2 вариант – две двойки и одна единица. Также 3 случая: (1,2,2); (2,2,1); (2,1,2)

Итак, количество подходящих случаев $\mathbf{m}=6$

$\mathbf{p}(\overline{\mathbf{A}})=\frac{6}{216}=\frac{1}{36}$ $\quad \mathbf{p(A)}=1-\frac{6}{216}=1-\frac{1}{36}=\frac{35}{36}$

Ответ. 35/36

Пример 7. Вероятность правильного оформления счета равна 0,8. Найти вероятность, что из трех счетов, хотя бы один будет оформлен правильно.

Решение. Найдем по формуле из теоремы о вероятности появления хотя бы одного события $P(A)=1-P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\ldots\cdot\overline{A}_n)$. Рассмотрим события:

A_1 – первый счет оформлен правильно;

A_2 – второй счет оформлен правильно;

A_3 – третий счет оформлен правильно;

А – хотя бы один будет оформлен правильно

Событие А состоит в том, что будет выполнено или A_1, или A_2, или A_3, или любая их комбинация, а значит $A=A_1+A_2+A_3$. Из условия $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=0{,}8$.

Все события A_i не зависят друг от друга, т.е. являются независимыми. Вероятность события $\overline{\mathbf{A}}$, состоящего в том, что все счета оформлены неправильно, будет равна произведению вероятностей неправильного оформления для каждого счета, $P(\overline{A})=0{,}2\cdot 0{,}2\cdot 0{,}2=0{,}08$. *Отсюда находим вероятность события А.*

$P(A)=1-P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3)=1-0{,}2^3=1-0{,}08=0{,}92$

Ответ. 0,92

Вероятность сложных событий

Пример 8. В двух ящиках лежат шары. В первом ящике лежит 5 белых и 2 красных шара. Во втором ящике – 3 белых и 8 красных. Из каждого ящика вынули по одному шару. Найти вероятность, что эти шары будут одного цвета.

Решение. Введем обозначения для событий.
A_1 – из 1-го ящика вынули белый шар;
A_2 – из 2-го ящика вынули белый шар;
B_1 – из 1-го ящика вынули красный шар;
B_2 – из 2-го ящика вынули красный шар;
C – вынутые шары будут одного цвета (искомое событие).

В каких случаях вынутые шары будут одного цвета. Если оба вынутых шара будут белые, или оба вынутых шара – красные. Значит, событие **C** – сумма двух событий: оба шара – белые, или оба шара – красные. Событие «оба шара – белые» означает, что шар, вынутый из 1-го ящика – белый и шар, вынутый из 2-го ящика – также белый. Таким образом, событие «оба шара – белые» является пересечением или произведением двух событий: A_1 и A_2. Аналогично, событие «оба шара – красные» также является произведением двух событий. B_1 и B_2. Поэтому событие **C** является суммой произведений: $C = A_1A_2 + B_1B_2$.

Вероятность события A_1 находим по классическому определению. Вынуть из 1-го ящика можем любой из 7 шаров – 7 вариантов, n=7. Из них 5 шаров белые – 5 вариантов, подходящих для события A_1. Значит, $P(A_1) = \frac{5}{7}$ Аналогично находим вероятности других событий. $P(B_1) = \frac{2}{7}$, во 2-м ящике есть 11 шаров: 3+8, 11 равновероятных вариантов: $P(A_2) = \frac{3}{11}$, $P(B_2) = \frac{8}{11}$.

$$P(C) = P(A_1) \cdot P(A_2) + P(B_1) \cdot P(B_2) = \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{11} + \frac{2}{7} \cdot \frac{8}{11} = \frac{31}{77} \approx 0{,}4$$

Пример 9. Из двух групп выбирают по 2 студента для участия в олимпиаде. В 1-ой группе учатся 7 юношей и 5 девушек. Во 2-ой группе учатся 4 юноши и 11 девушек. Найти вероятность, что среди выбранных студентов будет 1 юноша и 3 девушки.

Решение. Для того, чтобы среди 4 выбранных были 1 юноша и 3 девушки нужно, чтобы или из 1-ой группы выбрали 2 девушек, а из 2-ой - юношу и девушку, или наоборот, из 1-ой - юношу и девушку, а из 2-ой - 2 девушек. Вероятность нашего события равна сумме вероятностей этих двух вариантов.

Введем обозначения для событий.
A_1 – из 1-ой группы выбрали 2 девушек;
A_2 – из 2-ой группы выбрали 2 девушек;
B_1 – из 1-ой группы выбрали юношу и девушку;
B_2 – из 2-ой ящика выбрали юношу и девушку,
C – среди выбранных студентов будет 1 юноша и 3 девушки (искомое событие)

Событие C является суммой произведений, $C = A_1B_2 + B_1A_2$.
Вероятности каждого из множителей находим по классическому определению.

В 1-ой группе могут быть выбраны любые 2 студента из 12. $n = C_{12}^2 = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$.
Девушек в 1-ой группе пять, поэтому число вариантов выбора двух девушек равно $m_{11} = C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. Для выбора 1 юноши и 1 девушки: юноша может быть любой из 7, девушка любая из 5, $m_{12} = C_7^1 \cdot C_5^1 = 7 \cdot 5 = 35$. Таким образом, $P(A_1) = \frac{10}{66}$, $P(B_1) = \frac{35}{66}$.

Для второй группы $n = C_{15}^2 = \frac{15 \cdot 14}{2} = 105$. $m_{11} = C_{11}^2 = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55$, $m_{12} = 4 \cdot 11 = 44$.

Найдем вероятности A_2 и B_2. $P(A_2) = \frac{55}{105}$, $P(B_2) = \frac{44}{105}$.

Теперь подставляем в формулу

$$P(C) = P(A_1) \cdot P(B_2) + P(A_2) \cdot P(B_1) = \frac{10}{66} \cdot \frac{44}{105} + \frac{35}{66} \cdot \frac{55}{105} = \frac{2365}{6930} \approx 0{,}34$$

Ответ. 0,34

Пример 10. Катя вытащила 3 карты из колоды в 36 карт. Найти вероятность, что у Кати тузов будет больше, чем дам (событие A).

Решение. Представим искомое событие в виде суммы несовместных событий. Итак, Катя берет 3 карты. У Кати будет больше тузов, чем дам, если у нее будут:

3 туза (событие B);

2 туза и 1 не туз (событие C);

1 туз, 0 дам и 2 карты – не тузы и не дамы (событие D).

Все вероятности находим с помощью классического определения $p = m/n$.

Всего в колоде 36 карт: 4 туза, 4 дамы и 28 остальных карт. У Кати могут оказаться любые 3 карты из 36, причем порядок не важен, поэтому

$$n = C_{36}^3 = \frac{36 \cdot 35 \cdot 34}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 7140$$

Для того чтобы произошло событие B, у Кати должны оказаться любые 3 туза из 4: $m_B = C_4^3 = 4$. Событию C соответствует любая тройка карт, где 2 туза из 4 и еще 1 карта из 32 остальных карт (даже если третьей картой будет дама, тузов все равно больше). $m_C = C_4^2 \cdot 32 = 6 \cdot 32 = 192$. Для события D могут быть взяты любой туз из 4 и еще любые 2 карты – не тузы и не дамы из 28, $m_D = C_4^1 \cdot C_{28}^2 = 4 \cdot \frac{28 \cdot 27}{2} = 1512$.

Общее количество подходящих вариантов для искомого события A равно $m = 4 + 192 + 1512 = 1708$. Теперь можем посчитать общую вероятность события A

$$P(A) = \frac{1708}{7140} \approx 0{,}24$$

Ответ. $P(A) \approx 0{,}24$

Пример 11. Спартак играет три матча – с ЦСКА, Зенитом и Динамо. Вероятность победы Спартака в матче с ЦСКА равна 50%, вероятность ничьи равна 15%, вероятность поражения равна 35%. Для матча с Зенитом эти вероятности равны 30%, 40% и 30%. Для матча с Динамо – 60%, 30% и 10%. Найти вероятность, что у Спартака будет больше побед, чем поражений.

Решение. Представим событие A - «у Спартака будет больше побед, чем поражений» в виде суммы несовместных событий.

- Спартак выиграет все три матча (событие B);
- Спартак выиграет любые два матча из трех, а еще один сыграет вничью или проиграет (событие C);
- Спартак выиграет один матч из трех, а еще 2 сыграет вничью (событие D).

Событие B означает, что Спартак выиграет и у ЦСКА, и у Зенита, и у Динамо, т.е. произойдет наступление всех трех побед в трех матчах. Значит, событие B является произведением трех событий – побед Спартака. Поскольку результаты матчей не зависят друг от друга, то вероятность того, что Спартак одержит три победы равна произведению вероятностей побед в каждом из матчей. $P(B) = 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,6 = 0,09$

Событие С является суммой трех событий. Событие С происходит, если выполняется один из трех вариантов. Спартак может выиграть у ЦСКА и Зенита, но сыграть вничью или проиграть Динамо. Или Спартак может выиграть у ЦСКА и Динамо, но неудачно играет с Зенитом. Третий вариант: Спартак выигрывает у Зенита и Динамо, и неудачно играет с ЦСКА. Каждый из этих вариантов является произведением трех событий – двух побед и одной «непобеды» в соответствующих матчах. При этом вероятность того, что Спартак сыграет вничью или проиграет в матче, например, с Динамо равна сумме вероятностей ничьи и поражения. Например, вероятность того, что Спартак выиграет у ЦСКА и Зенита и не сможет обыграть Динамо равна $p = 0,5 \cdot 0,3 \cdot (0,3 + 0,1) = 0,06$. Общая вероятность события С равна

$$P(C) = 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,7 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,6 =$$

$$0,06 + 0,21 + 0,09 = 0,36$$

Событие D - 1 победа и 2 ничьи, также является суммой трех событий. Спартак может выиграть любой из трех матчей и в двух других, соответственно, сыграть вничью. Например, Спартак может выиграть у ЦСКА и сыграть вничью с Зенитом и Динамо, вероятность такого результата трех матчей равна $p = 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,3 = 0,06$. Также Спартак может обыграть Зенит или Динамо, и два других матча сыграть вничью. Поскольку все три слагаемые события D - несовместные, то вероятность D равна сумме их вероятностей

$$P(D) = 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,3 + 0,15 \cdot 0,3 \cdot 0,3 + 0,15 \cdot 0,4 \cdot 0,6 =$$

$$0,06 + 0,0135 + 0,036 = 0,1095$$

Теперь можем посчитать итоговую вероятность, что у Спартака будет больше побед, чем поражений:

$$P(A) = P(B) + P(C) + P(D) = 0,09 + 0,36 + 0,1095 = 0,5595$$

Ответ. $P(A)=0,5595$

Упражнения для самостоятельного решения.

1 Винни-Пух снова решил поступить в университет на пчеловодство. Ему нужно сдать 3 экзамена: математику, информатику и историю. Вероятность сдать математику равна 70% (событие А), сдать информатику - 30% (событие В), историю - 50% (событие С). Найти вероятность, что Винни-Пух сдаст а) хотя бы один экзамен; б) сдаст ровно один экзамен; в) сдаст все 3 экзамена.

2. В группе 30 студентов. Из них 7 отличников, 12 хорошистов и 11 удовлетворительно успевающих студентов. Найти вероятность того, что произвольно выбранный студент будет отличником или хорошистом.

3. В ящике лежит 5 белых, 4 зеленых и 3 красных шара. Выбирается один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет или белым, или красным.

4. Опытный стрелок делает выстрел по мишени. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет 10 очков, равна 0,1; вероятность выбить 9 очков равна 0,28; вероятность выбить 8 очков равна 0,35, вероятность выбить 7 или меньше очков равна 0,27. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет а) не менее 9 очков б) не менее 8 очков.

5. Света сдает три экзамена: Экономику, информатику и математику. Вероятность успешно сдать экономику равна 90%, информатику – 30%, и математику – 40%. Найти вероятность, что Света сдаст хотя бы один экзамен.

6. Три экономиста -исследователя, независимо друг от друга производят важные расчеты. Вероятность того, что первый исследователь допустит ошибку в расчетах, равна

0,1. Для второго и третьего исследователей эта вероятность соответственно равна 0,15 и 0,2. Найти вероятность того, что хотя бы один из исследователей допустит ошибку.

7. В группе учатся 12 студентов, среди них 5 юношей и 7 девушек. 3 студентов получили пятерки на экзамене. Найти вероятность, что среди этих студентов будет хотя бы один юноша.

8. Из колоды в 36 карт наудачу вынимается одна. Определить вероятность того, что это будет или карта пиковой масти, или туз или король.

9. Монета бросается два раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз выпадет «герб».

10. Экзамен сдают 3 студента: 1 отличник, 1 хорошист и 1 троечник. Вероятность успешно сдать экзамен равна 0,8 для отличника, 0,6 для хорошиста и 0,3 для троечника. Найти вероятность, что экзамен сдали а) все три студента; б) ровно два студента; в) только один студент.

11. Важное устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы в течении дня для первого, второго и третьего элементов равны соответственно 0,8; 0,6 и 0,9. Найти вероятности того, что в течении дня безотказно будет работать: хотя бы один элемент.

12. Три раза бросают игральную кость. Найти вероятность того, что, каждый раз выпадет не менее чем 3 очка.

13. Студент сдает три экзамена: макроэкономику, микроэкономику и информатику. Вероятность сдать макроэкономику равна 40%, микроэкономику – 70%, и информатику – 20%. Найти вероятность, что студент сдаст а) ровно один экзамен; б) хотя бы один экзамен; в) не сдаст ни одного экзамена.

14. Первокурсница Оля сдает три экзамена: историю, экономику и географию. Вероятность сдать историю равна 90%, экономику – 50%, и географию – 70%. Найти вероятность, что Оля сумеет сдать а) ровно один экзамен; б) хотя бы один экзамен, в) ровно 2 экзамена.

15. Важное устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы в течение дня для первого, второго и третьего элементов равны соответственно 0,8; 0,6 и 0,9. Найти вероятности того, что в течении дня безотказно будут работать: а) только один элемент; б) только два элемента; в) все три элемента.

16. На учениях проверяют орудия. Вероятности попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий равны, соответственно 90% и 70%. Найти вероятность хотя бы одного точного попадания при одном залпе из обоих орудий

17. В одной отрасли работают три предприятия. Вероятность банкротства первого предприятия – 1/3, второго 1/7, третьего 1/8. Найти вероятность того, что обанкротилось а) ровно одно предприятие, б) хотя бы одно предприятие.

18. Из партии изделий специалист отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,6. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий а) хотя бы одно изделие высшего сорта; б) только одно изделие высшего сорта; в) ровно два изделия высшего сорта.

19. Из колоды в 36 карт наудачу вынимается одна. Определить вероятность того, что это будет карта бубновой масти или десятка.

20. Из колоды в 36 карт наудачу вынимается одна. Определить вероятность того, что это будет красная карта или король.

21. Из колоды в 36 карт наудачу вынимается одна. Определить вероятность того, что это будет или карта пиковой масти, или туз или король.

22. Лена вытащила 3 карты из колоды в 36 карт. Потом Миша вытащил еще 3 карты. Найти вероятность, что у Лены и Миши будет поровну пик.

23. Опытный стрелок делает серию выстрелов. Вероятность того, что при одном выстреле он попадает в цель, равна 0,7. Сколько выстрелов должен произвести стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,9 он попал в цель хотя бы один раз?

24. Из колоды в 36 карт вытащили 3 карты. Найти вероятность, что среди них будет или ровно один карта червонной масти, или ровно один туз.

25. Из колоды в 36 карт вытащили 2 карты. Определить вероятность того, что среди них будет ката бубновой масти и туз.

26. Из колоды в 36 карт вытащили 3 карты. Определить вероятность того, что среди них будет хотя бы один туз.

27. Из колоды в 36 карт вытащили 3 карты. Найти вероятность того, что среди них будет хотя бы один туз и хотя бы одна пика.

28. Три стрелка стреляют в цель. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,5, для второго стрелка - 0,6, и для третьего стрелка – 0,7. Найти вероятность, что хотя бы один стрелок попадет в цель.

29. Три стрелка выстрелили по одной мишени. При одном выстреле вероятность попадания для них 0,5; 0,9 и 0,4 соответственно. Найти вероятность, что мишень поражена не менее двух раз.

30. Два стрелка стреляют в цель. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,7, для второго стрелка - 0,4. Найти вероятность, что хотя бы один из стрелков попадет в цель.

31. В портфеле акций у Оли есть акции Газпрома и ЛУКОЙЛа и ВТБ. Вероятность, что акции Газпрома вырастут в цене равна 80% (событие А), вероятность роста акций ЛУКОЙЛа равна 60% (событие В), ВТБ - 40%(событие А). Найти вероятность, что у Оли а) вырастут обе акции; б) вырастет хотя бы одна из акций; в) вырастет только одна из акций.

32. Шерлок Холмс и профессор Мориарти играют в карты. Сначала Холмс вынимает две карты из колоды, потом две карты вынимает Мориарти. Выиграет тот, у кого будет больше тузов. Найти вероятность, что Холмс выиграет.

33. Есть две группы студенты. В первой - 16 мальчиков и 14 девочек. Во второй - 5 мальчиков и 15 девочек. В каждой группе выбирают старосту. Найти вероятность того, что а) среди двух старост будет одна девочка и один мальчик; б) оба старосты окажутся девочками; в) среди старост будет хотя бы одна девочка.

34. Имеется два ящика, в каждом по 10 деталей: в первом ящике 7 стандартных и 3 нестандартных детали, во втором - 9 стандартных и 1 нестандартная деталь. Из каждого ящика наугад вынимают по одной детали. Найти вероятность, что они обе стандартные.

35. Имеется два ящика: в первом ящике 5 стандартных и 3 нестандартных детали, во втором - 4 стандартных и 4 нестандартная детали. Из каждого ящика наугад вынимают по одной детали. Найти вероятность, что среди них ровно одна деталь - стандартная.

36. Имеется три ящика, в каждом по 40 деталей: в первом ящике 35 стандартных и 5 нестандартных деталей, во втором - 34 стандартных и 6 нестандартных; в третьем - 30 стандартных и 10 нестандартных. Из каждого ящика наугад вынимают по одной детали. Найти вероятность, что все три детали - стандартные.

37. В трех ящиках лежат шары. В ящике №1 3 красных и 4 белых, в ящике №2 1 красный, 2 белых и 3 зеленых, в ящике №3 2красных и 3 зеленых. Из каждого ящика выбирают по одному шару. Найти вероятность того, что все выбранные шары будут красные.

38. Имеется два ящика, в каждом по 10 деталей: в первом ящике 7 стандартных и 3 нестандартных детали, во втором - 9 стандартных и 1 нестандартная деталь. Из каждого ящика наугад вынимают по две детали. Найти вероятность, что среди выбранных деталей будут три стандартные.

39. Из трех групп выбирают по 1 студента для участия в спортивных соревнованиях. В 1-ой группе учатся 10 юношей и 5 девушек. Во 2-ой группе учатся 4 юноши и 11 девушек. В 3-ей - 10 юношей и 20 девушек. Найти вероятность, что среди выбранных студентов будет хотя бы 1 юноша.

40. В каждой из трех групп есть по 1 отличнику. В 1-ой группе учатся 12 юношей и 18 девушек. Во 2-ой группе учатся 6 юноши и 14 девушек. В 3-ей - 3 юноши и 7 девушек. Найти вероятность, что среди отличников будет а) ровно 1 юноша; б) ровно 2 юноши; в) все 3 - девушки.

41. Производство состоит из 5 независимо работающих станков. Вероятность, что в первом станке возникнет поломка равна 0,1 (в течении дня); для других станков эта вероятность равна 0,3; 0,1; 0,4 и 0,1 соответственно. Какова вероятность, что в течение дня поломка случится хотя бы в одном станке.

42. Студент сдает три экзамена: математику, макроэкономику и историю. Вероятность сдать математику равна 30%, макроэкономику – 50%, а историю – 90%. Найти вероятность, что студент а) сдаст хотя бы один экзамен; б) сдаст ровно один экзамен; в) сдаст все 3 экзамена.

43. Катя и Витя играют с шарами. В урне 4 белых и 3 чёрных шара. Два игрока вынимают из урны поочередно шары, не возвращая их обратно. Выигрывает тот, кто раньше извлечёт белый шар. Найти вероятность того, что победа одержит Катя, если она начинает первой.

44. ЦСКА играет три матча – с Динамо, Зенитом и Рубином. Вероятность победы ЦСКА в первом матче равна 70%, вероятность ничьи равна 20%, вероятность поражения равна 10%. Для матча с Зенитом эти вероятности равны 30%, 20% и 50%. Для матча с Рубином – 50%, 20% и 30%. Найти вероятнюсть, что ЦСКА хотя бы в двух матчах не проиграет.

45. Спартак играет три матча – с Рубином, Зенитом и Амкаром. Вероятность победы Спартака в матче с ЦСКА равна 70%, вероятность ничьи равна 20%, вероятность поражения равна 10%. Для матча с Зенитом эти вероятности равны 35%, 15% и 50%. Для матча с Амкаром – 60%, 25% и 15%. Найти вероятность, что Спартака одержит хотя бы одну победу.

46. Лена вытащила 3 карты из колоды в 36 карт. Найти вероятность, что у Лены будет больше карт червонной масти, чем пиковой.

47. Вася вытащил 4 карты из колоды в 36 карт. Найти вероятность, что у Васи будет больше тузов, чем шестерок.

48. В урне 2 белых, 3 чёрных и 5 красных шаров. Наугад извлекают три шара. *Найти вероятность, что они одного цвета.*

49. Один раз бросают игральную кость. Найти вероятность, что выпадет четное число очков.

50. Три раза бросают игральную кость. Найти вероятность, что хотя бы один раз выпадет четное число очков

51. Три раза бросают игральную кость. Найти вероятность, что дважды выпадет одинаковое число очков.

52. Два раза бросают игральную кость. Найти вероятность, что хотя бы раз выпадет 5 или 6 очков.

53. Два раза бросают игральную кость. Найти вероятность, что хотя бы раз выпадет 5 или 6 очков. Два раза бросают игральную кость. Найти вероятность, что хотя бы раз выпадет 5 или 6 очков.

54. Стрелок трижды стреляет в цель. Вероятность попадания с первого раза равна 0,9. С каждым следующим разом вероятность попадания уменьшается на 0,3. Найти вероятность, что стрелок попадет хотя бы один раз.

55. Студент сдает 3 зачета и экзамен. Вероятность сдать первый зачет равна 0,3. С каждым следующим зачетом вероятность увеличивается на 0.3. Если студент не сдал ни одного зачета, он не допускается к экзамену. Если студент сдал один или два зачета, то вероятность сдать экзамен составляет 0,4. Если студент сдал три экзамена – 0,95. Найти вероятность, что студент сдаст экзамен.

56. Шерлок Холмс и профессор Мориарти играют с кубиком. Сначала Холмс подкидывает кубик 2 раза, затем Мориарти подкидывает кубик 2 раза. Выиграет тот, у кого выпадет больше троек. Найти вероятность, что Мориарти выиграет.

57. Катя и Миша подбрасывают кубик по три раза. Найти вероятность, что у них выпадет поровну троек.

Глава 6

Условные вероятности, теорема произведения вероятностей

Если A и B – два случайных события, которые могут произойти в одном и том же испытании, то наступление одного из них может влиять на возможность наступления другого.

Определение. *Условной вероятностью* ***P(B/A)*** *события B при условии A называют вероятность наступления события B, если известно, что событие A уже произошло.*

Также используется обозначение $\boldsymbol{P_A(B)}$

Пример 1. В ящике 5 белых и 5 черных шаров. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Какова вероятность, что вторым вынут белый шар, если в первый раз был извлечен черный шар.

Решение. Пусть событие A – «в первый раз вынули черный шар», событие B – «во второй раз вынули белый шар». Вероятность, которую нужно найти – это вероятность, что второй шар – белый, при условии, что первый шар – черный. То есть это условная вероятность **P(B|A)** события B при условии выполнения A.

Известно, что первым вытащили черный шар. Значит, после первого извлечения в ящике осталось 9 шаров: 5 белых и 4 черных. Для второго шара остается всего возможных вариантов – 9, из них вариантов вытащить белый шар – 5.

Искомая вероятность равна:

$$\mathbf{P(B \mid A) = \frac{5}{9}}$$

Как найти условную вероятность

Нужно найти вероятность, что произойдет событие B при условии, что событие A произошло - **P (B|A)**. Если известно, что событие A произошло, то пространство возможных событий фактически сужается до событий, при которых происходит A, т.е. событий, благоприятствующих событию A.

Нам нужно найти, какую долю составляют исходы, благоприятствующие B внутри A (т.е. когда одновременно происходят A и B), среди исходов, благоприятствующих A.

Вообще, если известно, что A наступило, то вся возможная вероятность - это вероятность события A, ведь известно, что событие A произошло. Событие B при таком условии может наступить только вместе с событием A. Вероятность того, что наступит и A и B - это вероятность произведения, пересечения событий AB. **Нам нужно найти долю вероятности совместного наступления A и B в вероятности наступления A.**

Таким образом, условной вероятностью P(B|A) события B при условии, что произошло событие A, является отношение вероятности пересечения (произведения) этих событий к вероятности события A. Получаем **формулу условной вероятности**:

$$\mathbf{P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}}$$

В случае, когда применяется схема классического определения вероятности, эту формула можно преобразовать. Обозначим через $\mathbf{m_A}$ число элементарных исходов, благоприятствующих событию А, через $\mathbf{m_{AB}}$ - число элементарных исходов, при которых происходят и А и В, через $\mathbf{n}$ - общее числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов. Тогда условная вероятность P(B|A) равна доле элементарных исходов, соответствующих AB - $\mathbf{m_{AB}}$ среди исходов, соответствующих событию А:

$$\mathbf{P(B \mid A) = \frac{m_{AB}}{m_A}}$$

Это равенство можно получить также из следующих соображений. Используя классическое определение вероятности, получаем $P(A) = \frac{m_A}{n}$, $P(A \cdot B) = \frac{m_{AB}}{n}$.

По определению условной вероятности $\mathbf{P(B \mid A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)} = \frac{m_{AB}/n}{m_A/n} = \frac{m_{AB}}{m_A}}$.

Пример 2. Из колоды в 36 карт вынули три карты. Найти вероятность, что среди этих карт ровно один туз, если известно, что среди них ровно две дамы.

Решение. Рассмотрим события:
А - среди трех карт ровно две дамы;
В - среди трех карт ровно один туз.

При выборе 3 карт из 36 элементарными возможными исходами являются любые тройки карт, отличающиеся по составу, хотя бы одной картой. Всего таких троек: $\mathbf{n = C_{36}^3} = \frac{36!}{3! \cdot 33!} = 7140$. Однако известно, что среди вытащенных трех карт есть две дамы. Значит, возможные исходы сужаются до троек, где есть две дамы и одна «не дама». В колоде 4 дамы и 32 другие карты. Могут быть вытащены любые две дамы из четырех и любая карта - «не дама» из 32. Всего возможных вариантов $\mathbf{m_A = C_4^2 \cdot C_{32}^1} = 6 \cdot 32 = 192$.

Поскольку из условия известно, что «есть 2 дамы», то количество возможных исходов равно именно 192, а не 7140.

Для того, чтобы при выполнении условия «есть 2 дамы», также выполнялось «есть 1 туз», выбранная тройка должна состоять из 2 дам и 1 туза. Для выбора 2 дам у нас - $\mathbf{C_4^2} = 6$ вариантов, для выбора туза - 4 варианта. Всего подходящих троек: $\mathbf{m_{AB}} = 6 \cdot 4 = 24$. Доля троек, соответствующих наступления и А и В, среди всех троек, соответствующих событию А, и есть вероятность наступления В при условии наступления А.

$$\mathbf{P(B \mid A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)} = \frac{m_{AB}}{m_A}} = \frac{24}{192} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

Теорема произведения вероятностей

Теорема (правило) умножения вероятностей: *Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие произошло.*

$$\mathbf{P(AB) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B)}$$

Теорема умножения вероятностей естественно обобщается на случай произвольного числа событий:

Следствие. *Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились:*

$$\mathbf{P(ABC...KL) = P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P(C \mid AB) \cdot ... \cdot P(L \mid ABC...K)}$$

где $\mathbf{P(L \mid ABC...K)}$ - вероятность события **L**, вычисленная в предположении, что события $\mathbf{A, B, C, ..., K}$ уже наступили.

В частности, для трех событий

$$\mathbf{P(ABC) = P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P(C \mid AB)}$$

Пример 3. В группе 15 студентов: 10 мальчиков и 5 девочек. Выбирают старосту, профорга и ответственного за учебу. Найти вероятность того, что старостой выберут девочку (событие А), профоргом - мальчика (событие В) и ответственным за учебу - девочку (событие С). Совмещать посты нельзя.

Решение. Старостой может стать любой из 15 студентов, из них 5 девочек. Поэтому вероятность события А равна $\mathbf{P(A) = 5/15 = 1/3}$.

Если старостой выбрали девочку, то профоргом может стать любой из 14 оставшихся студентов, из них 10 мальчиков и 4 девочки. Вероятность, что профоргом выбрали мальчика при условии, что старостой стала девочка, равна $\mathbf{P(B|A)=10/14=5/7}$.

Если события А и В произошли, т.е. старостой выбрали девочку, а профоргом - мальчика, то для третьих выборов остается 13 студентов: 4 девочки и 9 мальчиков. Вероятность, что ответственным за учебу при этих условиях выберут девочку, равна $\mathbf{P(C|AB)=4/13}$.

Искомое событие означает совместное наступление всех трех событий, т.е. и староста - девочка, и профорг - мальчик, и ответственный за учебу - девочка. Вероятность этого события найдем по теореме умножения вероятностей.

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P(C \mid AB) = \frac{1}{3} \cdot \frac{10}{14} \cdot \frac{4}{13} = \frac{20}{273}$$

Пример 4. В урне 7 белых, 5 черных и 3 синих шара. По очереди наудачу извлекают три шара, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что первым появится белый шар (событие А), вторым вытащат черный (событие В) и третьим - синий (событие С).

Решение. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его обратно. Вероятность появления белого шара при первом извлечении равна $\mathbf{P(A) = 7/15}$.

Если первым извлекли белый шар, то в урне остается 14 шаров: 6 белых, 5 черных и 3 синих. Вероятность появления черного шара при втором извлечении, вычисленная в предположении, что в первый раз появился белый шар, т. е. условная вероятность

P(B|A)=5/14. Если события А и В произошли, то в урне остается 13 шаров: 6 белых, 4 черных и 3 синих. Вероятность появления синего шара в третьем извлечении, вычисленная при условии, что в первый раз появился белый шар, а во второй - черный, т. е. условная вероятность **P(C|AB)=3/13**.

Искомая вероятность находится по теореме умножения вероятностей

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P(C \mid AB) = \frac{7}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{3}{13} = \frac{105}{2730} = \frac{1}{26}$$

Независимость событий

Определение. *Событие В называется независимым от события А, если появление события А не изменяет вероятности события В, т.е. если условная вероятность события В при условии наступления А равна его безусловной вероятности:*

$P(B \mid A) = P(B)$

Если событие А не зависит от события В, то и событие В не зависит от события А.

Для независимых событий правило умножения вероятностей принимает вид

$\mathbf{P(AB) = P(A) \cdot P(B)}$

т.е. вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Это равенство принимают в качестве определения независимых событий.

Определение. *Два события называют независимыми, если вероятность их совмещения равна произведению вероятностей этих событий.*

То есть два события А и В называют ***независимыми, если выполняется*** *равенство* $\mathbf{P(AB) = P(A) \cdot P(B)}$

В противном случае события называют зависимыми.

Определение независимости обобщается на случай произвольного числа событий.

Определение. *События* $A_1, A_2, ..., A_n$ *называются* ***независимыми****, если каждое из них не зависит от произведения любого числа остальных событий и от каждого из остальных событий в отдельности.*

В противном случае события $A_1, A_2, ..., A_n$ называются зависимыми.

Для того, чтобы выяснить, являются ли события А и В независимыми, нужно:

Проверить выполнение равенства $\mathbf{P(AB) = P(A) \cdot P(B)}$. *Если оно выполняется, то события А и В - независимые, если нет - зависимые.*

Или

Проверить выполнение равенства $\mathbf{P(B \mid A) = P(B)}$. *Если оно выполняется, то события А и В - независимые, если нет - зависимые.*

Пример 5. Из колоды 36 карт достали 3 карты. Выяснить, зависимы ли события А: «среди них нет королей» и В: «все карты разной масти».

Решение. События независимы, если выполняется формула $\mathbf{P(AB) = P(A) \cdot P(B)}$

Можем вынуть любые 3 карты из 36. $n = C_{36}^3 = \dfrac{36\cdot 35\cdot 34}{3\cdot 2\cdot 1} = 7140$

Для того, чтобы произошло событие А: «среди них нет королей» нужно вынуть любые 3 карты из 32 – всех кроме королей. $m_A = C_{32}^3 = \dfrac{32\cdot 31\cdot 30}{3\cdot 2\cdot 1} = 4960$

$$p(A) = \frac{4960}{7140} \approx 0{,}69$$

Для того, чтобы произошло событие В: «все карты разной масти» нужно:
1) карты должны быть 3 разных мастей, то есть могут быть произвольные 3 масти из 4 - C_4^3; 2) Для любого варианта 3 мастей, из каждой масти может быть любая карта из 9, всего от 3 мастей есть 9^3 вариантов, какие 3 карты могут быть выбраны. Например, для трех карт, среди которых 1 черва, 1 бубна и 1 пика. Карты из червей может быть любая из 9, бубновая карта – также любая из 9, и пиковая карта – любая из 9.

$$m_B = C_4^3 \cdot 9^3 = 4\cdot 729 = 2916 \qquad p(B) = \frac{2916}{7140} \approx 0{,}41$$

Для выполнения события АВ: «все карты разной масти, и среди них нет королей» выбор почти такой же, как для события В. Выбираем любые 3 масти из 4, только для каждой масти выбираем любую карту из 8, а не из 9.

$$m_{AB} = C_4^3 \cdot 8^3 = 4\cdot 729 = 2048 \qquad p(AB) = \frac{2048}{7140} \approx 0{,}287$$

$$p(A)\cdot p(B) = \frac{4960\cdot 2916}{7140^2} \approx 0{,}28371$$

Равенство не выполняется, поэтому зависимость есть, хотя и очень маленькая.

Ответ. События – зависимые.

На практике о независимости событий часто заключают по смыслу задачи. Например, если студент сдает два экзамена – математику и физику, то вероятности их сдачи не зависят друг от друга. Поэтому события «студент сдал математику» и «студент сдал физику» - независимые.

Вероятность произведения независимых событий

Для независимых событий их условные вероятности равны безусловным, и формула умножения вероятностей упрощается:

$$P(ABC...KL) = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)\cdot ...\cdot P(K)\cdot P(L)$$

Для двух независимых событий А и В вероятность их произведения (их совместного наступления) равна произведению вероятностей. $P(AB) = P(A)\cdot P(B)$

Пример 6. Миша и Катя сдают экзамен по математике. Вероятность, что Миша сдаст экзамен, равна 70%, для Кати вероятность сдать экзамен составляет 90%. Найти вероятность, что они оба сдадут экзамен.

Решение. Обозначим события:

А - Миша сдаст экзамен;

В - Катя сдаст экзамен.

Очевидно, что успех или неудача на экзамене Кати не зависит от того, как сдаст экзамен Миша. Значит, события А и В - независимые. Событие «оба сдадут экзамен» - произведение АВ событий А и В. Действительно, «оба сдадут экзамен» означает совместное наступление А и В; означает, что и Миша сдаст экзамен, и Катя. Поскольку события - независимые, то вероятность их совместного наступления равна произведению вероятностей.

$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}63$

Ответ. 0,63 или 63%.

Решение задач

Пример 7. Миша сдает экзамен. Вероятность, что он получит 5, равна 15%; вероятность получить 4 равна 30%; вероятность тройки - 5%; и вероятность получить 2 - 50%. Стало известно, что Миша сдал экзамен. Какова вероятность, что он получил пятерку.

Решение. Введем обозначения:

A – «Миша сдал экзамен», т.е. получил 5,4 или 3.

B – «Миша получил пятерку».

Исходная вероятность этих событий равна $P(A) = 0{,}15 + 0{,}3 + 0{,}05 = 0{,}50 = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}15$. Однако, если известно, что Миша сдал экзамен, т.е., что событие A произошло, то вероятность получения пятерки можно переоценить.

Поскольку Миша экзамен сдал, то возможными исходами остаются только получение 5, 4 или 3, но не 2. Пересечение событий A и B, в данном случае, совпадает с событием B: «Миша сдал экзамен на пятерку». Чтобы определить условную вероятность $P(B|A)$ нужно найти долю вероятности совместного наступления A и B (получения пятерки) в вероятности наступления A (сдачи экзамена).

$$\mathbf{P(B|A) == \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}} = \frac{0{,}15}{0{,}5} = 0{,}3$$

Ответ. 0,3 или 30%.

Пример 8. Три опытных стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятность точного попадания для первого стрелка равна 80%, для второго - 60%, и для третьего - 30%. Известно, что в мишень попали двое из них. Найти вероятность, что третий стрелок попал.

Решение. Введем обозначения:

H - два стрелка из трех попали в цель ;

A - первый стрелок попал в цель;

B - второй стрелок попал в цель;

C - третий стрелок попал в цель.

Нам нужно найти вероятность того, что третий стрелок попал в цель при условии, что в цель попали 2 из 3.

Для того чтобы в мишень попали ровно два стрелка, возможны три варианта. Первый вариант - попали стрелки №1 и №2, стрелок №3 промахнулся. Второй вариант - промахнулся второй стрелок, третий вариант - промахнулся третий стрелок. Найдем суммарную вероятность попадания двух стрелков из трех.

$$P(H) = P(AB\overline{C}) + P(A\overline{B}C) + P(\overline{A}BC) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 + 0{,}8 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}3 +$$
$$+ 0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}336 + 0{,}096 + 0{,}036 = 0{,}468$$

Из трех слагаемых событию C - третий стрелок попал в цель, соответствуют второе и третье. Для того, чтобы найти искомую вероятность **P(C|H)** нужно найти долю вероятности того, что попали двое, в том числе третий стрелок, среди всей вероятности двух попаданий.

$$P(C \mid H)=\frac{0{,}096+0{,}036}{0{,}336+0{,}096+0{,}036}=\frac{0{,}132}{0{,}468}\approx 0{,}28$$

Ответ. 0,28

Замечание. Эту задачу и ее решение можно отнести, как к теме: условные вероятности, так и к теме: формула Байеса.

Пример 9. Работа большого электронного устройства прекратилась вследствие выхода из строя одного из пяти блоков. Производится последовательная замена каждого блока новым до тех пор, пока устройство не начнет работать. Какова вероятность того, что придется заменить: а) 1 блок; б) 3 блока?

Решение. Обозначим события:
A_i - i-ый блок исправен, $i = 1,2, ..., 5$;
B - заменят два блока;
C — заменят 4 блока.

Первый способ.

а) Очевидно, что придется заменить 2 блока, если 1-й блок исправен (4 шанса из 5), а 2-й - неисправен (1 шанс из оставшихся 4). Таким образом,
$B = A_1\overline{A}_2$; $P(A_1)=\frac{4}{5}$; $P(\overline{A}_2 \mid A_1)=\frac{1}{4}$. По теореме умножения вероятностей для зависимых событий $P(B)=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$

б) Очевидно, что событие C произойдет, если первые три блока исправны, а 4-ый неисправен. То есть событие C - есть произведение четырех событий $C = A_1A_2A_3\overline{A}_4$. По теореме умножения вероятностей, с учетом, что все множители - зависимые события, получаем $P(C)=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$

Второй способ.

а) Придется заменить 2 блока, если неисправен именно 2-й блок. Неисправным может оказаться любой из 5 блоков, поэтому на неисправность 2-го блока приходится 1 шанс из 5. Значит, вероятность того, что вышел из строя 2-ой блок, равна 1/5. $P(\overline{A}_2)=\frac{1}{5}$.

Значит, и вероятность замены ровно двух блоков равна 1/5, $P(B)=P(\overline{A}_2)=\frac{1}{5}$.

б) Очевидно, что событие C произойдет только, если первые три блока исправны, а 4-ый неисправен. Однако вероятность того, что из пяти блоков неисправен именно четвертый, равна 1/5. Поэтому $P(C)=P(\overline{A}_4)=\frac{1}{5}$.

Пример 10. Из колоды 36 карт достали 3 карты. Найти вероятность, что среди этих карт ровно два короля, если известно, что все карты - черные (пики или крести).

Решение. Введем обозначения для событий:
A - среди трех карт ровно два короля;
B - все три вытащенные карты - черных мастей.

При выборе 3 карт из 36 элементарными возможными исходами являются любые тройки карт, отличающиеся по составу, хотя бы одной картой. Всего таких троек:

$\mathbf{n = C_{36}^3} = \dfrac{36!}{3!\cdot 33!} = 7140$. Однако известно, что все 3 карты – черного цвета. В колоде 18 карт черного цвета. Возможные исходы сужаются до троек, где все карты - пики или крести. Могут быть вытащены любые три из 18. Всего возможных вариантов

$m_B = C_{18}^3 = \dfrac{18\cdot 17\cdot 16}{3\cdot 2\cdot 1} = 816$.

Для того, чтобы при выполнении события В «все 3 карты - черные», также выполнялось событие А «есть 2 короля», нужно выбрать 2 черных короля (их всего 2) и еще 1 черную карту из 16 «не королей». Количество подходящих троек:

$m_{AB} = C_{16}^1 \cdot C_2^2 = 16\cdot 1 = 16$. $P(B\,|\,A) = \dfrac{P(A\cdot B)}{P(A)} = \dfrac{m_{AB}}{m_A} = \dfrac{16}{816} = \dfrac{1}{51}$

Ответ. P=1/51

Пример 11. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадает в мишень, равна: p = 0,9. Стрелок произвел 3 выстрела. Найти вероятность того, что все 3 выстрела дали попадание.

Решение. Обозначим через А интересующее нас событие (все 3 выстрела - точные). Событие А означает совместное наступление 3 событий: 3 точных попаданий. Выстрелы независимы друг от друга. Поэтому, вероятность того, что все 3 выстрела оказались точными, равна произведению вероятностей.

$P(A) = 0{,}9\cdot 0{,}9\cdot 0{,}9 = 0{,}729$

Ответ. 0,729.

Пример 12. В ящике 4 белых и 8 чёрных шаров. Из ящика вынули два шара, не возвращая вынутый шар в ящик. Найти вероятность того, что оба шара белые, используя условные вероятности.

Решение. Введем обозначения для событий:

А - появление белого шара при первом вынимании;

В - появление белого шара при втором вынимании.

По теореме умножения вероятностей для случая зависимых событий имеем $P(AB) = P(A)\cdot P(B\,|\,A)$.

Но вероятность появления первого белого шара равна $P(A) = \dfrac{4}{4+8} = 4/12 = 1/3$.

Действительно, всего шаров - 12, из них белых - 4. Если первый вынутый шар - белый, то в ящике остается 11 шаров: 3 белых и 8 черных. Тогда вероятность появления второго белого шара в предположении, что первый белый шар уже вынут равна: $P(B\,|\,A) = \dfrac{3}{11}$.

Теперь применяем теорему умножения вероятностей.

$P(AB) = P(A)\cdot P(B\,|\,A) = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{11} = \dfrac{1}{11}$.

Ответ. P=1/11

Замечание. Эту задачу можно решить, используя только классическое определение вероятности. $n = C_{12}^2 = 66,\ m = C_4^2 = 6,\quad p = 6/66 = 1/11$

Упражнения для самостоятельного решения.

1. Один раз бросили кубик. Известно, что выпала или пятерка, или шестерка. Найти вероятность, что выпала пятерка.

2. Один раз бросили кубик. Найти вероятность, что выпало нечетное число очков, если известно, что выпало больше трех очков.

3. Один раз бросили кубик Известно, что выпало не менее четырех очков. Найти вероятность того, что выпало нечётное число очков?

Один раз бросили кубик. Известно, что выпало чётное число очков. Найти вероятность того, что выпала шестерка.

4. Один раз бросили кубик. Известно, что выпало нечётное число очков. Найти вероятность того, что выпала шестерка.

5. В группе 5 мальчиков и 7 девочек. Последовательно выбирают 4 человек для поездки в театр. Найти вероятность, что 4-ым выбрали мальчика, если до этого выбрали 2 девочек и 1 мальчика.

6. Отличница Лена, хорошистка Настя и троечник Петя сдают экзамен по теории вероятностей. Вероятность сдать экзамен для Лены равна 90%, для Насти - 70%, для Пети - 40%. Найти вероятность, что а) Лена и Настя сдали экзамен, а Петя нет; б) Настя сдала экзамен, а Лена и Петя - нет; в) все 3 студента сдали экзамен.

7. В группе 4 мальчика и 6 девочек. Выбирают старосту и профорга. Найти вероятность, что профоргом выбрали мальчика, если старостой стала девочка.

8. В группе 12 мальчиков и 8 девочек. Выбирают старосту и профорга. Найти вероятность, что профоргом выбрали мальчика, если старостой стала девочка.

9. Петя сдает экзамен по линейной алгебре. Вероятность получить 5 равна 30%; вероятности получить 4, 3 и 2 равны, соответственно 40%, 10% и 20%. Стало известно, что Миша получил или 5 или 4. Какова вероятность, что Петя сдал экзамен на отлично.

10. Миша сдает экзамен по математическому анализу. Вероятность получить 5 равна 40%; вероятности получить 4, 3 и 2 равны, соответственно 10%, 20% и 30%. Стало известно, что Миша получил или 5 или 4. Какова вероятность, что Петя сдал экзамен на отлично.

11. В ящике лежит 8 белых и 3 красных шара. Из ящика вынимают два шара, не возвращая их обратно. Найти вероятность, что вторым вынут белый шар, если в первый раз был извлечен красный шар.

12. В ящике лежит 6 белых, 9 зеленых и 3 красных шара. Из ящика вынимают три шара, не возвращая их обратно. Найти вероятность, что третьим вынут белый шар, если известно, что первый вынутый шар – красный, а второй – зеленый.

13. Из колоды в 36 карт вынули 4 карты. Найти вероятность, что среди этих карт ровно один валет, если известно, что среди них ровно две туза.

14. Из колоды в 36 карт вынули три карты. Найти вероятность, что среди этих карт ровно один туз, если известно, что все 3 карты – разного достоинства.

15. Из колоды в 36 карт вынули три карты. Найти вероятность, что среди этих карт есть хотя бы один туз, если известно, что среди них нет восьмерок и девяток.

16. Из колоды в 36 карт вынули три карты. Найти вероятность, что среди этих карт есть минимум 2 короля, если известно, что один король среди них есть.

17. Два раза бросили кубик. Найти вероятность, что выпадала четверка, если известно, что выпадали разные числа.

18. Два раза бросили кубик. Найти вероятность, что хотя бы раз выпала пятерка, если известно, что не выпадали четные числа.

19. Кубик бросили три раза. Найти вероятность, что выпали две единицы, если известно, что среди выпавших чисел была тройка.

20. Отличница Лена, хорошистка Настя и троечник Петя сдают экзамен по теории вероятностей. Вероятность сдать экзамен для Лены равна 90%, для Насти - 70%, для

Пети - 40%. Стало известно, что экзамен смог сдать только один из них. Найти вероятность, что Петя сдал экзамен

21. Лена, Оля и Миша сдают экзамен по информатике. Вероятность сдать экзамен для Лены равна 40%, для Оли - 80%, для Миши - 50%. Известно, что экзамен сдали только двое. Найти вероятность, что Оля сдала экзамен.

22. Петя и Катя сдавали экзамен по информатике. Известно, что сдал только один из них. Вероятности сдать экзамен равны: для Кати - 70%, для Пети - 50%. Найти вероятность, что Катя сдала экзамен.

23. Из колоды в 36 карт наугад вытягиваются три карты. Какова вероятность, что все три карты – тузы?

24. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,75, для второго – 0,8, для третьего – 0,9. Определить вероятность того, что все три стрелка одновременно попадут в цель.

25. Три стрелка делают по одному выстрелу. Вероятности попадания в цель для первого стрелка равна 0,3, для второго – 0,6, для третьего – 0,7. Известно, что попал только один из них. Найти вероятность, что попал первый стрелок.

26. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,1, для второго – 0,7, для третьего – 0,8. Определить вероятность того, что все три стрелка одновременно попадут в цель.

27. Три стрелка одновременно произвели выстрелы, причем две пули поразили мишень. Найти вероятность того, что третий стрелок поразил мишень, если вероятности попадания в мишень первым, вторым и третьим стрелками соответственно равны 0,7, 0,5 и 0,6.

28. Три стрелка сделали по одному выстрелу. Известно, что попали двое. Вероятности точного выстрела равны, соответственно, 0,4; 0,7 и 0,1. Найти вероятность, что третий стрелок попал.

В задачах 29-35 определить, зависимы события А и В или независимы.

29. Бросается игральный кубик. Пусть событие А -появление четного числа очков, событие В - появление более трех очков. Зависимы или нет события А и В?

30. Вынули 3 карты из колоды в 36 карт. Событие А - среди этих карт 1 туз, В - среди этих карт 1 десятка.

31. Из колоды в 36 карт вынули 3 карты. Событие А - среди этих карт есть ровно 2 туза, В - есть ровно 2 пики.

32. Из колоды в 36 карт вынули 4 карты. Событие А - все карты разной масти, В - среди карт есть хотя бы один туз.

33. Вынули 5 карт из колоды в 36 карт. Событие А - все 5 карт - красные, В - среди них ровно 1 туз.

34. Два раза бросили игральный кубик. Событие А -оба раза выпало одно число, событие В - хотя бы раз выпало 1 очко.

35. Три раза бросили игральный кубик. Событие А -среди выпавших чисел была шестерка, событие В - в сумме выпало 12 очков.

36. В группе из 7 мальчиков и 15 девочек выбирают старосту, профорга и заместителя старосты. Найти вероятность того, что старостой выберут девочку, а профоргом и заместителем старосты - мальчиков. Совмещать посты нельзя.

37. В большом ящике лежат 10 белых и 7 черных шаров. По очереди наудачу извлекают три шара, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что первым появится белый шар, вторым вытащат черный, а третьим - снова белый.

38. В группе из 11 мальчиков и 12 девочек выбирают старосту, профорга и заместителя старосты. Найти вероятность того, что старостой и профоргом выберут девочку, а заместителем старосты - мальчика. Совмещать посты нельзя.

39. В большом ящике лежат 5 белых, 4 черных и 3 зеленых шара. По очереди наудачу извлекают четыре шара, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что первым появится зеленый шар, вторым вытащат черный, а третьим и четвертым - белые.

40. Два из трех независимо работающих элемента специального вычислительного устройства отказали. Найдите вероятность того, что отказали первый и второй элементы, если вероятности отказа первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,3; 0,1 и 0,2.

Глава 7

Формулы полной вероятности и Байеса

Пусть событие **А** может наступить при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) $\mathbf{H_1, H_2, ..., H_n}$, которые образуют полную группу. Пусть известны вероятности этих событий $\mathbf{P(H_i)}$ и условные вероятности наступления события **А** при появлении событий H_i: $\mathbf{P(A|H_i)}$ Напомним, что события $\mathbf{H_1, H_2, ..., H_n}$ образуют полную группу, если они несовместны и единственно возможны, т.е. обязательно должно произойти одно и только одно из них. При этом $\mathbf{P(H_1) + P(H_2) + ... + P(H_n) = 1}$ и $\mathbf{P(H_i \cdot H_j) = 0}$. Систему таких событий называют также разбиением. Как найти вероятность события **А**? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема (формула полной вероятности). *Если событие А может произойти только при условии появления одного из событий (гипотез)* $\mathbf{H_1, H_2, ..., H_n}$, *образующих полную группу, то вероятность события А равна сумме произведений вероятностей каждоого из этих событий на соответствующие условные вероятности события А:*

$$\mathbf{P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + ... + P(H_n) \cdot P(A|H_n)}$$

Эту формулу называют *формулой полной вероятности.*

Пример 1. Пусть в группе 40 студентов, из них 12 юношей и 28 девушек. Предположим, что для мальчиков вероятность сдать экзамен равна 50%, а для девочек – 70%. Найти вероятность того, что наудачу выбранный студент сдаст экзамен.

Решение. У нас есть две гипотезы: $\mathbf{H_1}$ – «случайно выбранный студент – мальчик» и $\mathbf{H_2}$ – «случайно выбранный студент – девочка». Событие, которое может произойти при выполнении одной из этих гипотез: «студент сдал экзамен» - событие **А**. События $\mathbf{H_1}$ и $\mathbf{H_2}$, разумеется, составляют полную группу.

Из условия мальчики составляют $\frac{12}{40} = 0{,}3 = \mathbf{30\%}$ группы, а девочки $\frac{28}{40} = 0{,}7 = \mathbf{70\%}$ группы. Таким образом, $\mathbf{P(H_1) = 0{,}3}$, $\mathbf{P(H_2) = 0{,}7}$. Условная вероятность того, что студент сдаст экзамен, если он – мальчик равна 50%. $\mathbf{P(A|H_1) = 0{,}5}$ Для девочек эта вероятность равна 70%: $\mathbf{P(A|H_2) = 0{,}7}$.

Какая же будет вероятность сдать экзамен для произвольно выбранного студента. Очевидно, что она будет между 50% и 70%. Поскольку девочек в группе больше, то искомая вероятность будет ближе к 70%.

Применим формулу полной вероятности.

$$P(A) = \mathbf{P(A|H_1) + P(A|H_2)} = 0{,}3 \cdot 0{,}5 + 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}15 + 0{,}49 = 0{,}64$$

Ответ. $P(A) = 0{,}64 = \mathbf{64\%}$

Следствием формулы полной вероятности является формула Байеса. Пусть снова событие **А** может наступить при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) $\boldsymbol{H_1, H_2, ..., H_n}$, которые образуют полную группу.

Допустим, что произведено испытание. и, в результате событие А произошло. Если известно, что событие А произошло, то можно переоценить вероятность гипотез $\mathbf{H_1, H_2, ..., H_n}$.

Теорема (формула Байеса). *Пусть* $H_1, H_2, ..., H_n$ *- полная группа событии. и А — некоторое событие, которое может произойти только при условии появления одного из них. Тогда условная вероятность того, что имело место событие* H_i*, если в результате эксперимента произошло событие А, может быть вычислена по формуле:*

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) + ... + P(H_n)P(A \mid H_n)}$$

Знаменатель этой формулы - вероятность события А, подсчитанная по формуле полной вероятности. В числителе стоит именно то слагаемое из этой формулы, которое соответствует i-ому событию H_i.

Вернемся к нашему примеру со студентами, сдающими экзамен

Пример 2. Пусть в группе 40 студентов, из них 12 юношей и 28 девушек. Предположим, что для мальчиков вероятность сдать экзамен равна 50%, а для девочек – 70%. *Случайным образом выбрали одного студента. Оказалось, что этот студент сдал* экзамен. Найти вероятность того, что этот студент - юноша, девушка.

Решение. Также, как в первом примере у нас две гипотезы: H_1 – «случайно выбранный студент – мальчик» и H_2 – «случайно выбранный студент – девочка». Исходная вероятность этих событий равна 30% и 70%, соответственно. Однако, если известно, что случайно выбранный студент сдал экзамен, то эти вероятности можно переоценить.

Данные из условий: $P(H_1) = 0{,}3$, $P(H_2) = 0{,}7$, $P(A \mid H_1) = 0{,}5$, $P(A \mid H_2) = 0{,}7$.

Подсчитанная в прошлом примере общая вероятность, что случайно выбранный студент сдаст экзамен, равна 0,64.

$$P(A) = P(A \mid H_1) + P(A \mid H_2) = 0{,}3 \cdot 0{,}5 + 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}15 + 0{,}49 = 0{,}64$$

Эта вероятность состоит из двух слагаемых: выбрали девочку, и она сдала экзамен, или выбрали мальчика, и он сдал экзамен. В этой задаче известно, что выбранный студент сдал экзамен. Вероятность того, что это был юноша равна доле слагаемого, соответствующего юношам, среди всей вероятности события А.

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1)}{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}5}{0{,}3 \cdot 0{,}5 + 0{,}7 \cdot 0{,}7} = \frac{0{,}15}{0{,}64} \approx 0{,}23$$

Вероятность, что выбранный студент – девушка, если этот студент сдал экзамен, равна

$$P(H_2 \mid A) = = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}7}{0{,}3 \cdot 0{,}5 + 0{,}7 \cdot 0{,}7} = \frac{0{,}49}{0{,}64} \approx 0{,}77$$

Итак, если известно, что случайный студент сдал экзамен, то вероятность, что это – мальчик равна не 30, а 23%. Вероятность, что это – девочка равна 77, а не 70%.

Ответ. $P(H_1 \mid A) = 0{,}23$, $P(H_2 \mid A) = 0{,}77$.

Решение задач

Пример 3. Партия деталей поставлена тремя заводами. Из них первый завод поставил 20%, второй – 50%, третий – 30%. Брак на первом заводе составил 4%, на втором – 3%, на третьем – 5%. Найти вероятность того, что случайно взятая деталь бракованная. Какова вероятность того, что она изготовлена вторым заводом?

Решение. Обозначим через А событие – «взятая деталь бракованная».

Можно сделать три предположения (гипотезы):

H_1 – деталь изготовлена первым заводом, причем $P(H_1) = 0,2$
H_2 – деталь изготовлена вторым заводом, причем $P(H_2) = 0,5$.
H_3 – деталь изготовлена третьим заводом, причем $P(H_3) = 0,3$.

Условная вероятность того, что деталь будет бракованной, если она изготовлена первым заводом, $\mathbf{P(A \mid H_1)} = 0,04$; условная вероятность того, что деталь будет бракованной, если она изготовлена вторым заводом, $\mathbf{P(A \mid H_2)} = 0,03$; условная вероятность того, что деталь будет бракованной, если она изготовлена третьим заводом, $\mathbf{P(A \mid H_3)} = 0,05$.

По формуле полной вероятности находим вероятность того, что случайно взятая деталь окажется бракованной

$$P(\mathbf{A}) = 0,2 \cdot 0,04 + 0,5 \cdot 0,03 + 0,3 \cdot 0,05 = 0,008 + 0,015 + 0,015 = 0,038$$

Искомая вероятность того, что взятая бракованная деталь изготовлена вторым заводом, по формуле Байеса равна

$$\mathbf{P(H_2 \mid A)} = \frac{0,5 \cdot 0,03}{0,038} = \frac{0,015}{0,038} \approx 0,39$$

Ответ. $\mathbf{P(A) = 0,038}$, $\mathbf{P(H_2 \mid A) = 0,39}$.

Пример 4. В группе учатся 20 студентов, из них 4 отличника, 7 хорошистов и 9 троечников. Для отличников вероятность сдать экзамен равна 90%, для хорошистов – 70%, и для троечников – 30%. Найти вероятность того, что наудачу выбранный студент сдаст экзамен.

Решение. Пусть событие А – «выбранный студент сдаст экзамен». Возможные гипотезы: H_1 – выбранный студент оказался отличником, H_2 – выбранный студент оказался хорошистом, H_3 – выбранный студент оказался троечником.

Вычислим вероятности гипотез: $\mathbf{P(H_1)} = \frac{4}{20} = \mathbf{0,2}$; $\mathbf{P(H_2)} = \frac{7}{20} = \mathbf{0,35}$;

$\mathbf{P(H_3)} = \frac{9}{20} = \mathbf{0,45}$.

Условные вероятности сдать экзамен по условию равны $\mathbf{P(A \mid H_1) = 0,9}$; $\mathbf{P(A \mid H_2) = 0,7}$; $\mathbf{P(A \mid H_3) = 0,3}$.

По формуле полной вероятности находим

$$P(\mathbf{A}) = 0,2 \cdot 0,9 + 0,35 \cdot 0,7 + 0,45 \cdot 0,3 = 0,18 + 0,245 + 0,135 = 0,56$$

Ответ. $\mathbf{P(A)} = 0,56$

Пример 5. Есть две урны с шарами. В первой урне 3 белых и 7 черных шаров, а во второй – 6 белых и 4 черных шаров. Из первой урны случайным образом вынимают 1 шар и опускают во вторую урну. После этого из второй урны также случайно вынимают 1 шар. Найти вероятность того, что шар, вынутый из второй урны, белый. Если вынутый шар оказался белым, то какая вероятность, что из первой урны во вторую переложили черный шар?

Решение. Событие А – «из второй урны вынули белый шар» Гипотезы можно выдвинуть о шаре, который переложили из 1-ой во 2-ую урну:

H_1 – из первой урны взяли белый шар;
H_2 – из первой урны взяли черный шар.

$\mathbf{P(H_1)} = \frac{3}{10} = \mathbf{0,3}$; $\mathbf{P(H_2)} = \frac{7}{10} = \mathbf{0,7}$.

Условные вероятности равны

$$\mathbf{P(A\,|\,H_1)} = \frac{7}{11};\ \mathbf{P(A\,|\,H_2)} = \frac{6}{11}.$$

Применяя формулу полной вероятности, получаем

$$\mathbf{P(A)} = 0{,}3\cdot\frac{7}{11} + 0{,}7\cdot\frac{6}{11} = \frac{6{,}3}{11} \approx 0{,}57$$

Если выбранный шар оказался белым, можно переоценить вероятности гипотез по формулам Байеса

$$\mathbf{P(H_2\,|\,A)} == \frac{0{,}7\cdot\frac{6}{11}}{0{,}57} = \frac{4{,}2}{6{,}3} = \frac{2}{3}$$

Ответ. $\mathbf{P(A)} = 0{,}57$; $\mathbf{P(H_2\,|\,A)} = \frac{2}{3}$

Пример 6. В пирамиде 10 винтовок. Из них 7 – с оптическим прицелом. Вероятность попасть в цель из обычной винтовки равна 0,4, а из винтовки с оптическим прицелом - 0,9. *Найти а) вероятность попадания, если винтовка выбирается случайно,* б) вероятность, что стреляли из винтовки с оптическим прицелом, если из винтовки попали.

Решение. Существуют две гипотезы: случайно выбранная винтовка оказалась с оптическим прицелом (событие H_1); или случайно выбранная винтовка - обычная, без прицела (событие H_2). Событие, которое может произойти при выполнении одной из этих гипотез: «точный выстрел в цель» - событие **A**.

При взятии винтовке есть 10 возможных элементарных исходов, из них 7 соответствуют выбору винтовки с оптическим прицелом, и 3 - без прицела. Значит,

$$P(H_1) = \frac{7}{10} = 0{,}7;\ P(H_2) = \frac{3}{10} = 0{,}3.$$

Из условия $\mathbf{P(A\,|\,H_1) = 0{,}9;\ P(A\,|\,H_2) = 0{,}4.}$ По формуле полной вероятности находим искомую вероятность точного попадания из случайно выбранной винтовки:

$$\mathbf{P(A)} = 0{,}7\cdot 0{,}9 + 0{,}3\cdot 0{,}4 = 0{,}63 + 0{,}12 + 0{,}135 = 0{,}75$$

Если из выбранной винтовки попали в цель, то можем найти вероятность, что *стреляли из винтовки с оптическим прицелом. Для этого воспользуемся формулой* Байеса.

$$\mathbf{P(H_1\,|\,A)} == \frac{0{,}7\cdot 0{,}9}{0{,}75} = \frac{0{,}63}{0{,}75} = 0{,}84$$

Ответ. $\mathbf{P(A)} = 0{,}75$; $\mathbf{P(H_1\,|\,A)} = 0{,}84$

Пример 7. Катя готовится сдавать экзамен. Вероятность, что она успешно сдаст экзамен равна 60%. У Кати есть две подруги: Лена и Настя. Если Катя перед экзаменом встречается с Леной, то они начинают вместе заниматься, и вероятность сдать экзамен поднимается до 90%. Если Катя перед экзаменом встречается с Настей, то вероятность сдать экзамен, наоборот, снижается до 30%. Шансы, что Катя встретится перед экзаменом с Леной равны 40%, шансы встретиться с Настей равны 20%. Встретиться с обеими подругами сразу Катя не может. Найти вероятность, что Катя сдаст экзамен.

Решение. В данном случае есть три гипотезы:
H_1 – Катя встретится перед экзаменом с Леной, $P(H_1) = 0{,}4$.
H_2 – Катя встретится с Настей, $P(H_2) = 0{,}2$.
H_3 – Катя ни с кем встретится, $P(H_3) = 1 - 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}4$.

Событие **A** - «Катя сдаст экзамен». С помощью формулы полной вероятности *определяем шансы, что Катя сдаст экзамен.*

$P(A) = 0,4 \cdot 0,9 + 0,2 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,6 = 0,66$

Ответ. $P(A) = 0,66$

Упражнения для самостоятельного решения.

1. В сеть магазинов продукция поставляется тремя фирмами в соотношении 5:1:4. Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют 70%, второй — 50%, третьей — 95%. Найти вероятность того, что: а) приобретенное изделие окажется стандартным; б) приобретенное изделие оказалось нестандартным в) приобретенное изделие изготовлено третьей фирмой, если оно оказалось стандартным.

2. В 2 ящиках хранятся детали. В первом ящике содержится 40 деталей, из них 24 стандартных; во втором - 50 деталей, из них 30 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящика - стандартная.

3. Известно, что 85% изделий, выпускаемых данным предприятием, отвечает стандарту. Существующая схема проверки качества продукции признает пригодной стандартную деталь с вероятностью 0,94 и нестандартную с вероятностью 0,05. Найти вероятность того, что: а) взятое наудачу изделие пройдет контроль; б) изделие, прошедшее контроль качества, будет отвечать стандарту.

4. В группе учатся 15 юношей и 12 девушек. Для юношей вероятность сдать экзамен равна 30%, а для девушек – 90%. Случайным образом выбрали одного студента. Определить вероятность того, что а) случайно выбранный студент сдаст экзамен, б) если выбранный студент сдал экзамен, то это - девушка.

5. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 1 подготовлен отлично, 5 — хорошо, 2 — посредственно и 2 — плохо. В экзаменационных билетах имеется 30 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 30 вопросов, хорошо подготовленный — на 24, посредственно — на 15, плохо — на 10. Вызванный наугад студент ответил на четыре произвольно выбранных вопроса. Найти вероятность того, что студент подготовлен: а) отлично; б) хорошо в) плохо.

6. В пирамиде 10 винтовок. Из них 4 –с оптическим прицелом. Вероятность попасть из обычной винтовки равна 0,3, из винтовки с оптическим прицелом - 0,9. Найти вероятность попадания, если винтовка выбирается случайно.

7. В группе учатся 15 студентов, из них 6 юношей и 9 девушек. Вероятность сдать экзамен равна 80% для мальчиков и 30% для девочек. Найти вероятность того, что наудачу выбранный студент сдаст экзамен. Если случайно выбранный студент сдал экзамен, то какова вероятность, что это - мальчик, девочка?

8. В группе учатся 30 студентов, из них 10 юношей и 20 девушек. Вероятность сдать экзамен равна 40% для мальчиков и 75% для девочек. Найти вероятность того, что наудачу выбранный студент сдаст экзамен. Если случайно выбранный студент сдал экзамен, то какова вероятность, что это - мальчик, девочка?

9. В группе учатся 40 студентов, из них 6 отличников, 12 хорошистов и 22 троечников. Для отличников вероятность сдать экзамен равна 85%, для хорошистов – 70%, и для троечников – 40%. Найти вероятность того, что наудачу выбранный студент сдаст экзамен.

Найти вероятность того, что если случайно выбранный студент сдал экзамен, то он - отличник, хорошист, троечник.

10. В группе учатся 30 студентов, из них 3 отличников, 12 хорошистов, 6 троечников и 9 двоечников. Для отличников вероятность сдать экзамен равна 90%, для хорошистов – 80%, для троечников - 50% и для двоечников – 15%. Найти вероятность того, что наудачу выбранный студент сдаст экзамен. Найти вероятность того, что если случайно выбранный студент сдал экзамен, то он - отличник, хорошист, троечник, двоечник.

11. Имеется 3 коробки одного состава, в которых лежат 5 белых и 6 красных шаров и 2 коробки другого состава, в которых 10 белых и 4 красных шара. Из каждой коробки вынимают по одному шару. Затем из них выбирают один шар. Найти вероятность, что этот шар будет белого цвета.

12. В одном ящике лежит 3 черных и 7 белых шаров. В другом - 5 черных и 1 белый. Из обоих ящиков вытащили по одному шару. Затем из них выбрали один шар. Найти вероятность, что этот шар - белый.

13. Вероятность того, что во время работы ЭВМ произойдет сбой в процессоре, в памяти, в остальных устройствах, относятся как 3:2:5. Вероятности обнаружения сбоя в процессоре, в памяти и в остальных устройствах соответственно равны 0,8; 0,9; 0,6. Найти вероятность того, что возникший в ЭВМ сбой будет обнаружен.

14. Из 50 деталей 15 изготовлены в первом цехе, 12 – во втором, остальные – в третьем. Первый и третий цеха дают продукцию высокого качества с вероятностью 0,7, второй – с вероятностью 0,6. Взятая деталь оказалась высокого качества. Какова вероятность того, что деталь изготовлена во втором цехе?

15. Из 100 деталей 50 изготовлены в первом цехе, 20 – во втором, остальные – в третьем. Первый цех дает продукцию высокого качества с вероятностью 0,8, второй – с вероятностью 0,9, третий – с вероятностью 0,7. Найти вероятность, что случайно взятая деталь оказалась высокого качества. Какова вероятность того, что, если деталь оказалась высокого качества, то она была изготовлена в первом, втором, третьем цехе?

16. У рыбака имеется три излюбленных места для ловли рыбы, которые он посещает с равной вероятностью каждое. Если он закидывает удочку в первом месте, рыба клюет с вероятностью 0,8; во втором месте – с вероятностью 0,9; в третьем – с вероятностью 0,5. Рыбак, выйдя на ловлю рыбы, закинул удочку, и рыба клюнула Найдите вероятность того, что он удил рыбу в первом месте.

17. Имеются три партии деталей по 10 деталей в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственно равно 10, 5, 1. Из нау-дачу выбранной партии наудачу извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. Найдите вероятность того, что деталь была извлечена из третьей партии.

18. Студент сдает 2 зачета и экзамен. Вероятность сдать каждый из зачетов равна 0,6. Если студент не сдал ни одного зачета, он не допускается к экзамену. Если студент сдал один из зачетов, то вероятность сдать экзамен составляет 0,4. Если студент сдал оба экзамена – 0,8. Найти вероятность, что студент сдаст экзамен.

19. Студент сдаст 2 зачета и экзамен. Вероятность сдать каждый из зачетов равна 0,6. Если студент не сдал ни одного зачета, он не допускается к экзамену. Если студент сдал один из зачетов, то вероятность сдать экзамен составляет 0,4. Если студент сдал оба экзамена – 0,8. Найти вероятность, что студент сдаст экзамен.

Глава 8

Формула Бернулли

В этой главе речь пойдет о повторных независимых испытаниях. Эта ситуация, когда несколько раз повторяется определенное испытание, при этом вероятность наступления некоторого события, каждый раз, одна и та же.

Например, 7 раз бросают монету. Всего – 7 испытаний. В каждом из них вероятность, что выпадет «герб» равна ½ или 50%. Вероятность выпадения «решки» также остается постоянной и равна 50%. Какая вероятность, что «решка» выпадет ровно 5 раз при 7 бросаниях монеты? Это можно узнать с помощью формулы Бернулли.

Такая же ситуация может быть, например, если стрелок делает несколько выстрелов из одного ружья по одинаковым мишеням. Вероятность при этом не меняется. Далее мы рассмотрим и другие примеры.

Определение. *Последовательность из **n** независимых испытаний, в каждом из которых некоторое событие A может произойти с вероятностью P(A) = p или не произойти с вероятностью 1-P(A) =1-p=q, называется **схемой Бернулли**.*

Определение. *Испытания (опыты) называются независимыми, если вероятность исхода каждого опыта не зависит от исходов других испытаний.*

Подчеркнем, что в схеме Бернулли рассматриваются только независимые испытания, в каждом из которых вероятность наступления события A – одинаковая.

Теорема (формула Бернулли). *Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p, а вероятность его непоявления равна $q=1-p$, то вероятность того, что событие A наступит ровно k раз (безразлично в какой последовательности) вычисляется по формуле Бернулли*

$$\mathbf{P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}}$$

Решение задач

Пример 1. Монету подбросили 6 раз. Найти вероятность, что 4 раза выпал «герб».

Решение. Повторные независимые испытания – это бросания монеты. Количество испытаний равно 6, **n=6**. Событие А – появление «герба», противоположное событие $\overline{A}$ – появление «решки». Вероятность появления «герба» (также как и «решки») в одном испытании равны, очевидно, 1/2, **p=q=1/2**. Нам нужно найти вероятность, что при 6 бросаниях ровно 4 раза выпадет «герб», и значит 2 раза выпадет «решка». Таким образом $n = 6, k = 4, p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$

Применяем формулу Бернулли

$$P_6(4) = C_6^4 \cdot 0{,}5^4 \cdot 0{,}5^2 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \frac{1}{64} = \frac{15}{64} \approx 0{,}23$$

Ответ. $\mathbf{P} = \mathbf{P}_6(3) \approx 0{,}23$

Пример 2. Кубик бросили 5 раз. Найти вероятность, что четверка выпала ровно 3 раза.

Решение. При бросании кубика возможно 6 равновероятных результатов: «выпало 1», «выпала 2», «3», «4». «5». «6». Вероятность каждого из этих результатов равна 1/6. При каждом бросании она остается постоянной.

В данном случае событие А – выпадение четырех очков. Противоположное событие – выпадение любого числа очков, кроме четверки. Вероятность выпадения четверки p=1/6. Вероятность невыпадения четверки – выпадения любого другого числа равна q=5/6. n = 5, k = 3

$$\mathbf{P_5(3) = C_5^3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5!}{2!\cdot 3!} \cdot \frac{25}{7776} = 10 \cdot \frac{25}{7776} \approx 0{,}03$$

Значит, вероятность того, что «четверка» выпадет три раза, равна примерно 3 процентам.

Ответ. $\mathbf{P} \approx 0{,}03$

Пример 3. Студент сдает пять экзаменов. Вероятность успешной сдачи для каждого экзамена равна 70%. Найти вероятность, что студент сдаст не менее трех экзаменов.

Решение. Событие А – сдача экзаменов. Количество испытаний, n=5; p=0,7; q=1-p=0,3. Событие «студент сдаст не менее трех экзаменов» означает, что студент сдаст или 3, или 4, или 5 экзаменов.

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot 0{,}7^3 \cdot 0{,}3^2 = \frac{5!}{2!\cdot 3!} \cdot 0{,}03087 = 10 \cdot 0{,}03087 \approx 0{,}3087$$

$$P_5(3) = C_5^4 \cdot 0{,}7^4 \cdot 0{,}3 = 5 \cdot 0{,}07203 = 10 \cdot 0{,}03087 \approx 0{,}36015$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot 0{,}7^5 \cdot 0{,}3^0 = 0{,}16807$$

Теперь находим искомую вероятность, как сумму 3 найденных.

$P = 0{,}3097 + 0{,}36015 + 0{,}16807 = 0{,}83792$

Ответ. $P = 0{,}83792$

Упражнения для самостоятельного решения.

1. Кубик бросили 8 раз. Найти вероятность того, что выпадет а) ровно 5 троек; б) ровно одна пятерка; в) три единицы и одна четверка.

2. Для малого предприятия вероятность обанкротиться за некоторый период времени равна 0,15. Найти вероятность того, что из семи малых предприятий за этот период времени сохранятся: а) ровно 3; б) более четырех.

3. В цехе 6 станков. Для каждого станка вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент: а) включено 3 станка; б) включены все 6 станков; в) включен ровно 1 станок.

4. Найти вероятность того, что событие А появится в четырех независимых испытаниях ровно два раза, если в каждом испытании вероятность появления события А равна 0,3

5. Событие В появится в случае, если событие А появится не менее двух раз. Найти вероятность того, что наступит событие В, если будет произведено 5 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А равна 0,7.

6. Кубик бросили 5 раз. Найти вероятность, что тройка выпала ровно 1 раз.

7. Кубик бросили 4 раза. Найти вероятность, что пятерка выпала ровно 3 раза.

8. Витя три раза подбрасывает по две игральные кости. Событие А - на двух кубиках в сумме выпало 6 очков. Найти вероятность, что событие А в трех испытаниях произошло ровно один раз.

9. Студент сдает три экзамена. Вероятность успешной сдачи для каждого экзамена равна 60%. Найти вероятность, что студент сдаст ровно один экзамен.

10. Студент сдает четыре экзамена. Вероятность успешной сдачи для каждого экзамена равна 70%. Найти вероятность, что студент сдаст ровно три экзамена.

11. Студент сдает три экзамена. Вероятность успешной сдачи для каждого экзамена равна 60%. Найти вероятность, что студент сдаст не менее двух экзаменов.

12. Студент сдает четыре экзамена. Вероятность успешной сдачи для каждого экзамена равна 70%. Найти вероятность, что студент сдаст не менее двух экзаменов.

13. На экзамене студент получает билет из 4 вопросов. Вероятность правильно ответить на вопрос равна 70% для любого вопроса. Если студент отвечает на 4 вопроса, то он получает 5; на 3 вопроса - 4; на 2 вопроса - 3; меньше, чем на 2 - 2. Найти вероятность, что студент получит хотя бы тройку.

14. Пять студентов сдают экзамен. На экзамене студент получает билет из 4 вопросов. Вероятность правильно ответить на вопрос равна 70% для любого вопроса. Если студент отвечает на 4 вопроса, то он получает 5; на 3 вопроса - 4; на 2 вопроса - 3, меньше, чем на 2 - 2. Найти вероятность, что ровно 3 студента из 5 получат четверку.

15. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть две партии из четырех или три партии из шести (ничьи во внимание не принимаются)?

16. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле 0,7. Найти вероятность того, что при 10 выстрелах стрелок поразит мишень ровно 5 раз.

17. Монету подбросили 4 раз. Найти вероятность, что «герб» выпал не менее 3 раз.

18. Кубик бросили 5 раз. Найти вероятность, что четверка выпала ровно не менее 3 раз.

19. Монету подбросили 7 раз. Найти вероятность, что «герб» выпал не менее 4 раз.

ВАРИАНТЫ

САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ

ВАРИАНТ 1

1) Пусть в ящике лежит 14 шаров: 5 белых, 1 красный и 8 зеленых. Вынимают 3 шара. Найти вероятность, что все они будут разных цветов.

2) Из колоды в 36 карт вынимают 2. Найти вероятность, что карты будут одной масти, если известно, что там нет тузов.

3) Студент сдает три экзамена. Вероятность сдать первый – 0,3; второй - 0,5; третий – 0,9. Найти вероятность, что студент сдаст а) ровно один экзамен б) хотя бы один экзамен.

4) Имеется 3 коробки одного состава, в которых лежат 4 белых и 7 красных шаров и 2 коробки другого состава, в которых 6 белых и 9 черных шаров. Из каждой коробки вынимают по одному шару. Затем из них выбирают один шар. Найти вероятность, что этот шар будет белого цвета.

5) Вероятность, что студент станет умнее за год учебы равна 0,4. Вероятность, что студент станет глупее равна 0,2. Найти вероятность, что студент станет умнее за 3 года учебы.

ВАРИАНТ 2

1) Зенит играет со Спартаком. Вероятность, что Зенит забьет первым, равна 0,5. Вероятность, что первым забьет Спартак - 0,3. Если Зенит первым забьет, то вероятность его выигрыша – 0,9; если первым пропустит – 0,5. С вероятностью 0,2 матч закончится вничью 0:0. Найти вероятность победы Зенита.

2) В одном ящике 3 белых и 2 красных шара. В другом – 5 красных и 1 белый. Из каждого ящика достают по одному шару. Найти вероятность, что шары будут одного цвета.

3) В группе 17 студентов. Сколько вариантов для выбора старосты, профорга и двух заместителей старосты.

4) $P(A)=0,4$; $P(B)=0,7$; $P(A+B)=0,8$. Найти $P(A|B)$.

5) В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 5 отличников.

ВАРИАНТ 3

1) В ящике лежит 8 шаров: 3 белых и 5 красных. Достают 3 шара. Найти вероятность, что достанут 1 белый шар и 2 красных.

2) Кубик бросили три раза. Найти вероятность того, что выпадет неубывающая последовательность, если известно, что, по крайней мере, один раз выпала пятерка.

3) Три стрелка стреляют в цель по одному разу. Вероятности попадания для каждого из стрелков: $p1=0,4$; $p2=0,5$; $p3=0,8$. Найти вероятность, что а) хотя бы один из стрелков попал в цель б) ровно один попал в цель.

4) В группе 15% отличников и 30% хорошистов. Вероятность сдать экзамен для отличников составляет 0,8; для хорошистов – 0,6; для всех остальных студентов – 0,3.

Случайным образом из группы выбирается один студент. Он сдал экзамен. Найти вероятность, что он – хорошист.

5) Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы в слове «телевидение».

ВАРИАНТ 4

1) Сколько способов распределить 6 двоек между 5 студентами. При этом считается, что студенты различаются, а двойки – нет.

2) В группе 7 мальчиков и 8 девочек. Отбирают 3 человек для одной поездки и еще 3 человек для другой поездки. Один студент может поехать только в одну из поездок. Найти вероятность, что во второй группе будет, по крайней мере, 2 девочки, если известно, что в первой группе был 1 мальчик.

3) Студент сдает три экзамена. Вероятность сдать экзамены составляет: $p1=0{,}6$; $p2=0{,}4$; $p3=0{,}7$. Найти вероятность, а) что он сдаст все экзамены, б) что он сдаст только один экзамен.

4) Есть 5 ружей, из них 3 с оптическим прицелом. Вероятность точного попадания из обычного ружья – 0,4; из ружья с оптическим прицелом -0,7. Из наугад выбранного ружья дважды подряд попали в цель. Найти вероятность, что выбрали ружье с оптическим прицелом.

5) Спартак играет с ЦСКА, Зенитом и Рубином. Вероятность победы, ничьи и поражения в матче с ЦСКА составляет, соответственно, 0,4-0,3-0,3. Для Зенита: 0,2-0,3-0,5, для Рубина: 0,5-0,2-0,3. Найти вероятность, что у Спартака будет больше побед, чем поражений.

ВАРИАНТ 5

1) В первой коробке лежит 3 белых и 4 красных шара. Во второй коробке лежит 6 белых и 2 красных. Из каждой коробки наугад вытащено по одному шару. Найти вероятность, что эти шары разных цветов.

2) Студент знает 45 вопросов из 60, входящих в программу экзамена. Каждый билет содержит произвольно отобранные 3 вопроса. Найти вероятность, что студенту попадется билет, в котором все вопросы он знает.

3) Устройство состоит из 3 элементов и работает при условии, что хотя бы два элемента работают. Вероятность безотказной работы первых 2 элементов равна 0,6 и 0,8. Работа третьего элемента зависит от первого. Если первый работает, то вероятность работы третьего составляет 0,8; в ином случае 0,5. Найти вероятность, что устройство будет работать.

4) Завод производит 100 деталей. 40 из них производятся на первом станке, 15 – на втором, 45 – на третьем. Вероятность брака составляет 3% для первого станка, 5% и 12% - для второго и третьего, соответственно. Случайным образом выбирается одна из деталей. Найти вероятность, что она будет бракованной.

5) Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы в слове «исчисление».

ВАРИАНТ 6

1) Витя вытащил из колоды в 36 карт 3 карты. Найти вероятность, что все карты будут разных мастей.

2) Кубик бросили 3 раза. Найти вероятность, что произведение выпавших очков будет делиться на 2.

3) Студент сдает 2 зачета и экзамен. Вероятность сдать каждый из зачетов равна 0,6. Если студент не сдал ни одного зачета, он не допускается к экзамену. Если студент сдал один из

зачетов, то вероятность сдать экзамен составляет 0,4. Если студент сдал оба экзамена – 0,8. Найти вероятность, что студент сдаст экзамен.

4) Стрелок трижды стреляет в цель. Вероятность попадания с первого раза равна 0,7. С каждым следующим разом вероятность попадания уменьшается на 0,15. Найти вероятность, что стрелок попадет хотя бы один раз.

5) В группе 30 студентов. Среди них 6 отличников и 15 хорошистов. Вероятность сдать экзамен для отличника равна *0,85*, для хорошиста – *0,55*, для остальных студентов – *0,15*. Найти вероятность, что произвольно выбранный студент сдаст экзамен.

ВАРИАНТ 7

1) В группе 6 девочек и 5 мальчиков. Для участия в олимпиаде отбирают трех человек. Найти вероятность, что выберут 2 девочек и 1 мальчика.

2) Три стрелка стреляют по одному разу. Вероятности попадания $p_1=0,3$; $p_2=0,5$; $p_3=0,6$. Известно, что попал в цель только один из них. Найти вероятность, что попал третий стрелок.

3) В двух партиях 70% и 40% доброкачественных изделий соответственно. Наудачу выбирают по одному изделию из каждой партии. Какова вероятность того, что среди выбранных деталей:

а) хотя бы одно бракованное изделие:

б) ровно 1 бракованное изделие.

4) 70% продукции производятся на станках первого типа. 30% продукции производится на других станках. Вероятность того, что изделие хорошего качества составляет 0,7 для станков первого типа и 0,5 для остальных. Случайным образом выбирается одна деталь. Она оказывается хорошего качества. Найти вероятность, что она со станков первого типа.

5) Спартак играет с ЦСКА, Зенитом и Динамо. Вероятность победы в каждом матче равна 0,5; вероятность ничьи – 0,2. Найти вероятность, что Спартак наберет хотя бы 3 очка.

ВАРИАНТ 8

1) Сколько способов распределить 5 двоек между 3 студентами. При этом двойки считаются одинаковыми, а студенты - разными.

2) В группе 5 мальчиков и 9 девочек. Отбирают 3 человек для одной поездки и еще 3 человек для другой поездки. Один студент может поехать только в одну из поездок. Найти вероятность, что во второй группе будет, по крайней мере, 2 девочки, если известно, что в первой группе был ровно 1 мальчик.

3) Студент сдает три экзамена. Вероятность сдать экзамены составляет: $p1=0,8$; $p2=0,6$; $p3=0,4$. Найти вероятность, а) что он сдаст все экзамены, б) что он сдаст только один экзамен.

4) Зенит играет со Спартаком. Вероятность, что Зенит забьет первым, равна 0,3. Вероятность, что первым забьет Спартак - 0,5. Если Зенит первым забьет, то вероятность его выигрыша – 0,9; если первым пропустит – 0,3. Найти вероятность победы Зенита.

5) Вероятность, что студент станет умнее за год учебы равна 0,35. Вероятность, что студент станет глупее равна 0,2. Найти вероятность, что студент станет умнее за 3 года учебы.

ВАРИАНТ 9

1) Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0,1,2,3,4,5, если:

а) все цифры различны;

б) цифры могут повторяться.

2) В ящике 5 белых и 9 красных шаров. По очереди вытаскивают 3 шара. Найти вероятность, что а) сначала вытащат белый, а потом два красных шара, б) Вытащат 1 белый и 2 красных.

3) Три стрелка стреляют в цель по одному разу. Вероятности попадания для каждого из стрелков: p1=0,6; p2=0,3; p3=0,8. Найти вероятность, что а)хотя бы один из стрелков попал в цель б) ровно один попал в цель.

4) В группе 15% отличников и 35% хорошистов. Вероятность сдать экзамен для отличников составляет 0,8; для хорошистов – 0,65; для всех остальных студентов – 0,35. Случайным образом из группы выбирается один студент. Он сдал экзамен. Найти вероятность, что он – хорошист.

5) Из колоды в 36 карт достали 3 карты. Найти вероятность, что среди них ровно два туза, если известно, что все карты – красные.

ВАРИАНТ 10

1) В коробке лежит 7 белых и 4 красных шара. Вынимают 3. Найти вероятность, что среди вытащенных шаров 2 белых и 1 красный.

2) Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы слова «электричество».

3) Пусть студент сдает 3 экзамена по математике, физике и экономической теории. Вероятности сдать эти экзамены составляет, соответственно, $p_1 = 0,7; p_2 = 0,4; p_3 = 0,8$.

Найти вероятность а) сдать хотя бы один экзамен б) сдать ровно один экзамен.

4) Из колоды в 36 карт достали 3 карты. Найти вероятность, что среди них ровно два туза, если известно, что все карты – красные.

5) В ящике лежит 100 деталей с 1-го станка, 50 со 2-го и 150 с 3-го. Вероятность брака составляет 7% для первого, 4% для второго и 3% для третьего станков. Случайным образом вытащили одну деталь, которая оказалась бракованной. Найти вероятность того, что эта деталь с 3-го станка.

ВАРИАНТ 11

1) Сколько способов распределить 5 двоек между 4 студентами. При этом считается, что студенты различаются, а двойки – нет.

2) В группе 9 мальчиков и 12 девочек. Отбирают 3 человек для одной поездки и еще 3 человек для другой поездки. Один студент может поехать только в одну из поездок. Найти вероятность, что во второй группе будет, по крайней мере, 2 девочки, если известно, что в первой группе был 1 мальчик.

3) Студент сдает три экзамена. Вероятность сдать экзамены составляет: p1=0,3; p2=0,4; p3=0,7. Найти вероятность, а) что он сдаст все экзамены, б) что он сдаст только один экзамен.

4) Есть 5 ружей, из них 3 с оптическим прицелом. Вероятность точного попадания из обычного ружья – 0,6, из ружья с оптическим прицелом -0,9. Из наугад выбранного ружья дважды подряд попали в цель. Найти вероятность, что выбрали ружье с оптическим прицелом.

5) Спартак играет с ЦСКА, Зенитом и Рубином. Вероятность победы, ничьи и поражения в матче с ЦСКА составляет, соответственно, 0,3-0,5-0,2. Для Зенита: 0,4-0,3-0,3, для Рубина: 0,6-0,3-0,1. Найти вероятность, что у Спартака будет больше побед, чем поражений.

ВАРИАНТ 12

1) В первой коробке лежит 4 белых и 3 красных шара. Во второй коробке лежит 7 белых и 1 красных. Из каждой коробки наугад вытащено по одному шару. Найти вероятность, что эти шары разных цветов.

2) Студент знает 40 вопросов из 60, входящих в программу экзамена. Каждый билет содержит произвольно отобранные 3 вопроса. Найти вероятность, что студенту попадется билет, в котором все вопросы он знает.

3) Устройство состоит из 3 элементов и работает при условии, что хотя бы два элемента работают. Вероятность безотказной работы первых 2 элементов равна 0,3 и 0,8. Работа третьего элемента зависит от первого. Если первый работает, то вероятность работы третьего составляет 0,8; в ином случае 0,5. Найти вероятность, что устройство будет работать.

4) Завод производит 100 деталей. 40 из них производятся на первом станке, 15 – на втором, 45 – на третьем. Вероятность брака составляет 5% для первого станка, 6% и 15% - для второго и третьего, соответственно. Случайным образом выбирается одна из деталей. Найти вероятность, что она будет бракованной.

5) Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы в слове «дифференциал».

ВАРИАНТ 13

1) Витя вытащил из колоды в 36 карт 3 карты. Найти вероятность, что все карты будут разного достоинства.

2) Кубик бросили 3 раза. Найти вероятность, что произведение выпавших очков будет делиться на 3.

3) Студент сдает 2 зачета и экзамен. Вероятность сдать каждый из зачетов равна 0,6. Если студент не сдал ни одного зачета, он не допускается к экзамену. Если студент сдал один из зачетов, то вероятность сдать экзамен составляет 0,5. Если студент сдал оба зачета – 0,7. Найти вероятность, что студент сдаст экзамен.

4) Стрелок трижды стреляет в цель. Вероятность попадания с первого раза равна 0,9. С каждым следующим разом вероятность попадания уменьшается на 0,15. Найти вероятность, что стрелок попадет хотя бы один раз.

5) В группе 30 студентов. Среди них 3 отличника и 12 хорошистов. Вероятность сдать экзамен для отличника равна 0,85, для хорошиста – 0,55, для остальных студентов – 0,15. Найти вероятность, что произвольно выбранный студент сдаст экзамен.

ВАРИАНТ 14

1) В группе 7 девочек и 8 мальчиков. Для участия в олимпиаде отбирают трех человек. Найти вероятность, что выберут 2 девочек и 1 мальчика.

2) Три стрелка стреляют по одному разу. Вероятности попадания $p_1=0,6$; $p_2=0,7$; $p_3=0,3$ Известно, что попал в цель только один из них. Найти вероятность, что попал третий стрелок.

3) В двух партиях 50% и 95% доброкачественных изделий соответственно. Наудачу выбирают по одному изделию из каждой партии. Какова вероятность того, что среди выбранных деталей:

а) хотя бы одно бракованное изделие:

б) ровно 1 бракованное изделие.

4) 80% продукции производятся на станках первого типа. 20% продукции производится на других станках. Вероятность того, что изделие хорошего качества составляет 0,7 для станков первого типа и 0,5 для остальных. Случайным образом выбирается одна деталь. Она оказывается хорошего качества. Найти вероятность, что она со станков первого типа.

5) Спартак играет с ЦСКА, Зенитом и Динамо. Вероятность победы в каждом матче равна 0,4; вероятность ничьи – 0,3. Найти вероятность, что Спартак наберет хотя бы 3 очка.

Литература.

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие. – М.: Высшее образование, 2009. – 478 с.

2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учебное пособие – М.: Высшее образование, 2006. – 404 с.

3. Общий курс высшей математики для экономистов: Учебник под ред. В. И. Ермакова, - М.:ИНФРА-М, 2003.-656с.

4. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. — 2-е изд., перераб. и доп .— М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. — 573 с.

5. Л.А. Апайчева, А.Г. Багоутдинова, Л.Е. Шувалова. Теория вероятностей. Учебное пособие. Нижнекамск: Нижнекамский химико-технологический институт, 2011 — 301 с.

6. Милевский А.С. Теория вероятностей. Конспект лекций. М.: МИИТ, 2008. — 104 с.

7. М.Е. Коржова, С.А. Шунайлова. Элементы теории вероятностей. Учебное пособие. Челябинск Издательство ЮУрГУ, 2008. — 58 с.

8. Вербицкий Б.В., Милевский А.С. Решение задач по теории вероятностей. М.: МИИТ, 2009, — 160 с.

Св. план 2012 г., поз.160

Каган Дмитрий Зиновьевич

Теория вероятностей

Часть 1

Случайные события

Учебное пособие

Подписано в печать Формат 60*84 / 16

Заказ № 68/14 Усл. печ. л. – 4,5

Тираж - 100 экз.

150048, г. Ярославль, Московский пр-т, д. 151.
Типография Ярославского филиала МИИТ.