МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра «Прикладная математика - 2»

Л.Ф. Кочнева, Н.В. Карпенко

ЭКОНОМЕТРИКА

ЧАСТЬ 3

ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

Учебное пособие

Рекомендовано редакционно-издательским советом
университета в качестве учебного пособия
для студентов экономических специальностей

Москва - 2009

УДК-51
К59

Кочнева Л.Ф., Карпенко Н.В. Эконометрика. Часть 3. Временные ряды. Учебное пособие. - М.: МИИТ, 2009. - 51 с.
Предназначено для студентов специальностей, в учебных планах которых предусмотрена дисциплина «Эконометрика». Содержит вопросы моделирования одномерных временных рядов: численное сглаживание, построение уравнения тренда, исследование структуры ряда, анализ структурных изменений, расчет циклических колебаний, прогнозирование.

Рецензенты:
1) Михайлов А.П., д.ф-м..н., профессор, заведующий кафедрой «Информатика социальных процессов» Социологического факультета МГУ
2) Платонова О.А., к.ф-м..н., доцент, заведующая кафедрой «Высшая математика» МИИТ

Введение

Важную роль в эконометрике играет анализ, моделирование и прогнозирование на базе данных по одному объекту, собранных в последовательные моменты или периоды времени, т.е. на основе временных рядов.

Первым этапом такого исследования является построение ряда, отвечающего требованиям статистической науки: уровни ряда должны быть получены из надежных источников информации и сопоставимы друг с другом по качественному содержанию.

Второй этап - определение типа основной тенденции динамики (либо констатация отсутствия надежной тенденции). Методика этого этапа излагается в курсах общей теории статистики и обычно включает:

- содержательный подход - на основе закономерностей экономики, технологии, общего состояния изучаемого объекта;
- графическое изображение временного ряда и подбор подходящей линии тренда;
- математико-статистическую оценку наличия достаточно надежного абсолютного прироста

уровней, ускорения этого прироста, темпов роста, наличия автокорреляции уровней.

Третий этап - вычисление уравнения тренда, т.е. уравнения такой линии, которая оптимально выражает фактическую тенденцию изменения уровней ряда. На этом этапе применяются методы математической статистики: метод наименьших квадратов (МНК), критерии оценки надежности - Фишера, Стьюдента, Дарбина-Уотсона и др. Используются программы STATISTICA, Statgraphics, Excel и др.

Четвертый этап заключается в исследовании отклонений фактических значений уровней ряда от расчетных уровней тренда, т.е. изучении колеблемости, а также в измерении и моделировании сезонных (циклических) колебаний.

Пятым этапом является расчет прогнозируемых значений временного ряда для будущих периодов, вероятных интервалов этих прогнозов, а иногда и страхового запаса.

В учебном пособии более подробно рассмотрены только те вопросы моделирования временных рядов, которые не были изложены в рамках регрессионного анализа [2, 4, 5, 6, 14].

Эффективная работа с данным пособием возможна лишь при наличии прочных знаний в объеме программы вуза по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике и экономической теории.

1. Понятие и классификация временных рядов

Развитие экономического явления или процесса во времени в статистике называется динамикой. Для отображения динамики строятся временные ряды (ряды динамики), которые представляют собой ряды изменяющихся во времени значений статистического показателя, расположенных в хронологическом порядке.

Элементами временного ряда являются показатели уровней ряда и периоды (годы, кварталы, месяцы, сутки) или моменты (даты) времени. Уровни (члены) ряда обычно обозначаются y_t, а соответствующие им моменты (периоды) времени - t.

Классифицировать различные виды временных рядов можно по следующим признакам.

1. В зависимости от способа выражения уровней временные ряды подразделяются на ***ряды абсолютных, относительных и средних величин***.

2. В зависимости от того, как выражают уровни ряда состояние экономического явления на определенные моменты времени (начало месяца, квартала, года и т.п.) или его величину за определенные интервалы времени (например, за месяц, квартал, год и т.п.) различают соответственно ***моментные и интервальные временные ряды***.

3. В зависимости от расстояния между уровнями временные ряды разделяются на ***ряды с равноотстоящими уровнями и неравноотстоящими уровнями*** во времени.

4. В зависимости от наличия основной тенденции изучаемого процесса временные ряды разделяются на ***стационарные и нестационарные (динамические)***.

Если основные характеристики случайного процесса (математическое ожидание и дисперсия) постоянны и не зависят от времени, то процесс считается стационарным и временной ряд также считается стационарным. График стационарного ряда располагается относительно прямой $y = y_{ср}$, параллельной горизонтальной оси. На рис. 1 среднее значение ряда $\overline{y}_t = 4$.

Экономические процессы во времени обычно не являются стационарными, так как содержат основную тенденцию развития, и описываются динамическими временными рядами.

На рис. 2 график динамического ряда располагается относительно наклонной прямой (тренда), характеризующей тенденцию.

5. По числу показателей выделяют ***изолированные (одномерные) и компонентные (многомерные) временные ряды***. Если проводится анализ во времени одного показателя, то временной ряд изолированный. Например, объем произведенных предприятием товаров (помесячно) представляет собой одномерный временной ряд (см. табл. 1).

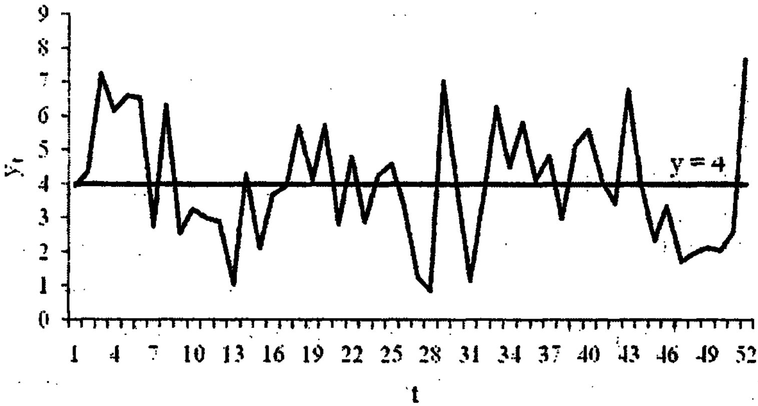

Рис. 1. График стационарного временного ряда

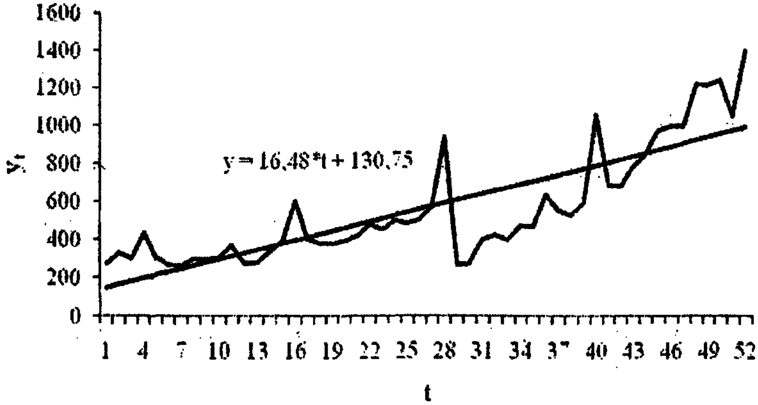

Рис. 2. График динамического временного ряда

В многомерном ряду представлена динамика нескольких показателей, характеризующих одно экономическое явление (процесс).

Таблица 1

Одномерный временной ряд

Момент времени	Январь 2004 г.	Февраль 2004 г.	...	...	...
Номер момента времени t	**1**	**2**	**...**	**n - 1**	**n**
Значение показателя y_t	y_1	y_2	...	y_{n-1}	y_n

Например, характеристики деятельности предприятия, наблюдаемые помесячно, можно представить в виде многомерного ряда (см. табл. 2). В качестве показателей производственной деятельности можно взять: Y - производительность труда, X_1 - удельный вес покупных изделий, X_2 - премии и вознаграждения на одного работника, X_3 - среднегодовая численность ППП, X_4 – среднегодовой фонд заработной платы ППП, X_5 - непроизводственные расходы.

Таблица 2

Многомерный временной ряд

Момент времени (дата)	Номер момента времени t	Значения показателей				
		Y	X_1	X_2	...	X_5
Январь 2004 г.	1	y_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{15}
Февраль 2004 г	2	y_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{25}
Март 2004 г.	3	y_3	x_{31}	x_{32}	...	x_{35}
.	...	. .	..	. .	.	...
..	n	y_n	x_{n1}	x_{n2}	. .	x_{n5}

Настоящее учебное пособие посвящено изучению абсолютных моментных одномерных временных рядов с равноотстоящими уровнями, которые наиболее часто встречаются в экономике.

2. Проверка гипотезы о наличии тренда

Исследование временного ряда начинается с решения вопроса о его стационарности. Одним из возможных вариантов для этого служит проверка гипотезы H_0 о случайности (отсутствии) временного тренда при конкурирующей гипотезе H_1 о неслучайности (наличии) временного тренда, основанная на сравнении средних значений первой и второй половины ряда, по статистике (расчетному значению критерия)

$$t_{расч} = \frac{\overline{y_n} - \overline{y_в}}{\sqrt{(n_n - 1)s_n^2 + (n_в - 1)s_в^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_n\, n_в \cdot (n_n + n_в - 2)}{n_n + n_в}}, \quad (1)$$

где $\overline{y_n}$, $\overline{y_в}$ - средние значения первой и второй половины ряда, имеющих длины n_n, $n_в$ ($n_n + n_в = n$); s_n^2, $s_в^2$ - дисперсии первой и второй половины ряда Средние значения и дисперсии определяются по формулам

$$\overline{y_n} = \frac{1}{n_n}\sum_{t=1}^{n_n} y_t \quad \text{и} \quad \overline{y_в} = \frac{1}{n_в}\sum_{t=n_n+1}^{n} y_t, \quad (2)$$

$$s_n^2 = \frac{1}{n_n - 1}\sum_{t=1}^{n_n}\left(y_t - \overline{y_n}\right)^2 \text{ и } s_в^2 = \frac{1}{n_в - 1}\sum_{t=n_n+1}^{n}\left(y_t - \overline{y_в}\right)^2 \quad (3)$$

Значение $|t_{расч}|$ сравнивается с критическим значением распределения Стьюдента $t_{кр}(\alpha, k)$ с $k = n_n + n_в - 2$ степенями свободы и уровнем значимости α. В случае, если $|t_{расч}| < t_{кр}$ гипотеза H_0 о случайности временного тренда принимается и ряд считается стационарным. В противном случае ($|t_{расч}| > t_{кр}$) - гипотеза H_0 отвергается, что свидетельствует о значимости различия средних первой и второй половины ряда и неслучайности (наличии) временного тренда. Другими словами, ряд является динамическим.

Для проверки гипотезы о наличии тренда также можно воспользоваться критерием серий, методом Фостера-Стюарта и др. [1, 13].

Каждый член динамического ряда можно представить в виде

$$y_t = \hat{y}_t + \varepsilon_t, \tag{4}$$

где $\hat{y}_t$ - теоретические значения уровней, вычисленные по уравнению тренда, ε_t - остатки (отклонения фактических уровней ряда от теоретических) Выражение (4) носит название ***модели временного ряда***.

Моделирование временного ряда заключается в анализе его структуры; подборе, построении и проверке качества уравнения тренда; анализе остатков

Построение тренда в теории временных рядов называется ***сглаживанием***. Существующие методы выделения тренда можно разделить на две группы: методы численного сглаживания, когда тренд задается численными значениями сглаженных уровней, вычисленных по значениям уровней исходного ряда (метод скользящих средних, экспоненциальное сглаживание и др.), а также методы аналитического выравнивания (построение уравнения тренда).

3. Сглаживание временных рядов методом скользящей средней

Сглаживание временного ряда выполняется для выделения тренда по выбранному числу членов ряда m.

Для этого используется метод наименьших квадратов, с помощью которого по $\boldsymbol{m}$ членам ряда строятся полиномы выбранной степени $\boldsymbol{p}$, начиная с первого и т.д. членов ряда. Степень полинома и число точек сглаживания выбираются из общих соображений (включая сущность решаемой задачи) и подбора степени по пробным кратковременным прогнозам.

Новое сглаженное значение временного ряда в средней точке из ***m*** заданных находится как линейная комбинация старых ***m*** значений ряда с коэффициентами, зависящими от степени полинома.

Если сглаживание ряда осуществляется по $\boldsymbol{m} = 5$ точкам, то для $\boldsymbol{p} = 1$ (линейное сглаживание) новое сглаженное значение уровня ряда вычисляется по формуле

$$\tilde{y}_t = \frac{1}{5}\left(y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + y_{t+2}\right), \tag{5}$$

где y_t , $\tilde{y}_t$ - заданное и новое сглаженное значения уровня ряда ($\boldsymbol{t} = 3, 4, \ldots, \boldsymbol{n} - 2$).

Для $\boldsymbol{p} = 2$, (квадратичное сглаживание) новое сглаженное значение уровня ряда вычисляется по формуле

$$\tilde{y}_t = \frac{1}{35}\left(-3y_{t-2} + 12y_{t-1} + 17y_t + 12y_{t+1} - 3y_{t+2}\right). \tag{6}$$

Для вычисления сглаженных первых и последних ($\boldsymbol{m}$ - 1)/2 значений ряда (при $\boldsymbol{m} = 5$ вычисляются два первых и два последних члена) используются следующие формулы:

при $p = 1$

$$\widetilde{y}_1 = \frac{1}{5}(3y_1 + 2y_2 + y_3 - y_5),$$
$$\widetilde{y}_2 = \frac{1}{10}(4y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_5), \qquad (7)$$
$$\widetilde{y}_{n-1} = \frac{1}{10}(4y_n + 3y_{n-1} + 2y_{n-2} + y_{n-4}),$$
$$\widetilde{y}_n = \frac{1}{5}(3y_n + 2y_{n-1} + y_{n-2} - y_{n-4});$$

при $p = 2$

$$\widetilde{y}_1 = \frac{1}{35}(31y_1 + 9y_2 - 3y_3 - 5y_4 + 3y_5),$$
$$\widetilde{y}_2 = \frac{1}{35}(9y_1 + 13y_2 + 12y_3 + 6y_4 - 5y_5), \qquad (8)$$
$$\widetilde{y}_{n-1} = \frac{1}{35}(9y_n + 13y_{n-1} + 12y_{n-2} + 6y_{n-3} - 5y_{n-4}),$$
$$\widetilde{y}_n = \frac{1}{35}(31y_n + 9y_{n-1} - 3y_{n-2} - 5y_{n-3} + 3y_{n-4}).$$

Процедура численного сглаживания может применяться последовательно несколько раз. После вычисления сглаженных значений ряда строится его графическое изображение (рис. 3).

Аналогичным способом производится сглаживание ряда по любому нечетному числу m членов ряда. В случае отсутствия необходимых

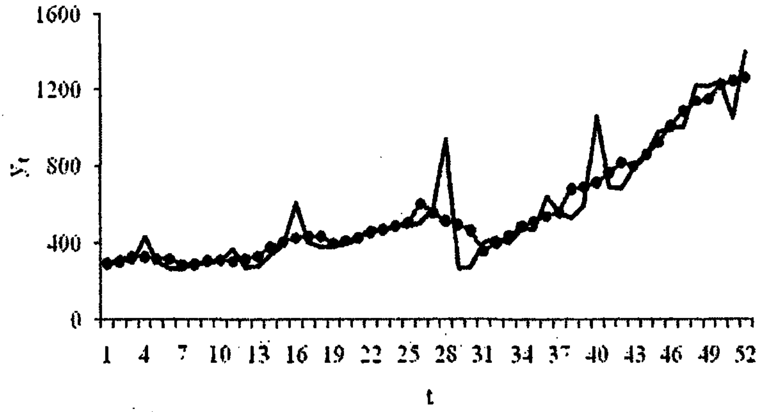

Рис. 3. Графики исходного и сглаженного ряда

формул, вычисление первых и последних членов сглаженного ряда не производится и в соответствующих строках расчетной таблицы ставится прочерк.

При сглаживании по четному числу членов ряда сначала вычисляются средние значения *m* уровней ряда, которые затем центрируются, т.е. в качестве сглаженных значений принимаются средние значения двух рядом стоящих средних.

В общем случае (линейное сглаживание, p = 1) расчет сглаженных значений $\widetilde{y}_t$ в случае нечетной длины интервала сглаживания $m = 2g + 1$ осуществляется по формуле

$$\tilde{y}_t = \frac{y_{t-g} + ... + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + ... + y_{t+g}}{2g+1}, \qquad (9)$$

где $t = g + 1,..., n - g$ (для $m = 3$ значение $g = 1$, для $m = 5$ значение $g = 2$).

Расчет сглаженных значений $\tilde{y}_t$ в случае четной длины интервала сглаживания $m = 2g$ производится по формуле

$$\tilde{y}_t = \frac{\frac{1}{2}y_{t-g} + ... + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + ... + \frac{1}{2}y_{t+g}}{2g+1}, \quad (10)$$

где $t = g + 1,..., n - g$ (для $m = 4$ значение $g = 2$).

Расчет сглаженных значений для незаполненных уровней ряда, в котором отсутствует цикличность, можно произвести на основании средних абсолютных приростов.

Сглаженные значения в начале временного ряда рассчитываются путем последовательного вычитания среднего прироста на первом активном участке $\Delta y_{нач} = \frac{y_{2g+1} - y_1}{2g}$ из первого доступного сглаженного значения. Сглаженные значения в конце временного ряда рассчитываются путем последовательного прибавления среднего прироста на последнем активном участке $\Delta y_{кон} = \frac{y_n - y_{n-2g}}{2g}$ к последнему доступному сглаженному значению. Под первым и последним активными интервалами понимаются интервалы, значения которых используются при расчетах первого и последнего усредненного значения.

В случае m = 3 (g = 1) первый активный участок включает в себя три первых уровней ряда, средний прирост $\Delta y_{нач} = \frac{y_3 - y_1}{2}$, последний активный участок - три последних уровня ряда, $\Delta y_{кон} = \frac{y_n - y_{n-2}}{2}$.

В случае m = 5 (g = 2) первый активный участок включает в себя пять первых уровней ряда, средний прирост $\Delta y_{нач} = \dfrac{y_5 - y_1}{2 \cdot 2}$, а последний активный участок - пять последних уровней ряда и

$$\Delta y_{кон} = \frac{y_n - y_{n-4}}{2 \cdot 2}.$$

Поскольку расчет сглаженных значений для m = 5 и m = 4 производится по значениям одних и тех же интервалов, то средние приросты для этих значений параметра m также одинаковы.

В случае m = 3 необходимо рассчитать сглаженные значения только для первого и последнего уровней ряда:

$$\tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 - \Delta y_{нач}\ ;\ \tilde{y}_n = \tilde{y}_{n-1} + \Delta y_{кон}. \qquad (11)$$

В случае m = 5 необходимо рассчитать сглаженные значения для двух первых и двух последних уровней ряда:

$$\tilde{y}_2 = \tilde{y}_3 - \Delta y_{нач}\ ;\ \tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 - \Delta y_{нач}; \qquad (12)$$

$$\tilde{y}_{n-1} = \tilde{y}_{n-2} + \Delta y_{кон}\ ;\ \tilde{y}_n = \tilde{y}_{n-1} + \Delta y_{кон}. \qquad (13)$$

Аналогично в случае m = 4 необходимо рассчитать сглаженные значения для двух первых и двух последних уровней ряда по формулам (12, 13).

4. Уравнение тренда

В статистике построение аналитической функции (уравнения тренда) для моделирования тенденции временного ряда называют ***аналитическим выравниванием*** (***сглаживанием***) ***временного ряда***. Для этого чаще всего применяются следующие функции:

1. полиномиальная

$\hat{y}_t = b_0 + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2 + \ldots + b_k \cdot t^k$ (***k*** - степень полинома);

2. линейная $\hat{y}_t = b_0 + b_1 \cdot t$ (частный случай полиномиальной при $k = 1$), используется для описания процессов, развитие которых протекает во времени равномерно. Параметр b_0 интерпретируется как параметр начальных условий (значение переменной y_t в нулевой момент времени $t = 0$), b_1 - как скорость роста y_t;

3. параболическая $\hat{y}_t = b_0 + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2$ (частный случай полиномиальной при $k = 2$), используется для описания процессов, развитие которых характеризуется равноускоренным ростом

(снижением). Параметр b_0 интерпретируется как параметр начальных условий (значение переменной y_t в нулевой момент времени $t = 0$), b_1 - как скорость роста и b_2 - как ускорение роста y_t;

4. показательная $\hat{y}_t = b_0 \cdot b_1^t$;

5. экспоненциальная $\hat{y}_t = b_0 \cdot e^{b_1 t}$;

6. степенная $\hat{y}_t = b_0 \cdot t^{b_1}$;

7. гиперболическая $\hat{y}_t = b_0 + \dfrac{b_1}{t}$.

Параметры уравнений трендов, как правило, определяются методом наименьших квадратов. В качестве независимой переменной выступает время $t = 1, 2, \ldots, n$, а в качестве зависимой переменной - фактические уровни временного ряда y_t. Критериями отбора наилучшей формы тренда являются наибольшее значение скорректированного коэффициента детерминации $R^2_{скорр}$ и наименьшее значение средней относительной ошибки аппроксимации $\overline{A}$.

На практике при выборе формы тренда обычно используют положения и выводы экономической теории, визуальный анализ графика ряда, а также результаты исследования структуры ряда (автокорреляция уровней ряда (см. пункт 6), определение степени полиномиального тренда (см. пункт 5)). На рис. 2 изображен линейный тренд, на рис. 4 - полиномиальный тренд.

Оценка качества уравнения тренда производится аналогично оценке качества уравнения регрессии с помощью средней относительной ошибки аппроксимации, критериев Фишера, Стьюдента и Дарбина-Уотсона.

5. Определение степени полиномиального тренда методом переменных разностей

В случае, когда исследуемый экономический процесс носит колебательный характер, его динамику нужно описывать полиномиальным трендом (на рис. 4 динамика ряда описывается полиномом пятой степени).

Для аппроксимации ряда полиномом степени *p* предварительно находится значение этой степени по следующей процедуре, которая аналогична дифференцированию полинома. Очевидно, что вторая производная полинома первой степени, третья производная полинома второй степени и т.д. равны нулю.

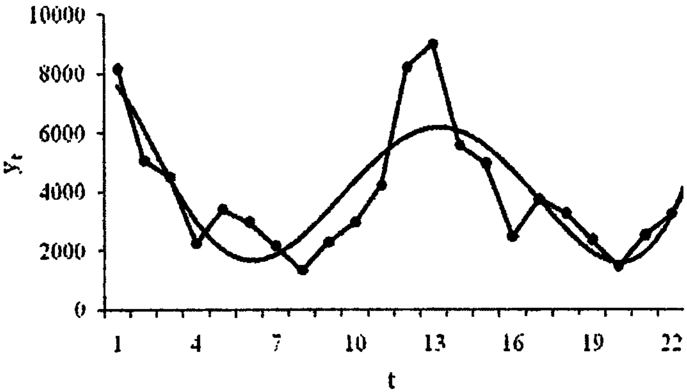

Рис. 4. Графики ряда и полиномиального тренда

В случае временного ряда операция дифференцирования заменяется вычислением переменных разностей, а условие равенства нулю - проверкой гипотезы о равенстве дисперсий предыдущих и последующих разностей.

Сначала вычисляются первые разности

$$\Delta^1 y_t = y_{t+1} - y_t ,$$

где $t = 1, 2, \ldots, n - 1$.

Затем по первым разностям вычисляются вторые разности

$$\Delta^2 y_t = \Delta^1 y_{t+1} - \Delta^1 y_t ,$$

где $t = 1, 2, \ldots, n - 2$.

И далее последовательно разности 3-го, …, k-го порядков

$$\Delta^k y_t = \Delta^{k-1} y_{t+1} - \Delta^{k-1} y_t ,$$

где $t = 1, 2, \ldots, n - k$.

Под разностями нулевого порядка понимается сам временной ряд.

На каждом шаге, начиная с $k = 0$, вычисляются дисперсии разностей k-го порядка по формуле

$$S_k^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n-k}\left(\Delta^k y_t - \overline{\Delta^k y_t}\right)^2}{(n-k-1)\cdot(2k)!}\cdot(k!)^2 . \qquad (14)$$

При $k = 0$ по формуле (14) вычисляется дисперсия заданного временного ряда y_t.

На каждом шаге с помощью критерия Фишера проверяется гипотеза о равенстве предыдущей и последующей дисперсий.

Для этого вычисляется расчетное значение критерия

$$F^k_{расч} = \frac{S^2_{k-1}}{S^2_k}.$$

Критическое значение критерия $F^k_{крит}(\alpha, k_1, k_2)$ находится в таблице критических значений распределения Фишера по уровню значимости α и числам степеней свободы $k_1 = n - k$, $k_2 = n - k - 1$.

Если $F^k_{расч} > F^k_{крит}$ дисперсии отличаются значимо. В этом случае процедура вычислений дисперсий и их разностей продолжается. Доказано, что последовательность дисперсий (14) убывает с ростом k, и при некотором значении $p = k - 1$ выполнится неравенство $F^k_{расч} < F^k_{крит}$ (различие дисперсий становится незначимым). Полученное значение p и является степенью полиномиального тренда. Дисперсия s_k^2 называется дисперсией случайностей, а разности порядка p являются случайной компонентой временного ряда.

6. Исследование структуры ряда. Автокорреляция

При наличии во временном ряде тенденции и циклических колебаний значение каждого последующего уровня ряда зависят от предыдущих. В этом случае говорят, что ряд имеет автокорреляцию.

Автокорреляцией называется корреляция уровней временного ряда друг с другом, со сдвигом во времени на l тактов (лагом l). Количественно ее можно измерить с помощью парного коэффициента корреляции между уровнями исходного временного ряда и уровнями этого ряда, сдвинутыми на l шагов во времени.

Коэффициент автокорреляции первого порядка (лаг $l = 1$) равен

$$r_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n}\left(y_t - \overline{y}_t\right)\left(y_{t-1} - \overline{y}_{t-1}\right)}{\sqrt{\sum_{t=2}^{n}\left(y_t - \overline{y}_t\right)^2 \cdot \sum_{t=2}^{n}\left(y_{t-1} - \overline{y}_{t-1}\right)^2}}, \qquad (15)$$

где

$$\overline{y}_t = \frac{1}{n-1}\sum_{t=2}^{n} y_t; \qquad \overline{y}_{t-1} = \frac{1}{n-1}\sum_{t=2}^{n} y_{t-1}.$$

Коэффициент автокорреляции l-го порядка находится по формуле

$$r_l = \frac{\sum_{t=l+1}^{n}\left(y_t - \overline{y}_t\right)\left(y_{t-l} - \overline{y}_{t-l}\right)}{\sqrt{\sum_{t=l+1}^{n}\left(y_t - \overline{y}_t\right)^2 \cdot \sum_{t=l+1}^{n}\left(y_{t-l} - \overline{y}_{t-l}\right)^2}}, \qquad (16)$$

где

$$\overline{y}_t = \frac{1}{n-l}\sum_{t=l+1}^{n} y_t; \qquad \overline{y}_{t-l} = \frac{1}{n-l}\sum_{t=l+1}^{n} y_{t-l}.$$

После вычисления коэффициентов автокорреляции необходимо проверить их статистическую значимость сравнением с критическими значениями коэффициента корреляции $r^l_{крит}(\alpha, k)$. Критические значения берутся из таблицы критических значений корреляции по уровню значимости α и числу степеней свободы $k = n - l - 2$.

Если $|r_l| < r^l_{крит}$ то коэффициент автокорреляции r_l статистически незначим и выводы, сделанные по его значению, имеют вероятность ошибки, равную $1 - \alpha$.

Последовательность коэффициентов автокорреляции называют ***автокорреляционной функцией*** временного ряда. График зависимости ее значений от величины лага (порядка коэффициента автокорреляции) называется ***коррелограммой***. Поскольку знаки коэффициентов автокорреляции при анализе не учитываются, коррелограмма обычно строится по их абсолютным значениям (см. рис. 5).

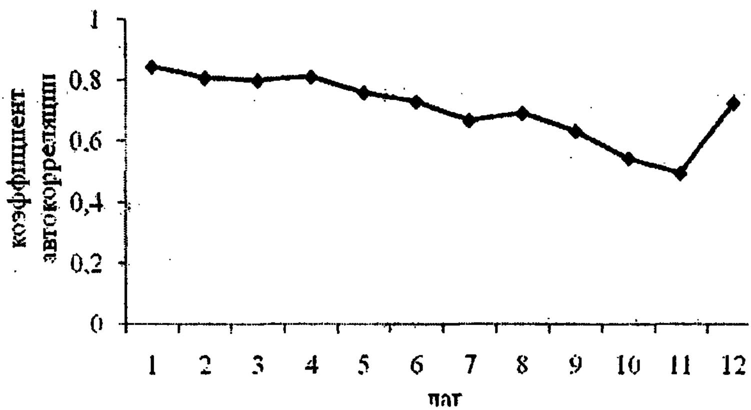

Рис. 5. Коррелограмма

Анализ автокорреляционной функции и коррелограммы позволяет определить лаг, при котором связь между текущими и предыдущими уровнями ряда наиболее тесная (сильная).

Если абсолютное значение коэффициента автокорреляции первого порядка $|r_1| > 0{,}7$, ряд содержит линейную тенденцию, если $|r_1| < 0{,}7$ - ряд содержит нелинейную тенденцию.

В случае, когда наибольшее абсолютное значение имеет коэффициент автокорреляции порядка $l = \tau$ и при этом, $|r_\tau| > 0{,}7$, ряд содержит циклические колебания с периодом в τ моментов времени.

Возникают ситуации, когда $|r_l| > 0{,}7$ и $1 \geq 2$, но сущность изучаемого процесса, а также вид графика ряда не позволяют сделать вывод о наличии цикличности. В таких случаях динамика описывается авторегрессионным уравнением либо уравнением с распределенным лагом [2].

7. Моделирование тенденции временного ряда при наличии структурных изменений

При протекании экономических процессов иногда возникает ситуация единовременного изменения характера динамики, вызванная структурными изменениями в экономике или иными факторами. В этом случае, начиная с некоторого момента t^*, происходит изменение тенденции временного ряда, т.е. изменение параметров тренда, описывающего эту динамику, а иногда и самого вида уравнения тренда. Момент времени t^* обычно называют точкой смены тенденции. Например, на рис. 6 изображен график ряда, в котором произошла смена тенденции в момент времени, близкий к $t^* = 32$. Основная задача исследования временного ряда, включающего точку смены тенденции, - выяснить, насколько значимо повлияли структурные изменения на характер тенденции. Если это влияние значимо, для моделирования тенденции необходимо разделить ряд на две части (до момента времени t^* и после момента t^*) и построить отдельно по каждой части ряда уравнения тренда (кусочно-линейная модель). Если изменения незначительно повлияли на характер тенденции, то ее можно описать единым для всего ряда уравнением.

Значимость структурных изменений можно оценить с помощью статистического критерия Грегори Чоу. Система обозначений для его проверки приведена в табл. 3.

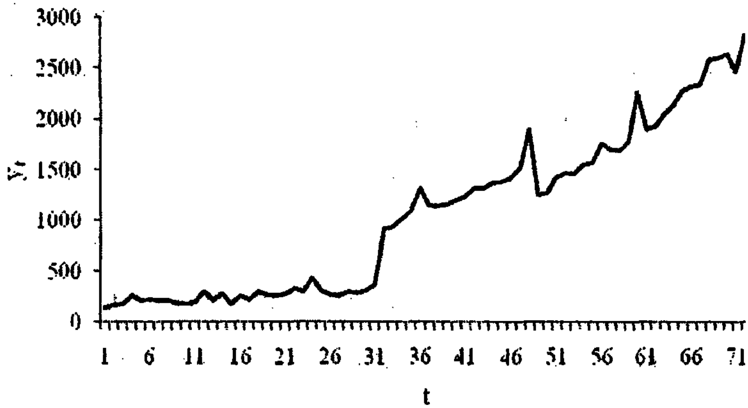

Рис. 6. Смена тенденции временного ряда

Выдвинем гипотезу H_0 о структурной стабильности тенденции изучаемого временного ряда y_t.

Найдем остаточные суммы квадратов

$$S^{1}_{ост}=\sum_{t=1}^{n1}\left(y_t-\hat{y}_t^{(1)}\right)^2, \tag{17}$$

$$S^{2}_{ост}=\sum_{t=n1+1}^{n}\left(y_t-\hat{y}_t^{(2)}\right)^2, \tag{18}$$

29

$$S^{3}_{ост}=\sum_{t=1}^{n}\left(y_t-\hat{y}_t^{(3)}\right)^2, \tag{19}$$

где $\hat{y}_t^{(1)}$, $\hat{y}_t^{(2)}$, $\hat{y}_t^{(3)}$ - теоретические значения уровней, найденные соответственно по уравнениям (I), (II) и (III).

Таблица 3

Номер уравнения	**Вид уравнения тренда***	**Длина ряда**	**Остаточная сумма квадратов**	**Число параметров в уравнении***
(I)	$y^{(1)}=a_1+b_1\cdot t$	n_1	$S^1{}_{ост}$	k_1
(II)	$y^{(2)}=a_2+b_2\cdot t$	n_2	$S^2{}_{ост}$	k_2
(III)	$y^{(3)}=a_3+b_3\cdot t$	$n = n_1+n_2$	$S^3{}_{ост}$	k_3

Остаточная сумма квадратов кусочно-линейной модели равна

$$S_{ост}^{кл} = S_{ост}^{1} + S_{ост}^{2}.$$

Изменение остаточной дисперсии при переходе от единого уравнения тренда к кусочно-линейной модели определяется как разность

$$\Delta S_{ост} = S_{ост}^{3} - S_{ост}^{кл}.$$

Расчетное значение *F*-критерия

$$F_{расч} = \frac{\Delta S_{ост}}{S_{ост}^{кл}} \cdot \frac{n - k_1 - k_2}{k_1 + k_2 - k_3}. \qquad (20)$$

сравнивается с табличным $F_{табл}(a, df_1, df_2)$, найденным по таблице критических точек распределения Фишера для уровня значимости a и числа степеней свободы $df_1 = k_1 + k_2 - k_3$, $df_2 = n - k_1 - k_2$.

Если $F_{расч} > F_{табл}$, то гипотеза H_0 о структурной стабильности отклоняется, и влияние структурных изменений на динамику изучаемого показателя считается значимым. В этом случае моделирование тенденции

временного ряда необходимо проводить с помощью кусочно-линейной модели. В противном случае, когда $F_{расч} < F_{табл}$, нет оснований отклонять гипотезу H_0, и моделирование тенденции следует осуществлять с помощью единого для всего ряда уравнения тренда.

8. Моделирование сезонных и циклических колебаний

Сезонными колебаниями называют изменения уровней ряда, связанные со сменой времени года или с регулярно повторяющимися из года в год событиями, например, связь изменения температуры воздуха с потребительским спросом, объемом товарооборота, энергопотреблением и др. ***Циклические колебания*** уровней обусловлены социальными, юридическими, экономическими, технологическими факторами (изменение тарифов, повышение заработной платы и пенсий и т.п.).

Сезонные колебания, как правило, имеют характер плавных циклов без скачкообразных изменений уровней. Циклические колебания могут иметь резкие скачки уровней, несколько максимумов и минимумов за год.

Наиболее простым подходом к анализу

временных рядов, содержащих сезонные или циклические колебания, является расчет значений сезонной компоненты методом скользящей средней и построение модели временного ряда.

Если амплитуда колебаний уровней приблизительно постоянна (см. рис. 7), строят ***аддитивную*** модель, в которой значения сезонной компоненты полагаются постоянными для различных циклов,

$$y_t = \hat{y}_t + s_t + \varepsilon_t \cdot \qquad (21)$$

Здесь и далее $\hat{y}_t$ - трендовая, s_t - циклическая (сезонная), ε_t - случайная составляющие (компоненты) уровней ряда.

Если амплитуда колебаний возрастает (уменьшается) (см. рис. 8), строят ***мультипликативную*** модель

$$y_t = \hat{y}_t \cdot s_t \cdot \varepsilon_t \cdot \qquad (22)$$

Построение этих моделей сводится к расчету значений $\hat{y}_t$, s_t , ε_t для каждого уровня ряда и производится в следующем порядке.

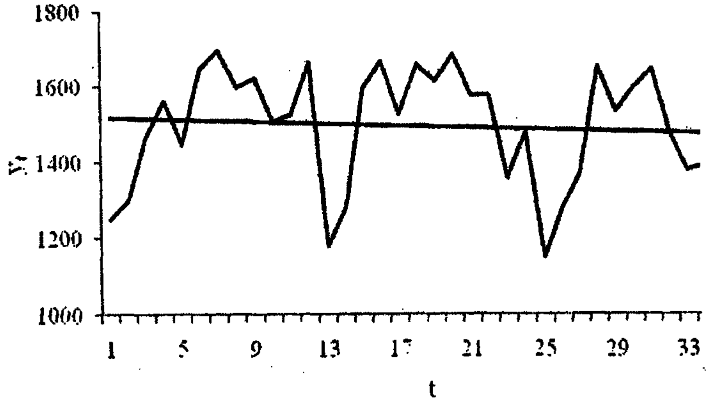

Рис. 7. Аддитивные циклические колебания

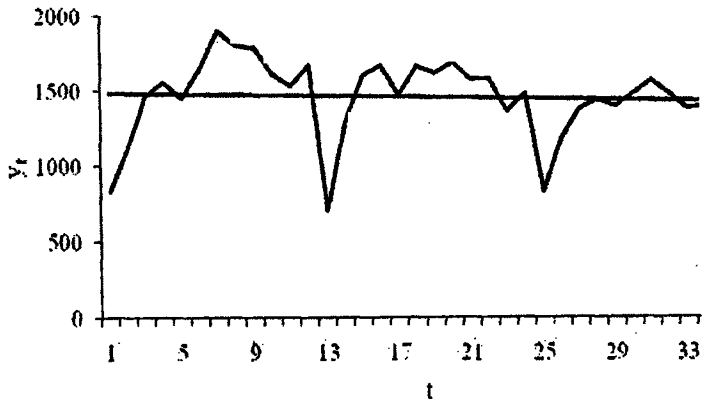

Рис. 8. Мультипликативные циклические колебания

1. Выравнивание исходного ряда методом скользящей средней.

2. Расчет значений сезонной компоненты s_t.

Необходимо помнить, что в аддитивной модели сумма скорректированных сезонных компонент внутри цикла равна нулю, в мультипликативной модели - равна числу моментов времени внутри цикла.

3. Устранение сезонной компоненты s_t из исходных уровней ряда и получение выравненных данных ($\hat{y}_t + \varepsilon_t$) или ($\hat{y}_t \cdot \varepsilon_t$).

4. Аналитическое выравнивание уровней ($\hat{y}_t + \varepsilon_t$) или ($\hat{y}_t \cdot \varepsilon_t$) и расчет теоретических значений $\hat{y}_t$ по полученному уравнению тренда.

5. Расчет полученных по модели значений ($\hat{y}_t + s_t$) или ($\hat{y}_t \cdot s_t$).

6. Расчет случайных составляющих (ошибок) ε_t.

Подробнее о моделировании сезонных и циклических колебаний см. в [1, 2, 7].

9. Прогнозирование временных рядов

Исследование динамики экономических явлений и процессов, выявление и характеристика основного тренда развития и моделей взаимосвязи дают основания для прогнозирования, т.е. определения будущих размеров уровней показателей, описывающих процессы.

Прогнозирование основывается на предположении, что закономерность развития, действующая в прошлом внутри ряда динамики, сохранится и в прогнозируемом будущем. Такой прогноз основан на перспективной интерполяции.

Теоретической основой распространения тенденции является инертность социально-экономических процессов. Инертность позволяет выявить взаимосвязь между уровнями динамического ряда или между группой связных временных рядов. Надежные результаты прогнозирования временных рядов получают, если уровни ряда динамики сопоставимы и синтезированы на основе единого методологического подхода.

Применение перспективной экстраполяции в практическом прогнозировании основывается на следующих предпосылках:

1) тенденция развития изучаемого явления графически описывается плавной линией;
2) общая тенденция развития явления в будущем существенно не меняется.

Надежность прогноза зависит от того, как точны эти предположения в действительности, а также как точно охарактеризована выявленная закономерность.

Экстраполяция - это начальная стадия построения прогноза. Механическое, без учета условий, предпосылок и содержательного экономического анализа, применение экстраполяции может стать причиной неадекватности выводов.

Чем шире временной горизонт прогноза (чем более долгосрочен прогноз), тем очевиднее недостаточность простого метода экстраполяции в результате изменения тенденции, влияния новых факторов и т.д. В этом случае динамичность экономических процессов противоречит инертности их развития.

Так как исследуемые временные ряды часто имеют недостаточно большую длину *n*, то временной горизонт прогнозирования ограничен. Поэтому, чем короче срок прогнозирования (период упреждения), тем более надежны результаты прогноза. За относительно короткий период условия развития процесса не успевают измениться, что сохраняет характер его динамики.

В зависимости от принципов построения и эмпирических данных ряда выделяются следующие методы прогнозирования:

1) по среднему абсолютному приросту;

2) по среднему темпу роста;

3) на основе численного сглаживания временного ряда;

4) на основе аналитического выравнивания временного ряда.

Прогнозирование по ***среднему абсолютному приросту*** может быть выполнено в случае линейной тенденции развития. Этот метод основывается на предположении о стабильности (равномерности) изменения уровней ряда.

Для прогнозирования по среднему абсолютному приросту необходимо определить средний абсолютный прирост и последовательно увеличивать конечный уровень ряда на его величину на требуемое число периодов:

$$\hat{y}_{n+T} = y_n + \overline{\Delta} \cdot T \quad , \tag{23}$$

где $\hat{y}_{n+l}$ - прогнозируемый уровень ряда; T - срок прогноза (период упреждения); y_n - последний уровень ряда, за который рассчитан средний абсолютный прирост $\overline{\Delta}$.

Следует иметь в виду, что использование среднего абсолютного прироста для прогноза возможно только при условии

$$S^2_{ост} \le p^2 \quad ,$$

где $p^2 = \frac{1}{2n}\sum_{t=2}^{n}\left(y_t - y_{t-1}\right)^2$,

$$S^2_{ост} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(y_t - \hat{y}_{n+T}\right)^2 .$$

Прогнозирование по ***среднему темпу роста*** осуществляется, когда общая тенденция ряда динамики характеризуется показательной (экспоненциальной) кривой. В этом случае для прогнозирования определяют средний коэффициент роста $\overline{K}_p$ и возводят его в степень, соответствующую периоду прогнозирования:

$$\hat{y}_{n+T} = y_n \cdot \overline{K}_p^{\,T} . \qquad (24)$$

Если временному ряду соответствует другая закономерность развития, то прогнозные значения, полученные по среднему темпу роста, будут отличаться от рассчитанных другими способами прогнозирования.

Рассмотренные два способа прогнозирования являются самыми простейшими и приближенными.

Хорошие результаты при краткосрочном прогнозировании значений временного ряда на один шаг вперед по времени (для $T = 1$) дает применение

численного сглаживания, например, метода скользящих средних по m последним уровням ряда. Для $m = 5$ можно воспользоваться формулой

$$\hat{y}_{n+1} = \frac{1}{10}\left(8y_n + 5y_{n-1} + 2y_{n-2} - y_{n-3} - 4y_{n-4}\right). \quad (25)$$

На практике наибольшее распространение получил метод прогнозирования на основе ***аналитического выравнивания*** временного ряда (на основе уравнения тренда). При этом для получения прогнозного значения продолжают значения независимой переменной времени за границы исследуемого периода. На рис. 9 прогнозная часть графика ряда изображена пунктиром.

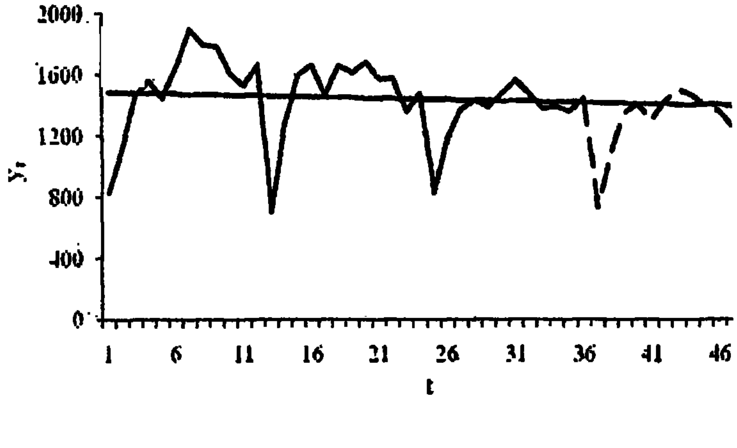

Рис. 9. Прогноз ряда по мультипликативной модели

Этот подход прогнозирования предполагает, что уровень ряда динамики формируется под воздействием множества факторов, но при этом отдельно влияние каждого из них не выделяется. Следовательно, тенденция развития связана не с каким-либо фактором, а с течением времени.

Путем подстановки срока прогноза T в уравнение тренда получают точечную оценку прогноза $\hat{y}_{n+T}$ (в случае цикличности добавляется сезонная компонента). При этом полное совпадение фактического предсказываемого значения y_{n+T} и прогнозной оценки маловероятно.

Возникновение отклонений фактических уровней временного ряда от выравненных по уравнению тренда связано со следующими причинами:

1) всегда существует тренд, который дает более точные результаты при описании тенденции, по сравнению с выбранным;

2) тренд, выбранный для прогнозирования,

3) содержит случайную компоненту, так как каждый уровень исходных данных обладает случайной компонентой;

4) выявленная тенденция характеризует движение среднего уровня временного ряда, следовательно, возможны отклонения от него.

При прогнозировании, ввиду приближенного характера прогнозного значения, рекомендуется построение доверительного интервала прогноза. В случае несложных функциональных форм тренда он имеет вид

$$\left(\hat{y}_{n+T} - t_{\alpha} \cdot S_{\hat{y}} \cdot k(T)\ ;\ \hat{y}_{n+T} + t_{\alpha} \cdot S_{\hat{y}} \cdot k(T)\right), \quad (26)$$

и с вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$ покрывает предсказываемое значение y_{n+T}. Здесь t_{α} – критическое значение распределения Стьюдента, найденное по таблице по уровню значимости α и числу степеней свободы $k = n - m - 1$, n - длина ряда, m - число параметров уравнения тренда, T – период упреждения. Остаточная средняя квадратическая ошибка прогноза находится по формуле

$$S_{\hat{y}} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}\left(\hat{y}_{n+T} - y_t\right)^2}{n-m-1}} . \tag{27}$$

В случае линейной модели коэффициент $k(T)$ определяется по формуле

$$k(T) = \sqrt{\frac{n+1}{n} + \frac{\left(t_к + T - \bar{t}\right)^2}{\sum_{t=tн}^{tк}\left(t - \bar{t}\right)^2}}, \tag{28}$$

где $t_н$, $t_к$ - первая и последняя точки временного интервала, на котором проводилось оценивание параметров модели, $\bar{t}$ - середина временного интервала, на котором проводилось оценивание параметров тренда: $\bar{t} = \frac{t_н + t_к}{2}$. Если тренд строился по всему ряду, то $t_н = 1$, $t_к = n$, $\bar{t} = \frac{1+n}{2}$.

Для параболического тренда $\hat{y}_t = b_0 + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2$

$$k(T)=\sqrt{1+\frac{(t_k+T)^2}{\sum\limits_{t=t_H}^{t_K} t^2}+\frac{\sum\limits_{t=t_H}^{t_K} t^4-2(t_k+T)^2\cdot\sum\limits_{t=t_H}^{t_K} t^2+n\cdot(t_K+T)^4}{n\cdot\sum\limits_{t=t_H}^{t_K} t^4-\left(\sum\limits_{t=t_H}^{t_K} t^2\right)^2}}$$

(29)

В случае отсутствия формулы для расчета коэффициента $k(T)$, полагают, что он равен 1.

Относительная ошибка прогноза

$$\delta_{n+T}=\left|\frac{\hat{y}_{n+T}-y_{n+T}}{y_{n+T}}\right|\cdot 100\% \qquad (30)$$

может быть определена только при достижении точки прогноза (момента времени $t=n+T$) , и обычно используется на этапе разработки методики прогнозирования.

Подробнее о способах прогнозирования см. в [1, 2, 4, 6, 7, 9].

Контрольные вопросы

1. Какие виды информации называют одномерными и многомерными временными рядами?

2. Дайте понятия стационарного и динамического временного ряда (далее - ряда).

3. Приведите вид аддитивной и мультипликативной моделей ряда. Какие составляющие входят в модель ряда?

4. Как строится график ряда?

5. Как описывается динамическая составляющая ряда?

6. Перечислите виды сглаживания ряда.

7. В чем заключается сглаживание ряда методом скользящих средних?

8. В чем заключается аналитическое выравнивание ряда?

9. Перечислите наиболее часто используемые уравнения тренда.

10. Как строится уравнение тренда?

11. Приведите методику оценки качества уравнения тренда.

12. Что понимается под структурными изменениями ряда?

13. Приведите методику проверки критерия Грегори Чоу на наличие смены тенденции ряда?

14. Что понимается под автокорреляцией уровней ряда?

15. Сформулируйте понятие автокорреляционной функции.

16. Как строится график автокорреляционной функции?

17. Как интерпретируются значения коэффициентов автокорреляции?

18. Приведите методику моделирования циклических колебаний ряда.

19. Какими свойствами обладают скорректированные оценки циклической компоненты для аддитивной и мультипликативной модели ряда?

20. Перечислите наиболее часто применяемые методы прогнозирования.

21. Как производится прогнозирование по уравнению тренда?

22. Как оценивается точность прогноза?

Литература

Основная

1. Теория статистики: Учебник/Р.А. Шмойлова, В.Г. Минашкин, Н.А. Садовникова, Е.Б. Шувалова; Под ред. Р.А. Шмойловой. - 4-е изд., перераб. и доп. - М.: Финансы и статистика, 2006. - 656 с.

2. Эконометрика: Учебник/И.И. Елисеева, С.В. Курышева, Т.В. Костеева и др.; под ред. И.И. Елисеевой. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Финансы и статистика, 2005. - 576 с.

3. Практикум по эконометрике: Учеб. пособие/И.И. Елисеева, С.В. Курышева, Н.М. Гордеенко и др.; Под ред. И.И. Елисеевой. - М.: Финансы и статистика, 2003. - 192 с.

Дополнительная

4. Новак Эдвард. Введение в методы эконометрики. Сборник задач: Пер. с польск./Под ред. И.И. Елисеевой. - М.: Финансы и статистика, 2004. - 248 с.

5. Балдин К.В., Быстров О.Ф., Соколов М.М. Эконометрика: Учеб. пособие для вузов - 2-е изд., перераб. и доп.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. - 254 с.

6. Гладилин А.В., Герасимов А.Н., Громов Е.И. Эконометрика: Учеб. пособие. - М.: КНОРУС, 2006.

7. Афанасьев В.Н., Юзбашев М.М., Гуляева Т.И. Эконометрика: Учебник/Под ред.

В.Н. Афанасьева. - М.: Финансы и статистика, 2005. - 256 с.

8. Лукашин Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. - М., Финансы и статистика, 2003.

9. Боровиков В.П., Ивченко Г.И. Прогнозирование в системе STATISTICA в среде Windows. Основы теории и интенсивная практика на компьютере: Учеб. пособие. - М.: Финансы и статистика, 1999. - 384 с.

10. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. - М., 2002.

11. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высшая школа, 1972.

12. Берндт Э.Р. Практика эконометрики: классика и современность. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005.

13. Прикладная статистика. Основы эконометрики: Учебник для вузов: В 2 т. 2-е изд. - Т. 2: Айвазян С.А. Основы эконометрики. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001.

14. Кочнева Л.Ф., Милевский А.С. Эконометрика. Часть 2. Множественная регрессия. Учебное пособие. - М.: МИИТ, 2007.

Оглавление

Св. план 2009 г.; поз. 114

Кочнева Людмила Федоровна
Карпенко Надежда Викторовна
ЭКОНОМЕТРИКА.
ЧАСТЬ 3. ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ
Учебное пособие

Подписано в печать 30.12.09. Формат 60x84 / 16
Заказ № 987 Усл. печ. л. - 3,25
Тираж – 200 экз.

127992, Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9.
Типография МИИТа