ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

**«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»**

КАФЕДРА «МАТЕМАТИКА»

Л.Ф. КОЧНЕВА, В.И. НОВОСЕЛЬЦЕВА

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

МОСКВА – 2013

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

**«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»**

КАФЕДРА «МАТЕМАТИКА»

Л.Ф. КОЧНЕВА, В.И. НОВОСЕЛЬЦЕВА

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Рекомендовано редакционно-издательским советом
университета в качестве учебного пособия для бакалавров
направления «Экономика» ИЭФ

МОСКВА – 2013

УДК 338.656.2
К33

Кочнева Л.Ф., Новосельцева В.И. Финансовая математика: Учебное пособие. – М.: МИИТ, 2013. –74 с.

В учебном пособии описана схема начисления по простому проценту и простой учетной ставке со всеми сопутствующими задачами, включая расчеты по векселям, расчеты с изменяющейся процентной ставкой, расчеты времени операции.

В схеме сложных процентов проанализированы задачи однократного и многократного начисления процента, дисконтирование, расчета эффективной ставки. Вводится понятие финансового потока и основное правило расчетов в нем. Приводятся основные существующие процентные ставки и их взаимосвязь.

Описаны виды финансовых расчетов по рентам и кредитам, нахождение наращенной и современной суммы ренты.

Рецензенты:
Шмелькин А.Л. – доктор физ.-мат. наук, профессор механико-математического факультета МГУ

Платонова О.А. – кандидат физ.-мат.наук, доцент, зав.кафедрой «Высшая математика» МИИТа

© МИИТ, 2013

Оглавление

1. Простые проценты

1.1. Начисление простых процентов

Процентом данного числа называется одна сотая часть этого числа.
Например, 1% от числа N составляет 0,01N.
Введем следующие обозначения:
p – исходная сумма денег;
i – ставка процентов на фиксированный промежуток времени;
J = iP – сумма начисленных процентов;
S – наращённая сумма денег, которая вычисляется по формуле:

$$S = P + iP = P(1 + i)$$

Если имеется n периодов времени, в каждом из которых исходная сумма P увеличивается на i%, то наращенная сумма S вычисляется по формуле:

$$S = P + iPn$$

или

$$S = P(1 + in). \qquad (1.1)$$

Множитель $(1 + in)$ называют коэффициентом наращения простых процентов.

Пример 1.1. Вкладчик положил в сберегательный банк, выплачивающий 5% годовых, 2000 руб. Какая сумма будет на его счету а) через 1 год? Б) через 3 года?
Решение. Согласно условию: P = 2000 руб; i = 0,05; а) n = 1 год; б) n = 3 года.
Наращенная сумма вклада: а) S = 2000(1+0,05) = 2100 руб. б) S = 2000(1+0,05*3) = 2000*1,15 = 2300 руб.

В формуле (1.1) число n периодов начисления процентов – целое число, и ставка процентов одна и та же на каждый период.

На практике вводится понятие базового промежутка времени, например 1 год и годовая процентная ставка i. При этом продолжительность финансовой операции может не равняться целому числу лет, тогда периоды начисления процентов n выражают дробным числом.
Например, если i годовая ставка, то за m кварталов начисление выполняется по формуле:

$$S = P(1 + \frac{i}{4} m). \tag{1.2}$$

За k месяцев:

$$S = P(1 + \frac{i}{12} k). \tag{1.3}$$

Начисление процентов за определенное количество дней может быть выполнено различными способами:
а) германская практика коммерческих банков в году считает 360 дней, в полном месяце30 дней, в неполном месяце точное количество дней. Способ называют обыкновенными процентами с приближенным числом дней ссуды и обозначают $\frac{360}{360}$.
б) французская практика коммерческих банков использует обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды, а длительность года 360 дней. Этот способ обозначают $\frac{365}{360}$.
в) английская практика использует точные проценты ($^{365}/_{365}$).
Количество дней в году берётся точным 365 (или 366) дней и точная длительность месяцев.
Замечание. Для вычисления продолжительности финансовой операции в днях можно пользоваться таблицей порядковых номеров дней в году. См. Приложение 1.

Пример 1.2. Ссуда в размере 200 тыс. руб. выдана 15.04.2013г. до 11.12.2013г. включительно. Ставка процентов банка составляла 15% годовых. Вычислите сумму, которую должен вернуть должник при различных методах определения срока начисления процентов.

Решение.

1. Определим точное число дней ссуды с помощью Приложения1. 15 апреля имеет порядковый номер 105; 11 декабря соответствует порядковый номер 345. Поэтому точное число дней ссуды равно: 345 – 105 = 240 дней.

Долг с начислением точных процентов с точным числом дней ссуды (английская практика $365/365$) будет рассчитан следующим образом:

$$S = 200000(1 + \frac{240}{365}0{,}15) = 219726{,}03\, руб$$

2. Вычислим приближенное число дней ссуды. Каждый полным месяц примем за 30 дней, всего 7 полных месяцев, 15 дней в апреле и 11 дней в декабре. Таким образом, всего дней:

$$7 \cdot 30 + 15 + 11 = 236\, дней$$

При начислении обыкновенных процентов с приближенным числом дней ссуды (германская практика $\frac{360}{360}$) получим сумму долга:

$$S = 200000(1 + \frac{236}{360}0{,}15) = 219666{,}67\, руб.$$

3. При начислении процентов с точным числом дней ссуды и длительностью года в 360дней (т.е. французская практика $\frac{365}{360}$) получим следующую сумму долга:

$$S = 200000(1 + \frac{240}{360}0{,}15) = 219999{,}99 \approx 220000\, руб.$$

Приведенный пример показывает, что способ начисления процентов влияет на сумму долга.

1.2. Математическое дисконтирование по простым процентам

Пусть требуется определить сумму P, которую нужно инвестировать в данный момент времени, чтобы через некоторый промежуток времени при известной ставке i% получить наращенную сумму S. Очевидно, что из формулы (1.1) следует

$$P = \frac{S}{1+in} \tag{1.4}$$

Эта операция и называется математическим дисконтированием, а множитель $\frac{1}{1+in}$ называется дисконтным множителем.

Пример 1.3. Какую сумму инвестор должен внести сегодня под 20% годовых, чтобы через 150 дней накопить 200 тыс. руб. По договору начисляются простые проценты.

Решение. По условию: S = 200000 руб, i = 0,2, t = 150 дней.

$$P = \frac{S}{1+\frac{t}{365}i} = \frac{200000}{1+\frac{150}{365}0{,}2} = 184810{,}9\,руб.$$

Ответ. Инвестор должен внести 184810,9 руб.

1.3. Банковский учет по простым процентам

Банковским (или коммерческим) учётом называется дисконтирование по учетной ставке суммы кредита, ссуды или при покупке ценных бумаг (например, векселей), при этом процентные деньги вычитаются из суммы долга в начале финансовой операции.

Размер дисконта, удерживаемого банком, равен D = S – Pи учетная ставка d на период вычисляется по формуле:

$$d = \frac{S-P}{S \cdot n}, \tag{1.5}$$

где n – число периодов дисконтирования. Следовательно,

$$S - P = Snd. \qquad (1.6)$$

Из (1.6) получаем величину P, которую получает заемщик (получатель ссуды) или владелец векселя при его продаже банку:

$$P = S(1 - nd). \qquad (1.7)$$

Множитель ν = 1 – ndназывается дисконтным банковским множителем.

Пример 1.4.Определить, за сколько лет вклад в 10000 рублей удвоиться при ставке 80%.

Рассмотрим банковский учет на примере работы с векселями. Вексель – это ценная бумага, представляющая собой подписанное долговое обязательство уплатить определённую сумму денег (вернуть долг) в определенный срок.

Обозначим:

P_0 – номинальная стоимость векселя (величина долга)

i – ставка процентов по векселю;

n – срок, на который выдан вексель (в долях года)

d – учётная ставка процентов при досрочной продаже векселя;

S – стоимость векселя с процентами при погашении по истечении срока;

P – цена продажи при досрочной реализации векселя.

Очевидно, что

$$S = P_0(1 + ni) \qquad (1.8)$$

При досрочной продаже векселя покупатель (например, банк) дисконтирует стоимость S по формуле:

$$P = S(1 - td), \qquad (1.9)$$

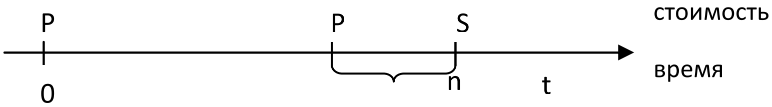
где t– интервал времени от момента продажи до погашения (в долях года).

Цену продажи векселя можно вычислить по единой формуле:

$$P = P_0(1 + ni)(1 - td). \qquad (1.10)$$

Заметим, что $(1 - td) > 0$ и $t < \frac{1}{d}$.

Изменение стоимости векселя можно показать на временной оси:



Пример 1.5.Вексель 500тыс. руб. сроком на 3 года учтён в банке через один год. Определить цену продажи, если учетная ставка банка 8% годовых.
Решение. По условиюS = 500 тыс. руб. наступит через 3 года. Цену продажи вычислим по формуле (1.9), где t = 2 года:

$$P = 500000(1 - 2 \cdot 0{,}08) = 420000\,руб.$$

Ответ: банк выплатит владельцу векселя 420000руб.
Пример 1.6.Г-н А занял у г-на Б 5000 долларов под 40% годовых, выдав ему расписку (вексель) вернуть деньги с процентами через 90 дней. Г-н Б продал вексель через 30 дней г-ну С со скидкой 30%. Определить цену продажи или сколько получил г-н Б за вексель.
Решение. Стоимость векселя – это долг г-на А:

$$S = 5000(1 + 0{,}4\frac{90}{360}) = 5500\,долларов$$

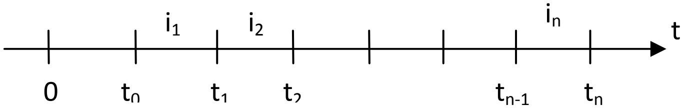
Цена продажи:

$$P = 5500(1 - 0{,}3\frac{60}{360}) = 5225\,долларов$$

Ответ: Г-н Б получит 5225 долларов, г-н С получит 5500 долларов. То есть г-н Б заработает за 30 дней 225 долларов, а г-н С заработает за 60 дней 275 долларов.

1.4. Переменные процентные ставки

При заключении финансовых соглашений может предусматриваться изменение процентных ставок через определённые промежутки времени. Пусть, например, отрезок времени $[t_0,t_n]$ разбит на части, на каждой из которых фиксируется ставка процентов:



Приращение суммы денег P за весь промежуток времени составит:

$$J = i_1 P(t_1 - t_0) + i_2 P(t_2 - t_1) + \ldots + i_n P(t_n - t_{n-1}) =$$

$$= P\sum_{k=1}^{n} i_k (t_k - t_{k-1}). \qquad (1.11)$$

Наращенная сумма будет вычисляться по формуле:

$$S = P + P\sum_{i=1}^{n} i_k (t_k - t_{k-1}) = P[1 + \sum_{k=1}^{n} i_k (t_k - t_{k-1})] \qquad (1.12)$$

И, таким образом, множитель наращения при переменных ставках простых процентов имеет вид

$$\mu = 1 + \sum_{k=1}^{n} i_k (t_k - t_{k-1}) \qquad (1.13)$$

Пример 1.7. Определите наращенную за год сумму для вклада 100 тыс. руб, если банк по договору предлагает следующие условия: за первый квартал процентная ставка равна 10% годовых, за каждый следующий квартал ставка возрастает на 1,5%.

Решение. По условию P = 100000 руб., за 1-й квартал i_1= 10%, за 2-й i_2= 11,5%, за 3-й i_3= 13%, за 4-й i_4= 14,5%

Наращенная сумма за год вычисляется по формуле (1.12):

$$S = 100000(1 + 0{,}1 \cdot 0{,}25 + 0{,}115 \cdot 0{,}25 + 0{,}13 \cdot$$

$$\cdot 0{,}25 + 0{,}145 \cdot 0{,}25) = 100000 \cdot 1{,}1225 =$$

$$= 112250\, руб.$$

Ответ. Наращенная сумма за год составит 112250 руб.

Пример 1.8. В начале года ставка процентов по вкладам составляла 18% годовых. Через 3 месяца ставка была уменьшена до 15%, еще через 5 месяцев до 12% годовых.
а) Вычислите сумму процентов, начисленную на вклад 50 тыс. руб. за год.;
б) Какую сумму нужно положить на счет, чтобы через год получить 50 тыс. руб.?
Решение. Ставка $i_1 = 18\%$ действует 3 месяца; $i_2 = 15\%$ - 5 месяцев; $i_3 = 12\%$ - 4 месяца.
а) Сумма процентов за год вычисляется по формуле (4.1):

$$J = 50000\,(0{,}18 \cdot \frac{3}{12} + 0{,}15 \cdot \frac{5}{12} + 0{,}12 \cdot \frac{4}{12}) =$$

$$= 50000 \cdot 0{,}1475 = 7375\ руб.$$

б) Чтобы ответить на этот вопрос нужно выполнить дисконтирование суммы 50 тыс. руб, то есть применить формулу:

$$P = \frac{S}{\mu},$$ где S = 50 тыс. руб.

множитель μ наращения согласно формуле (1.13) в этом упражнении равняется 1,1475.
Поэтому

$$P = \frac{50000}{1{,}1475} = 43573\,руб.$$

Ответ. а) 7375 руб.; б) 43573 руб.

1.5. Реинвестирование под простые проценты

Реинвестированием называют такую операцию, когда наращённая сумма по истечении некоторого времени вновь вкладывается вместе с начисленными процентами. То есть проценты начисляются на суммы, наращенные в предыдущем периоде.
Пусть P – первоначальная сумма;

i_1–ставка процентов на промежутке времени $t \in (t_0, t_1)$;

i_2–ставка процентов $t \in (t_1, t_2)$;

…

I_k–ставка процентов $t \in (t_k, t_{k-1})$;

…

k = 1, 2, …,n.

Наращенная сумма кконцу первого промежутка составит:

$$S_1 = P[1 + i_1(t_1 - t_0)].$$

К концу второго промежутка наращенная сумма будет равна:

$$S_2 = S_1[1 + i_2(t_2 - t_1)] = P[1 + i_1(t_1 - t_o)] \cdot [1 + i_2(t_2 - t_1)].$$

Таким образом, наращенная сумма за nразличных периодов начисления определится по формуле:

$$S = P[1 + i_1(t_1 - t_o)] \cdot [1 + i_2(t_2 - t_1)] \cdot \ldots \cdot$$

$$\cdot [1 + i_k(t_k - t_{k-1})] \cdot \ldots \cdot [1 + i_n(t_n - t_{n-1})].$$

Для краткости формулы введем символ произведения $\prod_{k=1}^{n}$,и

тогда множитель наращения будет иметь вид:

$$\mu(t) = \prod_{k=1}^{n} \left[1 + i_k\left(t_k - t_{k-1}\right)\right] \qquad (1.14)$$

И формула для вычисления наращённой суммы запишется в виде

$$S = P \prod_{k=1}^{n} \left[1 + i_k\left(t_k - t_{k-1}\right)\right] \qquad (1.15)$$

Пример 1.9. В течение года ежеквартально банк устанавливает годовые ставки процентов: 9%, 10%, 11%, 12%. Определите годовой множитель наращения при последовательном реинвестировании суммы вклада 100 тыс. руб., и какова будет итоговая сумма?

Решение. $P = 100 тыс.руб.,$

$$t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = \frac{3}{12} = 0{,}25$$

$$i_1 = 0{,}09, i_2 = 0{,}1, i_3 = 0{,}11, i_4 = 0{,}12.$$

Годовой множитель наращения равен:

$$\mu = (1 + 0{,}25 \cdot 0{,}09)(1 + 0{,}25 \cdot 0{,}1)(1 + 0{,}25 \cdot 0{,}11)$$

$$(1 + 0{,}25 \cdot 0{,}12) = 1{,}1091907.$$

Сумма вклада будет равна 110919,07 руб.

1. Вопросы для самоконтроля

1. Напишите формулу для вычисления наращенной суммы при начислении простых процентов.
2. Чем отличаются точные проценты от обыкновенных?
3. Назовите способы начисления простых процентов в зависимости от числа дней финансовой операции.
4. Напишите формулу для вычисления множителя наращения при переменных простых ставках процентов.
5. Какая финансовая операция называется реинвестированием?
6. Какой вид имеет множитель наращения при реинвестировании?
7. В чем состоит смысл математического дисконтирования?
8. Что представляет собой банковский учет?
9. Как можно связать учетную ставку и ставку наращения по простым процентам?
10. Запишите формулу банковского дисконтного множителя.

2. Простые проценты

2.1. Формула наращения по сложным процентам

Предположим, что на денежную сумму начисляется проценты по ставке *i* за период (например за 1 год). Тогда через один период к сумме P добавится сумма *i*P, то есть наращенная сумма будет равна:

$$S_1 = P + iP = P(1+i).$$

Полученная сумма может быть инвестирована на следующий период, и в конце периода наращенная сумма S_2 будет равна:

$$S_2 = P(1+i) + iP(1+i) = P(1+i)^2.$$

Аналогично, к концу третьего периода будем иметь наращенную сумму

$$S_3 = P(1+i)^3,$$

и к концу n-го периода получим:

$$S_n = P(1+i)^n. \qquad (2.1)$$

В формуле (2.1) n – целое число.
Если n – нецелое число, то его следует преобразовать в доли периода начисления по ставке *i*. Например, если *I*–годовая ставка, а начисление нужно осуществить за 2г 3 месяца, то

$$n = 2 + \frac{3}{12} = 2{,}25 \text{ года}.$$

Величина $\mu = (1+i)^n$ называется множителем наращения сложных процентов.

Величина $v = \frac{1}{(1+i)^n}$ называется множителем дисконтирования сложных процентов.
Имеются таблицы значений μ и v для некоторых значений *i*и *n*.

Пример 2.1. Банк начисляет ежегодно 8% сложных. Вычислите наращенную сумму на вклад 10 тыс. руб.: а) за 5 лет; б) за 10 лет.

Решение. Наращенная сумма вычисляется по формуле $S = P(1+i)^n$, $P = 10000 руб, i = 8\%.$

а) По таблице найдем множитель наращения

$$\mu(n;i) = \mu(5;8) = (1+0{,}08)^5 = 1{,}4693.$$

$$S = 10000 \cdot 1{,}4693 = 14693 руб.$$

б) Из таблицы находим множитель наращения

$$\mu(10;8) = 2{,}1589; S = 10000 \cdot 2{,}1589 = 21589 \; руб.$$

2.2. Начисление сложных процентов *m* раз в году

В практике финансовых расчетов ставку сложных процентов обычно указывают годовую. Однако вычисление наращенных сумм может производиться по полугодиям, кварталам, месяцам или дням. То есть сложные проценты могут начисляться m раз в году. В этих случаях годовую ставку Iназывают номинальной и на период $\frac{1}{m}$ части года начисляются сложные проценты по ставке $\frac{i}{m}$, при этом число начислений за nлет составит mn.

Тогда формула наращения сложных процентов будет иметь вид:

$$S = P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}, \qquad (2.2)$$

где *P* – первоначальная (вкладываемая) сумма денег; *i* – номинальная годовая процентная ставка; *n* – промежуток времени, измеряемый в годах, в течение которого начисляются проценты; *m*– число начислений в году; *mn* – общее число начисляемых процентов.

Пример 2.2. Требуется вычислить наращенную сумму, если P=10 тыс.руб. инвестируется на 2 года и начисление процентов происходит по номинальной ставке i=10% различными способами: а)ежегодно, б) по полугодиям, в) ежеквартально.
Решение. а)

$$S = 10000(1+0{,}1)^2 = 10000 \cdot 1{,}21 = 12100\,руб.$$

б) $S = 10000\left(1+\frac{0{,}1}{2}\right)^4 = 10000 \cdot 1{,}2155 = 12155\,руб.$

в) $S = 10000\left(1+\frac{0{,}1}{4}\right)^8 = 10000 \cdot 1{,}2183 = 12183\,руб.$

Приведенный пример показывает, что наращенная сумма увеличивается с ростом числа начислений в году.
В некоторых случаях начисления сложных процентов по номинальной ставке i и m-разовом начислении в году для краткости вводится обозначение j_m и формула (2.2) записывается в виде:

$$S = P\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mn}, \qquad (2.3)$$

Пример 2.3. Банк начисляет сложные проценты на вклады по номинальной ставке i=8%.
Сравните результаты вычислений наращенной суммы, если
а) P=10 тыс.руб.; j_4=8%; n=2года;
б) P=10 тыс.руб.; j_{12}=8%; n=2года;
Решение. а) j_4=8% - означает, что номинальная годовая ставка равна 8% с начислением 4 раза в году, то есть по кварталам:

$$S = 10000\left(1+\frac{0{,}08}{4}\right)^8 = 10000 \cdot (1{,}02)^8 = 10000 \cdot$$

$$\cdot 1{,}17166 = 11716{,}6\,руб.$$

б) $S = 10000\left(1 + \frac{0{,}08}{12}\right)^{24} = 10000 \cdot (1{,}00666)^{24} =$

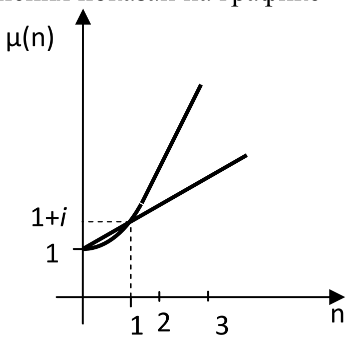
$= 10000 \cdot 1{,}17207 = 11720{,}7\,руб.$

2.3. Сравнение множителей наращения по простым и сложным процентам

Сравним характер изменения множителя наращения по простым $\mu_1 = 1 + ni$ и по сложным $\mu_2 = (1+i)^n$ процентам при фиксированной годовой ставке процентов *i*.
Некоторые конкретные вычисления для *i*=8% и переменных временных значениях n показаны в таблице:

n	30 дней	1 год	5 лет	50 лет
μ_1	1,0066	1,08	1,4	5
μ_2	1,0063	1,08	1,469	46,9

Характер изменения показан на графике



Из таблицы и графика видно, что при 0<n<1 множители соотносятся: $\mu_2<\mu_1$.
При n=1 выполняется равенство множителей $\mu_2=\mu_1$. И при n>1 начинает выполняться неравенство $\mu_2>\mu_1$.

Поэтому с точки зрения кредитора при краткосрочных операциях выгоднее применять простые проценты, при долгосрочных операциях – сложные проценты.

Пример 2.4. Требуется найти промежуток времени n, за который происходит удвоение первоначальной суммы денег при фиксированной ставке i, если а) i – ставка простых процентов; б) i – ставка сложных процентов.
Решение. а) По простым процентам множитель наращения $1+ni=2$. Следовательно, $n=\frac{1}{i}$. Если i=10%, то n=10 лет.

б) Если i – ставка годовая сложных процентов, то множитель наращения:

$$(1+i)^n=2.$$

Тогда, промежуток времени $n=\frac{\ln 2}{\ln(1+i)}$.

Из таблицы значений натуральных логарифмов возьмем ln2=0,6931 и ln(1+0,1)=0,0953.

Вычислим приближенно $n=\frac{0{,}6931}{0{,}0953}=7{,}2728\approx 7\,лет$.

Таким образом, удвоение первоначальной суммы денег произойдет: а) за 10 лет, если i=10% - простая ставка процентов; б) за 7 лет, если i=10% - ставка сложных процентов.

2.4. Плавающие ставки процентов

На практике могут предусматриваться изменяющиеся во времени, но фиксированные на определенные отрезки времени ставки процентов.
Например, ставка i_1 действует в течение времениn_1, i_2- в течение отрезка времени n_2, …,i_k- в течение отрезка времени n_k. Тогда наращенная сумма определяется по формуле:

$$S=P(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}\ldots(1+i_k)^{n_k}. \qquad (2.4)$$

Пример 2.5. Определить множитель наращения за 5 лет, если первые 2 года ставка процентов равнялась 9%, а следующие 3 года ставка увеличилась на 0,25%.
Решение. Первые 2 года множитель наращения равен
$\mu_1 = (1 + 0{,}09)^2$.
Множитель наращения равен $\mu_2 = (1 + 0{,}0925)^3$.
Общий множитель наращения равен
$\mu = 1{,}09^2 \cdot 1{,}0925^3 = 1{,}5492$.
Ответ. Общий множитель наращения составляет 1,5492.

В договорах при использовании переменных процентных ставок могут фиксировать базовое значение ставки процентов и некоторую надбавку к базовому значению – так называемую маржу, которая в течение срока финансовой сделки может быть постоянной или переменной.

Пример 2.6. Ссуда в размере 1 млн. руб. выдана на 4 года под 10% годовых (сложных). По договору первые 2 года маржа составляет 0,25%, в последующие 2 года маржа равна 0,5%. Требуется вычислить наращенную сумму долга.
Решение. По условию P=1000000 руб., n=4 года;i_1=0,1+0,0025=0,1025,n_1=2 года; i_2=0,1+0,005=0,105,n_1=2 года.
Наращенная сумма долга равна:

$$S = P(1 + i_1)^{n_1}(1 + i_2)^{n_2} = 1000000(1 + 0{,}1025)^2$$

$$(1 + 0{,}105)^2 = 1000000 \cdot 1{,}2155062 \cdot 1{,}221025 =$$

$$= 1484163{,}4$$

Ответ. Сумма долга составит 1484163,4 руб.

2.5. Начисление сложных процентов при дробном числе лет.

Если в формуле сложных процентов

$$S = P(1+i)^n$$

Период n начисления больше одного года и является дробным числом, то может применяться так называемый смешанный метод начисления процентов, согласно которому за целое число лет начисляются сложные проценты, а за дробную часть – простые проценты. И тогда формула для вычисления наращенной суммы имеет вид:

$$S = P(1+i)^a(1+bi), \tag{2.5}$$

где a–целое число лет, b – дробная часть года.

Пример 2.7. Требуется вычислить наращенную сумму долга, если первоначальная сумма равна 500 тыс. руб., выдана под 12% годовых сложных на 2,5 года.
Решение. По условиюP=500000 руб., i=0,12, n=2,5=2+0,5; a=2, b=0,5.

$$S = 500000(1+0{,}12)^2(1+0{,}5\cdot 0{,}12) = 664832\,руб.$$

Ответ. Сумма долга составит 664832 руб.

Смешанный метод может быть применен и в случае начисления процентов mраз в году, когда m является числом дробным.

Пример 2.8.На счет в банке внесено 100тыс. руб. и востребовано через 2 года и 3 месяца. По договору проценты начисляются по полугодиям по ставке 6% годовых сложных. Вычислите сумму денег, полученную клиентом при закрытии счета.
Решение. По условию P=100000 руб., i=6% годовых сложных, n=2 года 3 месяца=4,5 полугодий; a=4, b=0,5.

$$S = 100000\left(1+\frac{0{,}06}{2}\right)^{4{,}5} = 100000(1+0{,}03)^4\cdot(1+0{,}5\cdot 0{,}03) = 114239{,}14$$

Ответ. Сумма, полученная клиентом, составит 114239,14 руб.

2.6. Эффективная и эквивалентная процентные ставки.

Годовая ставка процентов, которая фиксируется в финансовых договорах, обычно называется номинальной ставкой. Учитывая различные способы начисления процентов, реальная ставка может отличаться от заявленной в договоре, и тогда возникает необходимость оценивать реальный эффект в целом за год. Для этого используется понятие эффективной ставки процентов. Эффективной ставкой называется такая годовая ставка ложных процентов, которая дает тот же финансовый результат, что и m-разовое начисление в году.

То есть согласно определению выполняется:

$$\left(1+\frac{i}{m}\right)^m = 1 + i_Э.$$

Таким образом,

$$i_Э = \left(1+\frac{i}{m}\right)^m - 1, \qquad (2.6)$$

где i – номинальная процентная ставка.

Пример 2.9. Банк начисляет ежемесячно проценты по номинальной ставке i=12%годовых. Вычислите эффективную годовую ставку процентов.

Решение. По формуле (2.6) эффективная ставка равна:

$$i_Э = \left(1+\frac{0{,}12}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}1268,$$

$$i_Э = 12{,}68\%.$$

Ответ. $i_Э$=12,68%. Эта ставка заменяет ежемесячное начисление процентов по номинальной ставке 12% годовых сложных.

Эффективные ставки позволяют применять эквивалентные сложные ставки процентов.

Две ставки сложных процентов называются эквивалентными, если соответствующие им эффективные ставки равны.
Обозначим i_1,i_2 – две номинальные ставки. По i_1 проводится m_1начислений в году; по i_2 соответственно m_2начислений в году.
Ставки i_1,i_2 будут эквивалентными, если по определению будут иметь одно и то же значение эффективной ставки, то есть должно выполняться равенство:

$$\left(1+\frac{i_1}{m_1}\right)^{m_1}=\left(1+\frac{i_2}{m_2}\right)^{m_2}=1+i_Э. \qquad (2.7)$$

Равенство означает, что при различных номинальных ставках сложных процентов и способах начислений финансовый результат может быть один и тот же.

Пример 2.10. Определить номинальную ставку сложных процентов с начислением по полугодиям, которая была бы эквивалентна ставке 24% с ежемесячным начислением.
Решение. Составим равенство (2.7):

$$\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2}=\left(1+\frac{0{,}24}{12}\right)^{12}.$$

Вычисляя правую часть, получим уравнение:

$$\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2}=1{,}268,$$

из которого следует

$$i=2\left(\sqrt{1{,}268}-1\right)=0{,}252;\ i=25{,}2\%.$$

Ответ. Ставка $i=25{,}2\%$ с начислением по полугодиям дает такой же финансовый результат, что 24% с ежемесячным начислением.

2.7. Дисконтирование по сложной процентной ставке

2.7.1. Математическое дисконтирование

Задача дисконтирования, как и в случае простых процентов, заключается в том, что нужно определить первоначальную сумму P, которую следует внести на счет в банке или инвестировать в какое-либо дело, чтобы при данной процентной ставке и определенном периоде времени получить наращенную сумму S.

Из формулы наращения по сложным процентам:

$$S = P(1+i)^n,$$

Где заданы процентная ставка i, период времени n и будущая сумма S, находим первоначальную вкладываемую сумму P (то есть современную стоимость будущих денег)

$$P = \frac{S}{(1+i)^n}. \qquad (2.8)$$

Величина $V = \dfrac{1}{(1+i)^n}$ называется дисконтным множителем (имеются таблицы значений, см. приложение).

Если проценты начисляются mраз в году, то первоначальная сумма денег вычисляется по формуле

$$P = \frac{S}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}}. \qquad (2.9)$$

Величина дисконта определяется очевидным образом:

$$D = S - P = S\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right],$$

или

$$D = S\left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn}}\right].$$

Пример 2.11. Клиент банка намерен получить через 3 года 500 тыс. руб. Какую сумму он должен внести на счет в настоящее время, если банком применяется сложная годовая ставка 12% и проценты начисляются: 1) ежегодно; 2) ежеквартально?
Решение.
1) S=500000 руб., n=3 года, i=12% сложные.

$$P = \frac{S}{(1+i)^n} = \frac{500000}{(1+0{,}12)^3} = 500000 \cdot 0{,}7118 = 355900\,руб.$$

Из таблицы взято значение множителя

$$v = \frac{1}{(1+0{,}12)^3} = 0{,}7118\,.$$

2) $P = \dfrac{500000}{\left(1 + \dfrac{0{,}12}{4}\right)^{12}} = 500000 \cdot 0{,}7014 = 350700\,руб.$

Из таблицы взято значение множителя

$$v = \frac{1}{(1+0{,}03)^{12}} = 0{,}7014\,.$$

Ответ. 1) 355900 руб.; 2) 350700 руб.

2.7.2. Банковское дисконтирование по сложной учетной ставке

Коммерческое дисконтирование долговых обязательств может осуществляться по сложной учетной ставке. Тогда цена продажи вычисляется по формуле:

$$P = S(1-d)^n,$$

где S – сумма долгового обязательства (стоимость векселя);
d – сложная годовая учетная ставка процентов;
n – срок от момента продажи до погашения в долях года.
$(1-d)^n$ – дисконтный множитель.

Дисконт равен:

$$D = S - P = S - S(1-d)^n = \left[1-(1-d)^n\right].$$

Если начисление дисконта проводится m раз в году, а d – номинальная ставка дисконтирования, то цена продажи векселя вычисляется по формуле:

$$P = S\left(1-\frac{d}{m}\right)^{mn},$$

где n – число лет, оставшихся до погашения векселя;
m – число периодов начисления дисконта в году.
Сравним банковский учет по простой и сложной ставкам:

1) приn=1 значения дисконтных множителей совпадают

$$1-nd = (1-d)^n.$$

2) при0<n<1 выполняется неравенство

$$1-nd > (1-d)^n.$$

3) приn>1 справедливо неравенство

$$1-nd < (1-d)^n.$$

Из сравнения следует, что при n<1 дисконтирование по сложным процентам выгоднее банку, чем при применении простых процентов.
Если n>1, то банку выгоднее учет по простой учетной ставке.

Пример 2.12. Долговое обязательство (ценная бумага) на сумму 500 тыс. руб. сроком на 3 года учтено за 2 года до срока погашения по сложной учетной ставке 12% годовых.

Определите величину дисконта:

а) учет по годам;

б) учет по полугодиям;

в) учет по простой ставке.

Решение.

а) По условию S=500000 руб., n=2 года, d=0,12.

$$P = 500000(1 - 0{,}12)^2 = 500000 \cdot 0{,}7744 = 387200\,руб$$

Владелец ценной бумаги получит 387200 руб.

Дисконт равен

$$D = 500000 - 387200 = 112800\,руб.$$

б) По условию S=500000 руб., n=2 года, m=2, d=0,12.

$$P = 500000\left(1 - \frac{0{,}12}{2}\right)^4 = 500000 \cdot 0{,}7807 = 390350\,руб$$

$$D = 500000 - 390350 = 109650\,руб.$$

в) По условию S=500000 руб., n=2 года, простая ставка 12% годовых.

$$P = 500000(1 - 2 \cdot 0{,}12) = 380000\,руб$$

$$D = 500000 - 380000 = 120000\,руб.$$

Ответ. Для банка наиболее выгодный вариант в), по которому самый большой дисконт D=120 тыс. руб.

2. Вопросы для самоконтроля

1. В чем заключается правило начисления сложных процентов?
2. Что значит «плавающие ставки процентов»?
3. Как осуществляется правило начисления процентов при дробном числе лет?
4. Какие проценты: простые или сложные выгоднее для инвестора в краткосрочных и долгосрочных операциях?
5. Напишите формулу для начисления сложных процентов несколько раз в году.
6. Какая годовая ставка процентов называется номинальной?
7. Какая ставка процентов называется эффективной?
8. Какие ставки процентов: номинальные или эффективные нужно использовать для равнения финансовых контрактов?
9. Запишите формулу математического дисконтирования по сложной процентной ставке.
10. Какие ставки сложных процентов называются эквивалентными?
11. Как осуществляется банковое дисконтирование по сложной учетной ставке?
12. Какие ставки процентов целесообразно использовать для равнения финансовых контрактов: номинальные или эффективные?

3. Непрерывное начисление процентов

При начислении сложных процентов m раз в году используется годовой множитель наращения

$$\mu = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m,$$

где i – номинальная годовая ставка процентов, m – число полугодий, кварталов, месяцев или дней в году.

Пусть теперь число $m \to \infty$, тогда можно рассмотреть предел годового множителя наращения:

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^m = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{i}\cdot i} = \lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{i}}\right]^i = e^i, \quad (3.1)$$

Где e=2,71828… - иррациональное число (число Эйлера).

Формула (3.1) получена на основе известного из математического анализа замечательного предела

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Таким образом, непрерывным наращением по ставке i называется увеличение в e^i раз за один год и за n лет в e^{in}раз.

Формула наращения по непрерывным процентам имеет вид

$$S = Pe^{in}. \qquad (3.2)$$

Процентную ставку при непрерывном наращении называют силой роста и обозначают греческой буквой δ – дельта. Сила роста характеризует относительный прирост наращенной суммы за бесконечно малый промежуток времени.

Формулу (3.2) принято записывать в виде

$$S = Pe^{\delta n}. \qquad (3.3)$$

В формуле (3.3) n не обязательно является целым числом.

Из (3.3) очевидным образом следует формула непрерывного дисконтирования:

$$P = Se^{-\delta n}. \qquad (3.4)$$

Пример 3.1. На сумму 100 тыс. руб. начисляют непрерывные проценты с силой роста δ=10%. Вычислите наращенную сумму за 2,5 года.
Решение. По условию P=100000 руб., δ=0,1, n=2,5 года.
Наращенная сумма равна:

$$S = 100000e^{0,1\cdot 2,5} = 100000e^{0,25} = 100000\cdot 1.28402 = 128402\,руб.$$

Ответ. S=128402 руб.
Пример 3.2. Какую сумму следует внести на счет в банке, чтобы через 2 года получить 100000 руб., если проценты начисляют непрерывно с силой роста 10% годовых.
Решение. По условию S=100000 руб., δ=0,1, n=2 года.
Применим формулу непрерывного дисконтирования:

$$P = Se^{-\delta n} = 100000e^{-0,1\cdot 2} = 100000e^{-0,2} = 100000\cdot 0,81874 = 81874\,руб.$$

Ответ. На счет нужно внести 81874 руб.

Замечание. Значения $e^{0,25}$ и $e^{-0,2}$ находят с помощью калькулятора, в котором имеются значения трансцендентных функций, или в компьютерной программе Excel. Кроме того, в справочниках по математике имеются таблицы значений функций $f(x)=e^x$ и $f(x)=e^{-x}$.
В отсутствие технических средств можно воспользоваться разложением в ряд $f(x)=e^x$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Рассмотрим пример, сравнивающий способы начисления процентов:

Пример 3.3. Требуется выбрать наиболее выгодный вариант вложения денег, вычислив эффективные годовые ставки, если банк предлагает варианты:

а) 12% годовых простых;
б) 12% сложных с начислением по полугодиям;
в) 12% сложных с начислением по кварталам;
г) непрерывное начисление процентов с интенсивностью 12%.
Решение. а) 12% годовых простых при начислении за год не изменяется.

б) $i_Э = \left(1 + \frac{0{,}12}{2}\right)^2 - 1 = 0{,}1236,\ i = 12{,}36\%.$

в) $i_Э = \left(1 + \frac{0{,}12}{4}\right)^4 - 1 = 0{,}1257,\ i = 12{,}57\%.$

г) $\delta = 12\%,\ i_Э = e^{0{,}12} - 1 = 0{,}1275,\ i = 12{,}75\%.$

Ответ. Наиболее выгодный вариант – непрерывное начисление процентов.

3. Вопросы для самоконтроля

1. Запишите формулу для непрерывного наращения процентов.
2. Каким образом происходит переход от дискретных процентов к непрерывным?
3. Какая процентная ставка называется силой роста?
4. Запишите формулу непрерывного дисконтирования.
5. Как выбрать наиболее выгодный вариант вложения денег?

4. Непрерывное начисление процентов

4.1. Эквивалентность процентных ставок

Процентные ставки называются эквивалентными, если при переходе от одной к другой получается один и тот же финансовый результат. Для нахождения значений эквивалентных процентных ставок составляются уравнения эквивалентности, то есть приравниваются соответствующие множители наращения.

Например, установим эквивалентность между простой процентной ставкой наращения и сложной ставкой наращения:

$$1+ni=(1+j)^n, \qquad (4.1)$$

где i – простая ставка на период;
j – сложная ставка наращения;
n – срок операции в годах.

Решая уравнения (4.1) относительно i, получим:

$$i=\frac{(1+j)^n-1}{n}. \qquad (4.2)$$

Если решить (4.1) относительно j, то будем иметь:

$$j=\sqrt[n]{1+ni}-1. \qquad (4.3)$$

Пример 4.1. Кредит выдан на 2 года под 12% годовых сложных с начислением процентов по полугодиям. Определите годовую ставку простых процентов, при которой будет тот же финансовый результат.

Решение. По условию j=12%, m=2, n=2/

Определим годовую ставку простых процентов:

$$i=\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{n}=\frac{\left(1+\frac{0{,}12}{2}\right)^{4}-1}{2}=0{,}1312.$$

$$i = 13{,}12\%.$$

Ответ. Годовая ставка простых процентов i=13,12%.

Рассмотрим еще один пример эквивалентных ставок непрерывных и сложных процентов с начислением mраз в году. Приравняем соответствующие множители наращения:

$$\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m = e^{\delta}. \qquad (4.4)$$

Из равенства (4.4) получим:

$$\delta = m \ln\left(1 + \frac{j}{m}\right). \qquad (4.5)$$

Из (4.4) также следует:

$$j = m\left(e^{\frac{\delta}{m}} - 1\right). \qquad (4.6)$$

Если m=1, то, очевидно:

$$\delta = \ln(1 + j). \qquad (4.7)$$

и

$$j = \left(e^{\delta} - 1\right). \qquad (4.8)$$

Пример 4.2. Банк выдает кредит на 5 лет под 10% годовых сложных. Какую ставку непрерывных процентов должен установить банк, чтобы получаемый им доход не изменился?
Решение. По условию j=0,1
По формуле (4.7):

$$\delta = \ln(1 + j) = \ln(1 + 0{,}1) = \ln 1{,}1 = 0{,}0953.$$

Ответ. Ставка непрерывного начисления процентов δ=9,53%.
Пример 4.3. Банк начисляет непрерывные проценты по вкладам с интенсивностью 10% годовых. На сколько процентов увеличится первоначальная сумма за 3 года, и при какой ставке годовых сложных процентов можно достичь такого же финансового результата?

Решение. По условию $\delta=0,1$, $n=3$ года.
Множитель наращения по непрерывным процентам за 1 год равен $e^{0,1}$, за 3 года $e^{0,3}=1,3499$.
За 3 года сумма увеличится на 34,99%.
Уравнение эквивалентности для процентных ставок:

$$(1+j)^3 = 1,3499.$$

Тогда

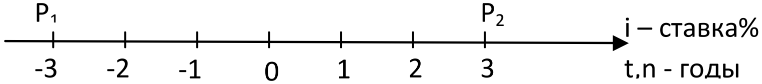
$$j = \sqrt[3]{1,3499} - 1 = 1,1052 - 1 = 0,1052.$$

$$j = 10,52\%.$$

Ответ: 34,99%, 10,52%

4.2. Изменение условий договоров

В финансовой практике возникают ситуации, когда договаривающиеся стороны меняют условия контрактов. Например, изменить сроки погашения задолженности на более отдаленные, либо выполнить досрочное погашение, либо несколько платежей объединить в один.
Такие изменения выполняются на основе финансовой эквивалентности обязательств с целью сохранения интересов сторон контракта.
Финансовая эквивалентность обязательств учитывает временное значение денег. С экономической точки зрения денежные суммы можно сравнивать только в один и тот же момент времени. При этом используется понятие современной ценности денег.
Рассмотрим временную ось, на которой отмечены:
$t=0$ – современный момент времени,
отрицательные значения – «годы назад»,
положительные значения – «будущие годы»,
i – действующая ставка процентов,
P_1–сумма денег 3 года назад,
P_2–сумма денег через 3 года.



Современная ценность для P_1: $S_1 = P_1(1+i)^3$,

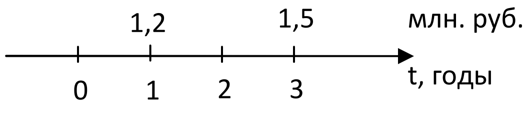
для P_2: $S_2 = \dfrac{P_2}{(1+i)^3}$ (при начислении сложных процентов).

Таким образом, при изменении условий договоров необходимо все суммы в расчете привести к одному и тому же моменту времени. Если платежи намереваются выполнить в более ранние сроки, то они дисконтируются, если время платежей отодвигается на более поздние строки, то на них начисляются проценты.

На практике обычно составляется уравнение эквивалентности, состоящее в том, что сумма платежей по первоначальному договору, приведенных к определенному моменту времени, приравнивается к сумме платежей по новому соглашению, приведенных к тому же моменту времени. При этом для краткосрочных договоров используют простые проценты, а для долгосрочных применяются сложные процентные ставки.

Пример 4.4. Согласно контракту господин А обязан уплатить господину Б 12 млн. руб. через год и 1,5 млн. руб. через 3 года от момента договора. Г-н А хочет изменить контракт, вернув долг тремя равными платежами. Какой величины должен быть каждый платеж, если г-н Б установил 5% годовых простых?

Решение. Условия задачи изобразим на временной оси, размещая над осью платежи по первоначальному договору, а под осью по-новому. Нужно определить величину x – разового платежа.



Составим уравнение эквивалентности, дисконтируя все суммы на начальное время t=0:

$$\frac{1{,}2}{1+0{,}05}+\frac{1{,}5}{1+3\cdot 0{,}05}=\frac{x}{1+0{,}05}+\frac{x}{1+2\cdot 0{,}05}+\frac{x}{1+3\cdot 0{,}05}.$$

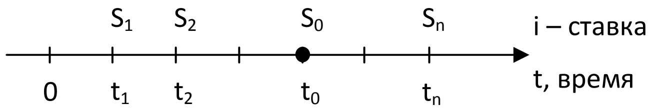
Решая уравнение, найдем x=0,986083 млн. руб.
Ответ. Величина разового платежа составит 986083 руб.

4.3. Консолидация платежей

Пусть имеется несколько платежей $S_1, S_2, \ldots, S_n$со сроками выплаты $t_1, t_2, \ldots, t_n$соответственно. Возникла необходимость рассчитаться одним платежом S_0. Тогда возникает две задачи, которые нужно решить:

1) Определить величину объединенного платежа S_0;
2) Вычислить срок t_0, когда нужно осуществить этот платеж.

Изобразить ситуацию на временной оси:



Составим уравнение эквивалентности на нулевой момент времени: все платежи дисконтируются, и ценность объединенного платежа S_0 должна быть эквивалентна сумме всех платежей, то есть должно выполняться равенство:

$$\frac{S_0}{(1+i)^{t_0}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{(1+i)^{t_k}},$$

где i – ставка % на период начисления.
Таким образом,

$$S_0 = (1+i)^{t_0} \sum_{k=1}^{n} S_k (1+i)^{-t_k} . \qquad (4.9)$$

Для определения момента времени t_0, в который следует заплатить сумму S_0прологарифмируем равенство (4.9):

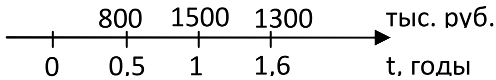
$$\ln S_0 = t_0 \ln(1+i) + \ln \sum_{k=1}^{n} S_k (1+i)^{-t_k}$$

и найдем

$$t_0 = \frac{\ln S_0 - \ln \sum_{k=1}^{n} S_k (1+i)^{-t_k}}{\ln(1+i)}. \qquad (4.10)$$

Пример 4.5. Предприниматель должен выплатить поставщику сырья 800 тыс. руб. через полгода после поставки, 150 тыс. руб. еще через полгода и еще через 8 месяцев 1300 тыс. руб. Эти платежи решено объединить в один и выплатить весь долг через год после поставки. Какую сумму нужно выплатить, если на долг начисляются 6% годовых сложных?

Решение. Составим временную ось, расположим на ней условие задачи:



Замечание: 8месяцев=$\frac{2}{3}$ года; $\frac{2}{3} = 0{,}666 = 0,(6).$

Применим формулу (4.9): t_0=1 год.

$$S_0 = (1+0{,}06)$$

$$\left[800(1+0{,}06)^{-0{,}5} + 1500 \cdot (1+0{,}06)^{-1} + 1300(1+0{,}06)^{-1,(6)}\right] =$$

$$= 3574119 \ \textit{руб}$$

Пример 4.6. Предприниматель из предыдущего примера хочет заплатить долг одним платежом 3600 тыс. руб. В какой момент времени нужно сделать такой платеж?

Решение. Воспользуемся формулой (4.10):

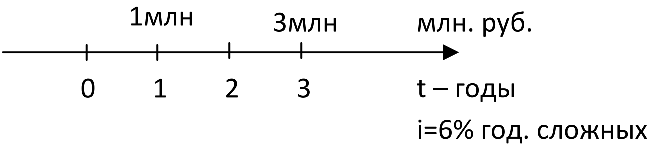
$$t_0 = \frac{\ln 3{,}6 - \ln\left[800 \cdot 1{,}06^{-0{,}5} + 1500 \cdot 1{,}06^{-1} + 1300 \cdot 1{,}06^{-1,(6)}\right]}{\ln 1{,}06} =$$

$$= 1{,}1238 = 1 \textit{год}\, 45 \textit{дней}$$

4.4. Продажа контрактов

В практике финансовых операций существует сделка, которая называется продажей контрактов. Она заключается в том, что физическое лицо или организация (компания) имеет договор, по которому он должен получить от другого субъекта сделки определенные суммы денег в определенные сроки. У владельца договора возникает необходимость ускорить получение долга, и он ищет покупателя – физическое лицо или юридическое (организацию) лицо, например банк, который купит контракт и затем получит деньги с должника. Возникает необходимость оценки такого контракта с целью получения определенной выгоды при возврате денег должником по договору. Очевидно, что покупающий контракт (долговое обязательство) должен заплатить не более, чем современная стоимость на момент покупки. То есть продавец получит меньше, чем стоимость контракта по сроку погашения. Ситуация напоминает торговлю векселями.

Пример 4.7.Г-н Иванов купил у г-на Сидорова загородный дом, заключив договор, по которому обязуется заплатить 1 млн. руб. через год и 3 млн. руб. через 3 года от момента договора. Г-н Сидоров решил продать контракт финансовой организации, которая начисляет на свои деньги 6% годовых сложных. Сколько заплатит компания г-ну Сидорову за этот контракт? Решение. Изобразим условия контракта на оси времени:



Финансовая организация предложит г-ну Сидорову дисконтированную стоимость на момент t=0:

$$x = \frac{1}{1+0,06} + \frac{3}{(1+0,06)^3} = 3,462287 \, \textit{млн.руб.}$$

Ответ. 3462287 руб.

4. Вопросы для самоконтроля

1. В чем состоит принцип финансовой эквивалентности обязательств?
2. Какие ставки называют эквивалентными?
3. Какие платежи являются эквивалентными?
4. Как определяется эквивалентность между простой процентной ставкой и сложной ставкой наращения?
5. Какой метод реализует принцип финансовой эквивалентности обязательств при замене и консолидации платежей?
6. Как составляется уравнение эквивалентности платежей?
7. Сформулируйте принцип продажи контрактов.

5. Учет инфляции в финансовых операциях

5.1. Основные понятия

Под инфляцией понимается снижение реальной покупательной способности денег за период финансовой операции.
Инфляцию необходимо учитывать по крайней мере в двух случаях: а) при вычислении наращенной суммы денег; б) при расчете эффективности (доходности) финансовой операции.

Введем обозначения:

S – наращенная сумма денег;

$J_{пс}$ – индекс покупательной способности за период;

J_p – индекс цен (множитель роста цен);

C – наращенная сумма с учетом обесценивания;

h – темп инфляции, относительный прирост цен за период в %.

Рассмотрим связи между этими величинами.

1. Покупательная способность за период равна обратной величине индекса цен:

$$J_{пс} = \frac{1}{J_p}.$$

2. Наращенная сумма с учетом инфляции:

$$C = S \cdot J_{пс}.$$

3. Темп инфляции и индекс цен связаны формулой:

$$h = \left(J_p - 1\right) \cdot 100.$$

4. Из последней формулы, очевидно, следует:

$$J_p = \frac{h}{100} + 1.$$

Пример 5.1. Сегодня получено S=120тыс. руб. Известно, что за прошедший год цены увеличились на 20%. Определите реальную покупательную способность полученной суммы.

Решение. По условию темп инфляции за 1 год равенh=20%. Тогда множитель роста – индекс цен J_p=1+0,2=1,2; индекс покупательной способности денег $J_{nc} = \frac{1}{1,2}$.

Следовательно, реальная стоимость полученных денег $C = \frac{120}{1,2} = 100 тыс.руб.$

Ответ. 100 тыс. руб.

Темп инфляции может меняться от периода к периоду, тогда индекс цен за несколько таких периодов равен произведению индексов цен:

$$J_p = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{h}{100}+1\right).$$

Если в каждом периоде один и тот же темп инфляции h, то за n периодов индекс цен равен:

$$J_p = \left(\frac{h}{100}+1\right)^n.$$

Пример 5.2. Темп инфляции каждый месяц в году равен 2%. Определите индекс цен за год.

Решение. $J_p = (1+0,02)^{12} = 1,02^{12} = 1,268.$

Ответ. Годовой темп инфляции h=26,8%.

5.2. Анализ обесценения денег

Реально наращенная сумма денег с учетом инфляции:

$$C = S \cdot J_{nc} = \frac{S}{J_p}.$$

При этом формулы наращения можно выбирать разные в зависимости от вида применяемых процентов: простых, сложных, непрерывных.

Инфляционное влияние всегда оценивается по сложным процентам, так как обесцениваются уже обесцененные деньги в предыдущем периоде.
Если применяются простые проценты, то инфляция увеличивается по формуле:

$$C = P\frac{1+ni}{J_p} = P\frac{1+ni}{\left(1+\frac{h}{100}\right)^n}. \quad (5.1)$$

Очевидно, что увеличение наращенной суммы происходит если выполняется неравенство

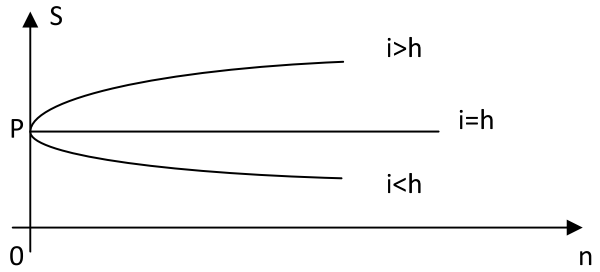
$$1+ni>J_p.$$

Если наращение происходит по сложным процентам, то применяется формула:

$$C = P\frac{(1+i)^n}{J_p} = P\left(\frac{1+i}{1+\frac{h}{100}}\right). \quad (5.2)$$

Проанализируем влияние ставки процентов iи темп инфляции hна величину С.
Очевидно, если среднегодовой темп инфляции равен ставке процентов: i=h, то роста первоначальной суммы Р не произойдет, так как наращение будет поглощаться инфляцией и будет С=Р.
Если темп инфляции будет больше ставки процентов роста (h>i), то С станет меньше первоначальной суммы Р. Такая ситуация С<Рназывается «эрозией капитала».
Только если выполняется h<i,происходит (С>Р) реальный рост.

Для наглядности рассуждений приведем рисунок:



Естественным образом возникает понятие барьерной ставки процентов i^*, при которой наращение лишь компенсирует инфляцию.
Если проценты простые, то множитель наращения с учетом инфляции приравняем к единице:

$$\frac{1+ni^*}{J_p}=1,$$

и находим

$$i^*=\frac{J_p-1}{n}. \qquad (5.3)$$

Если проценты сложные, то, используя формулу (5.2) получим i*=h. Ставку процентов i>i* называют положительной ставкой.
Владельцы денег, кредиторы реагируют на инфляцию увеличением ставок процентов, применяя так называемую брутто-ставку, которая определяется из равенства

$$1+r=(1+i)(1+h),$$

где h, так же как i, поделены на 100. Раскрывая скобки, будем иметь

$$1+r=1+i+h+ih$$

или

$$r=i+h+ih,$$

так как произведение ih мало по величине, то на практике брутто-ставку вычисляют:

$$r=i+h. \tag{5.4}$$

То есть формулу применяют при невысокой инфляции.

Пример 5.3. Кредит 500 тыс. руб. выдают на 2 года. На сумму начисляют сложные проценты с учетом темпа инфляции 5% в год. Ставка по кредитам по уровню доходности 10% годовых. Какую ставку должен назначить банк? Какова наращенная сумма долга?

Решение. По условию $P=500$ тыс. руб., $n=2$ года, $i=0{,}1$, $h=0{,}05$.

Определим брутто-ставку: $r=0{,}1+0{,}05+0{,}005=0{,}155$.

Банк, таким образом, должен назначить ставку $r=15{,}5\%$.

Сумма долга $S=500000(1+0{,}155)^2=667012{,}5$ руб.

Дисконт банка составит $D=167012{,}5$ руб.

5. Вопросы для самоконтроля

1. Что представляет собой инфляция?
2. Что показывает индекс цен?
3. Как рассчитывается индекс покупательной способности денег?
4. Какая связь между индексом цен и темпом инфляции?
5. Как рассчитывается реальная наращенная сумма денег?
6. Что такое эрозия капитала?
7. В чем состоит понятие барьерной ставки?
8. Для каких целей вводится понятие брутто-ставки?

6. Расчеты по кредитам

Существуют различные способы погашения задолженностей, которые обычно оговариваются при заключении контрактов между кредитором и заемщиком.
Если кредит краткосрочный (1-2 года), то погашение основной суммы долга с процентами, возможно, осуществить одним платежом. Среднесрочные (от 2 до 5 лет) и долгосрочные кредиты погашаются частями по плану, записанному в договоре.
Рассмотрим некоторые приемы составления планов погашения кредитов.

6.1. Потребительский кредит

Потребительские кредиты предоставляются для покупки товаров личного использования или домашнего хозяйства и это, как правило, краткосрочные кредиты. Такой кредит может быть предоставлен с отсрочкой платежа и последующим разовым погашением всей суммы с процентами.
Если предполагается по договору, что кредит будет погашен равными частями, то определяется наращенная сумма с процентами и делится на количество платежей.
Размер разового платежа определяется по формуле:

$$R = \frac{S}{mn},$$

где $S = P(1+in)$, n – число лет, i – годовая ставка процентов, m – число платежей в году.

Пример 6.1. Телевизор стоимостью 21000 руб. продается в кредит на 1 год под 10% годовых. По договору платежи ежемесячные. Вычислите размер разового платежа.
Решение. P=21000 руб., i=10, n=1, m=12.
S=21000(1+0,1)=23100 руб.

$$R = \frac{23100}{12} = 1925 руб.$$

Ответ. Ежемесячный платеж R=1925 руб.

6.2. Правило торговца

По этому способу возвращения долга проценты начисляются на всю сумму кредита и на весь срок кредита. При возвращении заемщиком определенной суммы кредитор снимает с величины долга возвращаемую сумму с процентами до конца срока кредита. Такой подход стимулирует должника быстрее возвращать долг.

Пусть, например, кредит S_0выдан на 3 года под iгодовых процентов. Сумма долга составит

$$S=S_0(1+3i).$$

Через 1 год должник возвращает сумму R_1. Сумма долга становится

$$S_1=S_0(1+3i)-R_1(1+2i).$$

Если должник возвращает R_2еще через год, то сумма долга будет:

$$S_3=S_0(1+3i)-R_1(1+2i)-R_2(1+i) –$$

это и будет величина последнего платежа.

Пример 6.2. Кредит 300 тыс. руб. выдан на 3 года под 18% годовых. Сумма долга для заемщика составляет:S=300000(1+3*0,18)=462000 руб. Требуется вычислить величину последнего платежа, если должник через год вернул 150 тыс. руб. и через 2 года вернул 100 тыс. руб.

Решение. Величина последнего платежа:

$$S_3=300(1+0,18*3)-150(1+2*0,18)-100(1+0,18)=140 \text{ тыс. руб.}$$

Заметим, что заемщик выплатил за 3 года:150+100+140=390 тыс. руб.

Кредитор получил за 3 года 90 тыс. руб.

Годовая доходность для кредитора составляет 10%.

6.3. Актуарный метод

По этому методу кредитор начисляет проценты на непогашенный остаток долга.

Например, сумма S_0выдается на 3 года и R_1–выплата за первый год, R_2–выплата за второй год. Какова сумма третьего платежа R_3?

Первый непогашенный остаток долга составляет:

$$S_1 = S_0(1+i) - R_1.$$

Второй остаток долга:

$$S_2 = S_1(1+i) - R_2 = [S_0(1+i) - R_1](1+i) - R_2 =$$
$$= S_0(1+i)^2 - R_1(1+i) - R_2.$$

Тогда последняя выплата составит:

$$R_3 = S_2(1+i) = S_0(1+i)^3 - R_1(1+i)^2 - R_2(1+i).$$

Пример 6.3. По условию примера 6.2.

Последний платеж будет:

$$R_3 = 300(1+0{,}18)^3 - 150(1+0{,}18)^2 - 100(1+0{,}18) = 166{,}049\textit{тыс.руб}.$$

Заемщик, таким образом, заплатит 416049,6 руб.

Ставка доходности составит $\dfrac{166049{,}6}{300000 \cdot 3} = 0{,}1289 = 12{,}89\%$

Такой способ расчета более выгоден для кредитора.

6.4. Погашение кредита равными срочными платежами с начислением процентов на остаток долга

По этому методу кредит выдается на определенный срок, который делится на nчастей. В первый промежуток времени проценты начисляются на всю сумму кредита, а в каждый следующий интервал на остаток долга. В итоге выводится формула для вычисления общей суммы процентов (стоимость кредита), которая прибавляется к сумме кредита и делится на nчастей.

Покажем, как получается формула для вычисления общей суммы процентов и величины разового платежа.

Введем обозначения:

- P – сумма кредита;
- n – число лет;
- i – годовая ставка процентов;
- J – общая сумма процентов, стоимость кредита;
- S – сумма кредита с процентами.

Проценты начисляются следующим образом:

За 1-ый год: $J_1 = iP$;

За 2-ой год: $J_2 = i\left(P - \frac{P}{n}\right) = iP\left(1 - \frac{1}{n}\right)$;

За 3-ий год: $J_3 = i\left(P - 2\frac{P}{n}\right) = iP\left(1 - \frac{2}{n}\right)$;

………………………………………………………………

За n-ый год: $J_n = iP\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) = i\frac{P}{n}$.

Общая сумма процентов:

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + ... + J_n = iP\left[1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(1 - \frac{2}{n}\right) + ... + \frac{1}{n}\right] =.$$

$$= iP\frac{n+1}{2}$$

Таким образом, общая сумма процентов

$$J = iP\frac{n+1}{2}. \qquad (6.1)$$

Тогда размер годового платежа равен:

$$R = \frac{P+J}{n}. \qquad (6.2)$$

Если в течение года должно поступать kравных платежей, то общая сумма процентов вычисляется по формуле:

$$J = \frac{i}{k}P\frac{nk+1}{2}. \qquad (6.3)$$

Например, при равных ежемесячных платежах:

$$J = \frac{i}{12} P \frac{12n+1}{2}. \qquad (6.4)$$

Пример 6.4. Кредит 10 млн. руб. со сроком погашения 5 лет под 12% годовых простых. Погашение равными годовыми платежами. Вычислите стоимость кредита и величину годового платежа.

Решение. По условию: P=10 млн. руб., n=5 лет, i=12%.

Стоимость кредита: $J = 0{,}12 \cdot 10 \cdot \frac{5+1}{2} = 3{,}6 млн.руб.$

Величина годового платежа: $R = \frac{10+3{,}6}{5} = 2{,}72 млн.руб.$

Ответ. J=3,6млн. руб., R=2,72 млн.руб.

6.5. Погашение основной суммы кредита равными частями с начислением процентов на остаток долга

Сумма кредита величиной P выдана на nлет под Iпростых годовых процентов. По рассматриваемому способу погашения кредита в конце каждого года выплачивается n-ая часть основного долга $\frac{P}{n}$.В конце первого года сумма процентов составит iPи величина платежа:

$$R_1 = \frac{P}{n} + iP. \qquad (6.5)$$

Остаток долга на начало второго года будет равен $P - \frac{P}{n}$, и вторая выплата, осуществляемая в конце второго года равна:

$$R_2 = \frac{P}{n} + i\left(P - \frac{P}{n}\right) = \frac{P}{n} + iP\left(1 - \frac{1}{n}\right). \qquad (6.6)$$

Аналогично третья выплата:

$$R_3 = \frac{P}{n} + iP\left(1 - \frac{2}{n}\right). \qquad (6.7)$$

Очевидно, что, последовательно применяя приведенные формулы можно составить план погашения кредита по годам. Заметим, что выплата в конце k-го года может быть рассчитана по формуле:

$$R_k = \frac{P}{n} + iP\left(1 - \frac{k-1}{n}\right). \qquad (6.8)$$

Если платежи рассчитываются mраз в году, то можно применить формулу:

$$R_k = \frac{P}{mn} + \frac{i}{m}P\left(1 - \frac{k-1}{mn}\right), k = 1,2,3,\ldots,mn. \qquad (6.9)$$

Общая стоимость кредита равна:

$$J = \left(\sum_{k=1}^{n} R_k\right) - P.$$

Пример 6.5. Кредит 2 млн. руб. выдан на 5 лет под 10% годовых, начисляемых на непогашенный остаток, с условием возвращения основной суммы долга равными частями. Составьте план погашения кредита по годам. Вычислите стоимость кредита.

Решение. По условию P=2млн.руб., i=0,1, n=5 лет.

Равные части выплат $\frac{P}{n} = \frac{2000000}{5} = 400 \textit{тыс.руб.}$

Процентные деньги за первый год составят: 2 млн. руб.*0,1=200 тыс. руб.

Величина первого платежа R_1=600 тыс. руб.

На начало второго года основной долг уменьшится на 400 тыс. руб. и составит 1600 тыс. руб., проценты с этой суммы равны 160 тыс. руб., и величина R_2=560 тыс. руб. и т.д.

План погашения кредита будет иметь вид:

Годы	1	2	3	4	5
тыс. руб.	400	400	400	400	400
%, тыс. руб.	200	160	120	80	40
Всего, тыс. руб.	600	560	520	480	440

Всего заемщик выплатит за 5 лет 2600 тыс. руб.
Стоимость кредита равна 600 тыс. руб.

6.6. Погашение кредита равными платежами при начислении процентов по сложной ставке

Если ставка процентов сложная, то равны платежи дисконтируются на момент выдачи кредита так, чтобы общая сумма дисконтированных платежей равнялась первоначальной сумме кредита.
Обозначим:

P – величина кредита;

R – размер годового платежа;

i – годовая сложная ставка процентов,

$A_k(k=1,2,\ldots,n)$ – современная стоимость платежа Rпо годам:

$$A_1=\frac{R}{1+i},\ A_2=\frac{R}{(1+i)^2},\ \ldots,\ A_n=\frac{R}{(1+i)^n}. \quad (6.10)$$

Их общая сумма равна величине P кредита:

$$P=R\left[\frac{1}{1+i}+\frac{1}{(1+i)^2}+\ldots+\frac{1}{(1+i)}\right]. \quad (6.11)$$

С использованием формулы для суммы nчленов геометрической прогрессии правая часть (6.11) преобразуется к виду:

$$P=R\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i}. \quad (6.12)$$

Из (6.12) следует величина платежа:

$$R = \frac{iP}{1 - \frac{1}{(1+i)^n}} = \frac{iP}{1 - (1+i)^{-n}}. \qquad (6.13)$$

Сумма всех платежей составит:

$$S = n \cdot R. \qquad (6.14)$$

Следовательно, сумма начисленных процентов (стоимость кредита) равна:

$$J = S - P.$$

Пример 6.6. Кредит в сумме 500 тыс. руб. с начислением 9% сложных годовых выдан на 3 года с условием возврата равными платежами в конце каждого года. Рассчитайте величину ежегодного платежа и сумму выплаченных процентов.

Решение. По условию P=500000 руб., i=9% (сложных), n=3 года. По формуле (6.13) вычислим величину ежегодного платежа:

$$R = \frac{0{,}09 \cdot 500000}{1 - (1 + 0{,}09)^{-3}} = 197541 \, руб.$$

Сумма всех платежей составит:

$$S = 3 \cdot 197541 = 592623 \, руб.$$

Сумма выплаченных процентов равна

$$J = 592623 - 500000 = 92623 \, руб.$$

Ответ. 19751 руб., 92623 руб.

6.7. Создание погасительного фонда

Одним из возможных методов погашения кредита одним платежом в конце срока является создание погасительного фонда. Заемщик открывает счет в финансовой организации, в которой на поступающие деньги выплачиваются более высокие проценты, чем те проценты, под которые он взял кредит. Обозначим:

P – величина кредита, который заемщик взял на nлет,

i – годовая ставка сложных процентов.

Тогда к концу n-го года долг составит:

$$S = P(1+i)^n . \qquad (6.15)$$

В организации, в которой открыт счет погасительного фонда годовая ставка сложных процентов j>i.
Поступающие в фонд платежи образуют геометрическую прогрессию со знаменателем (1+j):

$$R(1+j)^n + R(1+j)^{n-1} + ... + R(1+j) + R = R\frac{(1+j)^n - 1}{j} . \qquad (6.16)$$

Величина платежа R определяется из равенства:

$$P(1+i)^n = R\frac{(1+j)^n - 1}{j} . \qquad (6.17)$$

$$R = \frac{jP(1+i)^n}{(1+j)^n - 1} . \qquad (6.18)$$

Таким образом, за nлет в погасительном фонде накопится сумма:

$$S_1 = R\frac{(1+j)^n - 1}{j}$$

и при этом $S_1 \geq S$, что и позволит погасить кредит одним платежом.

Пример 6.7. Кредит 500 тыс. руб. взят под 6% годовых на 5 лет. Погашение кредита возможно одним платежом в конце срока. Заемщик нашел возможность создать погасительный фонд в другой финансовой организации, выплачивающей на деньги 10% годовых, перечисляя определенную сумму в конце каждого года. Вычислите размер ежегодного платежа в погасительный фонд.
Решение. По условию P=500 тыс. руб., i=0,06, n=5 лет, j=0,1.
Величина долга для заемщика составляет:

$$S = 500000(1+0{,}06)^5 = 669112{,}79\,руб.$$

Величина платежа в погасительный фонд равна:

$$R = \frac{0{,}1 \cdot 669112{,}79}{(1+0{,}1)^5 - 1} = 109599\,руб.$$

Ответ. R=109599 руб.

6. Вопросы для самоконтроля

1. Из каких частей состоят расходы заемщика на обслуживание долга?
2. Какой кредит называется потребительским?
3. Какие возможны способы погашения потребительского кредита?
4. Какова идея «правила торговца»?
5. Чем отличается актуарный метод от правила торговца?
6. Какова идея метода погашения кредита равными платежами и начислением процентов на остаток долга?
7. Как составляется план погашения основной суммы кредита равными частями при начислении процентов на остаток долга?
8. Какова особенность погашения кредита равными платежами при начислении процентов по сложной ставке?
9. Как можно создать погасительный фонд?

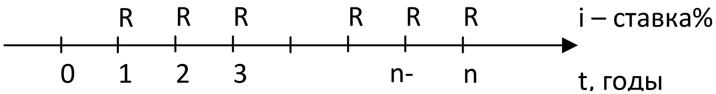
7. Непрерывное начисление процентов

7.1. Основные понятия

В финансовых организациях (банках) существуют операции, связанные с регулярно поступающими платежами или отчислениями, которые называются финансовыми потоками. Если все выплаты идут с одним и тем же знаком и постоянным промежутком времени, то такой поток платежей называют финансовой рентой или аннуитетом.
Каждую выплату денег называют членом ренты. Временной интервал между двумя платежами называют периодом ренты.
Если платежи поступают в конце каждого периода, то рента называется постнумерациондо, если в начале периода, то рента называется пренумерандо.
Время от начала первого периода до конца последнего называют сроком ренты.
Важным параметром ренты является действующая ставка процентов.

7.2. Наращенная стоимость годовой финансовой ренты

Обозначим величину годового платежа R, поступающего в конце каждого года. Начисление процентов производится один раз в год по ставке i. Требуется вычислить накопленную сумму за nлет.
Для наглядности приведем рисунок:



На первый платеж производится начисление процентов за nлет: $S_1 = R(1+i)^n$. На второй платеж начисление за n-1 лет: $S_2 = R(1+i)^{n-1}$ и т.д. За последний взнос начисление не производится.
Наращенная стоимость ренты будет равна:

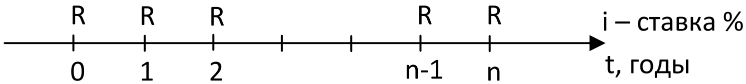
$$S = R(1+i)^n + R(1+i)^{n-1} + \ldots + R(1+i)^2 + R(1+i) + R \text{ .(7.1)}$$

Сумма представляет собой геометрическую прогрессию с первым членом Rи знаменателем прогрессии (1+i), поэтому воспользуемся формулой для определения суммы геометрической прогрессии:

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = RS_{n,i}. \qquad (7.2)$$

где $S_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ - множитель наращения финансовой ренты. Имеются таблицы для различных значений n, i.

Аналогично можно вывести формулу наращенной стоимости для ренты пренумерандо, когда платежи поступают в начале каждого периода. В этом случае число платежей на один больше, по сравнению с рентой постнумерандо. На рисунке схема платежей выглядит так:



Поэтому

$$S = R(1+i)^{n+1} + R(1+i)^n + \ldots + R(1+i)^2 + R(1+i) = R(1+i)$$

$$\left[(1+i)^n + (1+i)^{n-1} + \ldots + (1+i)^n + R\right] == R(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

То есть,

$$S_{pre} = R(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}. \text{(7.3)}$$

Пример 7.1. В некоторый фонд в течение 10 лет поступают регулярно платежи постнумерандо величиной 1000 руб. Ставка процентов по ренте 10% годовых. Вычислите накопленную сумму.

Решение. По условию R=1000 руб., n=10, i=0,1.

Платежи поступают в конце каждого года, значит, воспользуемся формулой (7.2):

$$S = 1000\frac{(1+0,1)^{10}-1}{0,1} = 1000S_{10,10} = 1000\cdot 15,997 = 15997\,руб.$$

Множитель наращения $S_{10,10}$=15,997 взят из таблицы.

7.3. Наращенная сумма годовой ренты с начислением процентов m раз в году

Пусть имеется годовая рента сроком nлет, сложные проценты начисляются mраз в году. Ставка iявляется номинальной годовой. При начислении mраз в год ставка применяется $\frac{i}{m}$.

Тогда при выводе формулы для наращенной суммы ренты с первым членом, равным Rи знаменателем соответствующей прогрессии, равным $\left(1+\frac{i}{m}\right)^m$, получаем:

$$S = R\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}-1}.$$

(7.4)

Для ренты пренумерандо соответственно получается формула:

$$S = R\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}-1}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}. \qquad (7.5)$$

Пример 7.2. На счет в банке в конце каждого года поступает 10 тыс. руб. в течение 5 лет. Проценты начисляются

ежеквартально по номинальной ставке 12% годовых. Вычислите сумму, которая будет на счете в конце срока.
Решение. По условию R=10000 руб., n=5 лет, m=4, i=0,12. Применим формулу (7.4):

$$S = 10000\frac{\left(1+\frac{0,12}{4}\right)^{4\cdot 5}-1}{\left(1+\frac{0,12}{4}\right)^{4}-1} = 10000\cdot 6,4231 = 64231 руб.$$

7.4. Наращенная сумма p-срочной ренты

В этом виде ренты известен размер годового платежа R, но число платежей в течение года равно p. Пусть, кроме того, число начислений процентов в год равно m. Тогда платеж за один период равен $\frac{R}{p}$, а число периодов начисления процентов равно mn.Если годовая ставка процентов i, то в течение срока ренты проценты начисляют по ставке $\frac{i}{m}$. В этом случае наращенные платежи представляют геометрическую прогрессию с первым членом $\frac{R}{p}$ и знаменателем прогрессии $\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$, и число членов ренты равно pn.

Наращенная сумма p-срочной ренты постнумерандо с m-разовым начислением процентов в году вычисляется по формуле:

$$S = \frac{R}{p}\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} \qquad (7.6)$$

Аналогично наращенная сумма p-срочной ренты пренумерандо с m-разовым начислением процентов в течение года определяется по формуле:

$$S = \frac{R}{p} \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} \left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}. \qquad (7.7)$$

Пример 7.3. В банк поступают платежи в конце каждого полугодия величиной 100 тыс. руб. в течение трех лет, и на них начисляются ежеквартально сложные проценты по ставке 8% годовых. Вычислите сумму ренты на конец данного срока.

Решение. По условию $\frac{R}{p} = 100 тыс.руб.$, i=0,08, p=2, m=4, n=3.

Применим формулу для ренты постнумерандо:

$$S = \frac{R}{p} \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = 100 \frac{\left(1+\frac{0,08}{4}\right)^{12} - 1}{\left(1+\frac{0,08}{4}\right)^{\frac{4}{2}} - 1} =$$

$$= 100 \cdot 6,639604 = 663,96 тыс.руб. = 663960 руб.$$

7.5. Современная стоимость финансовой ренты

Современной или приведенной стоимостью финансовой ренты называется сумма всех платежей, дисконтированных на начало периода первого платежа.

Для вычисления современной стоимости ренты постнумерандо все платежи приводятся к начальному моменту времени и суммируются:

$$A_{post} = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + ... + \frac{R}{(1+i)^n} = R\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i}. \quad (7.8)$$

Здесь снова используется формула для суммы nчленов геометрической прогрессии с знаменателем прогрессии $\frac{1}{1+i}$.

Величина множителя $\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i}$ характеризует современную стоимость потока платежей, и так как эта величина зависит только от ставки процентов, то для нее составлены таблицы значений.

В случае финансовой ренты пренумерандо, когда платежи поступают в начале каждого года, современная стоимость ренты равна:

$$A_{post} = R + \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + ... + \frac{R}{(1+i)^{n-1}} = R\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i}(1+i). (7.9)$$

Пример 7.4. Фирме поступило предложение инвестировать 10 млн. руб. в развитие некоторого бизнеса, ожидаемые доходы от которого составят 2,5 млн. руб. в конце каждого полугодия с действующей ставкой 5% за данный период в течение двух лет. Следует ли фирме принять это предложение?

Решение. По условию R=2,5 млн. руб., i=0,05, n=4.

Чтобы ответить на заданный вопрос, нужно вычислить современную стоимость финансовой ренты постнумерандо, состоящей из четырех выплат по 2,5 млн. руб.

$$A_{post} = 2{,}5\frac{1-\frac{1}{(1+0{,}05)^4}}{0{,}05} = 2{,}5 \cdot 3{,}5458 = 8{,}845 \textit{млн.руб.}$$

Таким образом, на вложенные 10 млн. руб. современная ценность дохода меньше:

-10 млн.+8,8645 млн.=-1,1355 млн. руб.

То есть инвестор получит потери, и поэтому поступившее предложение принимать не следует.

7.6. Вечная рента

Ренту называют вечной (или бессрочной), если число ее членов растет неограниченно.

Наращенная сумма вечной ренты при любых параметрах бесконечно большая величина.

Поэтому речь идет только о современной ценности A_∞ вечной ренты, то есть:

$$A_\infty = \lim_{n\to\infty} R \cdot \frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i} = \frac{R}{i}. \qquad (7.10)$$

Современная стоимость p-срочной вечной ренты с начислением процентов mраз в году вычисляется по формуле:

$$A_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{R}{p} \cdot \frac{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}. \qquad (7.11)$$

Пример 7.5. Предприятие намерено учредить фонд для выплаты стипендий направляемым на учебу работникам в сумме 1,2 млн. руб. ежегодно. Какую сумму предприятие должно внести в банк, чтобы обеспечит получение необходимых денег, если:

а) банк выплачивает 12% годовых (сложных);

б) банк выплачивает проценты по ставке i=12%.

Решение.

а) R=1,2 млн. руб., i=0,12.

Современная стоимость ренты:

$$A_\infty = \frac{1200000}{0{,}12} = 10000000\,руб. = 10\,млн.руб.$$

б) R=1,2 млн. руб., i=0,12, m=4, p=1.
Современная стоимость ренты находится по формуле (7.11):

$$A_{\infty} = \frac{R}{\left(1+\frac{0,12}{4}\right)^{4} - 1} = \frac{1200000}{1,03^{4} - 1} = 9561135,89\,руб.$$

7. Вопросы для самоконтроля

1. В чем заключается понятие финансовой ренты?
2. Какую ренту называют рентой пренумерандо, какую постнумерандо?
3. В чем состоит экономический смысл наращенной и современной стоимости ренты?
4. Как вычисляется наращенная стоимость годовой ренты постнумерандо?
5. Как вычисляется современная стоимость годовой ренты постнумерандо?
6. Как определить наращенную и современную стоимость финансовой ренты пренумерандо?
7. Как вычисляется наращенная стоимость годовой ренты при начислении процентов не раз в году?
8. Какую ренту называют p-срочной?
9. Напишите формулу для вычисления современной стоимости p-срочной ренты?
10. Какую ренту называют вечной?

Контрольная работа.

Вариант №1

1. В начале года ставка сложных процентов с начислением по кварталам составляла 8%. Через полгода ставка увеличилась на 0,5% за каждый квартал. Определить множитель роста за 1 год.
2. Клиент банка взял ссуду 200 тыс. руб. под 10% годовых на 2 года. Какую сумму он должен вернуть?
3. Кредит 100 тыс. руб. должен погашаться по правилу: основная сумма равными платежами, начисление процентов по ставке 12% годовых производится на остаток долга. Составить план погашения кредита.
4. Вексель 5 тыс. руб. выдан под 9% годовых сроком на 1 год. Вексель продан через 8 месяцев по учетной ставке 10% годовых. Определить цену продажи.
5. Определить срок в годах, за который первоначальная сумма вклада удвоится, если интенсивность процентной ставки непрерывно и линейно изменяется при начальном значении 10% и годовом приросте 2%.

Вариант №2

1. Ставка процентов банка составляла в начале года 10% годовых. Через 2 месяца была уменьшена до 2% и через полгода до 7%. Определите годовой множитель роста.
2. Вексель учтен 18 апреля сроком погашения 10 июня. Вычислите номинальную стоимость векселя, если учетная ставка 8%, а клиент получил 5940 руб.
3. Ставка непрерывного дисконтирования равна 9%. Какую сумму нужно положить на счет, чтобы через 2 года получить 15 тыс. руб.
4. Кредит 10 тыс. руб. выдан на 3 года под 15% годовых с условием возврата в конце первого года 5 тыс. руб., в конце второго 2,5 тыс. руб. Рассчитайте методом торговца величину последнего платежа в конце третьего года.
5. Г-н N положил 2000 руб. на свой счет в банке 2 года назад. Сколько ему нужно добавить сегодня, чтобы через 2 года у него накопилось 15 тыс. руб., если ставка банка на вклады 10% годовых.

Вариант №3

1. Предприниматель взял в банке кредит в 5 млн. руб. под 12% годовых на 5 лет с условием погашения кредита равными платежами, а начисление процентов на остаток долга. Составьте план погашения кредита.
2. Вексель сроком на 1 год стоимостью 20 тыс. руб. продан по учетной ставке 12% годовых через 3 месяца. Вычислите цену продажи векселя.
3. Под какую процентную ставку сложную с начислением по кварталам нужно вложить деньги, чтобы сумма через 3 года увеличилась на 30%?
4. Имеется обязательство уплатить 5 тыс. руб. через 2 года от настоящего момента. Замените этот договор на такой: платить 5 тыс. руб. через каждые полгода. Кому выгодна замена, ели действует ставка 8% годовых простых?
5. За какой срок сумма увеличится в 2 раза, ели начисляются непрерывные проценты с силой роста 10%?

Вариант №4

1. Банк начисляет ежеквартально в течение года проценты по ставкам: 8%, 8,5%, 9%, 10%. Определите коэффициент наращения за 1 год: а) без реинвестирования, б) с реинвестированием.
2. Определите срок в годах, за который вклад 10 тыс. руб. возрастет до 25 тыс. руб. при годовой ставке сложных процентов 18% с начислением по полугодиям.
3. Вексель на сумму 1000 долларов был выдан 15 января 12% годовых сроком на 3 месяца. Вексель был учтен 10 марта по учетной ставке 10,5%. Найти цену покупки векселя.
4. Предприятие приобрело здание за 50 тыс. долларов на следующих условиях: а) 25% стоимости оплачивается немедленно; б)оставшаяся часть погашается равными платежами по полугодиям в течение двух лет с начислением 12% годовых (сложных). Определите величину разового платежа.
5. Сколько нужно вкладывать ежемесячно, чтобы за 2 года накопить 100 тыс. руб. в банке начисляющем 12% годовых ежеквартальных?

Вариант №5

1. Г-н N покупает в магазине телевизор, цена которого 450 тыс. руб. На всю эту сумму он получает кредит, который должен погасить за 2 года равными ежеквартальными платежами. Чему равна каждая уплата, если магазин представляет кредит под 6% годовых (простых)?
2. Банк начисляет непрерывные проценты с силой роста 20%. Найдите эффективную годовую ставку процентов.
3. По договору клиент должен вернуть 2000 руб. через 2 месяца и 4000 руб. через 6 месяцев со дня договора. Клиент попросил, объединить платежи в один с выплатой через 4 месяца с момента заключения договора. Банк использует ставку 24% с начислением по полугодиям. Найдите величину эквивалентного платежа.
4. Вексель на сумму 100 тыс. руб. сроком на полгода учтен через 1 месяц по учетной ставке 18%. Определите цену продажи.На какой срок можно накопить 1 млн. руб. равными ежемесячными вкладами по 100 тыс. руб. в банке использующем 12% годовых, номинальных при ежеквартальном начислении?

Вариант №6

1. Какая сумма была внесена на счет в банке , если по истечении 5 лет на счете стало 5200 руб. Начисление процентов осуществлялось по схеме простых процентов по ставке 10% за каждое полугодие?
2. В течение двух лет сумма вклада удвоилась. Определите ставку при непрерывном начислении процентов.
3. Вексель на 500 тыс. руб. сроком на 5 лет выдан под 10% годовых (сложных, начисление по полугодиям). Вексель был учтен через 3 года по ставке 15% годовых (сложных, начисление годовое). Определите цену учета.
4. Потребительский кредит на сумму 100 тыс. руб. открыт на 2 года по ставке 8% годовых Погашение осуществляется равными платежами. Определите сумму процентов за кредит и размер ежеквартального платежа.
5. Г-н N положил в банк некоторую сумму, через 2 года снял половину этой суммы, а еще через год добавил первоначальную сумму. Через 5 лет с момента первого вклада он закрыл счет. На сколько процентов увеличилась его первоначальная сумма, если банк начисляет проценты по полугодиям, исходя из номинальной ставки 12% процентов годовых?

Таблица

I. Наращенная стоимость финансовых рент

1. p=1, m=1, i – ставка за период $S = R\dfrac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1} = R\dfrac{(1+i)^n - 1}{i} = R \cdot S_{n,i}$ $S_{n,i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$ $n = \dfrac{\ln\left(\dfrac{S}{R}i + 1\right)}{\ln(1+i)}$
2. p=1, m>1, $i_н$ – номинальная ставка $S = R\dfrac{\left(1+\dfrac{i_н}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1+\dfrac{i_н}{m}\right)^{m} - 1} = R \cdot S_{mn,\frac{i_н}{m}}$ $n = \dfrac{\ln\left\{\dfrac{S}{R}\left[\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^m - 1\right] + 1\right\}}{m\ln\left(1+\dfrac{j}{m}\right)}$
3. p>1, m=1, i – ставка за период $S = \dfrac{R}{p} \cdot \dfrac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1} = R \cdot S_{n,i}^{(p)}$ $n = \dfrac{\ln\left\{\dfrac{S}{R}p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1\right] + 1\right\}}{\ln(1+i)}$

4. p=m, p>1, m>1, $i_н$ – номинальная ставка $S = \frac{R}{m} \cdot \frac{\left(1+\frac{i_н}{m}\right)^{mn} - 1}{\frac{i_н}{m}} = R \cdot \frac{\left(1+\frac{i_н}{m}\right)^{mn} - 1}{i_н}$ $n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R} j + 1\right)}{m \ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}$
5. p>1, p≠m, m>1, $i_н$ – номинальная ставка $S = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1+\frac{i_н}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1+\frac{i_н}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$ $n = \frac{\ln\left\{\frac{S}{R} p \left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1\right] + 1\right\}}{m \ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}$
6. Непрерывное начисление процентов $S = R \cdot \frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta} - 1} = R \cdot S_{n,\delta}$ $S = R \cdot \frac{e^{\delta n} - 1}{p\left(e^{\frac{\delta}{p}} - 1\right)} = R \cdot S_{n,\delta}{}^{(p)}$ $n = \frac{1}{\delta} \ln\left[\frac{S}{R}\left(e^{\delta} - 1\right) + 1\right]$

II. Современная стоимость ренты

1. m=1, p=1 $$A = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = R \cdot a_{n,i}$$ $$n = \frac{\ln\left(-\frac{A}{R}i\right)^{-1}}{\ln(1+i)}$$
2. m>1, p=1 $$A = R \cdot \frac{1-\left(1+\frac{i_н}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{i_н}{m}\right)^{m}-1} = R \cdot a_{mn,\frac{i}{m}}$$ $$n = \frac{\ln\left\{1-\frac{A}{R}\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1\right]\right\}^{-1}}{m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}$$
3. p=m, p>1 $$A = R \cdot \frac{1-\left(1+\frac{i_н}{m}\right)^{-mn}}{i_н}$$ $$n = \frac{\ln\left(1-\frac{A}{R}j\right)^{-1}}{m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}$$

4. p>1, p≠m $$A=\frac{R}{p}\cdot\frac{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}$$ $$n=\frac{\ln\left\{1-\frac{A}{R}p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right]\right\}^{-1}}{m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)}$$
5. m=1, p=1 $$A_{\infty}=\frac{R}{i}$$
6. p>1, m>1 $$A=\frac{R}{p}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}$$

Литература

1. Блац С.Л., Григорьев С.Г. Финансовая математика – М., «Академия», 2011.
2. Четырхин Е.М. Финансовая математика – М., «Дело», 2003.
3. Коченева Л.Ф., Новосельцева В.И. Методические указания по курсу «Финансовая математика» для студентов экономических специальностей. – М., 2001.

Св. план 2013 г., поз.170

Кочнева Людмила Федоровна,
Новосельцева Вера Ивановна

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА
Учебное пособие

Подписано в печать	Формат 60 X 84 / 16
Заказ №	Усл. - печ. л. -
Тираж -150 экз.	

150048, г.Ярославль, Московский пр-т, д.151.
Типография Ярославского филиала МИИТ.