ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

**«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»**

КАФЕДРА «МАТЕМАТИКА»

Л.Ф. КОЧНЕВА

Математика в коммерческих расчетах. Часть I

Учебное пособие

МОСКВА – 2014

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

**«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»**

КАФЕДРА «МАТЕМАТИКА»

Л.Ф. КОЧНЕВА

Математика в коммерческих расчетах. Часть I

Рекомендовано редакционно-издательским советом
университета в качестве учебного пособия для бакалавров
направления «Экономика» ИЭФ

МОСКВА – 2014

УДК 338.656.2
К33

Кочнева Л.Ф. Математика в коммерческих расчетах. Часть 1: Учебное пособие. – М.: МГУПС (МИИТ), 2014. – 62 с.

В учебном пособии описана схема начисления по простому проценту и простой учетной ставке со всеми сопутствующими задачами, включая расчеты по векселям, расчеты с изменяющейся процентной ставкой, расчеты времени операции.

В схеме сложных процентов проанализированы задачи однократного и многократного начисления процента, дисконтирование, расчета эффективной ставки. Вводится понятие финансового потока и основное правило расчетов в нем. Приводятся основные существующие процентные ставки и их взаимосвязь.

Описаны виды финансовых расчетов по рентам и кредитам, нахождение наращенной и современной суммы ренты.

Рецензенты:
Шмелькин А.Л. – доктор физ.-мат. наук, профессор механико-математического факультета МГУ

Платонова О.А. – кандидат физ.-мат.наук, доцент, зав.кафедрой «Высшая математика» МИИТа

МАТЕМАТИКА

В

КОММЕРЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

(Часть1).

Простые проценты

1.1. Определение простых процентов

Процентом данного числа называется одна сотая часть этого числа, т.е. 1% числа 1, записанный в виде десятичной дроби, есть 0.01. Число сотых долей, которое требуется найти, называется ставкой *процента*. Например, 5% от числа 1 есть 0.05; 120% от числа 1 есть 1.2 и т. д. В этой книге везде речь идёт о вычислении процентов от некоторой суммы денег. Если в тексте говорится об r%, то в формулах буквой r обозначается запись r% в виде десятичной дроби. Так, 9% от суммы P равны P×0.09. Если сумма P увеличивается на r%, то полученная в результате сумма S называется наращенной *суммой* и вычисляется по формуле

$$S = P + \mathrm{Pr} = P(1 + r).$$

При этом величина P называется *исходной суммой, а Pr— суммой начисленных процентов.* В дореволюционной русской литературе величина r называлась *интересом*.

Пример 1. *Вкладчик положил в банк, выплачивающий в год* 5%, *сумму* 1500 *руб. Какая сумма будет на его счету через год?*

Решение. Через год на счету будет сумма

$S = P(1 + r) = 1500(1+0.05) = 1575$ руб.

Если имеется несколько периодов времени, в каждый из которых исходная сумма *P* увеличивается на r%, то говорят, что на сумму *P* начисляются *простые проценты.*

Наращенная сумма S, полученная в результате начисления п раз по r% на сумму *P,* выражается формулой $S = P + Prn$, или

$$S = P(l+r\,n).$$

Формула, выражающая наращенную сумму при начислении простых процентов, получена при условии, что число *n* периодов начисления процентов — целое. Если время вклада не целое, то обозначим его t – в долях года. Формула наращения будет тогда иметь вид:

$$S = P\{l+rt). \quad (1.1)$$

Необходимость начисления процентов за нецелое число периодов часто встречается в практике финансовых расчётов. Например, если банк выплачивает по депозитам г % годовых (простых), т. е. период начисления процентов равен одному году, то на депозит, пролежавший в банке 3 года и 3 месяца, банк должен начислить проценты за 3.25 периода. Какова должна быть в этом случае сумма начисленных процентов? Так как простые проценты начисляются на одну и ту же исходную сумму *P,* то естественно считать сумму начисленных процентов пропорциональной числу периодов, за которые эти проценты начисляются, т. е. равной *Prt,* и в том случае, когда число *t* не является целым. Тогда наращенная сумма равна $P + Prt = P(l + rt)$.

Формула (1.1) является естественной для практики финансовых расчётов.

Заметим, что при заключении финансовых контрактов обычно оговаривается наименьшая часть периода начисления процентов: например, каждый полный день или каждая полная неделя (1/52 часть периода начисления, равного году).

На практике может использоваться любой период начисления процентов. Однако для сравнения различных условий кредитования финансисты приводят ставку процента за произвольный период к годовой. Например, если Сбербанк даёт r % простых в месяц, то это соответствует годовой ставке $r = 12 \times r$ %. Например, при r (месячное) = 6% имеем r (годовое) $=12 \times 6 = 72\%$.

1.2. Банковский депозит под простые проценты

Рассмотрим три типичные задачи, возникающие при вложении в банк денег под простые проценты.

Пример 2. *В условиях примера 1, какая сумма будет на счету вкладчика через полгода, через три года, через пять лет и три месяца, если период начисления процентов (простых) равен году?*

Решение. По формуле (1.1)

$S1 = 1500\ (1 + 0.5 \times\ 0.05) = 1537.5$ руб.

$S2 = 1500\ (1 + 3 \times 0.05) = 1\ 725$ руб.

$S3 = 1500\ (1 + 5.25 \times 0.05) = 1\ 893.75$ руб.

Пример 3. *Какую сумму надо положить в банк, выплачивающий* 6% *простых в год, чтобы через* 2 года 6 *месяцев получить* 10000 *руб.?*

Решение. Нам известна наращенная сумма S=10 000 руб., количество периодов начисления простых процентов t= 2.5 года. Ставка начисляемых за каждый период простых процентов r = 6% = 0.06. Из формулы (1.1) определяем вложенную сумму

$$P=S/(1+rt). \quad (1.2)$$

Подставляя данные задачи в эту формулу, получаем:

P=10000/ (1 + 0.06×2.5) = 10000/1.15 = 8695.65 руб.

Пример 4. *В банк было положено* 1 500 *руб. Через* 1*год* 3 *месяца на счету было* 1631.25 *руб. Сколько простых процентов выплачивает банк в год?*

Решение. Используем формулу (1.1). Известна вложенная сумма P = 1 500 руб. и полученная через t= 1.25 года сумма S= 1631.25 руб. Надо определить ставку простых процентов r. Из формулы (1.1) имеем

$$r=(S/P-1)*(1/t)$$

Подставляем данные задачи:

$$r=(1631.25/1500-1)*1/1.25=0.0875/1.25=0.07\ (7\%)$$

1.3. Потребительский кредит

Простые проценты применяются в *потребительском кре дите.* Потребитель, приобретая некоторый товар, цена которого равна P, получает от продавца кредит на всю эту сумму (или на её остаток, если часть этой суммы он выплачивает в момент покупки). Кредит даётся на t лет под простые проценты по годовой ставке r. Сумма долга покупателя согласно формуле (1.1) поэтому равна S= P(1 + rt). Эта сумма, как правило, погашается равными платежами q=S/tm, где m — число платежей в год; обычно, m = 12, т. е. платежи делаются ежемесячно.

Пример 6. *Покупатель приобрёл холодильник, цена которого* 20000 *руб., в кредит, уплатив сразу* 5000 руб. и обязавшись уплатить *остальное в течение* 6 *месяцев, делая ежемесячные равные платежи. Какую сумму он должен выплачивать ежемесячно, если продавец требует* за кредит 6% *простых в год?*

Решение. Покупатель должен продавцу 15000 руб., это первоначальная сумма *P*. Найдём конечную сумму S, если r = 6%, $t = 0.5$ года. По формуле (1.1)

$$S = P(1 + rt) = 15\,000(1 + 0.06\times0.5) = 15450 \text{ руб.}$$

Ежемесячно покупатель должен выплачивать 15450/6 = 2 575 руб.

1.4. Простой дисконт или учетная ставка процента

Простым дисконтом называется процентный доход, вычитаемый из ссуды в момент её выдачи. Если процентная ставка простого дисконта — d % (чаще называется учетной ставкой процента), величина ссуды — *S* руб. (эта сумма должна быть возвращена), P — величина ссуды, полученная в момент её выдачи, *t* лет — срок, на который выдаётся ссуда, то простой дисконт равен S_{dt} и $P = S - S_{dt}$, т. е.

$$P = S\,(1 - dt). \tag{1.4}$$

Пример 7. *Финансовая компания даёт ссуду* 5000 руб. на 3 года *под простой дисконт, равный* 5% *в год. Какую сумму получит клиент в момент получения ссуды?*

Решение. По условию задачи 5 = 5000 руб., d = 5%, t= 3 года. Находим P по формуле (1.4):

P = 5000(1-0.05×3) = 5000×0.85 = 4250 руб.

Пример 8. *Господин X желает получить ссуду* 10 000 *руб. на три месяца. Сколько он должен вернуть через три месяца, если возьмёт ссуду под* 8% *простого дисконта?*

Решение. По условию задачи P = 10000 руб., d = 0.08, t= 0.25 года. По формуле (1.4) 10000 = S(1 -- 0.08×0.25);

откуда S=10204.08 руб.

Пример 9. *Сколько должен вернуть господин X из примера 8, если он возьмёт ссуду под* 8% *простых годовых?*

Решение. По формуле (1.1), где P = 10000 руб., r = 0.08,

t = 0.25, имеем S = 10000 (1 + 0.08×0.25) = 10200руб.

Сравнивая полученный результат с результатом примера 8, мы видим, что кредитору выгоднее давать ссуду под простой дисконт, чем под простой процент (сумма к получению имеет большее значение).

1.6. Учёт векселей

Простые проценты применяются иногда в финансовой операции, которая называется *банковским учётом* и заключается в следующем: банк покупает вексель на сумму S у его владельца до истечения срока оплаты векселя по цене *P,* меньшей, чем 5. Эта операция называется учётом векселя. Величина *P* рассчитывается по формуле:

$$P = S(1 - td)\,, \qquad (1.5)$$

где *t*— число лет, остающееся с момента учёта векселя до срока его оплаты; *d%* — учётная ставка, установленная банком.

Пример 10.Вексель *выдан на* 10 000 *руб. с уплатой* 15 *октября того же года. Владелец векселя учёл его в банке* 15 августа по *учётной ставке*10%. *Сколько он получил? Сколько бы он получил, если бы срок уплаты по векселю был назначяен* 15 *октября следующего года?*

Решение. По условию S = 10000 руб., *d*= 0.1; рассчитаем лет: число дней между 15 августа и 15 октября равно 60; считая, что в году 360 дней (так принято при банковском учёте), имеем *t*= 60/360 = 1/6,

P=10 000 (1 - 1/6×0.1)=10 000 × 59/60=9833.33 руб.

Число дней между 15 августа и 15 октября следующего года равно 360 + 60 = 420 дней, т.е. *t*= 420/360 = 7/6,

P=10 000 (1 – 7/6×0.1)=10 000 ×53/60= 8833.33 руб.

1.6. Приведение стоимости денег к одному моменту времени

В теории и на практике нам постоянно приходится решать вопрос о том, как соотносятся между собой суммы денег, полученные в различные моменты времени.

В данной работе предполагается, что все описываемые операции носят безрисковый характер.

Если в качестве подходящего использования денег мы рассматриваем возможность инвестировать их (например, положить в банк) под простой годовой процент r%, то сумма денег S через t лет согласно формуле (1.1) будет

$S= P(l +rt).$

Поэтому *современная* (или *приведённая) ценность* P суммы S, которая будет получена через t лет, вычисляется по формуле (1.2)

$$\boxed{P=S/(1+rt)}$$

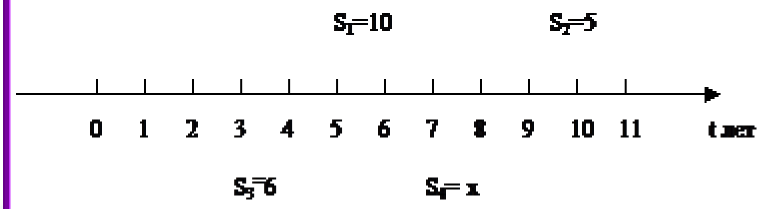
Вычисление современной стоимости суммы называется *дисконтированием* этой суммы.
Термин „современная" ценность не носит абсолютного характера — современным в расчётах может быть взят любой момент времени.
Два контракта называют *эквивалентными*, если современные ценности потоков платежей по этим контрактам одинаковы.

Это понятие используется при изменении контракта и для сравнения контрактов.

Рассмотрим пример.

Пример 15. Имеется обязательство *уплатить* 10000*руб. через* 5 лет *и ещё* 5 000 *руб. через* 10 лет от *настоящего момента. Этот контракт надо заменить на такой: уплатить* 6 000 *руб. через* 3 года, а *остальной долг выплатить через 7 лет (от настоящего момента). Какая сумма должна быть выплачена через 7 лет, если на деньги начисляются* 8% *простых в год?*

Решение. Изобразим суммы первого контракта над осью времени, а второго — под осью. Стрелкой внизу указан современный момент времени.



Дисконтируем все суммы на момент 0, т. е. находим приведённые к моменту 0 ценности этих сумм:

P1=S1/(l+ 5r) = 10/(1 +5 × 0.08) = 10/1.4 = 7.143,

P2 = S2/(1 + 10r) = 5/(1 + 10×0.08)= 5/1.8 = 2.778,

P3 = *S*3/(1+ 3r)= 6/(1+3 ×0.08)= 6/1.24 = 4.839,

P4 = S4/(1+ 7r)= x /(1 + 7×0.08)= x/1.56.

Контракты будут эквивалентны, если выполнено равенство

P1+P2 = Pз + P4,

то есть:

7.143 + 2.778 = 4.839 +x/1.56,

откуда находим x:

x = (7.143 + 2.778 - 4.839) *1.56 = 7.928.

Итак, сократив сроки платежей, мы уменьшим суммарные выплаты с 15 000 руб. до 6 000 + 7 928 = 13 928 руб.

2. Расчеты при инфляции

В рассмотренных выше методами наращения все денежных величин измерялись по номиналу. Иначе говорят, не принималось во внимание снижение реальной покупательной способности денег за период, охватываемый финансовой операцией. Однако в современных, особенно российских, условиях инфляция часто играет решающую роль и без ее учета конечный результат представляет собой весьма и весьма условную величину.

Инфляцию необходимо учитывать, по крайней мере в двух случаях: при расчете наращенной суммы денег и при изменении реальной эффективности (доходности) финансовой операции. Остановимся на этих проблемах.

Прежде всего напомним, что изменение покупательной способности денег за некоторых период измеряется с помощью соответствующего индекса $J_{пс}$. Пусть S- наращенная сумма денег, измеренная по номиналу. Эта же сумма, но с учетом ее обесценения составит:

$$C=S\times J_{пс}$$

Индекс покупательной способности денег, как известно, равен обратной величине индекса цен:

$$J_{пс}=1/J_p.$$

Разумеется, указанные индексы должны относиться к одним и тем же временным интервалам. Пусть, например, сегодня получено 150 тыс. руб., известно, что за два предшествующих года цены увеличились в три раза, т.е. $J_p=3$. В этом случае индекс покупательной способности денег равен 1/3. Следовательно, реальная покупательная способность 150 тыс. руб. составит в момент получения всего 150×(1/3)=50 тыс. руб. в рублях двухлетней давности.

Нетрудно связать индекс цен и темп инфляции. Предварительно напомним некоторые понятия. Под темпом инфляции обычно понимается относительный прирост цен за период; обозначим его как H; измеряется он в процентах. Темп инфляции и индекс цен связаны следующим образом:

$$H=100(J_p-1)$$

В свою очередь

$$J_p = (1 + H/100)$$

Например, если темп инфляции равен 130 %, то цены за этот период выросли в 2,3 раза. Среднегодовые темп роста цен (i_p) и темп инфляции (h) находятся на основе величины J_p как:

$$i_p = \sqrt[n]{J_p}$$

$$h = 100\left(\sqrt[n]{J_p} - 1\right)$$

Поскольку инфляция является цепным процессом (цены в текущем периоде повышаются на h_t процентов относительно уровня, сложившегося в предыдущем периоде), то индекс цен за несколько таких периодов равен произведению цепных индексов цен:

$$J_p = \prod_{l}^{n} \left(1 + h_i\right) \quad (2.1)$$

Пусть теперь речь идет о будущем. Если h- постоянный ожидаемый (или прогнозируемый) темп инфляции за период, то за n таких периодов получим

$$J_p = \left(1 + \frac{h}{100}\right)^n \quad (2.2)$$

Ошибкой является суммирование темпов инфляции для получения обобщающего величину получаемого показателя.

Пример 2.22.

а) постоянный темп инфляции на уровне, скажем, 10% в месяц за год приводит к росту цен в размере $J_p = 1{,}1^{12} = 3{,}1384$, таким образом, годовой темп инфляции равен 213,84%, а не 120%;

б) последовательный прирост цен по месяцам составил 25 %;20 % и 18%.

Индекс цен за три месяца согласно формуле(2.40) равен 1,25×1,2×1,18=1,77. Темп инфляции за три месяца составил 77%, а не 63% как при простом суммировании темпов инфляции по месяцам.

Вернемся к проблеме обесценения денег при их наращении. В общем случае теперь можно записать:

$$C = S/J_p \qquad (2.3)$$

Если наращение производится по простой ставке, имеем:

$$C = P\frac{1+ni}{J_p} = P\frac{1+ni}{\left(1+\frac{h}{100}\right)^n} \qquad (2.4)$$

Как видим, увеличение наращенной суммы с учетом сохранения покупательной способности денег имеет место только тогда, когда

$$1+ni>J_p$$

Пример 2.23.

Допустим, на сумму 1,5 млн. руб. в течение трёх месяцев начисляются простые проценты по ставке 50% годовых (K=360). Наращенная сумма равна 1,6875 млн. руб. Если ежемесячная инфляция характеризуется темпами, приведенными в примере 2.22, б, то с учетом обесценения наращенная сумма составит всего 1,6875/1,77=0,9534 млн. руб.

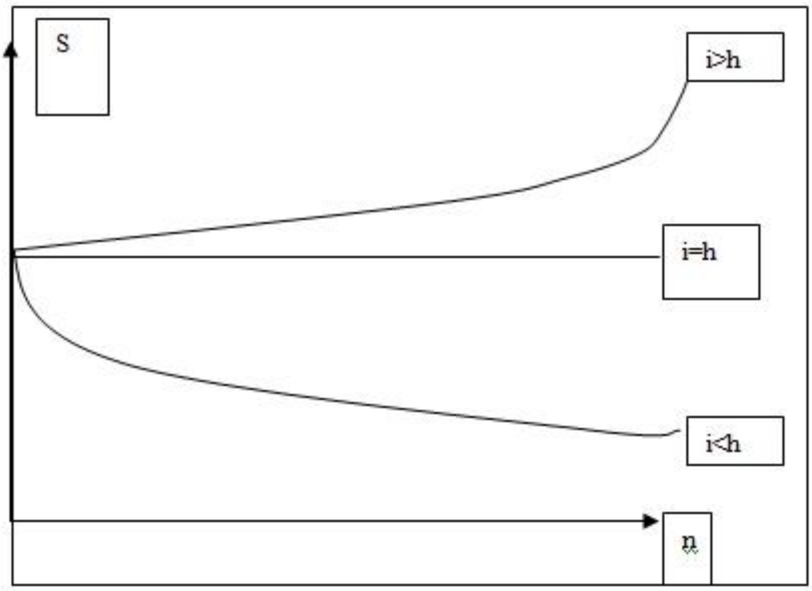
Обратимся теперь к наращению по сложным процентам. Подставив в формулу (2.42) значение
S и J_p, находим.

$$C = P\frac{(1+i)^n}{J_p} = P\left(\frac{1+i}{1+\frac{h}{100}}\right)^n \quad (2.5.)$$

Величины, на которые умножается Р в предыдущих формулах, представляют собой множители наращения с учетом инфляции.

Посмотрим теперь, как влияют ставка процента i и темп инфляции h на величину С. Очевидно, что если среднегодовой темп инфляции равен ставке процентов, то роста реальной суммы не произойдет: наращение будет поглощаться инфляцией и, следовательно, С=Р. Если же h/100>I, то наблюдается «эрозия» капитала, его реальная сумма будет меньше первоначальной. Только в ситуации, когда h/100<i, происходит реальный рост.

Рис. 2.1



Возникает вопрос: при какой процентной ставке наращение будет только компенсировать инфляцию? Если речь идет о простых процентах, то, приравняв множитель наращения с учетом инфляции в формуле (2.5) к единице, находим минимально допустимую (барьерную) ставку:

$$i^* = \frac{J_p - 1}{n}$$

Для сложных процентов искомую ставку определим на основе формулы (2.5). Получим i^*=h. Ставку, превышающую i^*, называют иногда *положительной ставкой процента*.

Пример 2.24.

По данным примерам 2.23 найдем минимально допустимую величину ставки. Напомним, что индекс цен за три месяца был равен 1,77.

$$i^* = \frac{1{,}77 - 1}{3/12} = 3{,}08 \text{ или 308\% годовых.}$$

Таким образом, только ставка, превышающая 308% годовых, будет в данных условиях приносить реальный доход.

Владельцы денег, разумеется, предпринимают различные попытки для компенсации обеспечения денег. Наиболее распространенной является корректировка ставки процентов, по которой осуществляется наращение, т.е. увеличение ставки на величину так называемой *инфляционной премии,* иначе говоря, производится индексация ставки. Итоговую величину можно назвать *брутто-ставкой или реальной ставкой процента*.

Обсудим методы определения такой ставки. Если речь идет о полной компенсации инфляции при начислении простых процентов, то необходимую величину находим из равенства

$$1 + nr = (1 + ni)J_p = (1 + ni)\left(1 + \frac{h}{100}\right)^n$$

где r - брутто-ставка (реальная ставка).

Отсюда

$$r = \frac{(1 + ni)J_p - 1}{n} \qquad (26)$$

Пример.

По данным предыдущих примеров получим,

$$r = \frac{(1 + 3/12 \times 0{,}5) \times 1{,}77 - 1}{3/12} = 3{,}965$$

Таким образом, простая ставка, равная 396,5% годовых, не только компенсирует инфляцию, но и обеспечивает реальную доходность, равную 50% годовых.

Величину брутто-ставки для наращения по сложной ставке процента находим равенства (формула Фишера)

$$1 + r = (1 + i)\left(1 + \frac{h}{100}\right)$$

Отсюда

$$r = i + \frac{h}{100} + \frac{h}{100} i. \qquad (2.7)$$

При малых ставках и малых темпах инфляции можно реальную ставку рассчитать приближенно как:

$$r = i + \frac{h}{100} \qquad (2.8)$$

Формула (2.7) по сравнению с формулой (2.8) содержит один дополнительный член, который при незначительных величинах i и h можно пренебречь. Если же они значительны, то ошибка (не в пользу владельца денег) станет весьма ощутимой. Например, даже при $i = 5\%$ и $h = 10\%$ «вклад» этого произведения в брутто-ставку составит 0,5%. Брутто-ставка в этом случае равна 15,5% вместо 15% по формуле (2.7). При годовой инфляции в 100% и той же ставке наращение брутто-ставка увеличивается до 0,05+1+1×0,05=1,1, т.е. до 110%, а не 105%.

Разумеется, что при высоких темпах инфляции корректировка ставки имеет смысл только для кратко - или, в крайнем случае, для среднесрочных операций.

Перейдем теперь к решению обратной задачи – к изменению доходности с учетом инфляции – определению i по заданному значению брутто-ставки. Если r объявленная норма доходности (брутто-ставка), то искомый показатель доходности в виде годовой процентной ставки i можно определить при начислении простых процентов как

$$i = \frac{1}{n}\left(\frac{1+nr}{J_p} - 1\right) \quad (2.9)$$

Доходность, как видим, здесь зависит от срока наращения процентов. Напомним, что фигурирующий в этой формуле индекс цен охватывает весь период начисления процентов.

Аналогичный по содержанию показатель, но при наращении по сложным процентам найдем на основе формулы (2.4):

$$i = \frac{1+r}{1+\frac{h}{100}} - 1 \quad (2.10$$

Если брутто- ставка определяется приближенно (2.47), то

$$i = r - \frac{h}{100}$$

Эту формулу нельзя применять при больших темпах инфляции.

Пример 2.26.

Найдем реальную ставку сложных процентов для условий: годовая инфляция 120%, брутто-ставки 150%: $i = \frac{1+1,5}{1+1,2} - 1 = 0,1364$, или 13,68% (по упрощенной формуле 30%).

Можно компенсировать инфляцию, индексировав первоначальную сумму платежа P. В этом случае P периодически корректируется с помощью заранее оговоренного индекса. Такой метод принят в Великобритании. В этом случае

$$C = PJ_p(1+i)^n$$

Описать процесс расчетов в условиях инфляции можно и следующим образом. Здесь мы приходим к таким же формулам, как и раньше, но процесс рассуждений немного изменен.

Ставка, учитывающая инфляцию, для случая простых процентов.

Формула Фишера.

Пусть P-первоначальная сумма, n- период начисления, i-годовая простая ставка ссудного процента. Тогда наращенная сумма

$$S = P(1+ni)$$

Эта сумма не учитывает инфляцию.

Пусть уровень инфляции за рассматриваемый период n равен h.

S_h – это сумма денег, покупательная способность которой с учетом инфляции равна покупательной способности суммы S при отсутствии инфляции. Тогда

$$S_h = S(1+h) = P(1+ni)(1+h)$$

Но сумму S_h можно получить, поместив первоначальную сумму P на срок n под простую ставку ссудных процентов i_h, учитывающую инфляцию:

$$S_h = P(1+ni_h).$$

Отсюда

$P(1+ni)(1+h)=P(1+ni_h)\rightarrow(1+ni)(1+h)=1+ni_h\rightarrow1+ni+h+ni_h=1+ni_h\rightarrow i_h=$

$(ni+h+ni_h)/n/$

Именно под такую простую ставку ссудных процентов нужно положить первоначальную сумму на срок n, чтобы при уровне инфляции h за рассматриваемый период обеспечить реальную доходность в виде годовой простой ставки ссудных процентов i.

Если n=1 год, то i_h=i+h+ih. Это формула *Фишера*.

Величина h+ih называется *инфляционной премией*, как уже говорилось ранее.

$ni+h+ni_h= ni_h\rightarrow i=(ni_h-h)/(n+n_h)$. Это *формула реальной доходности* в виде годовой простой ставки ссудных процентов для случая, когда первоначальная сумма была инвестирована под простую ставку ссудных процентов i_h на срок n при уровне инфляции h за рассматриваемый период.

Пример. Период начисления n=3 месяца, ожидаемый ежемесячный уровень инфляции 2%. Под какую простую ставку ссудных процентов нужно положить первоначальную сумму, чтобы обеспечить реальную доходность i=5% годовых (проценты простые)?

Ожидаемый индекс инфляции за период начисления n=3 месяца =0,25 года $I_и=(1+0,002)^3\approx1,061$, то есть уровень инфляции h за рассматриваемый период h=0,061. Тогда $i_h=(ni+h+nih)/n=(0,25\times0,05+0,061+0,25\times0,05\times0,061)/0,25\approx0,297$(=29,7% годовых).

Задача. Период начисления n= 6 месяцев, ожидаемый ежемесячный уровень инфляции 1,5%. Под какую простую ставку ссудных процентов нужно положить первоначальную сумму, чтобы обеспечить реальную доходность i=6% годовых (проценты простые)?

Пример. Первоначальная сумма положена на срок апрель-июнь под простую ставку ссудных процентов i_h=15% годовых. Уровень инфляции в апреле составил 1%, в мае – 1,5%, в июне – 2%. Какова реальная доходность в виде годовой простой ставки ссудных процентов?

Индекс инфляции за рассматриваемый период n=3 месяца=0,25 года $I_и=(1+0,01)(1+0,015)(1+0,02)\approx1,046$, то есть уровень инфляции за рассматриваемый период h=0,046. Тогда реальная доходность в виде годовой простой ставки ссудных процентов $i=(ni_h-h)/(n+nh)=(0,25\times0,015-0,046)/(0,25+0,25\times0,046)\approx-0,033$(=-3,3% годовых), то есть операция убыточна.

Задача. Первоначальная сумма положена на срок январь-июнь под простую ставку ссудных процентов i_h=25% годовых. Уровень инфляции в январе составил 0,5%, в феврале -2%, в марте-1%, в апреле-0,5%, в мае -3%, в июне-1%. Какова реальная доходность в виде годовой простой ставки ссудных процентов?

Ставка, учитывающая инфляцию,

для случая сложных процентов.

Пусть P- первоначальная сумма, n- период начисления, i-годовая сложная ставка ссудного процента. Тогда наращенная сумма

$$S = P(1+i)^n.$$

Эта сумма не учитывает инфляцию.

Пусть уровень инфляции за рассматриваемый период n равен h.

S_h – это сумма денег, покупательная способность которой с учетом инфляции равна покупательной способности суммы S при отсутствии инфляции. Тогда

$$S_h = S(1+h) = P(1+i)^n(1+h)$$

Но сумму S_h можно получить, поместив первоначальную сумму P на срок n под сложную ставку ссудных процентов i_h, учитывающую инфляцию:

$$S_h = P(1+i_h)^n.$$

Отсюда

$P(1+i)^n(1+h)=P(1+i_h)^n \Rightarrow (1+i)^n(1+h)=(1+i_h)^n \Rightarrow (1+i)\sqrt[n]{1+h}=1+i_h$

$\Rightarrow i_h=(1+i)\, n\sqrt{1+h}-1.$

Именно под такую сложную ставку ссудных процентов нужно положить первоначальную сумму на срок n, чтобы при уровне инфляции h за рассматриваемый период обеспечить реальную доходность в виде сложной годовой ставки ссудных процентов i.

$$(1+i)\sqrt[n]{1+h} = 1+i_h \Rightarrow i = (1+i_h)/\sqrt[n]{1+h} - 1.$$

Это *формула реальной доходности* в виде сложной годовой ставки ссудных процентов для случая, когда первоначальная сумма была инвестирована под сложную ставку ссудных процентов i_h на срок n при уровне инфляции h за рассматриваемый период.

Пример. Период начисления n=3 года, ожидаемый ежегодный уровень инфляции 14%. Под какую сложную ставку ссудных процентов нужно положить первоначальную сумму, чтобы обеспечить реальную доходность i=5% годовых (проценты сложные)?

Ожидаемый индекс инфляции за период начисления n=3 года $I_и=(1+0{,}14)^3 \approx 1{,}48$, то есть уровень инфляции h за рассматриваемый период h=0,48.

Тогда

$$i_h = (1+i)\sqrt[n]{1+h} - 1 = (1+0{,}05)\sqrt[3]{1+0{,}48} - 1 \approx 0{,}197\,(=19{,}7\%\,\textit{годовых})$$

Задача. Период начисления n=2 года, ожидаемый ежегодный уровень инфляции 12%. Под какую сложную ставку ссудных процентов нужно положить первоначальную сумму, чтобы обеспечить реальную доходность i=6% годовых (проценты сложные)?

Пример. Первоначальная сумма положена на n=3 года под сложную ставку ссудных процентов i_h=20% годовых. Уровень инфляции за 1-й год составил 16%, за 2-ой год- 14%, за 3-й год – 13%. Какова реальная доходность в виде сложной годовой ставки ссудных процентов?

Индекс инфляции за рассматриваемый период n=3 года $I_и=(1+0{,}16)(1+0{,}14)(1+0{,}13) \approx 1{,}494$, то есть уровень инфляции h за рассматриваемый период h=0,494. Тогда реальная доходность в виде сложной годовой ставки ссудных процентов

$$i = (1+i_h)/\sqrt[n]{1+h} - 1 = (1+0{,}2)/\sqrt[3]{1+0{,}494} - 1 \approx 0{,}05(=5\%\,\textit{годовых})$$

Задача. Первоначальная сумма положена на n=2 года под сложную ставку ссудных процентов i_h=15% годовых. Уровень инфляции за 1-ый год составил 12%, за 2-ой год- 14%. Какова реальная доходность в виде сложной годовой ставки ссудных процентов?

Замечание. Аналогично можно найти процентную ставку, учитывающую инфляцию, и для других процентных ставок.

Упражнения

1. Вкладчик положил в банк, выплачивающий 10% простых в год, вклад 3000 руб. Какая сумма будет на счету вкладчика а) через 3 месяца, б) через 1 год, в) через 3 года 5 месяцев?
2. Какую сумму надо положить в банк, выплачивающий124% простых в год, чтобы получить 50 000 руб. а) через 4 месяца, б) через 1 год, в) через 2 года 9 месяцев?
3. В банк было положено 100 000 руб. Через 3 года 6 месяцев на счету было 120000 руб. Сколько процентов (простых) выплачивает банк в год?
4. В банк, выплачивающий10% простых годовых, положили 60 000 руб. Через сколько лет на счету будет 65 400 руб.?
5. Покупатель приобретает костюм, который стоит 50000 руб. Он уплатил сразу 20000 руб., а на остальную сумму получил кредит на 1 год 6 месяцев под 4% годовых (простых), который должен погасить ежемесячными равными уплатами. Чему равна каждая уплата?
6. Г-н X покупает в магазине телевизор, цена которого 600 000 руб. На всю эту сумму он получает кредит, который должен погасить за два года равными ежеквартальными уплатами. Чему равна каждая уплата, если магазин предоставляет кредит под 20% годовых (простых)?
7. Фермер приобрёл трактор, цена которого 1500000 руб., уплатив сразу 600 000 руб. и получив на остальную сумму кредит на 2 года 6 месяцев, который он должен погасить равными уплатами по полугодиям. Чему равна каждая уплата, если кредит выдан под 8% годовых (простых)?
8. Банк выдал г-ну У ссуду в 90000 руб. на 2 года под простой дисконт (учетную ставку), равный 12% в год. Какая сумма будет выдана господину Фёдорову на руки?
9. Г-н У из упражнения 8 желает получить при тех же условиях на руки 90000 руб. Сколько он будет должен отдать банку?
10. Какую сумму будет должен банку г-н У из упражнения 8, если он получит ссуду под 12% годовых (простых)? Что выгоднее г-ну У: взять ссуду под простой дисконт или под простые проценты?
11. Г-н Петров имеет вексель на 15000 руб., срок которого 1 июля. Он хочет учесть его 1 марта того же года в банке, простая учётная ставка которого 7%. Какую сумму получит г-н Петров за этот вексель? Какую сумму получит г-н Петров, если срок этого векселя 1 июля следующего года?

12. Клиент учёл 1 февраля 1992 года вексель на сумму 400 000 руб., срок которого 1 июня того же года, и получил за него 387900 руб. Какова учётная ставка банка?
13. Г-н Х должен выплатить господину У 20 000 руб. в следующие сроки: 5 000 руб. через 2 года, 5 000 руб. через 3 года и ещё 10 000 руб. через 5 лет, считая от настоящего момента. Г-н Х предложил изменить контракт, обязавшись уплатить 10000 руб. через 3 года и ещё 10000 руб. через 4 года от настоящего момента. Эквивалентны ли эти контракты, если на деньги начисляются 5% годовых (простых). Если контракты не эквивалентны, то какой из них выгоднее для г-на У?
14. Какую сумму должен выплатить г-н Х (из упражнения 13) по новому контракту через 4 года, чтобы новый контракт был эквивалентен первоначальному?

3. Сложные проценты

3.1. Определение сложных процентов

На сумму Р начисляется *i сложных процентов* в течение n процентных периодов, если в конце каждого периода к сумме, имевшейся на начало этого периода, прибавляется *i%* от наращенной ранее суммы.

В конце первого периода к сумме *P* прибавляется сумма *Pi,* т.е. наращенная сумма будет равна

S1=P+Pi=P(1+i)

В конце второго периода к сумме Р(1 + i) прибавляется сумма *P(1 + i)i* и наращенная сумма составит

S2 = Р(1 + i) + Р(1 + i)i = Р(1 + i*)*2.*

Аналогично, к концу третьего периода будем иметь наращенную сумму Р(1+i)2, и к концу n-го периода наращенная сумма будет равна

$S_n = P(l+i)^n$.

Множитель $(l+i)^n$ называется *множителем наращения для сложных процентов.*

При выводе последней формулы мы считали число периодов *n* целым. В практике финансовых расчётов часто приходится вычислять суммы, наращенные за нецелое число периодов начисления. Например, если рассматривается годовая ставка процентов, т. е. период равен одному году, то выведенная формула позволяет нам вычислить только суммы, наращенные за целое число лет. Однако имеется необходимость знать наращенную сумму, например, за полгода (n = 0.5) или за 3 года 2 месяца (n = 19/6) и т. п. По определению для произвольного (может быть, и нецелого) числа периодов *t* наращенная сумма при начислении сложных процентов вычисляется по формуле

$$S_t = P(1+i)^n \qquad (3.1)$$

Как и в случае простых процентов, так и в случае сложных процентов, финансовое учреждение может указывать процентную ставку на любой период начисления. Для сравнения следует привести такую ставку к годовой. Например, если Сбербанк даёт r % сложных в месяц, то исходная сумма P за год превратится в наращенную сумму $S = P(1+r)^{12}$. Соответствующая годовая ставка *i* определяется равенством $P(1+r)^{12}$= *P(1+i),* откуда $i = (1+r)^{12} - 1$. Если r = 6% в месяц,

то $i = (1+0.006)^{12} - 1 = 101.2\%$. Сравнивая с расчётом, приведённым в п. 1.1 для простых процентов, мы видим, что при одинаковой месячной ставке процента годовая ставка сложных процентов значительно больше, чем простых.

Пример 1. Сберегательный банк начисляет *ежегодно*8% сложных. *Клиент положил в этот банк* 20000 *руб. Какая сумма будет на счету а) через* 5 лет, *б) через 6 лет и три месяца?*

Решение, а) По формуле (3.1) находим *S,* если P = 20000, r = 0.08, *n* = 5, а именно

S= 20000 $(1 + 0.08)^5$ = 20000×1.469328 = 29386.56

руб.

Заметим, что если бы банк выплачивал 8% простых, то через 5 лет на счету была бы сумма

S= 20000(1 -I- 0.08×5) = 20000× 1.4 = 28000 руб.

б) В этом случае п = 6.25 и

S= 20000 $(1+0{,}08)^{6{,}25}$ = 20000× 1.617702 = 32 354.04 руб.

Как уже было сказано, в практике финансовых расчётов ставку сложных процентов, как правило, указывают на период, равный году, но вычисление сложных процентов может производиться каждое полугодие, квартал, месяц или даже день. При этом за каждый такой период, равный *1/m* части года, начисляются сложные проценты по ставке *i/m* сложных процентов. В этом случае формула (3.1) примет вид:

$$S = P(1+\frac{i}{m})^{tm} \quad (3.2)$$

где *t*— длительность промежутка времени, в течение которого начисляются сложные проценты; *t* измеряется в долях года.

Например, в случае одного квартала *t* = 0.25.

Чтобы отметить, что при годовой ставке сложных процентов *i наращение* сложных процентов производится *m* раз в году по ставке *i/m* эту годовую ставку обозначают *jm и называют номинальной ставкой процента*. Тогда последняя формула запишется так:

$$S = P\left(1+\frac{jm}{m}\right)^{tm} \quad (3.2)$$

Пример 2. Решим *пример 1 (а), если j4* = 8% и если*j12 = 12%.*

Решение. Если j4 = 8%, то по формуле (3.2)

S= 20 000 (1 + 0.08/4)5*4 = 20 000 × 1.4859474 = 29 718.95 руб. Если *j12* = 8%, то аналогично

S= 20 000 $\left(1+\frac{0.08}{12}\right)^{5*12}$ = 20 000 ×1.4898457 = 29 796.91 руб.

Мы видим, что при увеличении числа периодов начисления процентов при той же годовой процентной ставке наращенная сумма увеличивается.

3.2. Основные задачи на сложные проценты

При использовании сложных процентов встречаются те же три задачи, которые были рассмотрены для простых процентов – дисконтирование, определение срока и определение процентной ставки. Первая задача встретилась в примерах 1 и 2 из раздела 1. следующих двух примерах решаются две другие задачи.

Пример 3. *Господин Смирнов может вложить деньги в банк, выплачивающий* J_{12} = 7%. *Какую сумму ему следует сложить, чтобы получить* 3000 *руб. через* 4 года 6 *месяцев?*

Решение. По условиям задачи: $j12$ = 7% = 0.07, m =12, t= 4.5.

По формуле (3.2) имеем

$$3000 = P(1+\frac{0.07}{12})^{12*4.5},$$

или

$$3000 = P(1 + 0.0058)^{54},$$

откуда находим

$$P = 3000(1 + 0.0058)^{-54} = 3000 \times 0.7317655 = 2195.30 \text{ руб.}$$

В этой задаче требовалось узнать, сколько надо вложить в настоящее время, чтобы накопить сумму *S* через некоторое время в будущем. Решение этой задачи называется дисконтированием суммы *S*. Эта задача решается формулой

$$P = S/(l+i)t = S(l+i)^{-t} \quad (3.3)$$

если начисление *i%* сложных производится один раз в год в течение *t*лет, и формулой

$$P=S/(1+jm/m)^{tm}=S(l+jm/m)^{-tm} \quad (3.4)$$

если начисление процентов производится по ставке *jm* в течение *t* лет.

Множитель (1 + *i)-t* называется *дисконтным множителем;* имеются его таблицы для различных значений i и *t*.

Пример 4. *Господин Филиппов хочет вложить* 5000 руб., чтобы через 2 года получить 7 000 руб. *Под какую процентную ставку j1 он должен вложить свои деньги?*

Решение. При ставке *j1*проценты начисляются 1 раз в год. Применим формулу (3.1) при *S*= 7000,P = 5000,*t*= 2 и определим из неё значение г:

$7000 = 5000(1 + i)^2$; $(1 + i)^2 = 1.4$; $1 + i = 1.183$;

$i= 0.183$; $i = 18.3\%$.

Пример 5. *Определим годовую процентную ставку начисляемых ежегодно процентов, если вложенная сумма денег удваивается через* 8 лет.

Решение. Применяем формулу (3.1). По условию задачи *S*= *2P, t*= 8, требуется найти i:

$2P = P(1 + i)^8$; $1 + i = \sqrt[8]{2} = 1.09051$; $i = 0.09051 = 9.051\%$.

3.3. Непрерывное начисление процентов

Мы видели (пример 2), что сумма, наращенная за *t* лет при постоянной процентной ставке *jm* с увеличением числа m увеличивается — в курсе высшей математики этот результат доказывается в общем виде. Покажем, что при неограниченном увеличении m наращенная сумма S = S(t) стремится к конечному пределу

$$\lim_{m\to\infty} Sm = \lim_{m\to\infty} \lim P\left(1 + \frac{j}{m}\right)$$

Обозначим *j/m= h;* если *m*→∞ , то *h*— 0, тогда

$$S = \lim_{m\to\infty} P\,(l + \frac{jm}{m})^{mt}$$

Известно, что $\lim_{h\to 0}(l + h)^{1/h} = e$, где e $= 2.718281828 \ldots$, - основание натуральных логарифмов, поэтому:

lim Sm = Pe^{jmt} .

m→∞

Этот факт даёт основание применять так называемое *непрерывное начисление процентов по годовой ставке, обозначаемой буквой δ, которая называется силой роста*. *П*ри этом наращенная за время *t* сумма определяется формулой

$$S = Pe^{\delta t}. \qquad (3.5)$$

Процентная ставка *δ* в этом случае называется *силой роста.* Иногда силу роста обозначают *j*∞.

Пример 6. *Решить пример 1 при условии, что банк начисляет j*∞ = 8%.

Решение. В этом случае Р = 20000; *δ* = *j*= 0.08; *t* = 5.

По формуле (3.5) находим

$S = 20000e^{0,08x5} = 20000e^{0,4} = 20\,000 \times 1.49182 = 29836.49$ руб.

Сравнивая с результатом примера 2, видим, что сумма, полученная при непрерывном начислении процентов, лишь немного больше суммы, полученной при применении ставки j_{12}. Из формулы (3.5) непосредственно следует формула дисконтирования капитала при непрерывном начислении процентов:

$$P = Se^{-\delta t} \qquad (3.6)$$

3.4. Учёт векселей по сложной учётной ставке

Операция *банковского учёта,* рассмотренная в п. 1.7, иногда производится по сложной учётной ставке *dc,* начисляемой один раз в год, или по сложной учётной ставке *fm,* которая начисляется *m* раз в год в размере *fm/m%.* В этих случаях сумма денег P, выплачиваемая банком за вексель на сумму *S,* вычисляется по формулам:

$$P = S(l- dc)^t \qquad (3.7)$$

$$P=S(1-fm/m)^{tm} \qquad (3.8)$$

где *t*— величина промежутка времени от момента учёта векселя до срока его выкупа (в годах).

Пример 7. *Вексель выдан на* 10000 *руб. с уплатой* 15 октября. *Владелец документа погасил его в балке* 15*августа того же года по сложной учётной ставке* 10%.*Сколько он получил? Сколько получит владелец документа, если срок уплаты по нему* 15 *октября следующего года?*

Решение. Число дней между 15 августа и 15 октября равно 60. Применяем формулу (2.7). S= 10000; dc= 0.1; t=60/360= 1/6=0.1(6),

P = 10000(1 - 0.1)$^{0.1(6)}$ = 0.982593 ×10000 = 9 825.93 руб.

Число дней между 15 августа и 15 октября следующего года равно 360 + 60 = 420 дней, т.е. t=420/360 = 7/6 = 1.1(6),

P = 10000(1 - 0.1)$^{1.1(6)}$ =0.8843338× 10000 = 8843.34 руб.

Сравнивая результат этого примера с результатом примера 10, мы замечаем, что если срок от момента учёта до момента выкупа векселя меньше года, то учёт по сложной ставке выгоднее для банка, чем по простой, а если этот срок больше года, то банку выгоднее учёт по простой ставке.

3.5. Эквивалентность процентных ставок

При заключении финансовых контрактов каждый участник сделки стремится заключить контракт на наиболее выгодных для себя условиях. Условия контракта могут быть различными, и надо иметь возможность сравнивать контракты. При этом различные контракты могут предусматривать различные виды начисления процентов, и для сравнения таких контрактов надо разработать способы приведения различных процентных ставок к одному виду.   Для этой цели вводятся понятия эквивалентности процентных ставок и эффективной процентной ставки.

Мы познакомились с семью видами процентных ставок, применяемых в финансовых расчётах. Это: простые и сложные проценты, начисляемые один раз в год (обозначим их *i,,* nic), годовая ставка *jm,* по которой m раз в год начисляется *jm/m* сложных процентов, ставка непрерывных процентов (сила роста) *5,* простая и сложная учётные ставки *dn*и *dc*и учётная ставка fm, начисляемая m раз в году. Напомним формулы для вычисления наращенной суммы *S* для всех семи видов процентных ставок:

$$S = P(1+ti),$$

$$S=P(1+ic)^{t},$$

$$S=P(1+jm/m)^{tm},$$

$$S=Pe^{\delta t},$$

$$S=P(1-td),$$

$$S=P/(1-dc)^{t},$$

$$S=P/(1-fm/m)^{tm},$$

Во всех формулах *t* есть число лет (оно может быть дробным).

Две *процентные ставки* называют *эквивалентными,* если применение их к одинаковым суммам в течение одинаковых промежутков времени даёт одинаковые наращенные суммы.

Приравнивая правые части каких-либо двух из приведённых выше семи формул и выражая из этого равенства одну процентную ставку через другую, мы получаем условие эквивалентности соответствующих процентных ставок за *t* лет. Таких равенств можно составить 21 и, следовательно, получить 42 выражения одной из процентных ставок через эквивалентную ей другую процентную ставку. Приведём все эти выражения. Приравнивая правые части формул (1) и (2), получим уравнение

$P(1 + tin) = P(1+ic)^t$, решая которое относительно iП и ic, получим условия эквивалентности этих ставок:

$$Iп = (1+ic)^t-1/t. \qquad (3.9)$$

$$i_c = \sqrt[t]{1 + ti_n} - 1 \qquad (3.10)$$

Из формул (1), (4) получаем условия эквивалентности iП и *δ:*

$$Iп = e^{\delta t}-1/t. \qquad (3.11)$$

$$\delta=\ln(1+tiП)/t. \qquad (3.12)$$

Из формул (1), (5) получаем условия эквивалентности iп и dп-

$$in=dn/(1-tdn). \quad (3.13)$$

$$dп=iп/(1+tiп). \quad (3.14)$$

Из формул (1), (6) получаем условия эквивалентности in и *dc:*

$$i\Pi=(1-dc)-t-1/t. \quad (3.15)$$

$$dc=1-1/\sqrt[t]{1+ti_n}\ . \quad (3.16)$$

Из формул (1), (7) получаем условия эквивалентности iп и

$$iп=(1-fm/m)-tm-1/t. \quad (3.17)$$

$$fm=\left(1-1/\sqrt[tm]{1+ti_n}\ \right). \quad (3.18)$$

Из формул (2), (3) получаем условия эквивалентности *ici jm:*

$$ic=(1 + jm/m)^{m}-1. \quad (3.19)$$

$$jm= m(\sqrt[m]{1+i_c} - 1). \quad (3.20)$$

Заметим, что эквивалентность ставки сложных процентов tc и ставки *jm*не зависит от числа лет *t* начисления процентов, т.е. можно говорить, что формулы (3.21) и (3.22) устанавливают эквивалентность ставок ic и *jm*, не упоминая число лет *t*. Такая же независимость эквивалентности от числа лет начисления процентов имеет место для ставок ic и *δ*, для ставок ic и *dc, для* ставок ic и *fm*, для ставок *jmи δ*, для ставок *jm* и *dc*, для ставок *jm* и fm, для ставок *δ* и *dc*, для ставок *δ* и fm , для ставок *dc* и fm. Приравнивая коэффициенты наращения за один и тот же срок, можно получить соотношения между любыми известными нам ставками

$$ic=e^{\delta}-1. \quad (3.21)$$

$$\delta=\ln(1+ic). \quad (3.22)$$

из формул (2), (5) получаем условия эквивалентности ic и *dn*

$$ic=1/\left(\sqrt[t]{1-td_n}\right)-1. \quad (3.23)$$

$$dп=1-(1+ic)^{-t}/t. \quad (3.24)$$

из формул (2), (6) получаем условия эквивалентности ic и *dc:*

$$ic=dc/(1-dc). \qquad (3.25)$$

$$dc = ic/(1+ic). \qquad (3.26)$$

Из формул (2), (7) получаем условия эквивалентности ic и fm:

$$ic=(1/(1-fm/m)^{m})-1. \qquad (3.27)$$

$$fm = m\left(1-\frac{1}{\sqrt[m]{1+i_c}}\right). \qquad (3.28)$$

Из формул (3), (4) получаем условия эквивалентности *jm* и δ:

$$jro=m(\sqrt[m]{e_\delta}-1). \qquad (3.29)$$

$$\delta = \min\left(1+\frac{j_m}{m}\right) \qquad (3.30)$$

Из формул (3), (5) получаем условия эквивалентности *jm* и dп

$$jm = m\left(\frac{1}{\sqrt[tm]{1-td_n}}-1\right). \qquad (3.31)$$

$$dn = \frac{1 - \left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{-tm}}{t}. \qquad (3.32)$$

Из формул (3), (6) получаем условия эквивалентности *jm* и *dc:*

$$jm = m\left(\frac{1}{\sqrt[m]{1 - d_c}} - 1\right). \qquad (3.33)$$

$$dc = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{m}}. \qquad (3.34)$$

Вычисление эквивалентных ставок применяется при изменении условий контракта.

Рассмотрим пример.

Пример 8. *Кредит предоставляется под* 5% *сложных годовых сроком на* 8 лет. Субъект, *берущий этот кредит, хочет получить его под простые проценты (ту же сумму* на тот *же срок). Какая ставка простых процентов должна быть предусмотрена контрактом?*

Решение. Надо определить ставку in, эквивалентную ставке ic за восемь лет. По формуле (3.9) имеем

$$i_n = \frac{(1 + 0.05)^8 - 1}{8} = 0.05969 = 5.97\%,$$

т. е. следует предоставить кредит под 5.97% простых.

3.6. Эффективная процентная ставка

Эффективной процентной ставкой, соответствующей данной процентной ставке, называется ставка сложных процентов tc, эквивалентная данной процентной ставке и не зависящая от срока применения этой ставки.

Как следует из п. 3.5, эффективные процентные ставки существуют только для ставок *jm, δ, dc,* f_m . Они определяются формулами (3.21), (3.23), (3.27) и (3.29).

Вычисление эффективной процентной ставки применяется для определения реальной доходности финансовой операции. Эта доходность определяется соответствующей эффективной процентной ставкой.

Рассмотрим примеры.

Пример 9. Банк выплачивает *по вкладам* 10% *годовых (сложных). Какова реальная доходность вкладов при начислении процентов а) ежемесячно, б) ежеквартально, в) по полугодиям, г) непрерывно?*

Решение. Надо найти эффективную процентную ставку rc, эквивалентную а) *j12,* б) j4, в) j2 г) δ.

а) по формуле (3.21)

$i_c = (1 + 0.1/12)^{12} - 1 = 0.1047 = 10.47\%$,

б) по формуле (3.21)

$i_c = (1 + 0.1/4)^4 - 1 = 0.1038 = 10.38\%$,

в) по формуле (3.21)

$i_c = (1 + 0.1/2)^2 - 1 = 0.1025 = 10.25\%$,

г) по формуле (3.23)

$i_c = e^{0.1} - 1 = 0.1052 =$

10.52%.

3.7. Две схемы расчёта амортизационных отчислений

Рассмотрим расчет амортизационных отчяислений.

Способ *фиксированного процента* заключается в следующем: стоимость имущества снижается к концу каждого года на одно и то же число процентов *i* от его стоимости на начале года. Выведем формулу для определения стоимости имущества на конец k-го года. Если первоначальная стоимость имущества S, то в конце первого года она будет снижена на *Si* руб. и станет равной *S*— *Si*= S(1 — t).

Эта стоимость в конце второго года снизится на S(1 — *i)i* руб. и станет равна .S'(l —*i)* — S(1 — *i)i*= S(1 — г)^2. Очевидно, что в конце *k-го* года стоимость имущества будет равна

$$S_k = S(1 - i)^k. \tag{3.51}$$

Если начальная стоимость имущества S, срок службы этого имущества *n. лет* и остаточная стоимость его *So,* то можно определить число процентов, на которое стоимость снижается каждый год, из уравнения S(1-i)n=S0

$$1 - i = \sqrt[n]{\frac{S_0}{S}}; \qquad i = 1 - \sqrt[n]{\frac{S_0}{S}}. \tag{3.52}$$

Пример 10. Найдём *фиксированный процент снижения стоимости автомобиля из примера 11 из раздела 1 и составим таблицу стоимости этого автомобиля в течение* 5 лет при этом *способе уменьшения стоимости.*

Решение. По формуле (3.52) найдём процент, на который стоимость снижается ежегодно. По условию первоначальная стоимость *S*= 600000 руб., остаточная стоимость S0 = 50000 руб., число лет n= 5.

$$i = 1 - \sqrt[5]{\frac{50000}{600000}} = 1 - \sqrt[5]{0.08333} = 0.3961 = 39.16\%$$

Год службы	Амортизационные отчисления за год (руб.)	Стоимость на конец года (руб.)
0	0	600 000
1	600 000×0,3916=234 960	365 040
2	365 040×0,3916=142 950	222 090
3	222 090×0,3916=86 970	135 120
4	135 120×0,3916=52 913	82 207
5	82 207×0,3916=32 192	50 015

Некоторое отличие остаточной стоимости от 50000 объясняется погрешностью приближённых вычислений.

Заметим, что при применении описанного выше способа величина процентов i выражается обычно «неудобным» для расчетов числом, и этот способ не даёт возможности снижения стоимости до нуля, так как при 0 < i < 1 все члены последовательности (1 — i)n положительны. Чтобы избежать таких неудобств, на практике применяется так называемый *способ двойного процента.* Этот способ состоит в том, что фиксированный процент снижен, и стоимость i принимается равным удвоенному проценту снижения стоимости при равномерном снижении. Такое снижение осуществляется до какого-нибудь года, пока остаточная стоимость остается больше предполагаемой в задаче остаточной стоимости; после этого уменьшение стоимости производится равномерно.

Пример 11. *Составим таблицу уменьшения стоимости автомобиля из предыдущего примера способом двойного процента*

Решение. Стоимость снижается за 5 лет с 600000 руб. до 50 000 руб., т.е. на 550000 руб. При равномерном способе стоимость снижается ежегодно на 110000 руб., т.е. на 20%. Принимаем i = 40% и строим таблицу снижения стоимости автомобиля способом фиксированного процента:

Год Службы	Амортизационные отчисления за год (руб.)	Стоимость на конец года (руб.)
0	0	600000
1	600000x0.40 = 240000	360000
2	360000x0.40 = 144000	216000
3	216000x0.40= 86400	129600
4	129600x0.40= 51840	77 760
5	77 760x0.40= 31104	46656

Так как остаточная стоимость оказалась меньше ожидаемой (ожидаемая равна 50 000 руб.), то можно стоимость, остался после третьего года (129 600 руб.) снизить за оставшиеся и два года до остаточной стоимости (50000 руб.) равномерно, т. е. на 39800 руб. в год ((129600 - 50 000)/2 = 39800). Окончательная таблица снижения имеет вид:

Год службы	Амортизационные отчисления за год (руб.)	Стоимость на конец года (руб.)
0	0	600000
1	240000	360000
2	144000	216000
3	86400	129600
4	39 800	89 800
5	39800	50000

Упражнения к разделу 3

1. В банк, начисляющий 6% годовых (сложных), клиент положил 80 000 руб. Какая сумма будет на счету этого клиента а) через 1 год, б) через 8 месяцев, в) через 4 года, г) через 6 лет 6 месяцев?
2. Решить упражнение 1, если банк начисляет проценты по ставке $j3 = 6\%$.
3. Г-н Иванов может вложить деньги в банк, выплачивающий проценты по ставке $j6 = 10\%$. Какую сумму он должен вложить, чтобы получить 20 000 руб. через 3 года 3 месяца?
4. Г-н Петров хочет вложить 30 000 руб., чтобы через 5 лет получить 40000 руб. Под какую процентную ставку j12 он должен вложить свои деньги?
5. Через сколько лет 1 руб., вложенный в банк, выплачивающий проценты по ставке $j1= 10\%$ превратится в 1000 000 руб.?
6. Клиент вложил в банк 100 000 руб. Какая сумма будет на счету этого клиента через l год, если банк начисляет проценты
по ставке а) j1 = *5%, б)* $j6$ = 5%, в) $j12$ = 5%, г) j360 = 5%, д)
j∞ = 5%?
7. Какая сумма будет на счету клиента из предыдущего примера при условии (д) через 8 лет?
8. Какую сумму надо положить в банк, выплачивающий непрывные проценты по ставке j∞= 7%, чтобы через 10 лет на счету было 50 000 руб.?
9. Банк начислял на вложенные в него деньги проценты непрерывно по ставке в 1990 г. — 12%, в 1991 г. — 18%, в 1992 и 1993 гг. — 24%. Какая сумма будет на счету 31 декабря 1993 года, если 1 января 1990 года на этот счёт было положено 30000 руб.?

10. Г-н X имеет вексель на 20 000руб.., который он хочет учесть 1 апреля текущего года в банке по сложной учётной ставке, равной 7%. Какую сумму он получит, если срок векселя а) 1 июня того же года, б) 1 июня следующего года?
11. Определить ставку сложных процентов, эквивалентную ставке а) $j2$ = 10%, б) $j6$ = 10%, в) $j12$=10%, г) $j\infty$ = 10%.
12. Банк выплачивает на вложенные в него деньги 8% годовых (сложных). Какую ставку jm должен установить банк, чтобы доходы клиентов не изменились, если а) m= 2, б) m = 6, в) m = 12, г) m = ∞?
13. Банк начисляет на вложенные в него деньги проценты по ставке $j4$ = 6% и собирается перейти к непрерывному начислению процентов. Какую силу роста должен установить банк, чтобы доходы клиентов не изменились?
14. Банк учитывает вексель за 60 дней до срока его оплаты по простой учётной ставкеd = 6%. Какую сложную учётную ставку должен установить банк, чтобы доход банка не изменился?

4. *Приведенная (с*овременная) стоимость

4.1. Определение приведенной (современной) стоимости денег

Ранее отмечалось, что некоторая сумма денег, (оторую мы имеем сегодня, представляет большую ценность, чем та же сумма, полученная через год. Как можно оценить сегодняшнюю ценность суммы денег, которая будет получена некоторое время? Иными словами, как „привести" одну сумму денег к другой? Так как в качестве „сегодня" можно взять любую дату в прошлом, настоящем или будущем то, как и ранее мы будем говорить о *современной ценности суммы денег.* Обычно это понятие применяется не к одной единственной сумме денег, а к потоку денежных платежей, производимых в различные моменты времени. Здесь мы рассмотрим решение задачи с учётом начисления сложных процентов на деньги, находящиеся в обороте.

Современная ценность суммы *S,* которая будет получена *t* лет, равна той сумме *P,* которая превратится через *t лет с*умму *S,* если на неё будут начисляться сложные проценты по годовой ставке i. То *есть современная ценность P суммы S вычисляется по формуле* дисконтирования по сложному проценту(3.3)

$$P=S(1+i)^{-t}.$$

или по формуле (3.4), если начисление производится по номинальной ставке

j_m:

$$P = S\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-tm}.$$

В финансовой литературе современную ценность денег чаще называют *приведённой стоимостью,* т.е. стоимостью, приведённой к сегодняшнему моменту.

Пример 1. *Кредитор даёт деньги в долг, получая вексель, по которому* через два года *будет выплачено*5 000 *руб. Какую сумму следует дать под* этот вексель сегодня, если за взятые в долг деньги выплачиваются проценты по ставке *34* = 6%?

Решение, Надо найти современную ценность суммы 5000 руб. по формуле (2.4), где 5 = 5000, m = 4, *jm*= 0.06, *t*= 2. Имеем.

$P=5\ 000(1+0.06/4)^{-8}=5\ 000\times 0.8877=4\ 438.55$ *руб.*

Итак, при условиях задачи современная ценность 5 000 руб. равна 4438.55 руб. Эту сумму и следует дать под вексель. Понятие современной ценности денег распространяется и на деньги, включённые в оборот *t* лет назад. Современная ценность *S*суммы *P,* данной t лет тому назад под г%, равна наращенному значению этой суммы, т. е. вычисляется по формуле (2.1)

$$S = P(1 + i)^t.$$

Если сумма P была вложена *t*лет назад под *jm%,* то современная ценность этой суммы вычисляется по формуле

$$S = P\left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{tm}$$

Если на деньги, находящиеся в обороте, начисляются непрерывные проценты силой роста *δ,* то современная ценность! P суммы *S*, которая будет получена в будущем через *t* лет, вычисляется по формуле (2.6)

$$P = Se^{-\delta t}.$$

а современная ценность *S* суммы P, которая была получена в прошлом *t* лет назад, вычисляется по формуле (2.5)

$$S = Pe^{\delta t}.$$

Итак, современная ценность суммы денег, которая будет получена в будущем, меньше этой суммы, а современная ценность суммы денег, которая была включена в оборот в прошлом, больше этой суммы. В первом случае сумма умножается на дисконтный *множитель* — и операция нахождения её современной ценности называется *дисконтированием,* а во втором случае сумма умножается на наращивающий множитель.

Понятие *современная ценность денег* является обобщением двух понятий: *вкладываемая сумма* и *наращенная сумма.* Его понятие находит широкое применение в финансовых расчетах.

Идея расчетов в потоках всегда следующая;

1. Складывать и вычитать можно только суммы, приведенные к одному моменту времени;
2. Сумму, которые появятся в потоке в будущем, должны быть дисконтированы (приведены) к этому моменту времени;
3. Суммы, появившиеся в потоке до этого момента, должны быть наращены;
4. Суммы, входящие в поток в этот момент, не изменяются.

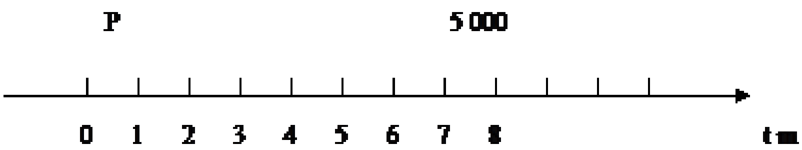
Пример 2. *В банк, выплачивающий j2*= 8%, *вложены* 3 года назад 10 000 руб. Какова современная *ценность этой суммы денег?*

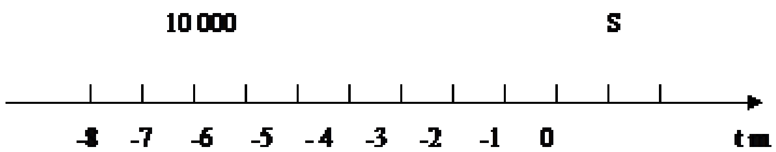
Решение. Современная ценность этой суммы равна наращенной сумме, которую находим по формуле (2.2), где Р = I0000, $j2$ = 0.08, m = 2, t = 3:

$$S=10\ 000(1+0.08/2)^{2\times3}=10\ 000\times1.26532=12\ 653.2.$$

'Го есть в условиях этой задачи современная ценность суммы
в 10000 руб. равна 12653.2 руб.

Ситуацию с определением современной ценности денег можно изобразить графически. Начертим ось времени, на которой время указано в периодах начисления процентов. Современный момент обозначим нулём. Над осью будем указывать суммы, которые рассматриваются в соответствующие моменты времени. На рис. 1 и 2 изображены ситуации примеров 1 и 2 соответственно:





В качестве современного момента времени может быть выбран любой момент, совпадающий с концом какого-либо периода начисления процентов. Так, в примере 1 ценность суммы 5000 руб. в момент 4 будет равна

$P = 5\,000(1+0.06/4)^{-4}$=4710.92 руб;

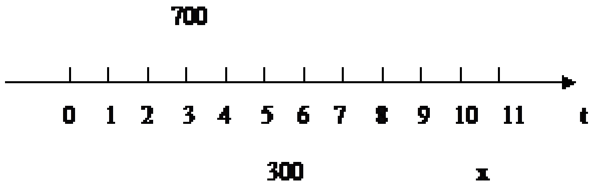
в примере 2 ценность суммы в 10000 руб. в момент *t*= — 3 равна

$S=10\,000(1+0.08/2)^{3}$=11 248.64 руб.

Рассмотрим еще два примера.

Пример 3. *Господин Иванов вложил в* банк 700 руб. Банк Выплачивает *проценты по ставке j4*= 6%. *Через* 6*месяцев* *Иванов снял со счёта* 300 руб., а через 2 года *после этого* *закрыл счёт. Какую сумму он получил при закрытии счёта?*

Решение. Суммы, которые г-н Иванов снимал со счета, изобразим под осью времени, а сумму, которую он вложил,— над осью; одно деление оси времени равно одному кварталу



(таков период начисления процентов).

Согласно утверждению, сделанному в п. 3.2, суммарная современная ценность снятых со счёта денег равна современной ценности вложенных денег, т. е.

$$700 = 300(1 + i)^{-2} + x(1 + i)^{-10},$$

где $i = 0.06/4 = 0.015$.

Из этого уравнения находим *яг*.

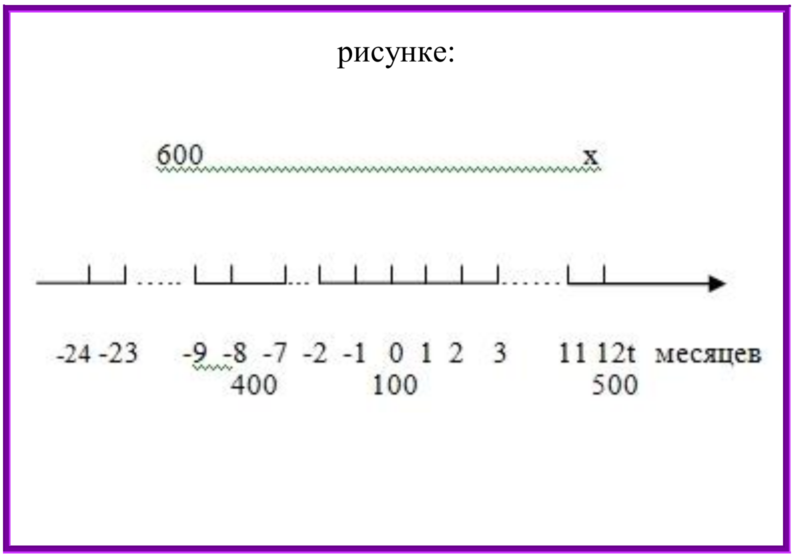
$$x = 700(1 + i)^{10} - 300(1 + i)^{8} =$$

$$= 700(1.015)^{10} - 300(1.015)^{8} =$$

$$= 474.43 \text{ руб.}$$

Пример 4. *Господин Петров положил 2 года назад* 600*руб. в банк, выплачивающий проценты по ставке j12=* 5%. *Восемь месяцев тому назад он снял со счёта*400 *руб., а сегодня снял ещё* 100 *руб. Через* 3 месяца*он желает вложить некоторую сумму так, чтобы через год от сегодняшнего момента закрыть счёт, получив*500 *руб. Какую сумму он должен вложить?*

Решение. Ситуация, описанная в задаче, изображена на



Как и в предыдущем примере, под осью изображены суммы, снимаемые со счёта, а над осью — суммы, положенные на счёт. Современная ценность тех и других (в любой момент времени) одинакова. Выберем в качестве современного момента конец третьего периода начисления процентов, т. е. момент, когда вносится искомая сумма *x.* Приравнивая в этот момент ценности сумм, внесённых на счёт, и сумм, снятых со счёта, получаем уравнение, из которого определяем значение *x,*

$600(1 + i)^{27} + x = 400(1 + i)^{11} + 100(1 + i)^{3} + 500(1 + i)^{9}$,

где i = 0.05/12 = 0.00417; подставляем это значение i в уравнение

x = 400× 1.00417 + 100× 1.004173 + 500 x 1.00417-9-
-600×1.0041727

= 400×1.04684 + 100×1.01256 + 500×0.96324 -
-600×1.11891 = 330.265.

Через 3 месяца надо вложить 330.27 руб.

4.3. Эквивалентность платежей

Рассмотрим задачи, возникающие при изменении условий контракта (замене платежей).

При изменении срока платежа на *t* процентных периодов новая сумма платежа *S1* получается из старой So по формулам

$$S_1 = S_0(1 + i)^t.$$

если срок платежа увеличивается на *t* периодов;

И при уменьшении срока платежа:

$$S_1 = S_0(1+i)^{-t}.$$

если срок платежа сокращается на *t* периодов.

В обеих формулах *i*— ставка сложных процентов за один период.

Пример 7. Фермер *должен вернуть банку* 1200000 руб. 1 июля 1993 года. *Какую сумму он должен внести в банк а) января* 1992 года: б) 1 *января* 1994 *года? Банк даёт ссуды* под 8% *годовых*

(сложных).

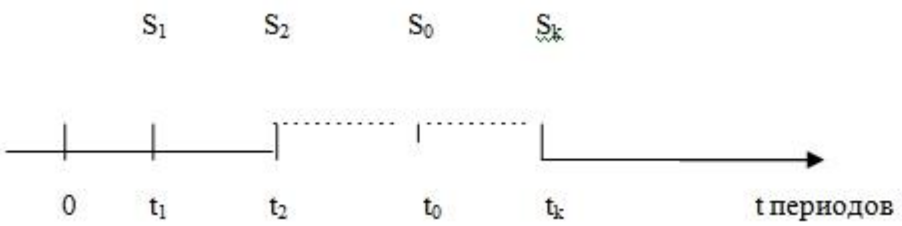
Решение, а) Так как платёж делается на 1.5 года раньше •рока, фермер должен внести в банк меньшую сумму:

$S=1200000(1 + 0.08)^{-1.5} = 1200000\times0.8910 = 1069\ 200$ руб.

б) В этом случае платёж делается на 0.5 года позже сро-юэтому в банк придётся внести сумму, большую, чем 1200 000 руб.:

$S = 1200000(1 + 0.08)^{0,5} = 1200000\times1.0392 = 1247040$ руб.

При объединении (консолидации) платежей надо свести несколько платежей $S_1,...,S_k$ со сроками выплаты $t_1, \ldots t_k$, соответственно в один платёж S_0.При этом могут возникнуть две задачи: определить величину объединённого платежа S_0, если он должен быть сделан в заданный момент времени t_0 J либо: определить срок t_0платежаS_0. Изобразим ситуацию, описанную в задаче, на оси времени:



Для эквивалентности замены платежей необходимо, чтобы ценность платежа S_0 в момент 0 (т.е. современная ценность платежа S_0) была равна сумме ценностей в момент 0 всех платежей S_1,... S_k, т.е. должно выполняться равенство

$$S0(1+i)^{-to} = \sum_{p-1}^{k} SP(1+i)^{-t}. \quad (4.1)$$

где i — ставка сложных процентов, по которой начисляются проценты за каждый процентный период. В случае первой из указанных задач решим это уравнение относительно S_0:

$$S0(1+i)^{-to} = \sum_{p-1}^{k} SP(1+i)^{-tp}\,. \qquad (4.2)$$

В случае второй из указанных задач решим уравнение (4.1) относительно t_0. Для этого прологарифмируем обе части уравнения (4.1):

$$\begin{aligned}
&\ln S_0 (1+i)^{-t_0} = \ln \sum_{l=1}^{k} S_i (1+i)^{-tl};\\
&\ln S_0 - t_0 \ln(1+i) = \ln \sum_{l=1}^{k} S_l (1+i)^{-tl};\\
&t_0 = \frac{\ln S_0 - \ln \sum_{l=1}^{k} S_l (1+i)^{-tl}}{\ln(1+i)}
\end{aligned} \qquad (4.3)$$

Пример 8. *Кооператор должен выплатить поставщику сырья*
через полгода после поставки 800000 *руб., ещё через полгода*
1 500000 *руб. и ещё через* 8 *месяцев* — 1300000 *руб.*
Эти *платежи решено объединить в один и выплатить весь долг*
год после поставки. Какую сумму надо выплатить, если

на долг *начисляется* 6% *годовых (сложных)?*

Решение. Приводя все платежи к настоящему моменту

ни, получаем по формуле (3.2)

$S0 = (1 + 0.06)1[0.8(1 + 0,06)^{-0.5} + 1.5(1 + 0.06)^{-1} +$

$+1.3(1+0.06)^{-1(6)}];$

So = 3574118.97 руб.

Пример 9. Кооператор из *предыдущего примера хочет вы́ть долг одним платежом, равным* 3 600 000*руб. В какой момент должен сделать такой платёж?*

Решение. находим значение *t0 по (4.3):*

$$t_0 = \frac{\ln 3.6 - \ln(0.8 \times 1.06^{-0.5} + 1.5 \times 1.06^{-1} + 1.3 \times 1.06^{-1(6)}}{\ln 1.06}$$

.

t_0=1.1238 года=1 год 45 дней

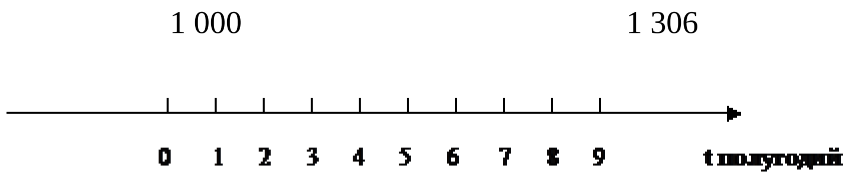
Итак, единый платёж величиной 3600000 руб. надо сделать

через 1 год 45 дней после поставки сырья.

Заметим, что при решении предыдущих задач мы использовали уравнения эквивалентности. Приведём примеры более сложных изменений контрактов, для расчёта которых применяются уравнения эквивалентности.

Пример 10. *Согласно контракту господин А обязан упла- тсподину Б сумму* 1000 *руб. сегодня* и 1306 *руб. через* 3. *Господин А хочет изменить контракт, вернув долг я равными платежами, сделав первый через год и второй* через 4 года, *считая от сегодняшнего дня. Какой величины должен* быть каждый из этих платежей, если деньги *приносят кредитору проценты по ставке j2=6%?*

Решение. Изобразим условия задачи на оси времени, помещая над осью платежи по первоначальному контракту, а под осью — по новому контракту. Буквой *x* обозначена искомая величина платежей.



Так как оба контракта должны быть равноценны для кредитора Б, то приведённые к моменту 0 (как и к любому другому моменту) ценности сумм, стоящих над осью, и сумм, стоящих под осью, должны быть равны, т. е. находим значение *x* из уравнения

$$1000 + 1306(1 + i)^{-6} = x(1 + i)^{-2} + x(1 + i)^{-8},$$

где $i = 0.06/2 = 0.03$.

$$x(1.03^{-2} + 1.03^{-8}) = 1000 + 1306\times1.03^{-6};$$

$$x = 1208.87.$$

Итак, господин А должен сделать два платежа по 1208.87 руб. Заметим, что тот же результат мы получим, взяв в качестве современного момента любой другой. Например, если принять момент 4 за современный момент (момент приведения), то имеем уравнение:

$$1000(1 + i)^4 + 1306(1 + i)^{-2} = x(1 + i)^2 + x(1+ i)^{-4} \quad (3.4)$$

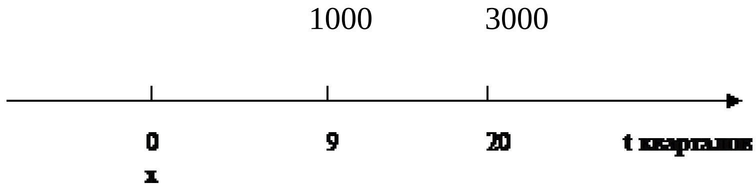
Разделив все члены этого уравнения на $(1 + i)^4$, получим то же уравнение, что и раньше.

В практике финансовых операций распространена сделка которая называется *продажей* контракта. Она заключаете в следующем. Некоторый субъект (или организация) имеет на руках контракт, по которому он должен получить с другого субъекта определённые суммы денег в определённые сроки. Владелец контракта желает получить деньги и для этого продаёт этот контракт банку (или другому лицу) который получит деньги по этому контракту в будущем. Сколько следует заплатить за этот контракт? Очевидно, за контракт надо заплатить его стоимость в момент покупки, т. е. его современную ценность, приняв за момент приведения начало контракта..

Рассмотрим пример.

Пример 11. *Господин Иванов купил у господина Петрова некоторую вещь, заключив контракт, в соответствии с* которым *обязуется заплатить* 1000 руб. через 27 *месяцев и ещё3 000 руб.* — через 5 лет. *Господин Петров, нуждаясь в деньгах, хочет продать этот контракт финансовой организации, которая согласна его купить при условии начисления на свои деньги процентов по ставке* $j4=$ 8%. *Сколько должна заплатить компания господину Петрову* за этот контракт?

Решение. Изобразим условия контракта на оси времени, на которой каждый процентный период соответствует кварталу (3 месяца). 27 месяцах содержится 9 процентных периодов, а в 5 годах - 20 процентных периодов.



Организация должна заплатить за этот контракт его стоимость в момент 0; эта стоимость обозначена буквой *x.* Очевидно, что

$$x = 1000(1 + \mathrm{i})^{-9} + 3000(1 + \mathrm{i})^{-20},$$

$$\mathrm{i} = 0.08/4 = 0.02;$$

$$x = 1000\ \ 1.02^{-9} + 3\,000 \times 1.02^{-20} =$$

$$= 1000 \times 0.8368 + 3\,000 \times 0.6730 = 2855.8 \text{ руб.}$$

В общем виде уравнение эквивалентности можно записать ющим образом:

$$\sum_{g=1}^{m} S_g V^{pg} = \sum_{k=1}^{l} R_k V^{t_k}$$

$$V = (I + t)^{-1} \text{ ,где}$$

R1,…..Rl - платежи по старому контакту;

t1,……tl - сроки, в которые должны быть произведены эти платежи;

S1,……Sm – платежи по новому контакту;

p1,………..Pm - сроки, в которые должны быть произведены эти платежи;

$V=(1+i)^{-1}$, если соответсвующие платежи производятся ранее момента, к которому приводятся платежи.

$V=(1+i)^{-1}$, если соответсвующие платежи производятся после момента, к которому приводятся платежи;

i - ставка процентов, начисляемых на деньги, находящиеся в обороте.

Упражнения

1. Какова современная ценность 100000 руб., если а) эта сумма будет получена через 3 года 6 месяцев, б) эта сумма была! получена 2 года 9 месяцев тому назад, в) эта сумма получена! в настоящий момент времени?
   Стоимость денег — 10% (то есть на деньги, находящиеся в обороте, начисляются 8% годовых (сложных)).
2. Банк начисляет на вложенные в него деньги проценты по ст ке $j4$ = 12%. Какова современная ценность суммы денег 10 000 руб., которая а) была вложена в этот банк 5 лет 4 месяца тому назад, б) будет вложена в банк через 1 год 8 месяцев
3. Г-нХ положил в банк, выплачивающий проценты по годовой ставке $i = 15\%$ (сложных) сумму 12000 руб. Через 1 год 6 месяцев он снял со счёта 4 500 руб., а ещё через 2 года положил на свой счёт 10 000 руб. После этого, через 3 года 6 месяцев он закрыл счёт. Какую сумму он получил?
4. Решить предыдущее упражнение при условии, что банк выплачивает проценты по ставке $j6$ — 24%.
5. Г-н У положил 3 года назад 50000 руб. в банк, выплачивающий проценты по ставке $j2$ — 8%. Год назад он положил ещё 20 000 руб., а через 3 года 6 месяцев после этого снял со счёта 10 000 руб. Ещё через 6 месяцев он желает положить на свой счёт такую сумму, чтобы ещё через год на счету было 20000 руб. Какую сумму он должен положить на свой счёт в последний раз?
6. Г-н X положил в банк некоторую сумму. Через 2 года он положил на свой счёт такую же сумму, а ещё через 1 год 6 месяцев — снова такую же сумму. Через 2 года 6 месяцев после этого на его счету было 25 000 руб. Какую сумму вносил в банк г-н X каждый раз, если банк начисляет на вложенные деньги проценты по годовой ставке i = 5%(сложных)?
7. Решить предыдущее упражнение, если банк выплачивает проценты по ставке $j12$ =12.
8. Решить упражнение 7, если банк выплачивает непрерывные проценты с силой ростаδ = 10%.
9. Предприниматель взял в банке кредит на сумму 5 млн. руб. под 8% годовых (сложных). Через год он вернул банку 3 млн. руб., а ещё через год взял кредит в сумме 2 млн. руб.

Через 2 года после этого фермер вернул полученные кредиты полностью. Какую сумму он при этом выплатил банку?

10. Какую сумму надо положить в банк, выплачивающий проценты по ставке j4 = 12%, чтобы иметь возможность снять со счёта 20 000 руб. через 1 год 6 месяцев и ещё 30 000 руб. через 1 год 6 месяцев после этого?
11. Решите предыдущее упражнение, приведя все суммы к моменту последнего изъятия денег.
12. Фермер приобрёл трактор, который стоит 2 500 000 руб. в кредит под 12% годовых (сложных). Через 1 год 6 месяцев он уплатил 1 500000 руб., а ещё через 6 месяцев полностью пог сил долг. Какую сумму он при этом выплатил?
13. Предприниматель взял в банке кредит в 12 млн. руб. под 15% годовых (сложных). Через 6 месяцев он вернул банк 4500000 руб., а ещё через 6 месяцев — 2 500000 руб. Спует 6 месяцев после этого он взял ещё ссуду в 3 млн. руб., и чер 2 года с момента получения этой ссуды полностью погас долг. Какую сумму составляет последняя уплата?