Финансовая математика

1. Простые проценты

1.1. Определение простых процентов

Процентом данного числа называется одна сотая часть этого числа, т.е. 1% числа 1, записанный в виде десятичной дроби, есть 0.01. Число сотых долей, которое требуется найти, называется ставкой *процента, или процентной таксой.* Например, 5% от числа 1 есть 0.05; 120% от числа 1 есть 1.2 и т. д. В этой книге везде речь идёт о вычислении процентов от некоторой суммы денег. Если в тексте говорится об r*%,* то в формулах буквой г обозначается запись r% в виде десятичной дроби. Так, 9% от суммы *P* равны P × 0.09.
Если сумма *P* увеличивается на r*%,* то полученная в результате сумма *S*называется наращенной *суммой* и вычисляется по формуле

$$S = P + Pr = P(1 + r).$$

При этом величина *P* называется *исходной суммой, а. Pr— суммой начисленных процентов.* В дореволюционной русской литературе последняя величина называлась *интересом,* или *интересами* — хотелось бы этот термин возродить (см. Приложение А).

Пример 1. *Вкладчик положил в банк, выплачивающий в год* 5%, *сумму* 1500 *руб. Какая сумма будет на его счету через год? Решение.* Через год на счету будет сумма

$$S = P(1 + r) = 1500(1+0.05) = 1575 \text{ руб.}$$

Если имеется несколько периодов времени, в каждый из которых исходная сумма *P* увеличивается на r%, то говорят, что на сумму *P* начисляются *простые проценты. Наращенная сумма S,* полученная в результате начисления п раз по r% на сумму *P,* выражается формулой *S*= *P* + *Prп,* или

$$S = P(l+r\,n).$$

Формула, выражающая наращенную сумму при начислении простых процентов, получена при условии, что число *п* периодов начисления процентов — целое. По определению мы введём такую же формулу для любого положительного (не обязательно целого) числа периодов, которое мы теперь будем обозначать буквой *t:*

$$S = P\{l+rt). \qquad (1.1)$$

Необходимость начисления процентов за нецелое число периодов встречается в практике финансовых расчётов часто. Например, если банк выплачивает по депозитам г% годовых (простых), т. е. период начисления процентов равен одному году, то на депозит, пролежавший в банке 3 года и 3 месяца, банк должен начислить проценты за 3.25 периода. Какова должна быть в этом случае сумма начисленных процентов? Так как простые проценты начисляются на одну и ту же исходную сумму *P,* то естественно считать сумму начисленных процентов пропорциональной числу периодов, за которые эти проценты начисляются, т. е. равной *Prt,* и в том случае, когда число *t*не является целым. Тогда наращенная сумма равна $P + Prt = P(l + rt).$
Это рассуждение не доказывает формулу (1.1), которую мы ввели по определению, но показывает естественность этой формулы для практики финансовых расчётов.
Заметим, что при заключении финансовых контрактов обычно оговаривается наименьшая часть периода начисления процентов: например, каждый полный день (1/360 часть периода начисления, равного году) или каждая полная неделя (1/52 часть периода начисления, равного году). В этих случаях *t*в формуле (1.1) принимает лишь значения соответственно fc/360 или *к/52 (к* — целое). Так, если депозит пролежал в банке 2 года 16 дней, то в первом случае следует взять t=2+16/360=736/360, а во втором случае t=2+2/52=106/52
На практике может использоваться любой период начисления процентов. Однако для сравнения различных условий кредитования финансисты приводят ставку процента за произвольный период к годовой. Например, если Сбербанк даёт rм% простых в месяц, то это соответствует годовой ставке r = 12 ×rм%. Например, при rм = 6% имеем r = 12×6 = 72%.

1.2. Банковский депозит под простые проценты

Рассмотрим три типичные задачи, возникающие при вложении в банк денег под простые проценты.

Пример 2. *В условиях примера 1, какая сумма будет на счету вкладчика через полгода, через три года, через пять лет и три месяца, если период начисления процентов (простых) равен году?*

Решение. По формуле (1.1)

$S1$ = 1500 (1 + 0.5× 0.05) = 1537.5 руб.

S2 = 1500 (1 + 3×0.05) = 1 725 руб.

S3 = 1500 (1+ 5.25 × 0.05) = 1 893.75 руб.

Пример 3. *Какую сумму надо положить в банк, выплачивающий* 6% *простых в год, чтобы через* 2 года 6 *месяцев получить* 10000 *руб.?*

Решение. Нам известна наращенная сумма S=10 000 руб., количество периодов начисления простых процентов t= 2.5 года. Ставка начисляемых за каждый период простых процентов r = 6% = 0.06. Из формулы (1.1) определяем вложенную сумму

$$P=S/(1+rt). \qquad (1.2)$$

Подставляя данные задачи в эту формулу, получаем:

P =10000/(1 + 0.06×2.5) = 10000/1.15 = 8695.65 руб.

Пример 4. *В банк было положено* 1 500 *руб. Через* 1 *год* 3 *месяца на счету было* 1631.25 *руб. Сколько простых процентов выплачивает банк в год?*

Решение. Используем формулу (1.1). Известна вложенная сумма P = 1 500 руб. и полученная через t= 1.25 года сумма S= 1631.25 руб. Надо определить ставку простых процентов r. Из формулы (1.1) имеем

r=(S/P -1)*(1/t)

Подставляем данные задачи:

r =(1631.25/1500-1)*1/1.25=0.0875/1.25=0.07=7%

1.3. Ставка процента, выплачиваемая по векселю

К рассмотренным типичным задачам сводятся и многие другие финансовые операции. Рассмотрим одну из них.

Пример 5. *Господин Иванов занял у господина Петрова деньги, получив от него* 9800 *руб. и выдав ему вексель, по которому обязался выплатить* 10000 *руб. через три месяца. Под какой годовой процент r выдан этот вексель?*

Решение. Применяем формулу (1.3). По условию P = 9800 руб., S = 10000 руб., t= 0.25 года. Находим

r=(10000/9800 -1)(1/0.25)=0.0816=8.16%*

1.4. Потребительский кредит

Простые проценты применяются в *потребительском кредите.* Потребитель, приобретая некоторый товар, цена которого равна Р, получает от продавца кредит на всю эту сумму (или на её остаток, если часть этой суммы он выплачивает в момент покупки). Кредит даётся на *t*лет под простые проценты по годовой ставке г. Сумма долга покупателя согласно формуле (1.1) равна поэтому S= Р(1 + rt). Эта сумма, как правило, погашается равными платежами q=S/tm, где *т* — число платежей в год; обычно, *т* = 12, т. е. платежи делаются ежемесячно.

Пример 6. *Покупатель приобрёл холодильник, цена которого* 20000 *руб., в кредит, уплатив сразу* 5000 руб. и обязавшись уплатить *остальное в течение* 6 *месяцев, делая ежемесячные равные платежи. Какую сумму он должен выплачивать ежемесячно, если продавец требует* за кредит 6% *простых в год?*
Решение. Покупатель должен продавцу 15000 руб., это первоначальная сумма *Р.* Найдём конечную сумму 5, если *г* = 6%, *t*= 0.5 года.
По формуле (1.1)
S= Р(1 + rt) = 15 000(1 + 0.06×0.5) = 15450 руб.
Ежемесячно покупатель должен выплачивать 15450/6 = 2 575 руб.

1.5. Простой дисконт

Простым дисконтом называется процентный доход, вычитаемый из ссуды в момент её выдачи. Если процентная ставка простого дисконта — d%, величина ссуды — *S*руб. (эта сумма должна быть возвращена), Р — величина ссуды, полученнаяв момент её выдачи, *t*лет — срок, на который выдаётся ссуда, то простой дисконт равен *Sdt* и *Р* = S — *Sdt,* т. е.

$$P = 5(1 - dt). \qquad (1.4)$$

Пример 7. *Финансовая компания даёт ссуду 5000 руб. на 3 года под простой дисконт, равный 5% в год. Какую сумму получит клиент в момент получения ссуды?*
Решение. По условию задачи 5 = 5000 руб., d = 5%, t= 3 года. Находим P по формуле (1.4): P = 5000(1-0.05×3) = 5000×0.85 = 4250 руб.

Пример 8. *Господин Сидоров желает получить ссуду* 10 000 *руб. на три месяца. Сколько он должен вернуть через три месяца, если возьмёт ссуду под 8% простого дисконта?*
Решение. По условию задачи P = 10000 руб., d = 0.08,
t= 0.25 года. По формуле (1.4) 10000 = S(1 - 0.08×0.25);
откуда S=10204.08 руб.

Пример 9. *Сколько должен вернуть господин Сидоров из примера 8, если он возьмёт ссуду под 8% простых годовых?*
Решение. По формуле (1.1), где P = 10000 руб., d = 0.08,
t= 0.25, имеем S = 10000 (1 + 0.08×0.25) = 10200руб.

Сравнивая полученный результат с результатом примера 8, мы видим, что кредитору выгоднее давать ссуду под простой дисконт, чем под простой процент.

1.6. Учёт векселей

Простые проценты применяются иногда в финансовой операции, которая называется *банковским учётом* и заключается в следующем: банк покупает вексель на сумму 5 у его владельца до истечения срока оплаты векселя по цене *P,* меньшей, чем 5. Эта операция называется учётом векселя. Цена *P* рассчитывается по формуле:

$$P = S(1 - td)\ , \qquad (1.5)$$

где *t*— число лет, остающееся с момента учёта векселя до срока его оплаты; *d%* — учётная ставка, установленная банком.

Пример 10. Тратта *(переводной вексель) выдана на* 10 000 *руб. с уплатой* 15 *октября того же года. Владелец векселя учёл его в банке* 15 августа по *учётной ставке* 10%. *Сколько он получил? Сколько он получит, если срок уплаты по векселю* 15 *октября следующего года?*

Решение. По условию S = 10000 руб., *d*= 0.1; рассчитаем *t*лет: число дней между 15 августа и 15 октября равно 60; считая, что в году 360 дней (так принято при банковском учёте), имеем *t*= 60/360 = 1/6,

P=10 000 (1 - 1/6×0.1)=10 000 × 59/60=9833.33 руб.

Число дней между 15 августа и 15 октября следующего года равно 360 + 60 = 420 дней, т.е. *t*= 420/360 = 7/6,

P=10 000 (1 – 7/6×0.1)=10 000 ×53/60= 8833.33 руб.

1.7. Приведение ценности денег к одному моменту времени

В теории и на практике нам постоянно приходится решать вопрос о том, как соотносятся между собой суммы денег, полученные в различные моменты времени. Финансовая теория отвлекается от субъективной оценки экономического агента. Она исходит из *принципа невозможности межвременного арбитража:* ценность некоторой суммы денег Sв будущем эквивалентна такой сумме денег P в текущий момент времени, которая будучи подходящим образом использованной на финансовом рынке, принесёт нам ровно сумму Sна рассматриваемый будущий момент времени. Вопрос о том, что следует понимать под *подходящим использованием,* является одной из серьёзных задач теории корпоративных финансов. Достаточно отметить, что здесь необходимо учитывать такой фактор финансового рынка как риск — различное использование связано и с принятием инвестором различного риска. В простейшей постановке, принятой в этой книжке, предполагается, что операции носят безрисковый характер.
Если в качестве подходящего использования денег мы рассматриваем возможность инвестировать их (положить в банк, купить облигации и т.п.) под простой годовой процент r%, то сумма денег Sчерез tлет согласно формуле (1.1) будет $S= P(l +rt)$. Поэтому *современная* (или *приведённая) ценность P* суммы S, которая будет получена через tлет, вычисляется (определяется) по формуле (1.2)

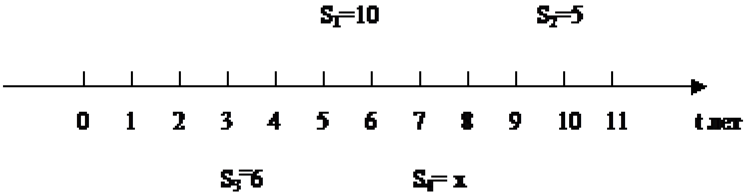
$$\mathbf{P=S/(1+rt)}$$

Вычисление современной ценности суммы денег называется *дисконтированием* этой суммы.
Термин „современная" ценность не носит абсолютного характера — современным в расчётах может быть взят любой момент времени.
Два контракта называют эквивалентными, если современные ценности потоков платежей по этим контрактам одинаковы. Это понятие используется при изменении контракта и для сравнения контрактов.
Рассмотрим пример.

Пример 15. Имеется обязательство *уплатить* 10000 *руб. через* 5 лет *и ещё* 5 000 *руб. через* 10 лет от *настоящего момента. Этот контракт надо заменить на такой: уплатить* 6 000 *руб. через* 3 года, а *остальной долг выплатить через 7 лет (от настоящего момента). Какая сумма должна быть выплачена через 7 лет, если на деньги начисляются* 8% *простых в*

год?

Решение. Изобразим суммы первого контракта над осью времени, а второго — под осью. Стрелкой внизу указан современный момент времени.



Дисконтируем все суммы на момент 0, т. е. находим приведённые к моменту 0 ценности этих сумм:

P1=S1/(l+ 5r) = 10/(1 +5 × 0.08) = 10/1.4 = 7.143,

P2 = S2/(1 + 10r) = 5/(1 + 10×0.08)= 5/1.8 = 2.778,

P3 = *S3*/(1+ 3r)= 6/(1+3 ×0.08)= 6/1.24 = 4.839,

P4 = S4/(1+ 7r)= x /(1 + 7×0.08)= x/1.56.

Контракты будут эквивалентны, если выполнено равенство

P1+P2 = Рз + P4,

то есть:

7.143 + 2.778 = 4.839 + ж/1.56,

откуда находим x:

x= (7.143 + 2.778 - 4.839) x 1.56 = 7.928.

Итак, сократив сроки платежей, мы уменьшим суммарные

выплаты с 15 000 руб. до 6 000 + 7 928 = 13 928 руб.

2. Инфляция

В рассмотренных выше методами наращения все денежных величин измерялись по номиналу. Иначе говорят, не принималось во внимание снижение реальной покупательной способности денег за период, охватываемый финансовой операцией. Однако в современных, особенно российских, условиях инфляция часто играет решающую роль и без ее учета конечныt результаты представляют собой весьма и весьма условную

величину.
Инфляцию необходимо учитывать, по крайней мере в двух случаях: при расчете наращенной суммы денег и при изменении реальной эффективности (доходности) финансовой операции. Остановимся на этих проблемах.
Прежде всего напомним, что изменение покупательной способности денег за некоторых период измеряется с помощью соответствующего индекса $J_{пс}$. Пусть S- наращенная сумма денег, измеренная по номиналу. Эта же сумма, но с учетом ее обесценения составит:

$$C = S \times J_{пс}.$$

Индекс покупательной способности денег, как известно, равен обратной величине индекса цен:

$$J_{пс} = \frac{1}{J_p}.$$

Разумеется, указанные индексы должны относиться к одним и тем же временным интервалам. Пусть, например, сегодня получено 150 тыс. руб., известно, что за два предшествующих года цены увеличились в три раза, т.е. $J_p = 3$. В этом случае индекс покупательной способности денег равен 1/3. Следовательно, реальная покупательная способность 150 тыс. руб. составит в момент получения всего 150×(1/3)=50 тыс. руб. в рублях двухлетней давности.
Нетрудно связать индекс цен и темп инфляции. Предварительно напомним некоторые понятия. Под темпом инфляции обычно понимается относительный прирост цен за период; обозначим его как H; измеряется он в процентах. Темп инфляции и индекс цен связаны следующим образом:

$$H = 100(J_p - 1)$$

В свою очередь

$$J_p = \left(1 + \frac{H}{100}\right).$$

Например, если темп инфляции равен 130 %, то цены за этот период выросли в 2,3 раза.

Среднегодовые темп роста цен $(\bar{i}_p)$ и темп инфляции (h) находятся на основе величины J_p как :

$$\bar{i}_p = \sqrt[n]{J_p}$$

$$h = 100\left(\sqrt[n]{J_p} - 1\right)$$

Поскольку инфляция является цепным процессом (цены в текущем периоде повышаются на h_t процентов относительно уровня, сложившегося в предыдущем периоде), то индекс цен за несколько таких периодов равен произведению цепных индексов цен :

$$J_p = \prod_{1}^{n}(1+h_t) \quad (2.40)$$

Пусть теперь речь идет о будущем. Если h- постоянный ожидаемый (или прогнозируемый) темп инфляции за период, то за n таких периодов получим

$$J_p = \left(1+\frac{h}{100}\right)^n \quad (2.41)$$

Грубой ошибкой, которая, к сожалению, встречается в российской практике(Даже в экономических публикациях, претендующих на научность!), является суммирование темпов инфляции для получения обобщающего величину получаемого показателя.

Пример 2.22.

а) постоянный темп инфляции на уровне,

скажем, 10% в месяц за год приводит к росту цен в размере $J_p = 1{,}1^{12} = 3{,}1384$, таким образом, годовой темп инфляции равен 213,84%, а не 120%;
б) последовательный прирост цен по месяцам составил 25;20 и 18%.
Индекс цен за три месяца согласно формуле(2.40) равен 1,25×1,2×1,18=1,77.
Темп инфляции за три месяца составил 77%.

Вернемся к проблеме обесценения денег при их наращении. В общем случае теперь можно записать:

$$C = \frac{S}{J_p}. \quad (2.42)$$

Если наращение производится по простой ставке, имеем:

$$C = P\frac{1+ni}{J_p} = P\frac{1+ni}{\left(1+\frac{h}{100}\right)^n} \quad (2.43)$$

Как видим, увеличение наращенной суммы с учетом сохранения покупательной способности денег имеет место только тогда, когда

$$1+ni > J_p$$

Пример 2.23.
Допустим, на сумму 1,5 млн. руб. в течение трёх месяцев начисляются простые проценты по ставке 50% годовых (K=360). Наращенная

сумма равна 1,6875 млн. руб. Если ежемесячная инфляция характеризуется темпами, приведенными в примере 2.22, б, то с учетом обесценения наращенная сумма составит всего 1,6875/1,77=0,9534 млн. руб.

Обратимся теперь к наращению по сложным процентам. Подставив в формулу (2.42) значение

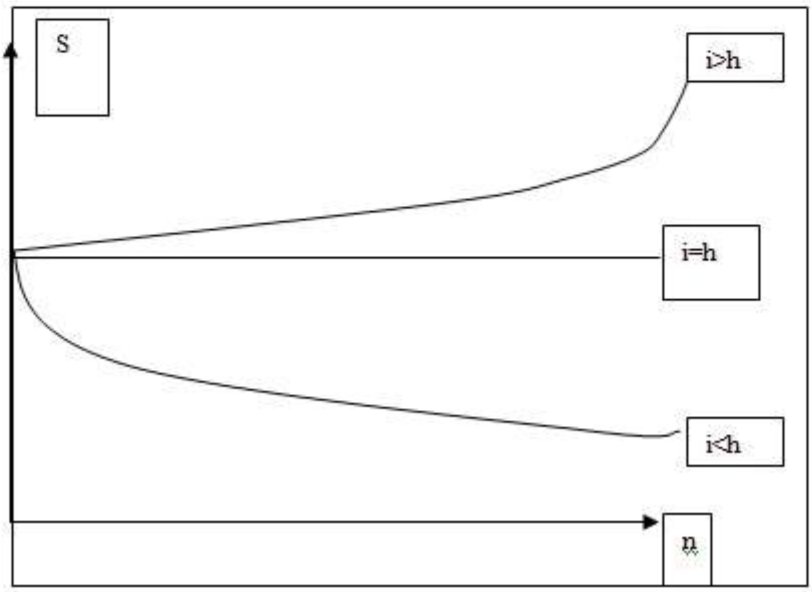
S и J_p ,находим

.

$$C = P\frac{(1+i)^n}{J_p} = P\left(\frac{1+i}{1+\frac{h}{100}}\right)^n \qquad (2.44.)$$

Величины, на которые умножается P в формулах (2.43) и (2.44), представляют собой множители наращения с учетом инфляции. Посмотрим теперь, как влияют ставка процента i и темп инфляции h на величину C. Очевидно, что если среднегодовой темп инфляции равен ставке процентов, то роста реальной суммы не произойдет: наращение будет поглощаться инфляцией и, следовательно, C=P.Если же h/100>I, то наблюдается «эрозия» капитала, его реальная сумма будет меньше первоначальной. Только в ситуации, когда h/100<i, происходит реальный рост (рис.2.8)

Рис. 2.8.



Возникает вопрос: при какой процентной ставке наращение будет только компенсировать инфляцию? Если речь идет о простых процентах, то, приравняв множитель наращения с учетом инфляции в формуле (2.43) к единице, находим минимально допустимую (барьерную) ставку:

$$i^* = \frac{J_p - 1}{n}.$$

Для сложных процентов искомую ставку определим на основе формулы (2.44). Получим $i^* = h$. Ставку, превышающую i^*, называют *положительной ставкой процента*.

Пример 2.24.

По данным примерам 2.23 найдем минимально допустимую величину ставки. Напомним, что индекс цен за три месяца был равен 1,77.

$i^* = \frac{1{,}77 - 1}{3/12} = 3{,}08$ или 308% годовых.

Таким образом, только ставка, превышающая 308% годовых, будет в данных условиях приносить реальный доход.

Владельцы денег, разумеется, предпринимают различные попытки для компенсации обеспечения денег. Наиболее распространенной является корректировка ставки процентов, по которой осуществляется наращение, т.е. увеличение ставки на величину так называемой *инфляционной премии,* иначе говоря, производится индексация ставки. Итоговую величину можно назвать *брутто-ставкой*. (В западной финансовой литературе такую ставку часто называют номинальной. Однако этот термин уже «занят» - см. параграф 2.3.) Обсудим методы определения брутто-ставки. Если речь идет о полной компенсации инфляции в размере брутто-ставки при начислении простых процентов, то необходимую величину находим из равенства

$$1+nr=(1+ni)J_p=(1+ni)\left(1+\frac{h}{100}\right)^n$$

где r - брутто-ставка.

Отсюда

$$r=\frac{(1+ni)J_p-1}{n} \qquad (2.45)$$

Пример 2.25.

По данным примеров 2.23 и 2.24 получим

$$r=\frac{(1+3/12\times 0,5)\times 1,77-1}{3/12}=3,965.$$

Таким образом, простая ставка, равная 396,5% годовых, не только компенсирует инфляцию, но и обеспечивает реальную доходность, равную 50% годовых.

Величину брутто-ставки для наращения по сложной ставке процента находим равенства

$$1+r=(1+i)\left(1+\frac{h}{100}\right)$$

Отсюда

$$r=i+\frac{h}{100}+\frac{h}{100}i\,. \qquad (2.46)$$

Часто ставку, скорректированную по темпу инфляции, часто рассчитывают проще
а именно :

$$r=i+\frac{h}{100}\,. \qquad (2.47)$$

Формула (2.47) по сравнению с формулой (2.46) содержит один дополнительный член, который при незначительных величинах i и h можно пренебречь. Если же они значительны, то ошибка (не в пользу владельца денег) станет весьма ощутимой. Например, даже при $i=5\%$ и $h=10\%$ «вклад» этого произведения в брутто-ставку составит 0,5%. Брутто-ставка в этом случае равна 15,5% вместо 15% по формуле (2.47). При годовой инфляции в 100% и той же ставке наращение брутто-ставка увеличивается до 0,05+1+1×0,05=1,1, т.е. до 110%, а не 105%. Разумеется, что при высоких темпах инфляции корректировка (индексация) ставки имеет смысл только для кратко- или в крайнем случае для среднесрочных операций.
Перейдем теперь к решению обратной задачи – к изменению *реальной ставки процента*, т.е. доходности с учетом инфляции – определению i по заданному значению брутто-ставки. Если r объявленная норма доходности (брутто-ставка), то искомый показатель доходности в виде годовой процентной ставки i можно определить при начислении простых процентов на основе (2.43) как

$$i=\frac{1}{n}\left(\frac{1+nr}{J_p}-1\right) \qquad (2.48)$$

Реальная доходность, как видим, здесь зависит от срока наращения процентов. Напомним, что фигурирующий в этой формуле индекс цен охватывает весь период начисления процентов.
Аналогичный по содержанию показатель, но при наращении по сложным процентам найдем на основе формулы (2.44):

$$i = \frac{1+r}{1+\frac{h}{100}} - 1 \quad (2.49)$$

Если брутто- ставка определяется упрощенно (2.47), то

$$i = r - \frac{h}{100}. \quad (2.50)$$

Это не точно при больших h.
Показатель доходности здесь не зависит от срока начисления процентов.
Положительной ставка i
Может быть только при условии $\frac{1+rn}{J_p} > 1$ при начислении простых процентов и $r > h$ при начислении сложенных процентов.

Пример 2.26.
Найдем реальную ставку сложенных процентов для условий: годовая инфляция 120%, брутто-ставки 150%: $i = \frac{1+1{,}5}{1+1{,}2} - 1 = 0{,}1364$, или 13,68% (по упрощенной формуле 30%).

Другой метод компенсации инфляции сводится к индексации первоначальной суммы платеж P. В этом случае эта сумма периодически корректируется с помощью заранее оговоренного индекса. Такой метод принят в Великобритании.
По определению

$$C = PJ_p(1+i)^n$$

Упражнения к разделу 1

1. Вкладчик положил в банк, выплачивающий *7%* простых в год, вклад 3000 руб. Какая сумма будет на счету вкладчика а) через 3 месяца, б) через 1 год, в) через 3 года 5 месяцев?
2. Какую сумму надо положить в банк, выплачивающий 4% простых в год, чтобы получить 50 000 руб. а) через 4 месяца, б) через 1 год, в) через 2 года 9 месяцев?
3. В банк было положено 100 000 руб. Через 2 года 6 месяцев на счету было 120000 руб. Сколько процентов (простых) выплачивает банк в год?
4. В банк, выплачивающий 6% простых годовых, положили 60 000 руб. Через сколько лет на счету будет 65 400 руб.?
5. Покупатель приобретает костюм, который стоит 50000 руб. Он уплатил сразу 20000 руб., а на остальную сумму получил кредит на 1 год 6 месяцев под 4% годовых (простых), который должен погасить ежемесячными равными уплатами. Чему равна каждая уплата?
6. Г-н Иванов покупает в магазине телевизор, цена которого 450 000 руб. На всю эту сумму он получает кредит, который должен погасить за два года равными ежеквартальными уплатами. Чему равна каждая уплата, если магазин предоставляет кредит под 6% годовых (простых)?
7. Фермер приобрёл трактор, цена которого 1500000 руб., уплатив сразу 600 000 руб. и получив на остальную сумму кредит на 2 года 6 месяцев, который он должен погасить равными уплатами по полугодиям. Чему равна каждая уплата, если кредит выдан под 8% годовых (простых)?
8. Банк выдал г-ну Фёдорову ссуду в 90000 руб. на 2 года под простой дисконт, равный 12% в год. Какая сумма будет выдана господину Фёдорову на руки? ;.,
9. Г-н Фёдоров из упражнения 8 желает получить при тех же условиях на руки 90000 руб. Какую сумму он будет должен банку?
10. Какую сумму будет должен банку г-н Фёдоров из упражнения 8, если он получит ссуду под 12% годовых (простых)? Что выгоднее г-ну Фёдорову: взять ссуду под простой дисконт или под простые проценты?
11. Г-н Петров имеет вексель на 15000 руб., срок которого 1 июля. Он хочет учесть его 1 марта того же года в банке, простая учётная ставка которого 7%. Какую сумму получит г-н Петров за этот вексель? Какую сумму получит г-н Петров, если срок этого векселя 1 июля следующего года?
12. Клиент учёл 1 февраля 1992 года вексель на сумму 40 000 руб., срок которого 1 июня того же года, и получил за него 38 790 руб. Какова учётная ставка банка?
13. Г-н Гаврилов должен выплатить господину Серову 20 000 руб. в следующие сроки: 5 000 руб. через 2 года, 5 000 руб. через 3 года и ещё

10 000 руб. через 5 лет, считая от настоящего момента. Г-н Гаврилов предложил изменить контракт, обязавшись уплатить 10000 руб. через 3 года и ещё 10000 руб. через 4 года от настоящего момента. Эквивалентны ли эти контракты, если на деньги начисляются 5% годовых (простых). Если контракты не эквивалентны, то какой из них выгоднее для г-на Серова?

14. Какую сумму должен выплатить г-н Гаврилов из упражнения 18 по новому контракту через 4 года, чтобы новый контракт был эквивалентен первоначальному?

3. Сложные проценты

3.1. Определение сложных процентов

Говорят, что на сумму P начисляется *i сложных процентов* в течение n процентных периодов, если в конце каждого периода к сумме, имевшейся на начало этого периода, прибавляется *i%* от этой суммы.

В конце первого периода к сумме *P* прибавляется сумма *Pi,* т.е. наращенная сумма будет равна

$S1=P+Pi=P(1+i)$

В конце второго периода к сумме P(1 + i) прибавляется сумма *P(1 + i)i* и наращенная сумма составит

$S2 = P(1 + i) + P(1 + i)i = P(1 + i)2.$

Аналогично, к концу третьего периода будем иметь наращенную сумму P(1+i)2, и к концу n-го периода наращенная сумма будет равна

$Sn = P(l + i)^n$.

Множитель $(l + i)^n$ называется *множителем наращения.* При выводе последней формулы мы считали число периодов *n* целым. В практике финансовых расчётов часто приходится вычислять суммы, наращенные за нецелое число периодов начисления. Например, если рассматривается годовая ставка процентов, т. е. период равен одному году, то выведенная формула позволяет нам вычислить только суммы, наращенные за целое число лет. Однако имеется необходимость знать наращенную сумму, например, за полгода (n = 0.5) или за 3 года 2 месяца (n = 19/6) и т. п. По определению для произвольного (может быть, и нецелого) числа периодов *t* наращенная сумма при начислении сложных процентов вычисляется по формуле

$$St = P(1 + i)^t \quad (3.1)$$

Составлены таблицы множителя наращения для различных значений *i*и *t*(см. Приложение Б, Таблица 1). Вычислять значения множителя наращения можно и с помощью калькулятора или компьютера.
Как и в случае простых процентов, так и в случае сложных процентов, финансовое учреждение может указывать процентную ставку на любой период начисления. Для сравнения следует привести такую ставку к годовой. Например, если Сбербанк даёт r% сложных в месяц, то исходная сумма Р за год превратится в наращенную сумму $S = \mathrm{P}(1 + r)^{12}$. Соответствующая годовая ставка *i* определяется равенством $\mathrm{P}(1 + r)^{12} = P(1+i)$, откуда $i = (1 + r)^{12} - 1$. Если r = 6%, то $i = (1 + 0.06)^{12} - 1 = 101.2\%$. Сравнивая с расчётом, приведённым в п. 1.1 для простых процентов, мы видим, что при одинаковой месячной ставке процента годовая ставка сложных процентов значительно больше, чем простых.

Пример 1. Сберегательный банк начисляет *ежегодно* 8% сложных. *Клиент положил в этот банк* 20000 *руб. Какая сумма будет на счету а) через* 5 лет, *б) через 6 лет и три месяца?*
Решение, а) По формуле (3.1) находим *S,* если Р = 20000, г = 0.08, *п* = 5, а именно
$S = 20000(1 + 0.08)^5 = 20000 \times 1.469328 = 29386.56$ руб.
Заметим, что если бы банк выплачивал 8% простых, то через 5 лет на счету была бы сумма
S= 20000(1 -I- 0.08×5) = 20000× 1.4 = 28000 руб.
б) В этом случае п = 6.25 и
$S = 20000(1 + 0{,}08)^{6{,}25} = 20000 \times 1.617702 = 32\,354.04$ руб.

Как уже было сказано, в практике финансовых расчётов ставку сложных процентов, как правило, указывают на период, равный году, но вычисление сложных процентов может производиться каждое полугодие, квартал, месяц или даже день. При этом за каждый такой период, равный *1/т* части года, начисляются сложные проценты по ставке *i/т* сложных процентов. В этом случае формула (3.1) примет вид:

$$S = P(1 + \frac{i}{m})^{tm},$$

где *t*— длительность промежутка времени, в течение которого начисляются сложные проценты; *t*измеряется в годах. Например, в случае одного квартала *t*= 0.25.

Чтобы показать, что при годовой ставке сложных процентов *i*вычисление сложных процентов производится *т* раз в году по ставке *i/т* эту ставку обозначают *jm.* Тогда последняя формула запишется так:

$$S = P(1 + \frac{jm}{m})^{tm}. \quad (3.2)$$

Пример 2. Решим *пример 1 (а), если j4* = 8% и если *j12 = 12%.*

Решение. Если j4 = 8%, то по формуле (3.2) *S*= 20 000 (1 + 0.08/4)5*4 = 20 000 × 1.4859474 = 29 718.95 руб. Если *j12* = 8%, то аналогично

S= 20 000 $(1 + \frac{0.08}{12})^{5*12}$ = 20 000 ×1.4898457 = 29 796.91 руб.

Мы видим, что при увеличении числа периодов начисления процентов при той же годовой процентной ставке наращенная сумма, полученная за одно и то же время, увеличивается.

3.2. Основные задачи на сложные проценты

При использовании сложных процентов встречаются те же три задачи, которые были рассмотрены для простых процентов. Первая задача встретилась в примерах 1 и 2 из раздела 1. следующих двух примерах решаются две другие задачи.

Пример 3. *Господин Смирнов может вложить деньги в банк, выплачивающий* J_{12} = 7%. *Какую сумму ему следует сложить, чтобы получить* 3000 *руб. через* 4 года 6 *месяцев?*

Решение. По условиям задачи: *j12* = 7% = 0.07, *m* = 12, *t*= 4.5. По формуле (3.2) имеем

$$3000 = P(1+\frac{0.07}{12})^{12*4.5},$$

или

$$3000 = P(1 + 0.0058)^{54},$$

откуда находим

$$P = 3000(1 + 0.0058)^{-54} = 3000 \times 0.7317655 = 2195.30 \text{ руб.}$$

В этой задаче требовалось узнать, сколько надо вложить в настоящее время, чтобы накопить сумму *S* через некоторое время в будущем. Решение этой задачи называется дисконтированием суммы *S.* Эта задача решается формулой

$$P = S/(l+i)t = S(l+i)^{-t} \quad (3.3)$$

если начисление *i%* сложных производится один раз в год в течение *t*лет, и формулой

$$P=S/(1+jm/m)^{tm}=S(l+jm/m)^{-tm} \quad (3.4)$$

(Если начисление процентов производится по ставке *jm* в течение *t* лет. Множитель (1 + *i)-t* называется *дисконтным множителем;* имеются его таблицы для различных значений i и *t.*

Пример 4. *Господин Филиппов хочет вложить* 5000 руб., чтобы через 2 года получить 7 000 руб. *Под какую процентную ставку j1 он*

должен вложить свои деньги?
Решение. При ставке $j1$проценты начисляются 1 раз в год. Применим формулу (3.1) при S= 7000,P = 5000, t= 2 и определим из неё значение г:
7000 = 5000(1 + i)^2; (1 + i)^2 = 1.4; 1 + i = 1.183;
i= 0.183; i = 18.3%.

Пример 5. *Определим годовую процентную ставку начисляемых ежегодно процентов, если вложенная сумма денег удваивается через* 8 лет.
Решение. Применяем формулу (3.1). По условию задачи S= $2P$, t= 8, требуется найти i:
2P = P(1 + i)^8; 1 + i = $\sqrt[8]{2}$ = 1.09051; i = 0.09051 = 9.051%.

3.3. Непрерывное начисление процентов

Мы видели (пример 2), что сумма, наращенная за tлет при постоянной процентной ставке jmс увеличением числа m увеличивается — в курсе высшей математики этот результат доказывается в общем виде. Покажем, что при неограниченном увеличении m наращенная сумма S = S(t) стремится к конечному пределу

$$\lim_{m\to\infty} Sm = \lim_{m\to\infty} \lim P\left(1 + \frac{j}{m}\right)$$

Обозначим j/m= h; если $m\to\infty$, то h— 0, тогда

$$S = \lim_{m\to\infty} P\,(l + \frac{jm}{m})^{mt}$$

Известно, что $\lim_{h\to 0}(l + h)^{1/h} = e$, где e $= 2.718281828\ldots$, - основание натуральных логарифмов, поэтому:
lim Sm = $Pe^{j_m t}$.
m→∞
Этот факт даёт основание применять так называемое *непрерывное начисление процентов по годовой ставке δ;* при этом наращенная за время t сумма определяется формулой

$$S = Pe^{\delta t}. \quad (3.5)$$

Процентная ставка δ в этом случае называется *силой роста.* Иногда силу роста обозначают $j\infty$. Значение e^x *для* разных значений ^{x} можно найти по таблице или вычислить по разложению *ех* в степенной ряд $E^x=1+x/1!+x^2/2!+x^3/3!+\ldots$.

Пример 6. *Решить пример 1 при условии, что банк начисляет* $j\infty = 8\%$.
Решение. В этом случае Р = 20000; $\delta = j =$ 0.08; t = 5. По формуле (3.5) находим
$S = 20000e^{0,08x5} = 20000e^{0,4} = 20\,000\times1.49182 = 29836.49$ руб.

Сравнивая с результатом примера 2, видим, что сумма, полученная при непрерывном начислении процентов, лишь немного больше суммы, полученной при применении ставки j_{12}-Из формулы (3.5) непосредственно следует формула дисконтирования капитала при непрерывном начислении процентов:

$$\mathbf{P} = Se^{-\delta t} \quad (3.6)$$

3.4. Учёт векселей по сложной учётной ставке

Операция *банковского учёта,* рассмотренная в п. 1.7, иногда производится по сложной учётной ставке *dc,* начисляемой один раз в год, или по сложной учётной ставке f_m, которая начисляется *т* раз в год в размере *fm/m%.* В этих случаях сумма денег Р, выплачиваемая банком за вексель на сумму *S,* вычисляется по формулам:

$$P = S(l- dc)^t$$

$$P=S(1-fm/m)^{tm}$$

где t— величина промежутка времени от момента учёта векселя до срока его выкупа (в годах).

Пример 7. *Вексель выдан на* 10000 *руб. с уплатой* 15 октября. *Владелец документа погасил его в балке* 15 *августа того же года по сложной учётной ставке* 10%. *Сколько он получил? Сколько получит владелец документа, если срок уплаты по нему* 15 *октября следующего года?*

Решение. Число дней между 15 августа и 15 октября равно 60. Применяем формулу (2.7).

S= 10000; dc= 0.1; t=60/360= 1/6=0.1(6),

$P = 10000(1 - 0.1)^{0.1(6)} = 0.982593 \times 10000 = 9\,825.93$ руб.

Число дней между 15 августа и 15 октября следующего года равно 360 + 60 = 420 дней, т.е. t= 420/360 = 7/6 = 1.1(6),

$P = 10000(1 - 0.1)^{1.1(6)} = 0.8843338 \times 10000 = 8843.34$ руб.

Сравнивая результат этого примера с результатом примера 10, мы замечаем, что если срок от момента учёта до момента выкупа векселя меньше года, то учёт по сложной ставке выгоднее для банка, чем по простой, а если этот срок больше года, то банку выгоднее учёт по простой ставке.

3.5. Эквивалентность процентных ставок

При заключении финансовых контрактов каждый участник сделки стремится заключить контракт на наиболее выгодных для себя условиях. Условия контракта могут быть различными, и надо иметь возможность сравнивать контракты. При этом различные контракты могут предусматривать различные виды начисления процентов, и для сравнения таких контрактов надо разработать способы приведения различных процентных ставок к одному виду. Для этой цели вводятся понятия эквивалентности процентных ставок и эффективной процентной ставки. Мы познакомились с семью видами процентных ставок, применяемых в финансовых расчётах. Это: простые и сложные проценты, начисляемые один раз в год (обозначим их *i„* nic), годовая ставка *jm,* по которой m раз в год начисляется *jm/т* сложных процентов, ставка непрерывных процентов (сила роста) *5,* простая и сложная учётные ставки *dn*и *dc*и учётная ставка fm, начисляемая m раз в году. Напомним формулы для вычисления наращенной суммы *S*для всех семи видов процентных ставок:

$$S = P(1+ti),$$

$$S=P(1+ic)^{t},$$

$$S=P(1+jm/m)^{tm},$$

$$S=Pe^{\delta t},$$

$$S=P(1-td),$$

$$S=P/(1-dc)^{t},$$

$$S=P/(1-fm/m)^{tm},$$

Во всех формулах *t* есть число лет (оно может быть дробным).
Две *процентные ставки* называют *эквивалентными,* если применение их к одинаковым суммам в течение одинаковых промежутков времени даёт одинаковые наращенные суммы.
Приравнивая правые части каких-либо двух из приведённых выше семи формул и выражая из этого равенства одну процентную ставку через

другую, мы получаем условие эквии;шентности соответствующих процентных ставок за *t* лет. Та-ких равенств можно составить 21 и, следовательно, получить 42 выражения одной из процентных ставок через эквивалентную ей другую процентную ставку. Приведём все эти выражения. Приравнивая правые части формул (1) и (2), получим уравнение

$P(1 + tin) = P(1+ic)^t$, решая которое относительно iП и ic, получим условия эквивалентности этих ставок:

$$iп=(1+ic)^t-1/t. \quad (3.9)$$

$$i_c = \sqrt[t]{1+ti_n} - 1 \quad (3.10)$$

Из формул (1), (4) получаем условия эквивалентности iП и *δ:*

$$iп= e^{\delta t}-1/t. \quad (3.11)$$

$$\delta=\ln(1+tiП)/t. \quad (3.12)$$

Из формул (1), (5) получаем условия эквивалентности iп и dп-

$$iп=dп/(1-tdп). \quad (3.13)$$

$$dп=iп/(1+tiп). \quad (3.14)$$

Из формул (1), (6) получаем условия эквивалентности in и *dc:*

$$iП=(1-dc)-t-1/t. \quad (3.15)$$

$$dc=1-1/\sqrt[t]{1+ti_П}. \quad (3.16)$$

Из формул (1), (7) получаем условия эквивалентности iп и

$$iп=(1-fm/m)-tm-1/t. \quad (3.17)$$

$$fm=(1-1/\sqrt[tm]{1+ti_П}). \quad (3.18)$$

Из формул (2), (3) получаем условия эквивалентности *ic*и *jm:*

$$ic=(l + jm/m)^m-l. \quad (3.19)$$

$$jm= m(\sqrt[m]{1+i_c} - 1). \quad (3.20)$$

Заметим, что эквивалентность ставки сложных процентов tc и ставки *jm*не зависит от числа лет *t*начисления процентов, т.е. можно говорить, что формулы (3.21) и (3.22) устанавливают эквивалентность ставок ic и *jm,* не упоминая число лет *t.* Такая же независимость эквивалентности от числа лет начисления процентов имеет место для ставок ic и *δ* (формулы (3.23) и (3.24)), для ставок ic и *dc*(формулы (3.27) и (3.28)), для ставок ic и *fm*(формулы (3.29) и (3.30)), для ставок *jm*и *δ* (формулы (3.31) и (3.32)), для ставок *jm* и *dc*(формулы (3.35) и (3.36)), для ставок *jm* и fm (формулы (3.37) и (3.38)), для ставок *δ* и *dc*(формулы (3.41) и (3.42)), для ставок *δ* и fm (формулы (3.43) и (3.44)), для ставок *dc* и fm (формулы (3.49) и (3.50)). Приравнивая коэффициенты наращения за один и тот же срок, можно получить любые соотношения между ставками

$$ic=e^{\delta}-1. \qquad (3.21)$$

$$\delta=\ln(1+ic). \qquad (3.22)$$

из формул (2), (5) получаем условия эквивалентности ic и *dn*

$$ic=1/(\sqrt[t]{1-td_{п}})-1. \qquad (3.23)$$

$$dп=1-(1+ic)^{-t}/t. \qquad (3.24)$$

из формул (2), (6) получаем условия эквивалентности ic и *dc:*

$$ic=dc/(1-dc). \qquad (3.25)$$

$$dc = ic/(1+ic). \qquad (3.26)$$

Из формул (2), (7) получаем условия эквивалентности ic и fm:

$$ic=(1/(1-fm/m)^{m})-1. \qquad (3.27)$$

$$fm=m\left(1-\frac{1}{\sqrt[m]{1+i_c}}\right). \qquad (3.28)$$

Из формул (3), (4) получаем условия эквивалентности *jm* и δ:

$$j_{ro}=m(\sqrt[m]{e_\delta}-1). \tag{3.29}$$

$$\delta = m\ln\left(1+\frac{j_m}{m}\right). \tag{3.30}$$

Из формул (3), (5) получаем условия эквивалентности *jm*и dп

$$j_m=m\left(\frac{1}{\sqrt[tm]{1-td_п}}-1\right). \tag{3.31}$$

$$d_п=\frac{1-\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-tm}}{t}. \tag{3.32}$$

Из формул (3), (6) получаем условия эквивалентности *jm*и *dc:*

$$j_m=m\left(\frac{1}{\sqrt[m]{1-d_c}}-1\right). \tag{3.33}$$

$$d_c=1-\frac{1}{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^m}. \tag{3.34}$$

Вычисление эквивалентных ставок применяется при изменении условий контракта. Рассмотрим пример.

Пример 8. *Кредит предоставляется под* 5% *сложных годовых сроком на* 8 лет. Субъект, *берущий этот кредит, хочет получить его под простые проценты (ту же сумму* на тот *же срок). Какая ставка простых процентов должна быть предусмотрена контрактом?*
Решение. Надо определить ставку in, эквивалентную ставке ic за восемь лет. По формуле (3.9) имеем

$$i_{п} = \frac{(1+0.05)^8 - 1}{8} = 0.05969 = 5.97\%,$$

т. е. следует предоставить кредит под 5.97% простых.

3.6. Эффективная процентная ставка

Эффективной процентной ставкой, соответствующей данной процентной ставке, называется ставка сложных процентов tc, эквивалентная данной процентной ставке и не зависящая от срока применения этой ставки. Как следует из п. 3.5, эффективные процентные ставки существуют только для ставок *jm, δ, dc,* f_m. Они определяются формулами (3.21), (3.23), (3.27) и (3.29). Вычисление эффективной процентной ставки применяется для определения реальной доходности финансовой операции. Эта доходность определяется соответствующей эффективной процентной ставкой. Рассмотрим примеры.

Пример 9. Банк выплачивает *по вкладам* 10% *годовых (сложных). Какова реальная доходность вкладов при начислении процентов а) ежемесячно, б) ежеквартально, в) по полугодиям, г) непрерывно?*

Решение. Надо найти эффективную процентную ставку rc, •квивалентную а) *j12,* б) j4, в) j2 г) δ*.*

а) по формуле (3.21)

$i_c = (1 + 0.1/12)^{12} - 1 = 0.1047 = 10.47\%$,

б) по формуле (3.21)

$i_c = (1 + 0.1/4)^4 - 1 = 0.1038 = 10.38\%$,

в) по формуле (3.21)

$i_c = (1 + 0.1/2)^2 - 1 = 0.1025 = 10.25\%$,

г) по формуле (3.23)

$i_c = e^{0.1} - 1 = 0.1052 = 10.52\%$.

3.7. Две схемы расчёта амортизационных отчислений

Мы уже рассматривали два способа расчёта амортизационных отчислений (п. 1.7). Рассмотрим ещё два способа. Способ *фиксированного процента* заключается в следующем: стоимость имущества снижается к концу каждого года на одно и то же число процентов *i* от его стоимости на начало тда. Выведем формулу для определения стоимости имущества на конец k-го года. Если первоначальная стоимость имущества S, то в конце первого года она будет снижена на *Si*руб. и станет равной *S*— *Si*= S(1 — t). Эта стоимость в конце второго года снизится на S(1 — *i)i*руб. и станет равна .*S*'(l — *i)* — S(1 — *i)i*= S(1 — г)^2. Очевидно, что в конце *k-го* года стоимость имущества будет равна

$$Sk = S(1 - i)^k. \quad (3.51)$$

Если начальная стоимость имущества S, срок службы это-го имущества *п. лет* и остаточная стоимость его *So,* то можно определить число процентов, на которое стоимость снижается каждыйгод, из уравнения S(1-i)n=S0

$$1 - i = \sqrt[n]{\frac{S_0}{S}};$$
$$i = 1 - \sqrt[n]{\frac{S_0}{S}}. \quad (3.52)$$

Пример 10. Найдём *фиксированный процент снижения стоимости автомобиля из примера 11 из раздела 1 и составим таблицу стоимости этого автомобиля в течение* 5 лет при этом *способе уменьшения стоимости.*

Решение. По формуле (3.52) найдём процент, на который стоимость снижается ежегодно. По условию первоначальная стоимость *S*= 600000 руб., остаточная стоимость S0 = 50000 руб., число лет n= 5.

$$i=1-\sqrt[5]{\frac{50000}{600000}} = 1-\sqrt[5]{0.08333} = 0.3916 = 39.16\%$$

Год службы	Амортизационные отчисления за год (руб.)	Стоимость на конец года (руб.)
0 1 2	0 600 000×0,3916=234 960	600 000 365 040 222 090

3 4 5	365 040×0,3916=142 950 222 090×0,3916=86 970 135 120×0,3916=52 913 82 207×0,3916=32 192	135 120 82 207 50 015

Некоторое отличие остаточной стоимости от 50000 объясняется погрешностью приближённых вычислений.

Заметим, что при применении описанного выше способа чи-! ело процентов i выражается обычно неудобным числом, и этот] способ не даёт возможности снижения стоимости до нуля, таи как при 0 < i < 1 все члены последовательности (1 — i)n положительны. Чтобы избежать таких неудобств, на практике применяется так называемый *способ двойного процента.* Этот! способ состоит в том, что фиксированный процент снижен, и стоимость i принимается равным удвоенному проценту снижения стоимости при равномерном снижении. Такое снижение осуществляется до какого-нибудь года,пока остаточная стоимость остается больше предполагаемой в задаче остаточной стоимости; после этого уменьшение стоимости производится равномерно.

Пример 11. *Составим таблицу уменьшения стоимости автомобиля из предыдущего примера способом двойного процента*

Решение. Стоимость снижается за 5 лет с 600000 руб. до 50 000 руб., т.е. на 550000 руб. При равномерном способе стоимость снижается ежегодно на 110000 руб., т.е. на 20%. Принимаем i = 40% и строим таблицу снижения стоимости автомобиля способом фиксированного процента:

Год Службы	Амортизационные отчисления за год (руб.)	Стоимость на конец года (руб.)
0	0	600000
1	600000x0.40 = 240000	360000
2	360000x0.40 = 144000	216000
3	216000x0.40= 86400	129600
4	129600x0.40= 51840	77 760
5	77 760x0.40= 31104	46656

Так как остаточная стоимость оказалась меньше ожидае-Mi .и (ожидаемая равна 50 000 руб.), то можно стоимость, остался после третьего года (129 600 руб.) снизить за оставшиеся и два года до остаточной стоимости (50000 руб.) равномерно, т. е. на 39800 руб. в год ((129600 - 50 000)/2 = 39800). Окончательная таблица снижения имеет вид:

Год службы	Амортизационные отчисления за год (руб.)	Стоимость на конец года (руб.)
	о0	600000
	1240000	360000
	2144000	216000
	386400	129600
	439 800	89 800
	539800	50000

Упражнения к разделу 2

1. В банк, начисляющий 6% годовых (сложных), клиент положил 80 000 руб. Какая сумма будет на счету этого клиента а) через 1 год, б) через 8 месяцев, в) через 4 года, г) через 6 лет 6 месяцев?
2. Решить упражнение 1, если банк начисляет проценты по ставке $j3$ = 6%.
3. Г-н Иванов может вложить деньги в банк, выплачивающий проценты по ставке $j6$ = 10%. Какую сумму он должен вложить, чтобы получить 20 000 руб. через 3 года 3 месяца?
4. Г-н Петров хочет вложить 30 000 руб., чтобы через 5 лет получить 40000 руб. Под какую процентную ставку j12 он должен вложить свои деньги?
5. Через сколько лет 1 руб., вложенный в банк, выплачивающий проценты по ставке $j1 = 10\%$ превратится в 1000 000 руб.?
6. Клиент вложил в банк 100 000 руб. Какая сумма будет на счету этого клиента через l год, если банк начисляет проценты
   по ставке а) j1 = *5%, б) j6* = 5%, в) *j12* = 5%, г) j360 = 5%, д)
   j∞ = 5%?
7. Какая сумма будет на счету клиента из предыдущего примера при условии (д) через 8 лет?
8. Какую сумму надо положить в банк, выплачивающий непрывные проценты по ставке j∞= 7%, чтобы через 10 лет на счету было 50 000 руб.?
9. Банк начислял на вложенные в него деньги проценты непрерывно по ставке в 1990 г. — 12%, в 1991 г. — 18%, в 1992 и 1993 гг. — 24%. Какая

сумма будет на счету 31 декабря 1993 года, если 1 января 1990 года на этот счёт было положено 30000 руб.?

10. Г-н Петров имеет вексель на 15000 руб., который он хочет учесть 1 марта текущего года в банке по сложной учётной ставке, равной 7%. Какую сумму он получит, если срок векселя а) 1 июля того же года, б) 1 июля следующего года? Сравните этот результат с результатом упражнения 11 к разделу 1.

11. Определить ставку сложных процентов tc, эквивалентную ставке а) *j2* = 10%, б) *j6* = 10%, в) *j12*=10%, г) j∞ = 10%.

12. Банк выплачивает на вложенные в него деньги 8% годовых (сложных). Какую ставку jm должен установить банк, чтобы доходы клиентов не изменились, если а) *т* = 2, б) m = 6, в) *т* = 12, г) m = ∞?

13. Банк начисляет на вложенные в него деньги проценты по ставке *j4* = 6% и собирается перейти к непрерывному начислению процентов. Какую силу роста должен установить банк, чтобы доходы клиентов не изменились?

14. Банк учитывает вексель за 60 дней до срока его оплаты по простой учётной ставке *dП* = 6%. Какую сложную учётную ставку должен установить банк, чтобы доход банка не изменился?

4. Современная ценность денег

4.1. Определение современной ценности денег

Ранее отмечалось, что некоторая сумма денег, (оторую мы имеем сегодня, представляет большую ценность, чем та же сумма, полученная через год. Как можно оценить сегодняшнюю ценность суммы денег, которая будет получена некоторое время? Иными словами, как „привести" одну сумму денег к другой? Так как в качестве „сегодня" можно взять любую дату в прошлом, настоящем или будущем то как и ранее мы будем говорить о *современной ценности суммы денег.* Обычно это понятие применяется не к одной единственной сумме денег, а к потоку денежных платежей, производимых в различные моменты времени. Здесь мы рассмотрим решение задачи с учётом начисления сложных процентов на деньги, находящиеся в обороте. *Современная ценность* суммы *S,* которая будет получена *t*лет, равна той сумме *P,* которая превратится через через *t лет* сумму *S.* если на неё будут начисляться сложные проценты по годовой ставке i. То есть *современная ценность Р суммы S* вычисляется по формуле (3.3)

$$P=S(1+i)^{-t}.$$

или по формуле (3.4), если начисление производится по ставке j_m
:

$$P=S\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{-tm}.$$

В отечественной литературе современную ценность денег называют также *приведённой стоимостью,* т.е. стоимостью, приведённой к сегодняшнему моменту.

Пример 1. *Кредитор даёт деньги в долг, получая вексель, по которому* через два года *будет выплачено* 5 000 *руб. Какую сумму следует дать под* этот вексель сегодня, если за взятые в долг деньги выплачиваются проценты по ставке *34* = 6%?

Решение, Надо найти современную ценность суммы 5000 руб. по формуле (2.4), где 5 = 5000, m = 4, *jm*= 0.06, *t*= 2. Имеем.

$P=5\,000(1+0.06/4)^{-8}=5\,000\times0.8877=4\,438.55$ *руб.*

Итак, при условиях задачи современная ценность 5 000 руб. равна 4438.55 руб. Эту сумму и следует дать под вексель. Понятие современной ценности денег распространяется и на деньги, включённые в оборот *t*лет назад. Современная ценность *S*суммы *P,* данной t лет тому назад под r%, равна наращенному значению этой суммы, т. е. вычисляется по формуле (2.1)

$$S = P(1 + i)^t.$$

Если сумма P была вложена *t*лет назад под *jm%,* то современная ценность этой суммы вычисляется по формуле (2.2)

$$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{tm}.$$

Если на деньги, находящиеся в обороте, начисляются непрерывные проценты силой роста *δ,* то современная ценность! Р суммы *S,* которая будет получена в будущем через *t*лет,вычисляется по формуле (2.6)

$$P = Se^{-\delta t}.$$

а современная ценность *S* суммы Р, которая была получена в прошлом *t*лет назад, вычисляется по формуле (2.5)

$$S = Pe^{\delta t}.$$

Итак, современная ценность суммы денег, которая будет получена в будущем, меньше этой суммы, а современная ценность суммы денег, которая была включена в оборот в прошлом, больше этой суммы. В первом случае сумма умножается на дисконтный *множитель* — и операция нахождения её современной ценности называется *дисконтированием,* а во втором случае сумма умножается на наращивающий множитель.
Понятие *современная ценность денег* является обобщением двух понятий: *вкладываемая сумма* и *наращенная сумма.* Его понятие находит широкое применение в финансовых расах.

Пример 2. *В банк, выплачивающий j2*= 8%, *вложены* 3 года назад 10 000 руб. Какова современная *ценность этой суммы денег?*
Решение. Современная ценность этой суммы равна наращенной сумме, которую находим по формуле (2.2), где Р = I0000, *j2* = 0.08, m = 2, *t = 3:*

$$S=10\ 000(1+0.08/2)^{2\times3}=10\ 000\times1.26532=12\ 653.2.$$

'Го есть в условиях этой задачи современная ценность суммы
в 10000 руб. равна 12653.2 руб.

Ситуацию с определением современной ценности денег можно изобразить графически. Начертим ось времени, на кото-|юй время указано в периодах начисления процентов. Современный момент обозначим нулём. Над осью будем указывать суммы, которые рассматриваются в соответствующие моменты времени. На рис. 1 и 2 изображены ситуации примеров 1 и 2 соответственно:

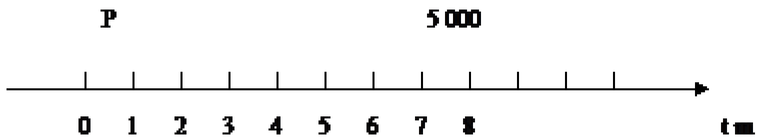
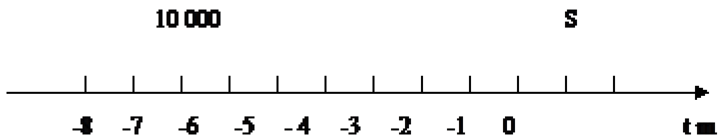


Рис. 1.



В качестве современного момента времени может быть выбран любой момент, совпадающий с концом какого-либо периода начисления процентов. Так, в примере 1 ценность суммы 5000 руб. в момент 4 будет равна

$P = 5\ 000(1+0.06/4)^{-4}=4710.92$ руб;

в примере 2 ценность суммы в 10000 руб. в момент *t*= — 3 равна

$S=10\ 000(1+0.08/2)^{3}=11\ 248.64$ руб.

4.2. Некоторые применения понятия современной ценности денег

Рассмотрим ситуацию, когда банк выплачивает на вложенные в него деньги определённый процент через равные промежутки времени. Пусть делается несколько вкладов Sj,..., *Sn*и несколько изъятий R1;...., R*, определённых сумм в известные моменты времени являющиеся концами периодов начисления процентов Суммарная современная ценность всех вкладов равна суммарной современной ценности всех изъятий и остатка *W* на счету после всех указанных операций. То и, если *Ft(A)* обозначает приведённую к моменту *t*стоимостъ суммы *A,* то имеет место равенство

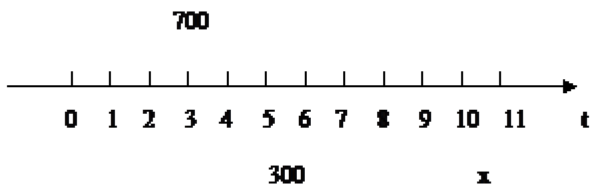
Ft(S1)+…+Ft(Sn)=Ft(R1)+…+Ft(Rk)+Ft(W).

Доказательство этого утверждения можно выполнить методом

математической индукции по двум переменным, *n* и *k.* Мы не будем его приводить, а проиллюстрируем это утверждение двумя примерами. Сделаем предварительно следующее замечание.
Если над некоторыми суммами денег $V1$ и $V2$ производятся финансовые операции в один и тот же момент времени T, то для любого момента времени t имеет место равенство
$Ft(Vl + V2) = Ft(Vl) + Ft(V2).$
Действительно, ценность в момент t суммы $V,$ над которой производится некоторая операция, в момент T равна:
$Ft(V) = V(1+i)^{t-T},$
поэтому
$Ft(V1 + V2) = (Vi + V2)(l + i)^{t-T} =$
$= Vl(l+i)^{t-T} + V2(l+i)^{t-T} = = Ft\{Vx) + Ft\{V2).$

Применяя приведённое выше предложение, можно решать различные задачи финансовых расчётов. Рассмотрим два примера.

Пример 3. *Господин Иванов вложил в* банк 700 руб. Банк
Выплачивает *проценты по ставке j4*= 6%. *Через* 6 *месяцев*
Иванов снял со счёта 300 руб., а через 2 года *после этого*
закрыл счёт. Какую сумму он получил при закрытии счёта?
Решение. Суммы, которые г-н Иванов снимал со счета,
изобразим под осью времени, а сумму, которую он вложил,—
над осью; одно деление оси времени равно одному кварталу



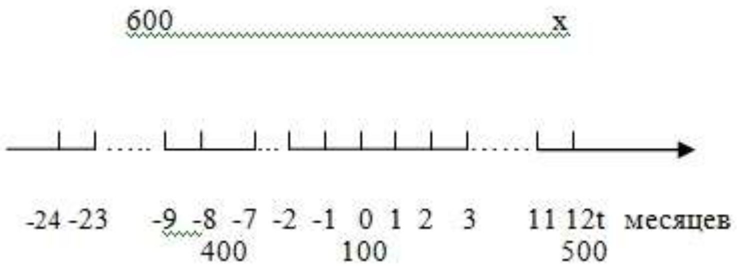
(таков период начисления процентов).

Согласно утверждению, сделанному в п. 3.2, суммарная современная ценность снятых со счёта денег равна современной ценности вложенных денег, т. е.
$700 = 300(1 + i)^{-2} + x(1 + i)^{-10},$
где $i = 0.06/4 = 0.015.$

Из этого уравнения находим *яг.*
x = 700(1 + i)^{10} - 300(1 + $i)^{8}$ =
= 700(1.015)^{10} - 300(1.015)^{8} =
= 474.43 руб.

Пример 4. *Господин Петров положил 2 года назад* 600 *руб. в банк, выплачивающий проценты по ставке j12* = 5%. *Восемь месяцев тому назад он снял со счёта* 400 *руб., а сегодня снял ещё* 100 *руб. Через* 3 месяца *он желает вложить некоторую сумму так, чтобы через год от сегодняшнего момента закрыть счёт, получив* 500 *руб. Какую сумму он должен вложить?*

Решение. Ситуация, описанная в задаче, изображена на рисунке:



Как и в предыдущем примере, под осью изображены суммы, снимаемые со счёта, а над осью — суммы, положенные на счёт. Современная ценность тех и других (в любой момент времени) одинакова. Выберем в качестве современного момента конец третьего периода начисления процентов, т. е. момент, когда вносится искомая сумма *x.* Приравнивая в этот момент ценности сумм, внесённых на счёт, и сумм, снятых со счёта, получаем уравнение, из которого определяем значение *x,*

$600(1 + i)^{27} + x = 400(1 + i)^{11} + 100(1 + i)^{3} + 500(1 + i)^{9}$,

где i = 0.05/12 = 0.00417; подставляем это значение i в уравнение

x = 400× 1.00417 + 100× 1.004173 + 500 x 1.00417-9-

-600×1.0041727
$= 400\times1.04684 + 100\times1.01256 + 500\times0.96324 -$
$-600\times1.11891 = 330.265.$
сть через 3 месяца надо вложить 330.27 руб.

4.3. Эквивалентность различных ставок сложных процентов

Рассмотрим задачи, возникающие при изменении условий факта (замене платежей).
При изменении срока платежа на *t*процентных периодов новая сумма платежа *S1*получается из старой So по формулам

$$S1 = So(1 + i)^t.$$

срок платежа увеличивается на *t* периодов;

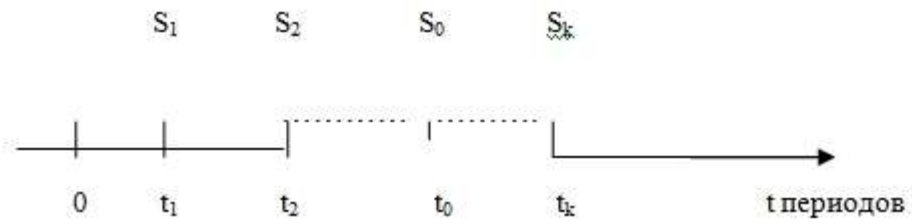
$$S1 = S0(1+i)^{-t}.$$

если срок платежа сокращается на *t*периодов.
В обеих формулах *i*— ставка сложных процентов за один п малое.

Пример 7. Фермер *должен вернуть банку* 1200000 руб. 1 июля 1993 года. *Какую сумму он должен внести в банк а) января* 1992 года: б) 1 *января* 1994 *года? Банк даёт ссуды* под 8% *годовых (сложных).*
Решение, а) Так как платёж делается на 1.5 года раньше •рока, фермер должен внести в банк меньшую сумму:
$S=1200000(1 + 0.08)^{-1.5} = 1200000\times0.8910 =$ 1069 200 руб.
б) В этом случае платёж делается на 0.5 года позже сро-юэтому в банк придётся внести сумму, большую, чем 1200 000 руб.:

$$S = 1200000(1 + 0.08)^{0,5} = 1200000 \times 1.0392 = 1247040 \text{ руб.}$$

При объединении (консолидации) платежей надо свести несколько платежей S1,...,Sk со сроками выплаты *t1,…tk*, соответственно в один платёж So.При этом могут возникнуть две задачи: определить величину объединённого платежа So, если он должен быть сделан в заданный момент времени to J либо: определить срок *to*платежа *So.* Изобразим ситуацию, описанную в задаче, на оси времени:



Для эквивалентности замены платежей необходимо, чтобы ценность платежа So в момент 0 (т.е. современная ценность платежа So) была равна сумме ценностей в момент 0 всех платежей S1,... Sk, т.е. должно выполняться равенство

$$S0(1+i)^{-to} = \sum_{p-1}^{k} SP(1+i)^{-t}. \quad (4.1)$$

где i — ставка сложных процентов, по которой начисляются проценты за каждый процентный период. В случае первой из указанных задач решим это уравнение относительно S 0:

$$S0(1+i)^{-to} = \sum_{p-1}^{k} SP(1+i)^{-tp}. \quad (4.2)$$

В случае второй из указанных задач решим уравнение (4.1) относительно *to.* Для этого прологарифмируем обе части уравнения (4.1):

$$\ln S_0(1+i)^{-t0}=\ln\sum_{l=1}^{k} S_L(1+i)^{-tl};$$

$$\ln S_0-t_0\ln(1+i)=\ln\sum_{l=1}^{k} S_l\,(1+i)^{-tl};$$

(4.3)

$$t_0=\frac{\ln S_0-\ln\sum_{l=1}^{k} S_l(1+i)^{-t_l}}{\ln(1+i)}. \qquad (4.3)$$

Пример 8. *Кооператор должен выплатить поставщику сырья через полгода после поставки* 800000 *руб., ещё через полгода* 1 500000 *руб. и ещё через* 8 *месяцев —* 1300000 *руб.*

Эти *платежи решено объединить в один и выплатить весь долг год после поставки. Какую сумму надо выплатить, если* на долг *начисляется* 6% *годовых (сложных)?*

Решение. Приводя все платежи к настоящему моменту ни, получаем по формуле (3.2)

$S0 = (1 + 0.06)1[0.8(1 + 0,06)^{-0.5} + 1.5(1 + 0.06)^{-1} +$

$+1.3(1+0.06)^{-1(6)}];$

So = 3574118.97 руб.

Пример 9. Кооператор из *предыдущего примера хочет выть долг одним платежом, равным* 3 600 000 *руб. В какой момент должен сделать такой платёж?*

Решение. По формуле (3.3) находим значение *t0:*

$$t_0 = \frac{\ln 3.6 - \ln(0.8\times 1.06^{-0.5} + 1.5\times 1.06^{-1} + 1.3\times 1.06^{-1(6)})}{\ln 1.06}.$$

t_0 =1.1238 года=1 год 45 дней

Итак, единый платёж величиной 3600000 руб. надо сделать
через 1 год 45 дней после поставки сырья.

Заметим, что при решении предыдущих задач мы использовали уравнения эквивалентности. Приведём примеры более сложных изменений контрактов, для расчёта которых применяются уравнения эквивалентности.

Пример 10. *Согласно контракту господин А обязан упла-*
тсподину Б сумму 1000 *руб. сегодня* и 1306 *руб. через*
3. *Господин А хочет изменить контракт, вернув долг*
я равными платежами, сделав первый через год и второй
через 4 года, *считая от сегодняшнего дня. Какой величины*
ген быть каждый из этих платежей, если деньги
приносят кредитору проценты по ставке j2=6%?

Решение. Изобразим условия задачи на оси времени, помещая над осью платежи по первоначальному контракту, а под осью — по новому контракту. Буквой *x* обозначена искомая величина платежей.

1 000 1 306

Так как оба контракта должны быть равноценны для кредитора Б, то приведённые к моменту 0 (как и к любому другому моменту) ценности сумм, стоящих над осью, и сумм, стоящих под осью, должны быть равны, т. е. находим значение *x* из уравнения

$$1000 + 1306(1 + i)^{-6} = x(l + i)^{-2} + x(l + i)^{-8},$$

где $i= 0.06/2 = 0.03$.

$$x(1.03^{-2} + 1.03^{-8}) = 1000 + 1306\times1.03^{-6};$$

$$x = 1208.87.$$

Итак, господин А должен сделать два платежа по 1208.87 руб.

Заметим, что тот же результат мы получим, взяв в качестве современного момента любой другой. Например, если принять момент 4 за современный момент, то имеем уравнение:

$$1000(1 + i)^4 + 1306(1 + i)^{-2} = x(1 + i)^2 + x(1+ i)^{-4} \quad (3.4)$$

Разделив все члены этого уравнения на $(1 + i)^4$, получим то же уравнение, что и раньше.

В практике финансовых операций распространена сделка которая называется *продажей* контракта. Она заключаете в следующем. Некоторый субъект (или организация) имеет на руках контракт, по которому он должен получить с другого субъекта определённые суммы денег в определённые сроки. Владелец контракта желает получить деньги и для этого продаёт этот контракт банку (или другому лицу) который получит деньги по этому контракту в будущем. Сколько следует заплатить за этот контракт? Очевидно, за контракт надо заплатить его стоимость в момент покупки, т. е. его современную ценность.

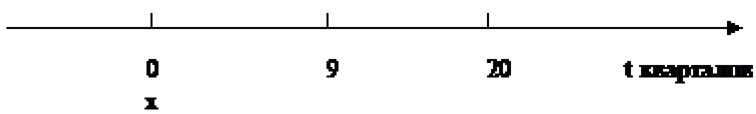
Рассмотрим пример.

Пример 11. *Господин Иванов купил у господина Петрова некоторую вещь, заключив контракт, в соответствии с* которым *обязуется заплатить* 1000 руб. через 27 *месяцев и ещё3 000 руб..* — через 5 лет. *Господин Петров, нуждаясь в деньгах хочет продать этот контракт финансовой организации, которая согласна его купить при условии начисления на свои деньги процентов по ставке j4=* 8%. *Сколько должна заплатить компания господину Петрову* за этот контракт?

Решение. Изобразим условия контракта на оси времени,

на которой каждый процентный период соответствует кварталу (3 месяца). 27 месяцах содержится 9 процентных периодов, а в 5 годах - 20 процентных периодов.

1000 3000



Организация должна заплатить за этот контракт его стоимость в момент 0; эта стоимость обозначена буквой *x.* Очевидно, что

$$x = 1000(1 + i)^{-9} + 3000(1 + i)^{-20},$$

$$i = 0.08/4 = 0.02;$$

$$x = 1000\ 1.02^{-9} + 3\,000\times 1.02^{-20} =$$

$$= 1000 \times 0.8368 + 3\,000 \times 0.6730 = 2855.8$$

руб.

В общем виде уравнение эквивалентности можно записать ющим образом:

$$\sum_{q=1}^{m} S_q V^{p_q} = \sum_{k=1}^{l} R_k V^{t_k}$$

$$V = (l+t)^{-1}.$$

где

$R1,\ldots..Rl$ - платежи по старому контакту;

$t1,\ldots\ldots tl$ - сроки, в которые должны быть произведены эти платежи;

$S1,\ldots\ldots Sm$ – платежи по новому контакту;

$p1,\ldots\ldots\ldots..Pm$ - сроки, в которые должны быть произведены эти платежи;

$V=(1+i)^{-1}$, если соответсвующие платежи производятся ранее момента, к которому приводятся платежи.

$V=(1+i)^{-1}$, если соответсвующие платежи производятся после момента, к которому приводятся платежи;

i - ставка процентов, начисляемых на деньги, находящиеся в обороте.

Общая идея: фиксируется некий момент времени (фокальная дата), после чего: 1) платежи, сделанные ранее него, наращиваются; 2) платежи, сделанные после него, дисконтируются; 3) платежи, сделанные в эту дату, не изменяются.

Упражнения к разделу 4

1. Какова современная ценность 10000 руб., если а) эта сумма будет получена через 3 года 6 месяцев, б) эта сумма была! получена 2 года 9 месяцев тому назад, в) эта сумма получена! в настоящий момент времени?
   Стоимость денег — 8% (то есть на деньги, находящиеся в обороте, начисляются 8% годовых (сложных)).
2. Банк начисляет на вложенные в него деньги проценты по ст ке *j4* = 6%. Какова современная ценность суммы денег 25 000 руб., которая а) была вложена в этот банк 5 лет 4 месяца тому назад, б) будет вложена в банк через 1 год 8 месяцев
3. Г-н Сидоров положил в банк, выплачивающий проценты по годовой ставке *i* = 5% (сложных) сумму 12000 руб. Через 1 год 6 месяцев он снял со счёта 4 500 руб., а ещё через 2 года положил на свой счёт 2 000 руб. После этого, через 3 года 6 месяцев он закрыл счёт. Какую сумму он получил?
4. Решить предыдущее упражнение при условии, что банк выплачивает проценты по ставке *j6* — 5%.
5. Г-н Иванов положил 3 года назад 5000 руб. в банк, выплачивающий проценты по ставке *j2* — 8%. Год назад он положил ещё 2 000 руб., а через 3 года 6 месяцев после этого снял со счёта 3 500 руб. Ещё через 6 месяцев он желает положить на свой счёт такую сумму, чтобы ещё через год на счету было 10000 руб. Какую сумму он должен положить на свой счёт в последний раз?
6. Г-н Фёдоров положил в банк некоторую сумму. Через 2 года он положил на свой счёт такую же сумму, а ещё через 1 год 6 месяцев — снова такую же сумму. Через 2 года 6 месяцев после этого на его счету было 25 000 руб. Какую сумму вносил в банк г-н Фёдоров каждый раз, если банк начисляет на вложенные деньги проценты по годовой ставке *i* = 5%(сложных)?

7. Решить предыдущее упражнение, если банк выплачивает проценты по ставке $j12 = 5\%$.
8. Решить упражнение 8, если банк выплачивает непрерывные проценты с силой роста $\delta = 5\%$.
9. Фермер взял в банке кредит на сумму 5 млн. руб. под 8% годовых (сложных). Через год он вернул банку 3 млн. руб., а ещё через год взял кредит в сумме 2 млн. руб. Через 2 года после этого фермер вернул полученные кредиты полностью. Какую сумму он при этом выплатил банку?
10. Какую сумму надо положить в банк, выплачивающий проценты по ставке j4 = 10%, чтобы иметь возможность снять со счёта 20 000 руб. через 1 год 6 месяцев и ещё 30 000 руб. через 1 год 6 месяцев после этого?
11. Решите предыдущее упражнение, приведя все суммы к моменту последнего изъятия денег.
12. Фермер приобрёл трактор, который стоит 2 500 000 руб. в кредит под 12% годовых (сложных). Через 1 год 6 месяцев он уплатил 1 500000 руб., а ещё через 6 месяцев полностью пог сил долг. Какую сумму он при этом выплатил?
13. Предприниматель взял в банке кредит в 12 млн. руб. под 15% годовых (сложных). Через 6 месяцев он вернул банк 4500000 руб., а ещё через 6 месяцев — 2 500000 руб. Спует 6 месяцев после этого он взял ещё ссуду в 3 млн. руб., и чер 2 года с момента получения этой ссуды полностью погас долг. Какую сумму составляет последняя уплата?

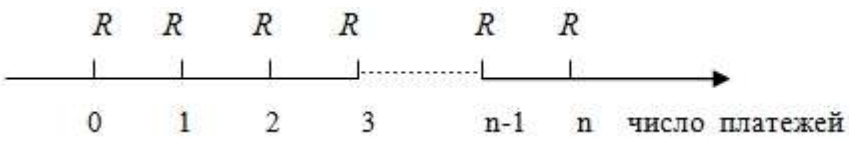
5. Финансовые ренты

5.1. Поток денежных платежей

В финансовой деятельности нередко делается несколько следующих друг за другом платежей — *поток денежных пла тежей.* Таковы, например, ежегодные выплаты процентов по облигациям, периодические вклады в банк для образования страхового фонда, ежемесячные выплаты долга по потре-бительскому кредиту, получение ежемесячной стипендии от благотворительного фонда и тому подобные платежи. При всех таких платежах происходит начисление процентов на на-ходящиеся в обороте деньги. При изучении потока платежей могут возникнуть две основные задачи: найти наращенную сумму потока платежей или, напротив, по наращенной сумме определить величину отдельного платежа. Для частного вида потока платежей — финансовых рент — разработаны мтематические методы решения подобных задач. Эти методы рассмотрены ниже.

5.2. Финансовые ренты. Функция Sn,i

Финансовой рентой называется последовательность равных платежей, производящихся через равные промежутки времени.
Рассмотрим общий случай: делается n платежей (напри мер, вкладов в банк), каждый из которых равен *R*руб.;
промежутки времени между платежами одинаковы, и в конце ка ждого из них на все сделанные до этого момента платежи на числяются сложные проценты по ставке *i.* Изобразим эту ренту на оси времени:



Выведем формулу, выражающую наращенную к моменту n сумму *S* этой ренты.
Платёж, сделанный в момент n, входит в наращенную сумму без изменения, т. е. в размере *R;* сумма, наращенная к моменту *п* на платёж, сделанный в момент *п* — 1, равна *R(l* + i); сумма, наращенная к моменту *п* на платёж, сделанный в момент n—2, равна $R(1+i)^2$ и т.д.; сумма, наращенная к моменту n на платёж, сделанный в момент 2, равна $R(1 + i)^{n-2}$; сумма, наращенная к моменту n на платёж, сделанный в момент 1, равная $R(1+i)^{n-1}$ Наращенная сумма *S*всей ренты в момент *п* равна

$$S= R + R(1+i) +R(1+i)^2 + \ldots +R(1+ i)^{n-2} + R(1+i)^{n-1}$$

Слагаемые этой суммы являются членами геометрической прогрессии, первый член которой *b*1 = *R,* знаменатель *q=1 +i* и число членов равно n. Находим эту сумму по формуле суммы первых *п* членов геометрической прогресси

$$S= (b1(q^n -1))/(q-1) = R\times(((1+i)^{n -1}) /(1+i -1))=R\times (((1+i)^n -1)/i)$$

Составлены таблицы значений функции

$$Sn;i=((1+i)^n -1)\backslash i \qquad (5.1)$$

Для разных значений *п* и i*.* Таблица значений этой функции приведена в Приложении Б (Таблица 2). Наращенная сумма финансовой ренты, рассмотренной выше, выражается формулой

$$S=Rs_{n;i} \qquad (5.2)$$

Пример 1. Господин *Иванов вкладывает* 1000 *руб. в конце каждого месяца в банк, выплачивающий проценты по ставке j12* = 9%- *Какую сумму он накопит* за 2 года?

Решение. Вклады в банк, которые делает господин Иванов, образуют финансовую ренту (далее — просто „ренту"), в которой R= 1000, n = 24 (2 года по 12 месяцев), r = 0.09/12 = 0.0075. Находим наращенную сумму этой ренты по формуле (5.2):

$S=1000*((1+0.00750)^{24} -1)/ 0.0075=1000s_{24;\ 0.75\%}$

По таблице 2 находим $s_{24;0.75\%}$ = 26.18847059, следовательно, S=1000*26.18847059=26188.47 руб.

5.3. Вычисление платежей финансовой ренты

Иногда приходится искать величину платежа Rпо наращенной сумме S. Выразим значение Rчерез Sиз формулы (5.2):

$$R=S/s_{n;i} \qquad (5.3)$$

Рассмотрим пример применения последней формулы.

Пример 2. *Господин Петров желает накопить* за 8 лет 5000 руб., *делая ежегодные равные вклады в банк, который выплачивает проценты по годовой ставке i=* 5%*(сложных). Сколько он должен вкладывать каждый раз?*

Решение. По условию задачи S= 5000, n = 8, i = 0.05. По Таблице 2 находим а8:5%=9.549108876. Следовательно, по формуле (5.3):
R=5000/9.549108876= 523.61 руб.

Итак, господин Петров должен вкладывать в конце каждого года 523.61 руб.

5.4. Виды финансовых рент

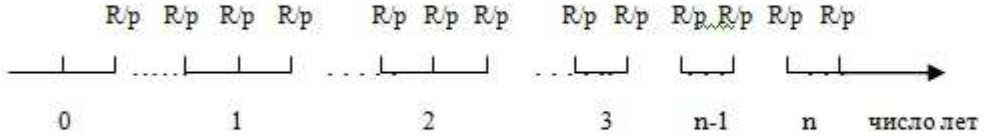
Рассмотрим виды финансовых рент, которые встречаются на практике финансовых расчётов.

А. Ренты с начислением процентов в конце года. Годовая рента - аннуитет.

Так называется рента, в которой сумма *R* выплачивается в конце каждого года, и в конце каждого года на накопленную сумму начисляются сложные проценты по ставке *i.* Наращенная за n лет сумма S и величина платежа *R*рассчитываются по формулам (4.2) и (4.3), выведенным выше. Теоретически именно такая рента называется аннитетом.

А2. р**-срочная рента**

Так называется рента, в которой ежегодно выплачивается член ренты *R,* но платежи производятся р раз в году через равные промежутки времени, причём каждый платёж имеет Величину *R/p,* и на него начисляются сложные проценты по годовой ставке *i.* Изобразим эту ренту на оси времени:



Всего за *п* лет сделано *пр* платежей. Выведем формулу, выражающую наращенную к моменту n сумму этой ренты.

Последний платёж входит в наращенную сумму без изменения, то есть в размере *R/p. На*предпоследний платёж по годовой ставке *i*начисляются сложные проценты за период, равный 1/p части года, следовательно, в момент п наращенная на этот платёж сумма будет равна $(R/p)(1+i)^{1/p}$. Сумма, наращенная к моменту n на второй от конца платёж, будет равна $(R/p)(1+i)^{2/p}$. Сумма, наращенная к моменту n на первый платёж, будет равна $(R/p)(1+i)^{(np-1)/p}$, так как на него начисляются сложные проценты пр — 1 раз по годовой став-ке i каждый раз за период, равный 1/р части года. (Можно рассуждать и иначе: так как (np-1)/p = (n -1)/p, то на сделанный в момент 1 платёж к моменту n начисляются сложные проценты по годовой ставке i за период, равный (*п* — 1)/р годам.) Наращенная за *п* лет сумма всей ренты равна:

$$S= R/p + (R/p)\times(1+i)^{1/p}+(R/p)\times(1+i)^{2/p}+ \ldots\ldots +(R/p)\times(1+i)^{(np-1)/p}$$

Слагаемые этой суммы являются членами геометрической прогрессии с первым членом $b1 = R/p$и знаменателем $q = (1+i)^{1/p}$; число членов этой прогрессии равно k= *пр.* По формуле суммы первых k членов геометрической прогрессии находим *S:*

$$S=(b1\times(q^k-1))/(q-1)=(R/p)\times((((1+i)^{1/p})np-1)/((1+i)^{1/p}-1)=R\times(((1+i)^n-1)/(p\times((1+i)^{1/p}-1)))$$

Введём обозначение:

$$sn;i(p)=((1+i)^n-1)/(p\times((1+i)^{1/p}-1)) \qquad (5.4)$$

тогда наращенная сумма р -срочной ренты равна:

$$S = Rsn;i(p) \qquad (5.5)$$

Коэффициент *sn;i(p)* можно представить в виде произведения :

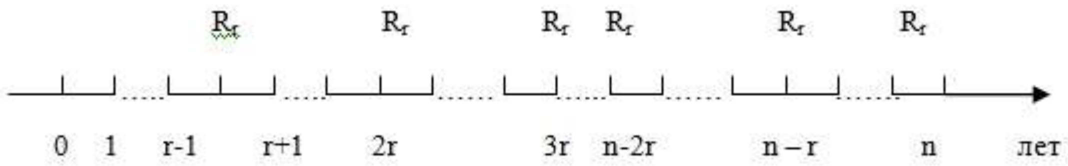
$$sn;i(p) \ =sn;i\times Kp;i \qquad (5.6)$$

где *Kp;i = i/(p×(1+i)1/p-1)*

Для значений функции *Kp:i* имеются таблицы (Таблица4 в Приложении Б). Значения наращенной суммы p-срочной ренты можно вычислить, используя Таблицы 2 и 4.

А3. Рента с периодом больше года

Так называется рента, в которой член, равный Rr, выплачивается через каждые n лет (n > 1). Сложные проценты по годовой ставке *i*начисляются ежегодно. Изобразим эту ренту на оси времени:



Всего за n лет сделано *п/r*платежей. Найдём наращенную моменту *п* сумму *S*этой ренты.
Последний платёж входит в наращенную сумму без изменения, т.е. в размере *Rr.* Предпоследний платёж сделан за r лет до момента n, следовательно, в момент *п* наращенная на него сумма будет равна Rr(1 + i)r; второй от конца платёж сделан за 2r лет от момента n, следовательно, наращенная на него сумма в момент *п* равна *Rr(l*+ *i*)2г; первый платёж сделан за n-r лет от момента n, следовательно, наращенная на него сумма в момент *п* равна *Rr(l1*+ *i*)n-r Наращенная за n лет сумма этой ренты равна
$S = Rr + Rr(l + i)^{r} + Rr(l + i)^{2r} +1.. + Rr(1 + i)^{n-r}$.
Слагаемые этой суммы являются членами геометрической прогрессии первым членом *b1*= *Rr,* знаменателем *q*= (1+i)r числом членов, равным к = *п/r.* По формуле суммы первых членов геометрической прогрессии находим
$S= (b1\times(qk-1))/(q-1)=(Rr\times(((1+i)^{r})^{n/r}-1))/((1+i)^{r}-1)=$
$=Rr\times(((1+i)^{n}-1)/(1+i)^{r}-1)$
Разделив числитель и знаменатель последней дроби на i и применив формулу (5.1), получим
$S= Rr\times((((1+i)^{n}-1)/i)/((((1+i)^{r}-1)/i)))$

S=Rr×(sn;i/sr;i)

Рассмотрим примеры применения финансовых рент с начислением процентов в конце года.

Пример 3. Господин Иванов *решил ежегодно класть на свой счёт в банке по* 40000 *руб., делая равные взносы ежеквартально. Какая сумма будет на его счету через* 6 лет, если банк начисляет на *вклады* 5% *годовых (сложных)?*

Решение. Последовательность вкладов господина Иванова образует *p* -срочную ренту, в которой *R*= 40000, *p* 4, *i*= 0.05, n = 6. Искомую сумму находим по формуле (5.5):

S=Rsn;i(p)=40 000

s6;5%(p)

Коэффициент s (4)6;5% находим по формуле (5.6); при этом используем Таблицы 2 и 4:

s6;5%(p)= s6;5%×K4;5%=

=6.801912813×1.01855421=6.928152377;

тогда

S = 40 000 х 6.928152377 = 277126.10 руб.

Пример 4. *Предприятие образовало фонд развития, в который каждые* 3 года *отчисляет* 4 *млн. руб., вкладывая их в банк, который начисляет на вложенные деньги* 6% годовых *(сложных). Какая сумма будет в фонде* через 12 лет?

Решение. Взносы в фонд образуют ренту с периодом больше года. Член ренты *Rr*= 4 млн. руб., r = 3, *i*= 0.06, n = 12. Накопленную сумму вычисляем по формуле (5.7):

S=4 000 000 ×6.928152377= 277 126.10 руб.

В наших таблицах нет требуемых значений функции *sni,* поэтому вычисляем их по формуле (5.1):

s12;6%=((1+0.06)^{12} – 1)/0.06= 16.86994119;

s3;6%=((1+0.06)3 – 1)/0.06= 3.1836

тогда

S= 4 000 000 × (16.86994119/3.1836)=

21 196 056.28 руб.

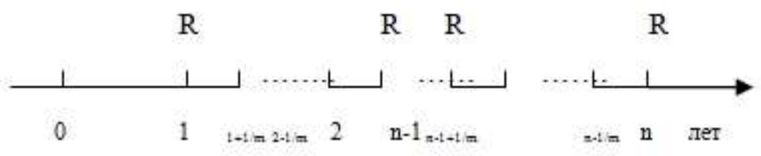
Замечание. Здесь и в дальнейшем мы вычисляем значения Функций по формулам с той же точностью, с которой даны значения этих функций в таблицах, приведённых в Приложении Б.

Ренты с начислением процентов m раз в год (по ставке *jm)*

Годовая рента

В этом случае платёж *R*делается один раз в конце каждого года, а проценты начисляются *mп* раз в год по ставке *jm,* т.е. по *jm/m%.*

Изобразим эту ренту на оси времени:



Найдём наращенную к моменту n сумму этой ренты. Последний платёж входит в наращенную сумму без изме-нения. Предпоследний платёж делается за 1 год до момента *п* и на него начисляются сложные проценты *т* раз по ставке *jm* , т.е. наращенная на этот платёж сумма в момент n равна $R(1 + jm/m)^m$ Третий от конца платёж делается за 2 года до момента *п* и наращенная на этот платёж сумма в момент n равна $R(1 + jm/m)^{2m}$ Первый платёж делается за n-1 год до момента n, следовательно, в момент n наращенная на него

сумма равна $R(1 + jm/m)^{(n-1)m}$каждый раз мы применяли формулу (3.2)). Вся наращенная сумма равна S=

$R+R\times(1+jm/m)^m+R\times(1+jm/m)^{2m}+\ldots+R\times(1+jm/m)^{(n-1)m}$ Слагаемые этой суммы являются членами геометрической прогрессии с первым членом *b1 = R,* знаменателем *q* $= (1 + jm/m)^m$и числом членов *к = п.* Эта сумма равна:

$S= (b1(q\ n -1)/(q-1))= (R\times((((1+jm/m)^m)^{n-1}))/((1+jm/m)^m-1)=$
$=R\times(((1+jm/m)^{mn}-1)/((1+jm/m)^m-1))$

Разделив числитель и знаменатель последней дроби на *jm/m*

и применив формулу (5.1), получим

$$S = R \times \frac{\left(\frac{\left(\left[1+\frac{jm}{m}\right)mn-1\right]}{\frac{jm}{m}}\right)}{\frac{\left[\left(1+\frac{jm}{m}\right)m-1\right]}{\frac{jm}{m}}}; \qquad (5.8)$$

$$S = R \times \left(\frac{smn;\frac{jm}{m}}{sm;\frac{jm}{m}}\right)$$

Для вычисления наращенной суммы по формуле (5.8) можно использовать Таблицу 2.

Б2. p-срочная рента

В этом случае ежегодно выплачивается член ренты *R,* но платежи производятся p раз в году через равные промежутки времени, а каждый платёж равен *R/p.* Проценты начисляются ***т*** раз в году по ставке *jm,* т. е. по *jm/m%-* На оси времени эту ренту можно изобразить так же, как в случае А2.

Найдём наращенную в момент n сумму этой ренты.

На последний платёж проценты не начисляются, и он входит в наращенную сумму без изменения, т. е. в размере *R/p.* На предпоследний платёж начисляются проценты по ставке *jm*за период, равный *1/p* части года, и наращенная к моменту n на этот платёж сумма по формуле (3.2) равна $(R/p)(l+jm/m)^{m(1/p)}$. На второй с конца платёж начисляются проценты по ставке *jm*за период, равный 2/p части года, и наращенная к моменту *п* на этот платёж сумма равна по формуле (3.2) $(R/p)(1 + jm/m)^{m(2/p)}$Первый платёж делается за *(п -1)/p -* лет до момента *п,* т. е. наращенная в момент *п* на этот платёж сумма, согласно формуле (3.2), равна следующей величине: $(R/p)(1 + jm/m)^{m(n-(1/p))}$. Вся наращенная на ренту сумма равна $S= R/p + (R/p)\times(1+jm/m)^{m/p} + (R/p)\times(1+jm/m)^{2m/p}+\ldots.+ (R/p)\times$ $\times(1+jm/m)^{m(n-1/p)}$

Слагаемые этой суммы являются членами геометрической прогрессии с первым членом $b1 = R/p$, знаменателем $q= (1 + jm/m)^{m/p}$и числом членов $к = пр$. Эта сумма равна

$$S = \left(\frac{b1(\,q^k\ -1)}{q-1}\right) =$$

$$= \left(\frac{R}{p}\right) \times \left(\left(\frac{\left(\left(1+\frac{jm}{m}\right)^{\frac{m}{p}}\right)^{np}-1\right)}{\left(1+\frac{jm}{m}\right)^{\frac{m}{p}}\ -1}\right)\right) =$$

$$= \left(\frac{R}{p}\right) \times \left(\left(\frac{\left(\left(1 + \frac{jm}{m}\right)^{mn} - 1 \right)}{\left(1 + \frac{jm}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} \right) \right)$$

Разделив числитель и знаменатель последней дроби на *jm/m,* получим

$$S = \left(\frac{R}{p}\right) \times \frac{\left(\frac{\left[\left(1 + \frac{jm}{m}\right)^{mn} - 1 \right]}{\frac{jm}{m}} \right)}{\frac{\left[\left(1 + \frac{jm}{m}\right)^{m} - 1 \right]}{\frac{jm}{m}}};$$

$$S = \left(\frac{R}{p}\right) \times (smn; \frac{jm}{m}) / (\frac{sm}{p}; \frac{jm}{p}))$$

Заметим, что функция *sn;i*была определена формулой (5.1) для целых значений *п (п* — число членов ренты). При приме-нении формулы (5.9) значения *п/р* могут быть нецелыми, т. е. функция *sn;i*в этих случаях вычисляется по формуле (5.1) при нецелых значениях аргумента *п.* Это упрощает запись формулы (5.9) и облегчает её запоминание.

Для вычисления наращенной суммы по формуле (5.9) можно использовать Таблицу 2.

Б3. Частный случай p-срочной ренты при *p=m*

Формула (5.9) при этом имеет вид:

S=(R/m)×((smn;(jm)/m)/(s1;(jm)/p)),

где s1;(jm)/m=((1+jm/m)1-1)/(jm/m)=1, тогда (5.9)

S= (R/m)×smn;(jm)/m (5.10)

Б4. Рента с периодом больше года

В этом случае член ренты, равный *Rr,* выплачивается через каждые r лет (r > 1). Проценты начисляются по ставке *jm,* т.е. ***т*** раз в год через равные промежутки времени начисляются *jm*/m%. На оси времени эта рента изображается также, как в случае А3. Найдём наращенную к моменту n сумму этой ренты.
Последний платёж входит в наращенную сумму без изме-нения, т.е. в размере Rr. Предпоследний платёж сделан за rлет до момента *п* и каждый год на него начисляются сложные проценты ***т*** раз по *jт/т%,* т. е. в момент *п* наращенная на этот платёж сумма будет, согласно формуле (3.2), равна $Rr\{1 + jm/m)^{mr}$ - Второй от конца платёж сделан за 2r лет до момента n, т. е. в момент *п* наращенная на этот платёж сумма равна Rr(l+jm/m)2mr. Первый платёж сделан за n-r лет до момента n, т. е. в момент n наращенная на этот платёж сумма равна $Rr(1 + jm/m)^{m(n-r)}$*.* Вся наращенная сумма ренты, равна:
$S= Rr+Rr\times(1+jm/m)^{mr} + Rr\times(1+jm/m)^{2mr} + \dots + Rr\times(1+jm/m)^{m(n-r)}$
Слагаемые этой суммы являются членами геометрической прогрессии с первым членом *b1 = Rr,* знаменателем $q= (1+ jm/m)^{mr}$ и числом членов *к = п/r.* Находим эту сумму:

$S= b1(q^{k} -1)\backslash(q-1) = Rr(((1+jm\backslash m)^{mr})^{n\backslash r}- 1)\backslash ((1+jm\backslash m)^{mr}) - 1) =$
=((1+jm\m)mn- 1)\ ((1+jm\m)m r) - 1)

и применив формулу (5.1), получим

$$S = Rr(\frac{\left(1+\frac{jm}{m}\right)^{mn}-1}{\frac{jm}{m}})/(\frac{\left(1+\frac{jm}{m}\right)^{mr}-1}{\frac{jm}{m}}) \qquad (5.11)$$

$$S = Rr\, s\, mn; \frac{\frac{jm}{m}}{s} mr; \frac{jm}{m}$$

Для вычисления наращенной суммы по формуле (5.11) можно использовать Таблицу 2.

В. Ренты с непрерывным начислением процентов. Годовая рента

В этом случае сумма *R*выплачивается один раз в конце каждого года и на выплаченную сумму начисляются непре-рывные проценты по ставке (силе роста) δ*.* Найдём наращен-ную в момент *п* сумму этой ренты. Графическое

изображение этой ренты такое же, как в п. 5.2.
Последний платёж входит в наращенную в момент n сумму без изменения. Сумма, наращенная в момент *п* на предпоследний платёж, согласно формуле (3.5), равна *Reδ.* Сумма, наращенная на второй от конца платёж по формуле (3.5), равна *Re2δ.* Сумма, наращенная в момент *п* на первый платёж по формуле (3.5), равна Re(n-1)δ.Наращенная сумма всей ренты равна

$$S= R + Re^{\delta} + Re^{2\delta} +.....+ Re^{\delta(n-2)} + Re^{\delta(n-1)}$$

Слагаемые этой суммы являются членами геометрической прогрессии с первым членом b1 = *R,* знаменателем $q = e^{\delta}$ числом членов $к = п.$ По формуле суммы А: первых члено неметрической прогрессии получаем

$$S= b1(q^{k} -1)\backslash(q-1) = R\frac{e^{\delta n}-1}{e^{\delta}-1}$$

$$S= R(e^{\delta n}- 1) \backslash (e^{\delta}- 1)$$

В2. р**-срочная рента**

В этой ренте р раз в год выплачивается сумма *R/р*и в конце года на все платежи начисляются непрерывные проценты
по ставке δ*.*
Графическое изображение этой ренты такое же, как и в случае А2.
Рассуждая так же, как в А2 с заменой множителя (1 + i)l/p на еδ/рполучим наращенную сумму ренты:

$$S= R\backslash p + R\backslash p\ e^{\delta\backslash p} + R\backslash p\ e^{2\delta\backslash p}+ R\backslash p\ e^{\delta(np-1)\backslash p}$$

Слагаемые этой суммы являются членами геометрической прогрессии с первым членом *b1 = R/р,* знаменателем $q = e^{\delta/p}$
и числом членов $к = пр.$ По формуле суммы первых А: членов геометрической прогрессии получаем

$$S= b1(q\ k -1)\backslash(q-1) = R\backslash p\ ((e^{\delta\backslash p})^{np}- 1)\backslash\ (e^{\delta\backslash p}- 1)= \frac{R}{p}\times\frac{e^{\delta n}-1}{e^{\delta/p}-1}$$

$$S= R\backslash p(e^{\delta\ n}- 1)\backslash\ (e^{\delta\backslash p}- 1)$$

Приведём примеры применения рассмотренных типов рент.

Пример 5. *Для создания благотворительного фонда еже годно выделяется по* 100 тыс. *руб., которые вкладываются* в банк, *начисляющий сложные проценты по годовой ставке* 12%. '

Определим сумму, накопленную в фонде через 6 лет, *если а) взносы в* фонд делаются в конце года, *проценты начисляются по кварталам; б) равные взносы делаются в конце каждом квартала, проценты начисляются по полугодиям; в) взносы делаются в конце каждого года, проценты начисляются* непрерывно; *г) равные взносы делаются ежемесячно, проценты начисляются непрерывно.*

Решение, а) Взносы образуют годовую ренту с начислени-ем процентов по ставке j4 = 12%. Наращенную сумму опреде-ляем по формуле (4.8), где *m*= **4, n** = **6,** *jm/m*= 12%/4 = 3%:

S= R(s mn; jm\m \ s m; jm\m) = 100000(s 24 ; 3 % \ s 4 ;3 %)

По Таблице 2 находим
s 24 ; 3 % = 34.42647022; s 4 ;.3 % = 4.183627000

тогда
S= 100000 (34.42647022 \ 4.183627000) = 822885.74 руб.

б) Взносы образуют р-срочную ренту с начислением про центов по ставке j2= 12%. Наращенную сумму вычисляем m формуле (4.9), где m = 2, *п* = 6
S=(R\p)×(s mn; jm\m \ s m\p; jm\m)= (100000 /4) ×(s 12 ; 6% /s 0.5; 6 %)

В наших таблицах нет требуемых значений коэффициента sn,i, поэтому вычисляем их значения по формуле **(5.1):**
s 12 ; 6% = $((1 +0.06)^{12} - 1) / 0.06$ = 16.8699412
s 0.5; 6 % = $((1 +0.06)^{5} - 1) /0.06$ = 0.4927169
тогда
S= 100000/4 ×16.8699412/ 0.4927169 = 855965.22 руб.

В этом случае взносы образуют годовую ренту с непре-
рывным начислением процентов с силой роста δ=0.12. На

ращенную сумму вычисляем по формуле (4.12) при $\delta = 0.12$,
$n = 6$:
$S= R (e^{\delta n}- 1) \backslash (e\delta- 1) = 100000 (e^{0.12} \times 6- 1) \backslash (e^{0.12}- 1)$=827 026.86 руб.

г) В этом случае взносы образуют р-срочную ренту с не
прерывным начислением процентов с силой роста δ=0.12.

Наращенную сумму вычисляем по формуле (4.13) при δ =
0.12, n = 6, p = 12:
$S= R(e^{\delta n}- 1) \backslash p (e^{\delta\backslash p}- 1) = 100000 (e^{0.12 * 6}- 1) \backslash 12 (e^{0.12} \backslash 12- 1)$ = 874308.20 руб

Пример 6. Какую *сумму надо выделять ежегодно для со-здания благотворительного фонда из предыдущего примера, чтобы* за 6 лет накопить 1 млн. *руб. в каждом из случаев, описанных в этом примере.*

Решение, а) Из формулы (4.8) определяем значение *R*при 5 = 1000000:
S = 1000000(s 4 ; 3 % / s 24; 3%) = 100000 (4.183627 / 34.42647022) = =121523.55 руб б) Из формулы (4.9) находим *R,* если 5 = 1000 000, p = 4

R = 1000000 * 4 (s 0.5; 6 % \ s 12 ; 6%) = 4000000× (0.4927169 / 16.8699412) = 116827.18 руб

в) Из формулы (4.12) находим *R,* если S = 1000000, p =12
$R = 1000000 (e^{0.12}- 1) \backslash (e^{0.72}- 1)$ =
=1000000×(0.127496851/1.05443321)= = 120915.06 руб

г) Из формулы (4.13) находим *R, если* 5=1000000, p = 12,
$R = 1000000 *12 (e^{0.01}- 1) \backslash (e^{0.72}- 1)$ =
= 1000000× 12* (0.010050167/ 1.05443321) = 114376.14 руб.

Пример 7. *Господин Перов кладёт в банк в конце каждых* двух лет 10 тыс. руб. Какая сумма будет на счету *господина Перова через* 10 лет, *если а) на деньги начисляются сложные проценты по ставке j4* = 12%, *б) банк выплачивает непрерывные проценты с силой роста 6* = 12%?

Решение, а) В этом случае наращенную сумму находим по формуле (4.11) при r = 2, m = 4, n = 10, *jm/m*= 12%/4 = 3%:

S= Rr ×(s mn; jm\m \ s mr; jm\m) = 10000× (s 40; 3%\ s 8; 3%)

По Таблице 2 находим

s 40; 3% = 75.40125973 ; s 8; 3% = 8.892336046;

тогда

S= 10000× (75.40125973 \ 8.892336046)

б) В этом случае наращенную сумму находим по формуле (4.14) при δ = 12% = 0.12, n =10, r = 2:

S= Rr $(e^{\delta n}$- 1) \ $(e^{\delta}$- 1) =10000 $(e^{1.2}$- 1) \ $(e^{0.24}$- 1) = 85534.53 руб.

5.5. Погашение долгосрочной задолженности единовременным платежом

Пусть должник взял ссуду, равную S руб., которую он должен. вернуть через n лет. Ежегодно он должен выплачивать кредитору проценты по ставке q. Одновременно он создаёт погасительный (амортизационный или страховой) фонд, в который делает ежегодные взносы с целью накопить к моменту возвращения долга необходимую сумму. На деньги, находящиеся в; фонде, должник получает i% в год. Требуется определить так называемую *срочную уплату а,* т. е. суммарные ежегодные затраты должника.

Срочная уплата состоит из выплачиваемых на долг процентов, которые равны *Sq,* и взноса в страховой фонд *R..* Взносы *R*являются членами годовой ренты, состоящей из n членов, наращенная сумма которой в момент *n* должна быть рав-на 5. По формуле (4.3) *R*= S/sn;i. Срочная уплата равна:

α = Sq + S\ s n; i

Пример 8. *Долг в* 1 *млн. руб. получен под* 8% *годовых* на 4 года. *Одновременно с получением ссуды для её погашения создан страховой фонд, в который делаются равные ежегодные взносы. На деньги, внесённые в фонд, выплачиваются* 5% *годовых. Найдём ежегодную срочную уплату по долгу.*
Решение. По условию задачи 5 = 1000000 руб., *q*= 0.08, *n* = 4, *i*= 0.05. Из Таблицы 2 находим S4;s% = 4.310125. По формуле (4.15) срочная уплата равна:

α= 1000000×0.8 + 1000000/4.310125 = 312011.83

При других сроках и условиях выплаты процентов могут быть использованы те или иные виды рент, т.е. формулы (4.1)-(4.14). Погашение долгосрочной задолженности несколькими платежами рассматривается в п. 5.4.

4.6. Инвестиции в предприятия, использующие невосполняемые ресурсы

Рассмотрим инвестиции в предприятия, использующие невосполняемые ресурсы — таковыми, например, являются предприятия добывающей промышленности. Капиталовложения делаются с таким расчётом, чтобы получать в течение срока действия предприятия определённый ежегодный доход и накопить к моменту истощения ресурсов, используемых предприятием (запасов ископаемых, например), страховой фонд, равный сумме инвестиций. Рассмотрим пример.

Пример 9. *Господин М. хочет купить золотой рудник, который, как предполагается, будет* *давать в течение следующих* 10 лет *по* 200000 руб. *дохода в год, после чего* окажется *полностью исчерпанным. Господин Макаров хочет получать* 18% *ежегодного дохода на вложенную сумму. Одновременно он собирается установить страховой фонд, чтобы накопить к концу срока действия рудника вложенную сумму, которую он должен заплатить* за *рудник, если по вложениям в страховой фонд он может получать* 10% *в год?*

Решение. Обозначим искомую цену покупки буквой S. Ежегодные вклады *R*в страховой фонд образуют ренту, наращенная сумма которой равна S, т.е., согласно формуле (4.3), P = $S/s_{n;i}$=$S/s_{10;10}$ Годовой доход от рудника, равный 200 000 руб., состоит из этого вклада в страховой фонд и дохода, составляющего 18% от вложенной суммы, т.е. равного 0,18 × S руб. Следовательно, сумма S должна удовлетворять уравнению:

$0.18S + S/ s_{10;\ 10\%} = 200000$ руб.

По Таблице 2 находим $s_{10;10\%} = 15.9374246$ и решаем уравнение:

$0.18 \times S + S/15.9374246 = 200000$ руб.

$0.24 \times S = 200000$, $S = 833333.33$ руб.

Упражнения к разделу 5

1) Г-н Петров вкладывает 25000 руб. В конце каждого года в банк, выплачивающий проценты по ставке 5 % годовых (сложных). Какая сумма будет на счете г-на Петрова а) через 3 года б) через 10 лет?
2) Решите упражнение 1 в предположении, что г-н Петров делает вклады в конце каждого квартала, и банк выплачивает проценты по ставке $j_4 = 5$ %
3) Г- н Сидоров хочет накопить за 6 лет 40000 руб., делая ежегодные равные вклады в банк, который выплачивает проценты поставке $j_{12} = 10$ %, годовых (сложных) Какую сумму должен ежегодно вкладывать г-н Сидоров?
4) Решите упражнение 3 в предположении, что г-н Сидоров делает ежемесячные вклады в банк, который выплачивает проценты по ставке $j_{12} = 5$ %
5) Фермер образовал фонд для покупки техники, вкладывая в него ежегодно 300000 руб. При этом каждое полугодие он делает равные вклады в банк, который выплачивает 5 % годовых (сложных). Какая сумма

будет на счету у фермера через 4 года?
6) Какую сумму должен вкладывать фермер из предыдущего упражнения ежегодно, если ему необходимо накопить за 4 года 2 млн. руб. 7
7) Г-н Федоров кладет в конце каждого года 120000 руб. в банк, который выплачивает сложные проценты по ставке $j_6 = 8\%$. Какую сумму накопит г-н Федоров за 10 лет?
8) Какую сумму должен класть в банк в конце каждого года господин Федоров из предыдущего упражнения, чтобы за 10 лет накопить 2 млн. руб.?
9) Г-н Федоров из упражнения 9 желает вносить в банк ежеквартально равные суммы (т.е. по 30000 руб.) Какую сумму он накопит за 10 лет?
10) Какую сумму должен вносить ежеквартально г-н Федоров из упражнения 11, чтобы за 15 лет накопить 3 млн. руб.?
11) Банк выплачивает проценты по ставке $j_4 = 3\%$ на вложенные в него деньги. Клиент вкладывает в этот банк ежегодно 80000 руб., делая равные вклады в конце каждого квартала. Какая сумма будет на счете через 5 лет?
12) Какую сумму должен вкладывать ежегодно клиент из предыдущего упражнения, чтобы за 6 лет накопить 600000 руб.?
13) Банк выплачивает непрерывные проценты по ставке $\delta = 8\%$ на вложенные в него деньги. Клиент вкладывает в этот банк в конце каждого года 50000 руб. Какая сумма будет на счете через 7 лет 6 месяцев?
14) Клиент из предыдущего упражнения хочет вносить деньги поквартально равными взносами. Какая сумма будет на счете через 7 лет 6 месяцев?

6. Современная ценность финансовой ренты

6.1. Определение современной ценности финансовой ренты. Функция an,i

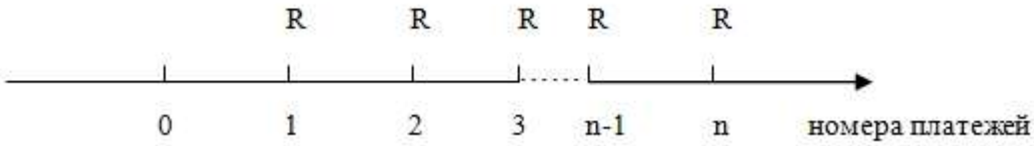
В пунктах 1.8 и 3.1 рассматривался вопрос о современной стоимости денежного потока. Такая же задача может быть по-ставлена относительно финансовой ренты. Например, желая создать фонд для ежемесячной выплаты стипендий, основатель фонда должен знать, какую сумму необходимо вложить в этот фонд. Эта сумма равна современной ценности финансовой ренты, которую составляют выплаты стипендий.
Рассмотрим ренту, состоящую из *п* равных платежей, каждый из которых равен *R*и делается в конце каждого периода начисления процентов. Если за каждый период начисляются проценты по ставке i, то наращенная сумма этой финансовой ренты, согласно формуле (5.2), равна S = *Rsn;i*Современная ценность ренты равна современной ценности её начисленной суммы, следовательно, современная ценность ренты, согласно формуле (3.3), равна
$A = S(1+i)^{-n} = Rs\ n;\ i\ (1+i)^{-n} = R\ ((1+i)^{-n} -1)\backslash\ i\ *(1+i)^{-n}=$

$$= R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

a n; i =(1-(1+i)-n \ i)
Тогда современная ценность ренты, состоящей из *n* периодических платежей по *R*руб. каждый, на которые начисляются сложные проценты по ставке i за каждый период, выразится формулой

$$\boxed{A = R\ a\ n;\ i} \quad (6.2)$$

Функция an;j затабулирована для различных значений n и r. Таблица её значений приведена в Приложении Б (Таблица 3).
Формулу (6.2) можно вывести, не используя формулу (5.2), следующим образом.
Изобразим ренту, состоящую из п платежей, на оси времени:



По формуле (3.3) ценность первого платежа в момент равна R(1 + i)-1; ценность второго платежа в момент 0 равн R(1+i)-2; ценность n-го, последнего платежа в момент 0 равн R(1+i)-n.
Суммарная ценность всех платежей в момент 0, т. е. современная ценность ренты равна
$A = R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + \ldots + R(1+i)^{-n}$
Применяя формулу суммы первых *п* членов геометрическ прогрессии с первым членом b1 = $R(1+i)^{-1}$ и знаменателе *q*= (1 + i), получим:
$A = (b1\times(q^{n}-1)/(q-1) = R\times(1+i)^{-1}\times((1+i)^{-n}-1)/((1+i)^{-1}-1)=$
$= R\times(1+i)^{-1}\times((1+i)^{-n}-1) / (1-(1+i)/1+i) =$
$= R\times(1-(1+i)^{-n}/i = R \times a\ n;\ i$

То есть мы получили формулу (6.2).

6.2. Получение ренты в будущем

К той же формуле (6.2) приводит и следующая задача: какую сумму надо вложить в настоящее время под i%, что-бы иметь возможность получать в конце каждого из периодов начисления процентов сумму R? Графическое изображение ситуации задачи такое же, как и в предыдущем пункте. Чтобы получить в момент 1 сумму *R,* необходимо вложить и момент 0 сумму $R(1+i)^{-1}$; чтобы получить в момент 2 сумму *R,* необходимо вложить в момент 0 сумму $R(1+i)^{-2}$ и т.д.; чтобы получить в момент *п* сумму *R,* необходимо вложить и момент 0 сумму $R(1 + i)^{-n}$. Эти выражения совпадают с полученными в конце п. 6.1. Суммируя их, как и там, получим формулу (6.2), выражающую теперь сумму, которую надо пложить в момент 0, чтобы получить впоследствии указанные *п* платежей по *R*руб. каждый.

Пример 1. *Господин Иванов желает положить в банк, ко-торый* выплачивает 10% *годовых (сложных), такую сумму, чтобы его сын, студент первого курса, мог снимать с этого счёта ежегодно по* 10000 *руб., исчерпав весь вклад к концу* пятилетнего срока учёбы (деньги снимаются в конце *каждого года). Какую сумму должен положить в банк г-н Иванов?*

Решение. Искомая сумма равна ценности в момент 0 ренты, состоящей из пяти платежей по 10000 руб. каждый при i = 10% = 0.1. По формуле (6.2) имеем

A = R× a n; i

По Таблице 3 находим: a5;10% = 3.790786769, следовательно,

A = 10 000 x 3.790786769 = 37 907.87 руб.

6.3. Современная ценность различных рент

Рассмотрим современную ценность финансовых рент раз-личного вида: с начислением процентов в конце года, m раз в год, с непрерывным начислением процентов, вечной ренты.

А. Ренты с начислением процентов в конце года

А1. Годовая рента

Современная ценность этой ренты определяется по формуле (5.2), где n — число лет, i — годовая ставка сложных процентов.

А2. р-срочная рента

Используя формулы (3.3) и (5.5), находим современную ценность *A* этой ренты

$A = S\times(1+i)^{-n}$ = R× s(p) n; i (1+i)-n $=R\times((1+i)^{n-1})/(p\times((1+i)^{1/p}-1) \times (1+i)^{-n}$ =

$=R\times(1-(1+i)^{-n})/(p\times((1+i)^{1/p}-1))$
Введём обозначение
$a\ (p)\ n;\ i\ = (1-(1+i)^{-n})\backslash\ p((1+i)^{1\backslash p}-1)$
тогда
$A = R\times a\ (p)\ n;\ i$
Коэффициент a (p) n; i можно представить в виде произведении
$a\ (p)\ n;\ i\ = (1-(1+i)^{-n} / i\times i/ p((1+i)^{1/p}-1)$
$a\ (p)\ n;\ i\ = a\ n;\ i\ \times K\ p;\ i$

А3. **Рента с периодом больше года**
Используя формулу (2.3) и выражение для наращенной суммы S, полученное при выводе формулы (4.7), найдём значение современной ценности *A* этой ренты
A= S×(1+i)-n = R r ×(((1+i)n -1)/ ((1+i)r -1)) ×((1+i)-n =
=R r×(1-(1+i)-n)/ ((1+i)r -1)
Разделив числитель и знаменатель последней дроби на i*,* получим
$A = R\ r(((1-(1+i)^{-n})/i)/(((1+i)^{r}-1)/i = R\ r\times(a\ n;\ i / s\ r;\ i)$
Итак, современная ценность этой ренты равна

$$A = R\ r\times(a\ n;\ i\ / s\ r;\ i) \qquad (6.5)$$

Для вычисления современной ценности ренты по форму-муле (5.5) можно использовать Таблицы 2 и 3.

Ренты с начислением процентов *т* раз в год

111. Годовая рента
Используя формулу (3.4) и выражение для наращенной суммы *S,* полученное при выводе формулы (4.8), находим значение современной ценности *A* этой ренты
$A = S\times(1+j\ m/m)^{-nm} = R\times((1+j\ m/m)^{nm}-1)/(1+j\ m/m)^{m}-1) \times (1+j\ m/m)^{-nm} =$
$=R\times(1-(1+j\ m/m)^{-nm})/((1+j\ m/m)^{m}-1)$

где Kp;i — коэффициент, определяемый формулой (5.6).
Следовательно, значения множителя a (p) n; i можно вычислять используя таблицу значений .(Таблица 3) и таблицу значений Kp;i (Таблица 4).

Разделив числитель и знаменатель последней дроби на *jm/m,* получим
A = R ×((1- (1+j m/m) -nm)/ (j m/m)) / ((1+j m/m) m-1) /(j m/m) =
= R ×(a mn ; jm\m / s m ; jm\m)

Итак, современная ценность рассматриваемой ренты может быть вычислена по формуле

$$A = R \times (a\ mn\ ;\ jm/m\ /\ s\ m\ ;\ jm/m) \qquad (6.6)$$

Б2. **р-срочная рента**

Применяем формулу (3.4) к наращенной сумме *S,* полученной при выводе формулы (5.9),

$A= S\times\ (1+j\ m/m)^{-nm} = (R/p)\times((1+j\ m/m)^{nm}-1)\ /((1+j\ m/m)^{m/p}-1)\ \times(1+j\ m/m)^{-nm} =$

$= (R/p)\times((\ 1-\ (1+j\ m/m)^{-nm})\ /\ ((1+j\ m/m)^{m/p}-1)$

Разделив числитель и знаменатель на jm/m, получим:

$A= (R/p)\times\ (\ 1-\ (1+j\ m/m)^{-nm})/(j\ m/m)\ \ /\ ((1+j\ m/m)^{m/p}-1) = (R/p)\times\ \ (\ a\ mn\ ;\ jm/m\ /\ s\ m/p\ ;\ jm/m)$

Итак, современная ценность ренты в данном случае равна

$$A = (R/p)\times(a\ mn\ ;\ jm/m\ /\ s\ m/p\ ;\ jm/m) \qquad (6.7)$$

Б3. **Частный случай р-срочной ренты при *p = т***

В п. 4.4 было показано, что s1;jm/m = 1, поэтому формула (6.7) принимает вид

$$A = R\times(\ a\ mn\ ;\ jm/m/\ m) \qquad (6.8)$$

Рента с периодом больше года

Применяем формулу (3.4) к наращенной сумме S, полу-•ченнной при выводе формулы (5.11),

$A = (1+j\ m/m)\ -nm =\ \ R\ r\times((1+j\ m/m)^{nm}-1)/\ ((1+j\ m/m)^{mr}-1)\ \times\ (1+j\ m/m)^{-nm}=$

$=\ \ R\ r\times((\ 1-\ (1+j\ m/m)^{-nm})\ /\ ((1+j\ m/m)^{mr}-1)$

Разделив числитель и знаменатель на jm/*m,* получим
$A= R\ r((1- (1+j\ m\backslash m)^{-nm}) \backslash j\ m\backslash m \backslash ((1+j\ m\backslash m)^{mr}-1) \backslash j\ m\backslash m =$
$= R\ r\ a\ mn\ ;\ jm\backslash m \backslash s\ m\backslash p\ ;\ jm\backslash m$
Итак, современная ценность ренты в данном случае равна

$$A= R\ r \times(a\ mn\ ;\ jm/m\ /\ s\ m/p\ ;\ jm/m)$$

В. Рента с непрерывным начислением процентов
В1. Годовая рента

Применяем формулу (3.6) к наращенной сумме, которая вычисляется по формуле (5.12); получаем современную ценность рассматриваемой ренты
$$A= S\times e\ -n\delta = R \times(e^{n\delta}-1)/(e^{\delta}-1) \times e^{-n\delta} =R\ (1- e^{-n\delta})\backslash (e^{\delta}-1)$$
Итак, современная ценность ренты равна
$$A= R \times((1- e^{-n\delta})/ (e^{\delta}-1))$$

В2.р**-срочная рента**

Применяем формулу (3.6) к наращенной сумме, приведённой в формуле (5.13); получаем современную ценность данной ренты:
$A=Se^{-\delta n}=(R/p)\times((e^{\delta n}-1)/(e^{\delta/p}-1))\times e^{-\delta n}=(R/p)\times((1-e^{-\delta n})/(e^{\delta/p}-1))$
Таким образом, современная ценность ренты равна

$$\boxed{A=(R/p)\times((1-e^{-\delta n})/(e^{\delta/p}-1))} \quad (6.11)$$

В3. **Рента с периодом больше года**

Применяем формулу (3.6) к выражению наращенной суммы из формулы (5.14):
$A=Se^{-\delta n}=Rr \times ((e^{-\delta n}-1)/(e^{\delta r}-1))\times e^{-\delta n}=Rr\times((1-e^{-\delta n})/(e^{\delta r}-1)).$
Современная ценность ренты равна

$$\boxed{A= Rr\times((1-e^{-\delta n})/(e^{\delta r}-1))} \quad (6.12)$$

Пример 2. Какую *сумму необходимо положить в банк, чтобы в течение следующих* 8 лет

иметь *возможность ежегодно снимать со счёта* 25000 руб., *исчерпав счёт* полностью, *если банк начисляет на вложенные в него деньги проценты по ставке: а) годовой i*= 5%, *б) j4*= 5%, *в) непрерывной δ = 5%?*

Решение. Во всех случаях требуется найти современную ценность годовой ренты. В случае а) проценты начисляются в конце года. Применяем формулу (5.2):

A = Ra n; i< = 25000 a8;5%

По Таблице 3 находим a8;5% - 6.463212759, тогда

A = 25000 ×6.463212759 =161580.32 руб.

б) В этом случае проценты начисляются 4 раза в год. при-
меняем формулу (5.6), где n = 8, m = 4, *jm/m* = 5%/4 =
1.25%,

A=R×((anm; (jm)/m)/(sm; (jm)/m))=25 000 × (a32;1.25%/s4;1.25%)

Но формуле (5.1) находим значение a32;1.25%=(1-(1+0.00125)-32)/0.0125=26.24127417

По формуле (4.1) находим значение

s4;1.25%=$((1+0.0125)^{4}$-1)/0.0125=4.075626952,

тогда:

A=25 000× (26.24127417/4.075626952)=160 964.65 руб.

в) В этом случае применяем формулу (5.10) при n = 8,
δ= 0.05:

A= Rr×$((1-e^{-\delta n})/(e^{\delta r}-1))$=25 000 × $((1-e^{-0.05\times 8})/(e^{0.05}-1))$ = 160 753.32 руб.

Пример 3. *Какую сумму необходимо положить в банк, чтобы в течение следующих* 10 лет *ежегодно получать* 30 000 *руб., исчерпав счёт полностью, если снимать эти деньги каждые* 2 месяца *равными частями. Банк начисляет на*

находящиеся на счету деньги проценты по ставке: а) годовой i= 5%, б) годовой j4= 5%, в) непрерывной годовой δ = 5%.

Решение. Во всех случаях требуется найти современную ценность *р* -срочной ренты (р = 6).

а) В этом случае проценты начисляются в конце года. При-меняем формулу (6.3) при *п* = 10, i = 5%, *р* = 6:

A=Ran;i(p)= 30 000a(6) 10;5%

Значение a(6) 10;5% находим по формуле (6.4) и по Таблицам 3 и 4

a(6) 10;5% = a10;5%.× K6;5%= 7.721734928 ×1.020635696 =

= 7.881078303; *А* = 30000 × 7.881078303 = 236432.35 руб.

б) В этом случае проценты начисляются 4 раза в год. При-меняем формулу (6.7) при n = 10, *т* = 4, *jm* =5%, p = 6: A=(R/p)×((anm; (jm)/m)/(sm; (jm)/m))= 300000/6 ×((a40; 1.25%)/(s2/3; 1.25%))

По формуле (5.1) находим

s2/3; 1.25%=((1+0.0125)2/3-1)/0.0125=0.665285424.

По формуле (6.1) находим

a40;1.25%=(1-(1+0.0125)-40)/0.0125=31.32693316

Находим современную ценность ренты:

A=30 000 × (31.32693316/(6×0.665285424))=235439.80 руб.

в) В этом случае проценты начисляются непрерывно. При меняем формулу (6.11) при n = 10, *р*= 6, δ=0.05:

$A=(R/p)\times((1-e^{-\delta n})/(e^{\delta/p}-1))= (30000/6)\times((1-e^{-0.05\times10})/(e^{0.05/6}-1)) =5000 \times 47.01986169 =$ 235099.31 руб.

Пример 4. Какую *сумму надо положить в банк, чтобы в течение следующих* 12 лет иметь возможность каждые 3 года сни*мать со счёта* 25000 *руб., исчерпав к концу этою срока пложенные деньги, если банк начисляет на находящиеся на счету деньги проценты по ставке: а) годовой i*= 5%, *б) j4 = 5% в) непрерывной 6* — 5%?

Решение. Во всех случаях надо найти современную ценность ренты с периодом больше года. В случае (а) проценты начисляются в конце каждого года. Современную ценность ренты находим по формуле (5.5) при r = 3, n= 12, *i*= 5%:

$A=Rr((a_{n;i})/(s_{r;i}))=25\ 000 \times (a_{12;5\%}/s_{3;5\%})$

Значения коэффициентов $a_{12;5\%}$ и $s_{3;5\%}$ находим по Таблицам 3 и 2 соответственно $a_{12;5\%} = 8.863251636$, $s_{3;5\%} =3.1525$, тогда

$A = 25000 \times (8.863251636/3.1525) = 70287.48$ руб.

б) В этом случае проценты начисляются 4 раза в год. Со-временную ценность ренты вычисляем по формуле (5.9) при n=12, m = 4,r = 3, *jm/m*= 5%/4 = 1.25%:

$A= Rr\times((a_{nm;\ (jm)/m})/(s_{m;\ (jm)/m}))= 25\ 000 \times((a_{40;\ 1.25\%})/(s_{12;\ 1.25\%}))=$

В Таблицах 2 и 3 нет значений $s_{12;1..25\%}$ и $a_{48;1..25\%}$ поэтому вычисляем их по формулам (4.1) и (5.1):

$s_{12;\ 1.25\%}=((1+0.0125)^{12}-1)/0.0125=12.86036142$

$a_{48;1.25\%}=(1-(1+0.0125)^{-48})/0.0125=35.9314809.$

в) В этом случае проценты начисляются непрерывно с си лой роста δ = 5% = 0.05. Современную ценность ренты вычисляем по формуле (5.12) при *п* = 12, r = 3, δ = 0.05:

$A = Rr\times((1-e^{-\delta n})/(e^{\delta r}-1))=25\ 000 \times((1-e^{-0.6})/(e^{0.15}-1))$ = 69 699.15 руб.

Г. Вечная рента

Вечной рентой называется финансовая рента с бесконечным числом членов. Современной ценностью A ∞ вечной ренты является сумма, которую надо вложить в начальный момент под сложные проценты по данной ставке, чтобы в дальнейшем каждый год (или каждый период начисления процентов) можно было получать с этого вклада сумму *R.*. Современную ценность вечной ренты можно определить как предел современной ценности конечной ренты при неограниченном увеличении числа членов ренты. Ниже, при нахождении пределов всюду используется тот факт, что при любом $a > 1$ имеет место: limn→∞ $a^{-n} = 0.$ Рассмотрим различные виды вечной ренты.

Годовая рента с начислением процентов в конце каждого года по ставке сложных процентов, равной i

Современная ценность конечной ренты этого вида определяется формулой (5.2). Найдём предел данного в этой фор муле выражения при неограниченном увеличении *п:*

A∞ = lim *A* = lim *Ran;i* = *R* lim (1-(1+i)-n)/i=R/i.
n—»oo n—юо n—»oo
Итак, современная ценность вечной ренты в данном случае равна:

$$A\infty=R/i. \qquad (6.13)$$

p-срочная рента с начислением процентов в конце года по ставке сложных процентов, равной i

Современная ценность вечной ренты в этом случае равна пределу выражения, данного в формуле (6.3),
$A\infty = \lim_{n\to\infty} A = \lim_{n\to\infty} Ran;i(p) = R \lim_{n\to\infty}((1-(1+i)^{-n})/(p[(1+i)^{1/p}-1])$
Из формулы (5.6) следует: p((1 + *i)1lp*— 1) = *i/KPii,* следовательно, полученное для *A* выражение можно записать так:

$$A\infty = R\times((Kp;i)/i). \qquad (6.14)$$

Вечная рента с периодом больше года с начислением процентов в конце каждого года по ставке сложных процентов, равной *i*

Современная ценность вечной ренты в этом случае равна пределу выражения, данного в формуле (6.5):
A∞=limn→∞A= lim n→∞Rr×((an;i)/(sr;i))=Rr×limn→∞((1-(1+i)$^{-n}$)/((1+i)^{r}-1))= Rr×((1+i)^{r}-1)
Из формулы (4.1) следует, что (1 + i)^{r} — 1 = *i* ×*sr; I* поэтому

A∞=Rr/(i×sr;i). (6.15)

Годовая рента с начислением процентов *т* раз в год по ставке *jm*

Современная ценность вечной ренты в этом случае равна пределу выражения, данного в формуле (6.6):
A∞=limn→∞A=limn→∞R((anm;(jm)/m)/(sm;(jm)/m))=R limn→∞((1-(1+(jm)/m)$^{-nm}$ +)/((1+(jm)/m)^{m}-1=R/((1+(jm)/m)^{m}-1)

Из формулы (5.1) следует:
(1+(jm)/m))^{m}-1= ((jm)/m)×(sm;(jm)/m)
поэтому
A∞=R/((jm)/m)×sm;(jm)/m

р-срочная рента с начислением продентов *т* раз год **по ставке** *jm*

Современная ценность вечной ренты в этом случае равна пределу выражения из формулы (6.7):

A∞=limn→∞A=limn→∞((R/p)×((anm; (jm)/m)/(sm/p; (jm)/m)))= (R/p)× limn→∞((1-(1+(jm)/m)$^{-nm}$)/((1+((jm)/m))$^{m/p}$)-1)=(R/p)×(1/(1+(jm)/m)$^{m/p}$-1)

Г6. Вечная рента с периодом больше года с начислением **продентов *т*** раз в год по ставке *jrn*

Современная ценность вечной ренты в этом случае равна пределу выражения из 4 формулы (6.9):
A∞ = lim *A* = lim *Rr((amn;jm/m)/(smr;jm/m))=*
п→∞ *п→∞*

$=Rr \lim ((1-(1+(jm)/m)^{-nm})/((1+(jm)/m)^{mr}-1)=$
$n\to\infty$
$= Rr(1/(1+(jm)/m)^{mr}-1)$

111 формулы (5.1) следует, что

Из формулы (5.1) следует:
$(1+(jm)/m)^{m/p}=((jm)/m)\times(sm/p;(jm)/m)$ т.е.

$A\infty=R/(p\times((jm)/m)\times sm/p;(jm)/m)$
В частном случае этой ренты, когда $\boldsymbol{\tau} = p$, имеем: s1;jm/m =1 и формула (5.17) принимает вид:

$A\infty=Rr/(m\times(jm)/m)=Rr/(jm)$
тогда

$$A\infty=Rr/(((jm)/m)\times(smr;(jm)/m). \qquad (6.19)$$

7. **Годовая** рента с **непрерывным начислением про-центов по ставке** *δ*

Современная ценность вечной ренты в этом случае равна пределу выражения, данного в формуле (5.10):

$A\infty= \lim_{n\to\infty} A= \lim_{n\to\infty} R((1-e^{-\delta n})/(e^{\delta}-1))=R \lim_{n\to\infty}((1-e^{-\delta n})/(e^{\delta}-1))$

т.е.

$$A_\infty = \frac{R}{e^\delta - 1}.$$

p -срочная рента с непрерывным начислением про-центов по ставке δ

Современная ценность вечной ренты в этом случае равна пределу выражения, данного в формуле (6.11):
$A\infty=\lim_{n\to\infty}A=\lim_{n\to\infty}R\times((1-e^{-\delta n})/(p\times(e^{\delta/p}-1)))=R/(p\times(e^{\delta/p}-1))$
следовательно,

$$A\infty=R/(p\times(e^{\delta/p}-1)). \qquad (6.21)$$

Г9. Вечная рента с периодом больше года с непрерывным начислением процентов по ставке δ

Современная ценность вечной ренты в этом случае равна пределу выражения, данного в формуле (5.12):

$A\infty=\lim_{n\to\infty}A=\lim_{n\to\infty}Rr\times((1-e^{-\delta n})/(p\times(e^{\delta r}-1)))=Rr/(e^{\delta r}-1)$, следовательно,

$$A\infty=Rr/(e^{\delta r}-1). \qquad (6.22)$$

Пример 5. *Предприятие собирается учредить фонд для выплаты стипендий направленным на учёбу работникам в* сумме 1200 000 *руб. ежегодно. Какую сумму должно положить предприятие в банк, чтобы обеспечить получение необходимых денег неограниченно долго, если а) банк выплачивает 12% годовых (сложных,), б) банк выплачивает проценты по ставке j_4= 12%, в) банк выплачивает непрерывные проценты с силой роста δ =12% ?*

Решение, а) Последовательность получаемых сумм является вечной рентой с начислением процентов в конце года. Применяем формулу (5.13) при *R*= 1200000, *i*= 0.12:

$A\infty=R/i=1\ 200\ 000/0.12=10\ 000\ 000$ руб. I

б) Последовательность получаемых сумм является вечной рентой с начислением процентов m раз в год по годовой ставке j_m. Применяем формулу (5.16) при m = 4, j_m= 12%, j_m/m= 12%/4 = 3%:

$A\infty=R/((j_m)/m)\times(s_{m;(j_m)/m})=1\ 200\ 000/(0.003\times s_{4;3\%})$.

По Таблице 2 находим $s_{4:3\%}$ = 4.183627; тогда

$A\infty=1\ 200\ 000/(0.034\times4.183627)=9\ 561\ 081.81$ руб.

в) Последовательность получаемых сумм образует вечную ренту с непрерывным начислением процентов по годовой ставке бПрименяем формулу (5.20) при *R*= 1200

000,

$\delta = 12\% = 0.12$:

$A\infty = R/(e^{\delta}-1) = 1\ 200\ 000\ /(e^{0.12}-1) = 9\ 411\ 997.13$ руб

Пример 6. Решить *предыдущее упражнение, если пред-приятие желает снимать равные суммы ежемесячно (при том же годовом доходе).*

Решение, а) Последовательность получаемых сумм образует p-срочную вечную ренту с выплатой процентов в конце года. Применяем формулу (5.14); в этом случае $p = 12$, $i = 12\%$:

$A\infty = R\times(Kp;i/i) = 1\ 200\ 000 \times (K12;12\%)/0.12$

По Таблице 4 находим: *K12;12%* = 1.053874826; следовательно,

$A\infty = 1200\ 000 \times (1.053874826/0.12) = 10538748.26$ руб.

б) Последовательность снимаемых сумм образует p -срочную вечную ренту с выплатой процентов 4 раза в год. Применяем формулу (5.17) при $m = 4$, $p = 12$, *jm* $= 12\% = 0.12$, $jm/m = 0.12/4 = 0.03$:

$A\infty = R/(p\times((jm)/m)\times(sm/p;jm/p)) = 1\ 200\ 000 \times(12 \times 0.03\times s4/12;3\%)$

В наших таблицах нет значения s1/3;3% поэтому находим его по формуле (4.1):

$s\ 1/3\ ;\ 3\% = (1 + 0.03)^{1/3} -1/0.03 = 0.330054466$

Вычисляем $A\infty$

$A\infty = 1\ 200\ 000/\ (12\times0.03\times\ 0.330054466) = 10\ 099\ 343.22$ руб.

в) Последовательность снимаемых сумм является *p* -срочной вечной рентой с выплатой непрерывных процентов. Применяем формулу (5.21) при $p = 12$, *5* $= 12\% = 0.12$:

$A\infty = (R\ /p)\times(e^{\delta/p}-1) = 1\ 200\ 000/\ (12\times(\ e^{0.12} \backslash 12-1)) = 9\ 950\ 083.42$ руб.

б) Последовательность снимаемых со счёта сумм является вечной рентой с периодом больше года. Применяем формулу (5.19) при r = 2, *Rr*= 2400000, m = 4, *jm/m*= 12%/4 = 3% = 0.03:

$A\infty= R\ r /((j\ m/m)\times(s\ mr\ ;\ jm/m))=$

$2\ 400\ 000/((0.12/4) \times s\ 4\times2\ ;\ 12\%/\ 4=$

$=2\ 400\ 000/(\ 0.03\times\ s\ 8\ ;\ 3\%)$

По Таблице 2 находим: s8;3% = 8.892336046 и вычисляем A∞

$A\infty= 2\ 400\ 000/(\ 0.03 \times 8.892336046) = 8996511.11$ руб.

в) Последовательность получаемых сумм образует вечную ренту с периодом больше года и непрерывным начислением процентов. Применяем формулу (5.22) при r = 2, Rr= 2400000, δ = 12% = 0.12:

$A\infty= R\ r\ \ /(e^{\delta r}-1)\ = 2\ 400\ 000/\ (e^{0.12}\times2\ -1)\ = 8847\ 953.99$ руб.

Пример 7. Решить упражнение 5 при условии, что предприятие желает снимать каждые 2 года сумму в 2 400 000 руб.

(Решение*.* Во всех случаях последовательность снимаемых со счёта сумм является вечной рентой с периодом больше года.)

а) В этом случае проценты начисляются в конце каждого года. Применим формулу (5.15) при r = 2, Rr= 2400000, i = 12% = 0.12:

$A\infty= R /(\ i\times\ s\ r\ ;\ i\ )=2\ 400\ /(\ 0.12 \times s\ 2\ ;\ 12\%)$

Значение функции s2;12% в наших таблицах отсутствует, поэтому вычисляем его по формуле (4.2):

$s\ 2\ ;\ 12\% =((1+ 0.12)2\ -1)/\ 0.12 = 2.12,$

следовательно,

$A\infty= 2\ 400\ 000/\ (0.12\times2.12\ )= 9\ 433\ 962.26$ руб.

6.4. **Погашение долгосрочной задолженности несколькими платежами**

Рассмотрим случай, когда задолженность погашается не единовременным платежом, а несколькими равными платежами, которые делается через равные промежутки времени. Такая форма погашения задолженности распространена в потребительском кредите и во внешнеторговых расчётах. Опишем соответствующую задачу.

Заёмщик взял ссуду, равную *S*руб., и обязался вернуть долг, сделав n равных срочных уплат через равные промежутки времени. Требуется определить величину срочной уплаты *a* при условии, что на долг начисляются сложные процен-

ты по ставке qза каждый промежуток времени. Последовательность срочных уплат является рентой, имеющей n членов, современная ценность которой равна S. Следовательно, по формуле (5.2) *S*= α×an; откуда

α= S/ a n ; q

При такой системе расчётов каждая следующая срочная уплата включает большую сумму погашения долга, чем предыдущая, и меньшую сумму выплачиваемых процентов, а именно: сумма выплачиваемых в t-ом периоде процентов рав- на *Stq,* где *St*— остаток долга на начало t-ro периода и *S1* = S, а сумма погашения долга в t-ом периоде равна величине at = *a* - *Stq*- Остаток долга на начало t-ro периода равен сумме *St* = *St-1-* α*t-I*(t = 2,... ,n). Рассмотрим пример.

Пример 7. Решить упражнение 5 при условии, что предприятие желает снимать каждые 2 года сумму в 2 400 000 руб.

(Решение. Во всех случаях последовательность снимаемых со счёта сумм является вечной рентой с периодом больше года.)

а) В этом случае проценты начисляются в конце каждого года. Применим формулу (5.15) при r = 2, Rr= 2400000, i = 12% = 0.12:

$A_\infty = R / (i \times s_{r;i}) = 2\,400 / (0.12 \times s_{2;12\%})$

Значение функции $s_{2;12\%}$ в наших таблицах отсутствует, поэтому вычисляем его по формуле (4.2):

$s_{2;12\%} = ((1 + 0.12)^2 - 1) / 0.12 = 2.12$, следовательно,

$A_\infty = 2\,400\,000 / (0.12 \times 2.12) = 9\,433\,962.26$ руб.

Пример 8. *Долг в* 300 тыс. *руб. надо погасить равными срочными уплатами* за 5 лет, делая платежи в конце каждого года. За долг выплачиваются проценты по годовой ставке *q*= 5%. Составим план *погашения долга.*

Решение. По условию задачи n = 5, $S = S_1 = 300\,000$, $q = 0.05$. По Таблице 3 находим $a_{5;5\%} = 4.329476671$ и вычисляем срочную уплату по формуле (6.23):

$\alpha = S / a_{5;5\%} = 300\,000 / 4.329476671 = 69292.44$ руб.

Записываем план погашения долга в виде таблицы:

Номер года *t*	Остаток долга на начало t-го года (руб.)	Срочная уплата α	Сумма выплаченных в t-ом году процентов (руб.)	Сумма погашения долга в t-ом году
1	300000	69292	15000	54292
2	245708	69292	12 285	57007
3	188701	69292	9435	59857
4	128844	69292	6442	62850
5	65994	69292	3300	65994
			Итого:	300000

6.5. Погашение долгосрочной задолженности заключительной уплатой

Иногда в условиях погашения долгосрочной задолженно-
ст и оговаривается величина срочной уплаты и по ней рассчи-тывается срок погашения долга, т.е. из формулы (6.23) опре-деляют значение n:
$S = (a\times (1-(1+q)^{-n}))/ q$
$(1+q)^{-n} = 1-(S\times q)/a$

Прологарифмируем обе части этого равенства: -
$-n \ln(1+q) = \ln(1-(S\times q)/a)$
$n = - (\ln(1-(S\times q)/a))/(\ln(1+q))$

Вычисленное по этой формуле значение *n* обычно получа-ется нецелым. Поэтому при составлении плана погашения задолженности заключительная уплата в последнем, неполном году должна быть уменьшена так, чтобы был выплачен остаток долга и соответствующие этому остатку проценты.
Рассмотрим пример.
Пример 9. В условиях предыдущей задачи предположим, что должник и кредитор договорились, не о том, что долг должен быть возвращён в течение пяти лет, а о том, что срочная уплата будет равна 70000 руб. Составить план погашения долга.
Решение. Определим по формуле (6.24) срок погашения долга:
$n =-(\ln (1- (300\,000\times 0.05)/ 70\,000)) / (\ln(1+0.05)) = 4.942841667$

Итак, n = 4.94. Первые 4 года срочная уплата равна 70 000 ру6 В последнем году срочная уплата меньше, так как год неполный. План погашения долга приведён в отдельной таблице. Заключительная уплата в пятом году должна быть равна сумме остатка долга на начало пятого периода и начисленных на этот остаток процентов в пятом году, т. е.: a = 62 943 + 3147 = 66090 руб.

Номер года *t*	Остаток долга на начало t-ro года (руб.)	Срочная Уплата *A*	Сумма выплачен-ных в t-ом году процентов (руб.)	Сумма погашения долга в t-ом году
1	300000	70000	15000	55000
2	245000	70000	12250	57750
3	187250	70000	9362	60638
4	126612	70000	6331	63669
5	62943	66090	3147	62943

5.6. Вычисление процентной ставки финансовой ренты

Пусть, предприниматель желает накопить определённую сумму S к определённому сроку, сделав через равные промежутки времени n равных вкладов в банк размером *R*руб. каждый; встает вопрос: какой процент на вложенные деньги надо получать для этого от банка? В этом случае по известным значениям *S, R,* n можно найти значение sn;j, пользуясь формулой (5.2), а затем по этому значению вычислить процентную ставку i. Другой пример: вкладчик желает положить определённую сумму *S*на счёт в банке, чтобы после этого иметь возможность снимать со своего счёта через равные промежутки времени *п* раз сумму, равную *R*руб.; вкладчику интересно узнать, сколько процентов при этом должен платить банк на пложенные деньги. В этом случае по известным значениям *A, R*и n можно найти значение an;i по формуле (6.2), а затем по этому значению вычислить ставку r.

В обоих приведённых примерах надо решить относительно i одно из уравнений

*sn;i =q*или an;i = *q,*(6.25)

где *q*— известное значение sn; j или an; *i*и n — известное число.

Аналогичные уравнения приходится решать и в других задачах; некоторые из них рассматриваются в разделе 6.

Уравнения (6.25) являются степенными уравнениями и имеют, как правило (при n > 2), высокую степень. Такие уравнения можно решать интерполяционными методами, позволяющими найти приближённые значения их корней с любой степенью точности.

Например, при n= 5 уравнение *sn; i= q*имеет вид:

((1+i)5-1)/i= *q,* или (1 +i)5 — *qi* — 1 = 0, или

$i^5 + 5i^4 + 10i^3 + 10i^2 + (5 - q)i - 1 = 0.$

Соответствующие вычисления могут быть легко проведены с помощью специального финансового калькулятора или с помощью любого пакета электронных таблиц на персональном компьютере в Excel.

Пример 10. Для *возвращения долга необходимо накопить* за 10 лет 2 млн. руб. *Ежегодно должник может вносить в банк для этой цели* 150 тыс. *руб. Под какую ставку сложных процентов необходимо вкладывать* эти *деньги, чтобы накопить требуемую сумму в указанный срок?*

Решение. Необходимо за 10 лет получить наращенную сумму *S*= 2 млн. руб. Применяя формулу (4.2), находим коэффициент наращения:

s 10;i = S/R = 2000000/150000 = 13.(3)

Надо решить относительно i уравнение (5.25).

Оно имеет вид:

$((1+i)^{10}-1)/i = 13.(3)$

Это уравнение 10-й степени. Ближайшие значения коэффици ента наращения при n = 10 в Таблице 2 дают большой разброс i = 5% и i = 10%. Пользуясь приближенными методами вычислений, находим i = 0.061, т. .е. *i*= 6.1%.

Пример 11. *К моменту выхода на пенсию г-н Иванов на-копил* 1500000 руб., *которые желает положить в банк,* чтобы в течение 20 лет *получать по* 120000 руб. в *год, исчерпав свой* вклад *к концу этого срока. Под какую ставку сложных про-центов ему надо вложить свои деньги?*

Решение. Величина вкладываемой суммы является совре-менной ценностью годовой ренты, состоящей из 20 членов по 120 000 руб. каждый. Из формулы (5.2) находим коэффициент приведения

a n:i = A/R   a 20;i=1500000/120000 = 12.5

Надо решить относительно i уравнение

a 20;i= 12.5

С помощью Таблицы 3, получаем i = 0.050, т. е. *i*= 5%.

Упражнения к разделу 5

1. Какую сумму надо положить в банк, выплачивающий 5 % годовых, чтобы иметь возможность снимать в конце каждого года 50 000 руб, исчерпав весь вклад к концу десятого года?
2. Решите предыдущее упражнение, если банк выплачивает непрерывные проценты по ставке j 12 = 5%?
3. Решите упражнение 1, если банк выплачивает непрерывные проценты по ставке δ= 5%?

4. Какую сумму надо положить в банк, чтобы в течение следующих 10 лет получать ежегодно по 50 000 руб., снимая эту сумму равными частями каждые 6 месяцев, если банк начисляет на вложенные в него деньги 5% годовых?
5. Решите предыдущее упражнение, если банк выплачивает проценты по ставке $j_3 = 5\%$?
6. Решите упражнение 4, если банк выплачивает непрерывные проценты с силой роста $\delta = 5\%$?
7. Какую сумму надо положить в банк, чтобы в течение следующих 26 лет иметь возможность снимать со счета каждые 2 года по100 тыс. руб., исчерпав весь запас к концу этого срока, если банк начисляет на эти деньги, находящиеся на счете, 10% годовых?
8. Решите предыдущее упражнение, если банк выплачивает проценты по ставке $j_2 = 10\%$?
9. Решите упражнение 7, если банк выплачивает непрерывные проценты с силой роста $\delta = 10\%$?
10. Фермер приобрел трактор в кредит за 12 000 000 руб. За кредит он должен платить 5% годовых и выплатить весь долг за 4 года. Найти размер ежегодной срочной уплаты и составить план погашения долга
11. Составить план погашения долга, описанного в предыдущем упражнении, если срочная годовая уплата установлена в размере 3 500 000 руб.
12. Г-н Петров собирается положить в банк на счет своего сына 180 000 руб., что бы тот в течении 5 лет учебы в университете мог снимать в конце каждого года со счета 40 тыс. руб., исчерпав весь вклад к концу

7. Задачи повышенной сложности

7.1. Продажа контрактов

Рассмотрим примеры продажи контрактов или изменения условий контрактов, связанные с финансовыми рентами.

Пример 1. Магазин продал видеомагнитофон, заключив контракт, *по которому покупатель обязался выплачивать ежеквартально по* 10 000 *руб. в течение* 5 лет. Хозяин магазина, нуждаясь в деньгах, продаёт этот контракт *банку, который} получает* на *ссуженные деньги проценты по ставке j_4*= 12%. [*Какую сумму* заплатит банк *хозяину магазина* за данный контракт?

Решение. По контракту банк получает ренту, состоящую из 20 платежей по 10 000 руб. каждый. За эту ренту банк должен заплатить её современную ценность. Эту ценность можно вычислить по формуле (6.2) при R= 10 000, n = 20, i=j4/4 = 12%/4 = 3%:

A=R×an;i=10 000×a20;3%

По Таблице 3 находим a20;3% = 14.87747486.

Следовательно,

A = 10000×14.87747486 = 148774.75 руб.

Таким образом, хозяин магазина, продавая контракт, теряет

200000 - 148774.75 = 51225.25 руб.,

но при этом он получает деньги немедленно. Банк, покупая контракт, получает доход, равный той же сумме 51225.25 руб.

Эту сумму можно считать платой за риск, который несёт банк,

так как покупатель магнитофона может по тем или иным причинам прекратить выплату долга.

Заметим, что рассмотренную в этом примере ренту можно рассматривать как ренту с начислением процентов mраз в год (n = 4) и являющуюся p -срочной рентой при p = m = 40000 (ЭТО величина платежа в год). Применяя формулу (6.8), получаем тот же результат.

Пример 2. *Господин Васильев купил костюм* за 20 000 *руб. в кредит, обязавшись оплатить его помесячными платежами в течение года, выплачивая при этом проценты* за *долг по ставке j12*= 6%. *Хозяин магазина продаёт этот контракт финансовой компании, которую не удовлетворяют условия контракта: она желает получать доход по ставке j12*= 12%. *Сколько жна заплатить компания за этот контракт?*

Решение. Найдём величину каждого из 12 платежей, ко-горые должен сделать по заключённому контракту господин Насильев. Эти платежи образуют ренту, состоящую из 12 платежей, современная ценность которой 20000 руб. Процент, начисляемый на каждый платёж, равен 0.5% (ставка процента i=j12/12 = 6%/12 = 0.5%)

A=R×an;i
R=A/an;i=20 000/a12;0.5%
Но Таблице 3 находим a12;0.5%= 11.61893207, следовательно,
R=20 000/11.61893207=1 721.33 руб.
Итак, компания хочет купить контракт, предполагающий 12 платежей по 1 721.33 руб. каждый, получая доход по ставке j12 = 12%. Современная ценность этого контракта может быть и.лйдена по формуле (6.2) при *i*= 12%/12 = 1%:

A=R×an;i=1 721.33 a12;1%

По Таблице 3 находим a12;1% = 11.25507747, следовательно:
A = 1721.33 × 11.25507747 = 19373.70 = 19373.70 руб.
При этом господин Васильев имеет костюм, выплачивая за него 1721.33 ×12 = 20655.96 руб. Хозяин магазина теряя сумму, равную 20000 - 19373.7 = 626.3 руб.,
а финансовая компания получает в течение года прибыль равную
20 655.96 - 19 373.70 = 1282.26 руб.
Эта прибыль является премией, которую компания получает за риск потерять деньги в случае неуплаты долга господином Васильевым.

7.2. Выбор контракта, наиболее выгодного для покупателя

При покупке некоторого товара покупатель может заключить с продавцом контракт, включающий различные условия авансовой оплаты, получения кредита и сроков поставки товара. Чтобы выбрать наиболее выгодный для себя контракта покупатель должен сравнить современные ценности возможных контрактов и найти контракт с наименьшей современной ценностью. Чтобы определить современную ценность тех или иных платежей, необходимо принять какую-либо ставку сравнения, т. е. ставку сложных процентов i, по которой будет производиться дисконтирование этих платежей. В теории корпоративных финансов рассматриваются различные подходы к выбору этой ставки — это может быть и уровень ссудного процента, и уровень доходности по государственным облигацияи или кредитным обязательствам и т. д. Рассмотрение этого вопроса выходит за рамки финансовой математики, а значит, нашей книги.
При покупке товара покупатель делает платежи двух видов.
Во-первых, это авансовые платежи, т.е. суммы, которые "и выплачивает за купленный товар в обусловленные контрактом моменты времени *t*(считая от момента заключения контракта); обозначим эти платежи посредством Pt. Современная ценность этих платежей на момент заключения контракта равна

$$\sum_t P_t(1+i)^{-t}$$

Во-вторых, это платежи по погашению кредита, т. е. по погашению разности между ценой товара *C* и авансовыми платежами; эта разность равна

$$C-\sum_t P_t$$

Современная ценность этих платежей различна при разных условиях погашения кредита. Рассмотрим два наиболее | и то встречающихся случая.
а) Кредит погашается разовым платежом в конце срока; за мн'дит по контракту продавец получает *g%* годовых. Тогда сумма, выплачиваемая в конце срока кредита равна $(C-\sum_t P_t)(1+g)^N$

где N — срок кредита, который обычно отсчитывается от момента окончания поставки товара. Современная ценность чистой суммы на момент заключения контракта равна

$$(C-\sum_t P_t)(1+g)^N(1+i)^{-(T+N)}$$

Где T— срок поставки товара. Итак, современная ценность всех платежей по контракту ил момент его заключения равна

$$\boxed{A=\sum_t P_t(1+i)^{-t}+(C-\sum_t P_t)(1+g)^N(1+i)^{-(T+N)}\ .} \quad (7.1)$$

б) Кредит погашается равными срочными уплатами. Современная ценность авансовых платежей такая же, как в случае а). Годовая срочная уплата αпо выплате кредита, величина которого, как было указано выше, равна $C-\sum_t P_t$, согласно формуле (6.23), запишется так:

$$a=\frac{C-\sum_t P_t}{a_{N;g}}$$

Последовательность срочных уплат представляет собой ренту, состоящую из *N* платежей по руб. каждый. Современная ценность этой ренты на момент Т окончания срока поставки товара, согласно формуле (6.2), равна α*aN;i*современная ценность этой суммы на момент заключения контракта равна αaN;i(1+i)-T Итак, современная ценность всех платежей по контракту на момент его заключения равна

$$A=\sum_t P_t(1+i)^{-t}+(C-\sum_t P_t)\frac{a_{N;j}}{a_{N;g}}(1+i)^{-T} \quad (7.2)$$

Рассмотрим примеры сравнения контрактов.

Пример 3. Сравним *следующие два контракта.*
<u>1-й контракт:</u> товар стоит 20 млн. руб.; *делается три* алан совых платежа по 3 млн. руб. *каждый: первый* — в *моме заключения контракта, второй* — через *год, третий* — ещё через год. Поставка товара производится *по окончанию* аван совых платежей. *Кредит даётся на* 6 лет, *считая с момен поставки товара под* 5% *годовых, и погашается разовым платежом в конце срока кредита.*
<u>2-й контракт:</u> товар стоит 21 млн. руб.; в *момент заключения контракта делается один авансовый платёж, равный* 5 млн. *руб. Поставка производится в момент заключения контракта. Кредит выдаётся на* 10 лет под 5% *годовых* с погашением равными ежегодными *срочными уплатами.*
Сравнение контрактов произвести при ставке сравнение *i*= 10%.
Решение. Найдём современную ценность каждого из контрактов. Современную ценность 1-го контракта вычисляем но формуле (6.1) при *C* = 20 млн. руб., *t1* = 0, t2 = 1, t3 = 2, *T = 2, N = 6, g* = 5%, P1 = P2 = P3 = 3 млн. руб.:

$$A_1=3(1+i)^0+3(1+i)^{-1}+3(1+i)^{-2}+(20-9)(1+0.05)^6(1+i)^{-(2+6)}=$$
$$=3+3\times1.1^{-1}+3\times1.1^{-2}+11\times1.05^6\times1.1^{-8}=16.083 \text{ млн.руб.}$$

Современную ценность 2-го контракта вычисляем по формуле (6.2) при *C* = 21 млн. руб., t1 = 0, P1 = 5, T = 0, *N* = 10, g = 5% :

$$A_2 = 5(1+i)^0 + (21-5)\frac{a_{10;10\%}}{a_{10;5\%}}(1+i)^0 = 17.732 \text{ млн.руб.}$$

Второй контракт менее выгоден покупателю, чем первый, однако покупатель может его предпочесть, так как поставка товара по нему производится немедленно, а по первому контракту — с отсрочкой на два года.

Пример 4. *Сравнить следуюпще два контракта.*

<u>*1-й контракт:*</u> *товар стоит* 100 000 *руб.; делаются два аван-чтых платежа: первый, равный* 20000руб.,— в момент заключения контракта; второй, равный 10000руб., — через *год после заключения контракта. Поставка товара производится после второго авансового платежа. Кредит выдаётся на* 3 года, *считая от момента поставки товара, под* 8% *годовых и погашается разовым платежом в конце срока.*

<u>*2-й контракт:*</u> *товар стоит* 110000 *руб.; делаются три аван*-l *оных платежа по* 10000руб.: *первый* — в момент *заключения* контракта, *второй — через год после заключения контракта,* третий — *ещё через год; поставка производится в момент заключения контракта. Кредит выдаётся* на 10 лет, *считая от* момента поставки товара, под 3% *годовых и погашается* равными *срочными ежегодными уплатами.*

Сравнение контрактов выполнить при ставке сравнения i= 10%.

Решение. Найдём современную ценность каждого из контрактов на момент заключения контракта. Современную ценность 1-го контракта вычисляем по формуле (6.1) при *C* =100000 руб., t1 = 0, *t2* = 1, T = 1, *N* = 3, *g*= 8%, P = 20000,1 *P2* = 10000:

$$A_1 = 20(1+i)^0 + 10(1+i)^{-1} + 70(1+0.08)^3(1+i)^{-(1+3)} =$$
$$= 20 + 10\times 1.1^{-1} + 70\times 1.08^3 \times 1.1^{-4} = 89\ 319 \text{ руб.}$$

Современную ценность 2-го контракта вычисляем по формуле (6.2) при C=110000 руб., t1 = 0, $t2$ = 1, t3=2, P1=P2=P3=10 000 , T = 0, N = 3, g= 3%,

$$A_2 = 10(1+i)^0 + 10(1+i)^{-1} + 10(1+i)^{-2} + 80\frac{a_{10;10\%}}{a_{10;3\%}} = 84\,982 \text{ руб.}$$

Второй контракт дешевле для покупателя, несмотря на то, что товар по этому контракту дороже, чем по первому. Выгода получена за счёт более дешёвого кредита.

7.3. Доходность контракта для кредитора

В предыдущем пункте мы рассказали, как определяется выгодность контракта с точки зрения покупателя. Теперь рассмотрим способы измерения доходности финансово-кредитной операции для другого участника контракта — кредитора.

Доход от выдачи кредита кредитор получает в виде nроцентов от выданной ссуды, комиссионных, дисконта при учёте векселей и т. п. Доходность операции обычно измеряется годовой ставкой сложных (реже — простых) процентов, когда все вложения и доходы рассматриваются как эквивалентная им ссудная операция. (Иногда применяются и другие показатели доходности.) Эту ставку, как мы видели в п. 3.6, называют эффективной процентной ставкой. Будем обозначать её iэ.

Рассмотрим, как определяется доходность некоторых финансовых операций.

1. Ссуда выдана под простые проценты по ставке iп или под сложные проценты по ставке *jm,* или осуществляется учёт финансовых документов (векселей) по простой *da*или по i ложной *dc,* или по учётной ставке fm. Во всех этих случаях доходность операции определяется эквивалентной ставкой rc сложных процентов по формулам (3.10), (3.21), (3.25), (3.27), (3.29), выведенным в п. 3.5.

2. Ссуда в размере P выдана на *п* лет под простые проценты по годовой ставке iп% с удержанием комиссионных в размере *G%* от суммы кредита, т. е. (P — PG)(1 + iэ)n, должна быть равна возвращаемой заёмщиком сумме P(1 + *niп).* То . доходность операции iэ определяется из уравнения

(P-PG)(1+iэ)п = P(1+niп).

Сократив на Р и разделив обе части уравнения на 1 — *G,*

Получим $$(1+i_э)^n = \frac{1+ni_н}{1-G},$$

окудада находим іэ:

$$i_э = \sqrt[n]{\frac{1+ni_н}{1-П}} - 1 \quad (7.3)$$

Пример 4. *Сравнить следуюпще два контракта.*

<u>*1-й контракт:*</u> *товар стоит* 100 000 *руб.; делаются два аван-чтых платежа: первый, равный* 20000руб.,— в момент заключения контракта; второй, равный 10000руб., — через *год после заключения контракта. Поставка товара производится после второго авансового платежа. Кредит выдаётся на* 3 года, *считая от момента поставки товара, под* 8% *годовых и погашается разовым платежом в конце срока.*

<u>*2-й контракт:*</u> *товар стоит* 110000 *руб.; делаются три аван-*| *оных платежа по* 10000руб.: *первый* — в момент *заключения* контракта*, второй — через год после заключения контракта,* третий — *ещё через год; поставка производится в момент заключения контракта. Кредит выдаётся* на 10 лет, *считая от* момента поставки товара, под 3% *годовых и погашается* равными *срочными ежегодными уплатами.*

Сравнение контрактов выполнить при ставке сравнения i= 10%.

Решение. Найдём современную ценность каждого из контрактов на момент заключения контракта. Современную ценность 1-го контракта вычисляем по формуле (6.1) при *С* =100000 руб., t1 = 0, *t2* = 1, T = 1, *N* = 3, *g*= 8%, P = 20000,1 *P2* = 10000:

$$A_1 = 20(1+i)^0 + 10(1+i)^{-1} + 70(1+0.08)^3(1+i)^{-(1+3)} =$$
$$= 20 + 10\times1.1^{-1} + 70\times1.08^3\times1.1^{-4} = 89\,319 \text{ руб.}$$

Современную ценность 2-го контракта вычисляем по формуле (6.2) при *С*=110000

руб., t1 = 0, *t2* = 1, t3=2, P1=P2=P3=10 000 ,
T = 0, *N* = 3, *g*= 3%,

$$A_2 = 10(1+i)^0 + 10(1+i)^{-1} + 10(1+i)^{-2} + 80\frac{a_{10;10\%}}{a_{10;3\%}} = 84\,982 \text{ руб.}$$

Второй контракт дешевле для покупателя, несмотря на то, что товар по этому контракту дороже, чем по первому. Выгода получена за счёт более дешёвого кредита.

Пример 5. *Ссуда выдаётся* на 2 года под 12% простых го-лчных. Определить *доходность этой операции, если а) ко*-миссиоиные не взимаются, *б) удерживаются комиссионные в* размере 0,5% от *суммы ссуды, в) при условии б) срок ссуды 4 года.*

Решение, а) По формуле (3.10) вычисляем:

$$i_э = \sqrt[n]{1+ni_п} - 1 = \sqrt{1+2\times 0.12} - 1 = 0.1136 = 11.36\%$$

Эффективность находим по формуле (7.3):

$$i_э = \sqrt[n]{\frac{1+ni_п}{1-G}} - 1 = \sqrt{\frac{1+2\times 0.12}{1-0.005}} - 1 = 0.1163 = 11.63\%$$

в) Эффективность находим по формуле (7.3):

$$i_э = \sqrt[n]{\frac{1+ni_п}{1-G}} - 1 = \sqrt[4]{\frac{1+4\times 0.12}{1-0.05}} - 1 = 0.1044 = 10.44\%$$

Рассмотренный пример показывает, что взимание комиссионных увеличивает доходность сделки для кредитора, а уве-! личение срока ссуды уменьшает доходность сделки.

3. Ссуда в размере *Р* руб. выдана под ставку процентов *jm*сроком на *п* лет с удержанием комиссионных в размере *G%* суммы кредита, т. е. заёмщик получает на руки *(Р — PG)* руб и должен вернуть через *п* лет, согласно формуле (3.2) суму, равную *P(1 + jm/m)mn.* Кредитор вычисляет доходное операции, т. е.

эффективную ставку сложных процентов iэ% *исходя* из условия: наращенная при этой ставке процент на реально выданную *ссуду* сумма *(Р — PG)(1 +* iэ)n должна быть равна возвращаемой заёмщиком через n лет сумме *Р(1 +jm/тп)тп.* То есть доходность операции iэ определяется из уравнения:

$$(P-PG)(1+i_э)^n = P\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mn}$$

Сократив на *Р* и разделив обе части уравнения на 1 — *G,* получим

$$(1+i_э)^n = \frac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{mn}}{1-G},$$

откуда находим iэ

$$i_э = \frac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{m}}{1-G} - 1$$

Пример 6. Ссуда *выдаётся на* 5 лет *под проценты по ставке j4 =* 8%. *Определить доходность этой операции, если: а)комиссионные не взимаются, б) удерживаются комиссионным в размере* 0.6% от *суммы ссуды, в) при условии б) срок ссудъа* 10 лет.

Решение, а) Эффективность находим по формуле (3.21):

$$i_э = \left(1+\frac{j_m}{m}\right)^m - 1 = \left(1+\frac{0.08}{4}\right)^4 - 1 = 0.08243216 = 8.24\%$$

б) Эффективность вычисляем по формуле (7.4):

$$i_э = \frac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^m}{\sqrt[n]{1-G}} - 1 = \frac{(1+0.02)^4}{\sqrt[5]{1-0.006}} - 1 = 0.083735776 = 8.37\%$$

в) Эффективность вычисляем по формуле

(7.4):

$$i_э = \frac{\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^m}{\sqrt[n]{1-G}} - 1 = \frac{(1+0.02)^4}{\sqrt[10]{1-0.006}} - 1 = 0.08383772 = 8.31\%$$

Как и в предыдущем примере, замечаем, что взимание комиссионных увеличивает эффективность сделки для кредитора, а увеличение срока ссуды уменьшает её эффективность.
4. Банк учитывает вексель за п лет до срока его оплаты ио простой учётной ставке *dп,* удерживая при этом *G%* комиссионных от выплачиваемой за вексель суммы *Р.* То есть фактически банк выплачивает сумму, равную *(Р—PG)* руб., и получает по векселю через п лет, согласно формуле (1.4), сумму S = Р/(1 — *ndП)* руб. Эта сумма должна быть равна сумме (Р — PG)(1 + iэ)п, которая является суммой, наращенной на сальную плату за вексель, если на эту сумму начисляется на iэ% годовых. То есть эффективность iэ сделки находим, решая уравнение:
откуда получаем:

$$(P-PG)(1+i_э)^n = \frac{P}{1-nd_П},$$

откуда получаем:

$$i_э = \frac{1}{\sqrt{(1-nd_П)(1-G)}} - 1. \qquad (7.5)$$

Пример 7. Банк *учитывает вексель* за 3 месяца *до срока его оплаты по простой учётной ставке dп* = 8%. Определите *доходность этой операции для банка, если а) комиссионные не взимаются, б) удерживаются комиссионные в размере* 0.6% *от суммы, выплачиваемой* за *вексель, в) удерживаются комисонные в размере* 0.6% от *суммы, выплачиваемой* за *вексель, период времени до оплаты векселя —* 6 месяцев.

Решение, а) Эффективную ставку вычисляем по форм-ле (3.25):

$$i_э = \frac{1}{\sqrt[n]{1-nd_П}} - 1 = \frac{1}{\sqrt[0.25]{1-0.25\times 0.08}} - 1 = 0.0842 = 8.42\%$$

Найдём сначала сумму *Q,* которую банк выплачивает, учитывая данный портфель, состоящий из *пр* векселей:
за вексель, погашаемый первым (через 1/р часть года), банк выплачивает, согласно формуле (1.4),

$$Q_1 = V\left(1 - \frac{1}{p} d_П\right)$$ руб.;

за вексель, погашаемый вторым (через 2/р часть года), банк пыплачивает, согласно формуле (1.4),

$$Q_2 = V\left(1 - \frac{2}{p} d_П\right)$$ руб.

За векселей, погашаемый последним (через np/p=n лет), банк выплачивает, согласно формуле (1.4),

$$Q_{np} = V\left(1 - \frac{np}{p} d_П\right)$$ руб.

За весь портфель векселей банк выплатит

$$Q = \sum_{i=1}^{np} Q_i = V\sum_{i=1}^{np}\left(1 - \frac{i\times d_П}{p}\right) = V\left(np - \frac{d_П}{p}\sum_{i=1}^{np} i\right)$$

б) Эффективную ставку вычисляем по формуле (7.5): 1

$$i_э = \frac{1}{\sqrt[n]{(1-nd_П)(1-G)}} - 1 = \frac{1}{\sqrt[0.25]{(1-0.25\times 0.08)(1-0.006)}} - 1 =$$

$$0.1106 = 11.06\%$$

в) Эффективную ставку вычисляем по формуле (7.5):

$$i_э = \frac{1}{\sqrt[0,5]{(1-0,5\times 0,08)(1-0,006)}} - 1 = 0,0982 = 9,82\%$$

Мы видим, что взимание комиссионных повышает доходность учёта для банка, а увеличение срока от момента учёте до момента оплаты векселя уменьшает доходность учёта.

5. Продавец продал товар, который стоит *С* руб., получив в уплату несколько векселей (портфель векселей), каждый из которых выдан на сумму *V*руб. и сроки оплаты который наступают через равные промежутки времени *р* раз в год *Л* течение п лет. Продавец учитывает в банке все эти векселя одновременно сразу после их получения по простой учётное ставке *d„*. Покажем, как рассчитать доходность этой операции для банка в виде годовой ставки сложных процентов *i9,* а вексель, погашаемый последним (через *пр/р*= n лет), банк выплачивает, согласно формуле (2.4),

$$Q_{np} = V\left(1 - \frac{np}{p} d_{\text{п}}\right) \text{ руб.}$$

За весь портфель векселей банк выплатит

$$Q = \sum_{i=1}^{np} Q_i = V \sum_{i=1}^{np}\left(1 - \frac{i \times d_{\text{П}}}{p}\right) = V\left(np - \frac{d_{\text{П}}}{p}\sum_{i=1}^{np} i\right)$$

По с первым членом а1 = 1, разностью *d*= 1 и числом членов *к* = *пр* получаем

$$S = \frac{2a_1 + d(k-1)}{2}k = \sum_{i=1}^{np} i = \frac{2+1(np-1)}{2}np = \frac{1+np}{2}np .$$

Тогда

$$Q = V\left(np - \frac{d_{\text{п}}}{p}\frac{1+np}{2}np\right),$$

или

$$Q = Vnp\left(1 - \frac{d_{\text{п}}}{2}\frac{1+np}{2}\right).$$

Погашая эти векселя, банк получает р-срочную ренту, состоящую из р платежей ежегодно в течение п лет по *V*руб.

каждый, т. е. ежегодно банк получает сумму, равную *Vр*ру6J Современная ценность *А* этой ренты, согласно формуле (6.3)J равна

$$A = Vpa^{(p)}_{n;i_э} .$$

Эффективную ставку сложных процентов iэестественно искать из условия равенства современной ценности суммы, полученной банком, современной ценности суммы *Q,*

,выплаченной банком в настоящий момент за данный портфель векселей. То есть эффективную ставку iэ следует искать из у нения

$$Q = Vpa^{(p)}_{n;i_э}.$$

откуда

$$a^{(p)}_{n;i_э} = \frac{Q}{Vp}$$

Решение этого уравнения можно найти с помощью компьютера. Приближенно рассмотрим пример.

Пример 8. Банк учитывает портфель, *состоящий* из 12 век*селей по* 100 тыс. руб. каждый, погашаемых *ежеквартально. Простая учётная ставка банка равна* 6%. *Определить доходА ность этой операции для банка.*

Решение. По формуле (6.6) найдём сумму, которую банк заплатил за этот портфель векселей. По условию задачи *p* =4, *п* = 3, *V*= 100 тыс. руб., *dn*= 6%. Подставляем эти данные в формулу (6.6):

$$Q = 100\times3\times4\left(1-\frac{1+3\times4}{2\times4}0.06\right) = 1083$$ тыс. руб.

Ищем значение iэ, решая уравнение (6.7),

$$a^{(4)}_{3;i_э} = \frac{1083}{100\times4}; a^{(4)}_{3;i_э} = 2.7075$$

Отсюда iэ = 6.62%.

6. Рассмотрим случай, отличающийся от случая 5 лишь тем, что векселя, составляющие портфель, выданы не на одинаковые суммы, а на суммы, возрастающие с увеличением промежутка времени от момента учёта до момента оплаты иекселя по правилу простых процентов. Точнее, если *t*— номер векселя в порядке его оплаты *(t*= 1,..., *пр),* то на *t-ом* пикселе указана сумма *V(l + tq),* где *q*— ставка простых процентов, а сумма *V*рассчитывается

по формуле *V= C/(пр).* Оплата покупки таким портфелем векселей распространена во «пешней торговле; она называется „а форфе" (от фр. *aforfait*поставка, подряд). Найдём доходность учёта такого портфеля векселей для банка.

Сначала рассчитаем сумму, которую должен выплатить банк при учёте этого портфеля по простой учётной ставке d%:

первый вексель выдан на сумму *V(l + q)* руб., за него банк платит при учёте, согласно формуле (1.4), сумму, равную *V(1 + q)(l - d)* руб.;
второй вексель выдан на сумму V(l + *2g)* руб., за него банк платит при учёте сумму V(l – 2q)(1 — 2d) руб.;
последний, nр-й вексель выдан на сумму *V(1 + npq)* руб., за него банк платит при учёте сумму *V(l + npq)(l — npd)* руб.

Вся сумма, которую банк должен заплатить при учёте портфеля, равна
Q = V[(l+q)(1 -d) + (l + 2q)(l *-2d)* +
+... + *(1 + npq){l - npd)] = = V(1 + q - d - dq* + 1 + 2q - *2d* - *4dq* +
+... + 1 + *npq - npd - (np)2dq) =* V[(l + ... + 1) +q(1 + *2* + ... + *np)-*
np
-d(l + 2 + ... + *np) - qd{1* + 4 + ... + *(np)2].*

Применяем следующие известные из арифметики формулы:
l+2 + ... + k= 1+k/2*k;
1+4+…+k2=k(k+1)(2k+1)/6
Выражение Q принимает следующий вид:

$$Q = V\left(np + q\frac{1+np}{2}np - d\frac{1+np}{2}np - qd\frac{np(np+1)(2np+1)}{6}\right) \quad (7.8)$$
;

$$Q = Vnp\left(1+\frac{q-d}{2}(np+1)-\frac{qd}{6}(np+1)(2np+1)\right).$$

Это уравнение также можно решить с помощью калькулятора или компьютера. Рассмотрим пример.

Пример 9. Банк учёл *по простой* учётной ставке 8% годД вых *портфель, состоящий* из 6 векселей, каждый на 50 тыс. рущ плюс 4% *простых годовых. Векселя* погашаются по полугоди* | *ям. Найти доходность этой операции.*

Решение. По условию *V*= 50 тыс. руб., р = 2, п = 3, *q*= 4%/2 = 2% = 0.02, d = 8%/2 = 4% = 0.04. Найдём по формуле (6.8) сумму, выплаченную банком при учёте портфеля:

$$Q = 50\times3\times2\left(\begin{aligned}&1+\frac{0.02-0.04}{2}(3\times2+1)-\\&-\frac{0.02\times0.04}{6}(3\times2+1)(2\times3\times2+1)\end{aligned}\right)=275.36$$

Найдём современную ценность суммы, которую получит банк, предъявив векселя портфеля к оплате; ставку сравнение обозначим через i: современная ценность первого векселя: V(l + q){1+ i)-1/p; современная ценность второго векселя: V(\ + 2q)(1 +i)-2/p;
современная ценность np-го векселя: V(l + npq)(l + i)-np'p.
Эффективную ставку i3 естественно искать из условия: общая современная ценность суммы, полученной банком при предъявлении векселей портфеля к оплате, равна сумме, вы-
] плаченной банком при учёте портфеля, т. е. *i9*является корнем

$$\sum_{t=1}^{np} V(1+tq)(1+i)^{-\frac{t}{p}} = Q$$

Вычислим суммарную современную ценность суммы, которую банк получит при предъявлении векселей портфеля к оплате:

$$\sum_{t=1}^{np} V(1+tq)(1+i)^{-\frac{t}{p}} = \sum_{t=1}^{6} 50(1+0.02t)(1+i)^{-\frac{t}{2}} =$$

$$= 50(1+0.02)(1+i)^{-\frac{1}{2}} + 50(1+0.02\times 2)(1+i)^{-1} +$$

$$+ 50(1+0.02\times 3)(1+i)^{-\frac{3}{2}} + 50(1+0.02\times 4)(1+i)^{-2} +$$

$$+ 50(1+0.02\times 5)(1+i)^{-\frac{5}{2}} + 50(1+0.02\times 6)(1+i)^{-3}$$

Уравнение (6.9) будет иметь следующий вид:

$$51(1+i)^{-\frac{1}{2}} + 52(1+i)^{-1} + 53(1+i)^{-\frac{3}{2}} + 54(1+i)^{-2} +$$

$$+ 55(1+i)^{-\frac{5}{2}} + 56(1+i)^{-3} = 275.36$$

Введём обозначение (1 + i)-1 = x; последнее уравнение чапишется так:

$$51x^{\frac{1}{2}} + 52x + 53x^{\frac{3}{2}} + 54x^2 + 55x^{\frac{5}{2}} + 56x^3 = 275.36.$$

Отсюда x = 0.916. Находим iэ, из условия: (1 + i)-1 = 0.916;

1 + *i*=1.0917; i = 0.0917, т.е. iэ = 0.0917 = 9.17%. Такова доходность учёта банком данного портфеля векселей.

7.4. Доходность потребительского кредита для продавца

В п. 2.4 описаны принятые в практике торговли условия предоставления потребительского кредита. Рассмотрим теперь вопрос о доходности потребительского кредита для продавца, т. е. для кредитора. Если цена проданного товара равна *Q*и покупателю предоставляется на эту сумму кредит под iП% годовых (простых) на n лет, то покупатель должен выплатить всего Q{1 + nin)руб. Ежегодно он должен выплачивать сумму Q(l + *nin)/n*руб. Так как выплаты производятся *p* раз в году равными суммами, то эти суммы являются членами *p* -срочной ренты и современная ценность этой ренты при! условии, что она выплачивается под iэ процентов, согласно формуле (6.3), равна

$$\frac{Q(1+ni_{\Pi})}{n} a^{(p)}_{n,i_э}$$

Естественно искать доходность кредита для продавца, т. е. эффективную ставку сложных процентов шэ из условия равенства современной ценности ренты, которую получит продавец, исходной цене товара *Q,* т. е. іэ является решением уравнения

$$\frac{Q\left(1+n\bar{i}_{\text{П}}\right)}{n}a_{n,i_э}^{(p)}=Q$$

Откуда

$$\boxed{a_{n,i_э}^{(p)}=\frac{n}{1+n\bar{i}_{\text{П}}}.} \qquad (7.10)$$

Решение этого уравнения также можно найти с помощью вычислительной техники.
В уравнение (6.10) не входит цена товара *Q,* т.е. доходя ность потребительского кредита *іэ*не зависит от цены товара, а зависит от ставки начисляемых процентов іп срока кредита n лет и частоты *р* выплаты долга в течение года. Анализируя это уравнение, можно заключить, что с ростом *іП*доходности кредита возрастает, с ростом *п* доходность кредита уменьшалется, и с ростом *р* она возрастает.

Действительно, с ростом *іП*дробь $\frac{n}{1+n\bar{i}_{\text{П}}}$ уменьшается, а функция $a_{n,i}^{(p)}$ убывает по аргументу і. Следовательно, при уменьшении значения этой функции величина іэ возрастает.

С ростом *п* та же дробь увеличивается, так как $\frac{n}{1+n\bar{i}_{\text{П}}}=\frac{1}{\frac{1}{n}+\bar{i}_{\text{П}}}$ и при увеличении *п* дробь $\frac{1}{n}$ и весь знаменатель уменьшается.

С ростом *р* функция $a_{n,i}^{(p)}$ возрастает, а так как при фиксированных тайных значениях *іп*и *п* значение этой функции, согласно уравнению (7.10), должно быть постоянным, то при увеличении *р* должно увеличиваться и іэ, так как с ростом іэ эта функция убывает.
Рассмотрим пример определения доходности потребительского кредита.

Пример 10. *Продавец реализовал некоторый товар* за 80 тыс. *руб. и предоставил покупателю кредит на эту сумму на срок* кг. *Кредит должен быть погашен равными ежемесячными* платежами. За *него взимаются* 6% *годовых (простых). Опре-*шн'лить *доходность этой операции для продавца. Решение. Как* было замечено, доходность

потребительского кредита не зависит от суммы кредита, т. е. условие, что сумма кредита — 80 тыс. руб., при решении задачи не используется. Чтобы определить доходность описанной операции для продавца (кредитора), надо решить относительно iэ уравнение **(6.10):**

$$a_{5;i_э}^{(12)} = \frac{5}{1+5\times0.06} = 3.846153846$$

отсюда по Таблице 3 доходность кредита iэ = 11.41% (округ-
ляем до сотых долей процента).

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

Ответы и указания к упражнениям Раздел 1

1. а) 3052.5 руб.; б) 3210 руб.; в) 3717.5 руб.
2. а) 49342.11 руб.; б) 48076.92 руб.; в) 45045.05 руб.
3. 8%.
4. Через 1.5 года.
5. 1766.67 руб.
6. 63000 руб.
7. 216000 руб.
8. 68400 руб.
9. 118421.05 руб.
10. 111600 руб. Сравнивая этот результат с результатом упражнения 9, замечаем, что брать ссуду под простые проценты выгоднее, чем под простой дисконт.
11. 14644.17 руб.; 13594.17 руб.
12. 2105.56 руб.
13. 9%
14.

Год службы	Стоимость на конец года (руб.)
0	12000000
1	10500000
2	9000000

3	7500000
4	6000000
5	4500000
6	3000000
7	1500000
8	0

15.

Год службы	Стоимость на конец года (руб.)
0	12000000
1	10725000
2	9450000
3	8175000
4	6900000
5	5625000
6	4350000
7	3075000
8	1800000

16.

Год службы	Стоимость на конец года (руб.)
0	12 000000
1	9333333
2	7000000
3	5000000
4	3333333
5	2000000
6	1000000
7	333333
8	0

17.

Год службы	Стоимость на конец года (руб.)
0	12000000
1	9733333
2	7750000
3	6050000
4	4633333
5	3500000
6	2650000

7	2083333
8	1800000

18. Современная ценность первого контракта равна 16 893.28 руб., а второго — 17028.98 руб. Следовательно, второй контракт выгоднее для г-на Серова.

19. 9837.16 руб.

20. 147 050 руб. Указание: в качестве современного момента следует принять момент четвёртого платежа, т. е. конец первого года.

21. 82170 руб. Заметим, что по первому контракту должник выплатит за 3 года 20 000x12 = 240 000 руб., а по новому контракту — 82170×3 = 246510 руб. Увеличение суммы объясняется увеличением сроков выплаты долга.

Раздел 2

1. а) 84800; б) 83168.83 руб.; в) 100998.16 руб.; г) 116836.39 руб.
2. а) 84896.64 руб.; б) 83 232 руб.; в) 101459.34 руб.; г) 117704.57руб.
3. 14489.31руб.
4. 5.77%
5. Около 145 лет.
6. а) 105000 руб.; б) 105105.33 руб.; в) 105116.19 руб.; г) 105126.74 руб.;д) 105127.11руб.
7. 149182.47 руб.
8. 24829.27 руб.
9. 9. 65444.17 руб.
10. а) 14635.60 руб.; б) 13611.11 руб.; сравнивая этот результат с результатом решения примера 11 из раздела 1, замечаем, что если промежуток времени от момента учёта векселя до момента его оплаты меньше года, то клиенту, представляющему вексель для учёта, выгоднее простая учётная ставка, а если этот промежуток больше года — сложная учётная ставка.
11. 9.67% (простых годовых).
12. 5.45%.
13. а) 10.25%; б) 10.43%; в) 10.47%; г) 10.52%.
14. а) 7.85%; б) 7.75%; в) 7.72%; г) 7.70%.
15. 5.96%.
16. 5.85%.
17. 7.79%.
18. а) 6.10%; б) 6.14%; в) 6.17%.
19. а) 6.09%; б) 6.14%; в) 6.17%; г) 6.18%.
20. 8.70%.
21. 8.42%.

22. Фиксированный процент снижения стоимости равен 21.11%. Таблица снижения стоимости автомобиля такова:

Год службы	Амортизационные отчисления за данный год (руб.)	Стоимость на конец года (руб.)
0	0	12000000
1	12 000 000 × 0.2111 = 2 533 200	9466800
2	9466800×0.2111 = 1998442	7468358
3	7468358×0.2111 = 1576570	5891788
4	5891788×0.2111 = 1243756	4648032
5	4648032×0.2111= 981200	3666832
6	3666832×0.2111= 774068	2892 764
7	2 892 764 × 0.2111 = 610 663	2 282101
8	2282101×0.2111= 481752	1800349

23. За 8 лет стоимость снижается с 12 000 000 руб. до 1800 000 руб , т. е. на 10 200 000 руб. При равномерном снижении стоимости она уменьшается ежегодно на 10 200 000/8 = 1275 000 руб., т. е. на 12.5%. Удвоенный процент равен 25%. Таблица снижения стоимости такова:

Год службы	Амортизационные отчисления за данный год (руб.)	Стоимость на конец года (руб.)
0	0	12000000
1	12000000×0.25 = 3000000	9000000
2	9000000×0.25 = 2250000	6750000
3	6750000×0.25 = 1687500	5062500
4	5062500×0.25=1265625	3796875
5	3796875×0.25= 949219	2847656
6	2 847656×0.25= 711914	2135742

Далее стоимость снижаем равномерно: за два года стоимость надо уменьшить на 2135 742 -1800000 = 335 742 руб., т.е. ежегодно на 335 742/2 = 167871 руб.

7 8	167871	167871	1967871 1800000

Раздел 3

1. а) 7638.65 руб.; б) 12357.06 руб.; в) 10000 руб.
2. а) 34347.50 руб.;б) 22637.74 руб.
3. —
4. —
5. 13372.53 руб.
6. 13467.26 руб.
7. 2143.26 руб.
8. 6783.66 руб.
9. 6751.71руб.
10. 6748.71руб.
11. 5356108.89 руб.
12. Решаем упражнение, приравнивая современные ценности вкладов и изъятий в момент первого вклада: *x* = 2× (1.025)-15×4 + 3× (1.025)-3x4 = = 39552.61руб.
13. Приравнивая суммы вкладов и изъятий, приведённые к моменту последнего изъятия денег, получаем уравнение: *x* × 1.0253x4 = 2 × 1.02515×4 + 3, откуда *x* = 39 552.61 руб. Сравнивая результат решения этого упражнения и упражнения 12, видим, что результат не зависит от того, к какому моменту приведены все суммы.
14. 1548549.21руб.
15. 13149485.24 руб.
16. 2853560.72 руб.
17. 2150466.67 руб.
18. 1618224.26 руб.
19. 1497638.18 руб.
20. 1663222.12 руб.
21. а) 18650.10 руб.; б) 24664.75 руб.; в) 26450 руб.
22. 11721021.39 руб.
23. 0.722311182 года, или приблизительно 260 дней.
24. 5841477.53 руб.
25. 46 562.98 руб.
26. 3275463.17 руб.
27. 3372295.73 руб.

Раздел 4

1. а) 78812.50 руб.;б) 314447.31 руб.

2. а) 321509.04 руб.; значение S12;1.25% надо вычислить по формуле (4.1); б) 1287238.93 руб.
3. 5184.30 руб.
4. 477.53 руб.
5. 1309003.33 руб.
6. 458364 руб.
7. 82 332270.03 руб.
8. 15641919.73 руб.
9. 9. 1760957.70 руб.
   10. 136 289.48 руб.
10. 1814674.77 руб.
11. 26243.39 руб.
12. 429824.38 руб.
13. 91643.38 руб.
14. 493545.29 руб.
15. 508703.14 руб.
16. 5325 957.95 руб.
17. 1971476.32 руб.
18. 1568987.40 руб.
19. 1602282.27 руб.; значение s5;8% в таблицах, приведённых в Приложении Б, отсутствует, поэтому его надо вычислить по формуле (4.1). Тоже относится к значениям s4;2.5% и s20;2.5% которые необходимы для решения следующего упражнения.
20. 1562795.32 руб.
21. 1539952.30 руб.; взносы в страховой фонд образуют р-срочную ренту (р = 4) с начислением процентов в конце года. Ежегодные взносы в страховой фонд надо находить по формуле (4.5); значение *s 5;10%{4)* следует вычислить по формуле (4.4).
22.
23. Взносы в страховой фонд образуют р-срочную ренту (р = 4) с начислением процентов 6 раз в год по ставке j6 = 10%; Ежегодный взнос в страховой фонд следует искать по формуле (4.9), из которой надо найти *R* при m = 6, n = 5, *jm/m* = 10/6 = 1.(6)%. Значения s1.5;1.(6)% и s30;1.(6)%надо вычислить по формуле (4.1). Ежегодная срочная уплата равна 1532124.23 руб.
24. Взносы в страховой фонд образуют годовую ренту с начислением процентов 4 раза в год. Член этой ренты *R* следует найти из формулы (4.8) при *т* = 4, *п* = 3, *jm/m* = 0.08/4 = 0.02. Значения 84,2% и s4;2%;2на .До вычислить по формуле (4.1). Ежегодная срочная уплата равна 854 610.86 руб.
25. Ежегодные взносы в страховой фонд образуют годовую ренту с непрерывным начислением процентов. Надо найти член этой ренты *R* по формуле (4.12). Ежегодная срочная уплата равна 854100.12 руб.
26. 35247953.07 руб.
27. Ежегодные взносы в страховой фонд находим по формуле (4.3): *R* = S/s20;8%;8% =5000000/45.76196429 = 1092610.44. Ежегодный чистый доход равен 5000000 - 1092610.44 =3907389.56. Этот доход составляет 7.8% от вложенной суммы.

28. Возьмём R = 1, n = 10, t = jm = δ= 5%. Вычисляем значения: S(1; 1) по формуле (4.2): 5(1,1) = 12.57789254;
S(1; т) по формуле (4.8) при m = 4: S(1, m) = 12.63353042;
S(1; ∞) по формуле (4.12): 5(1, ∞) = 12.65276768;
S(p; 1)|p>1 по формуле (4.5) при p = 6: S(6; 1) = 12.83744611;
S(p;m)|p>m>1 по формуле (4.9) при p = 6, *т* = 4: 5(6; 4) = 12.89911432;
S(p;m)|p=m1>1 по формуле (4.10) при p = m = 6: 5(6;6) = 12.90617856;
S(p;m)|m> *>1* по формуле (4.9) при p = 6, m = 8: 5(6; 8) = 12.90972754;
S(p; ∞) по формуле (4.13) при p = 6: 5(6,8) = 12.920441.
Сравнивая полученные значения, видим, что каждое следующее значение больше предыдущего. Таким образом, неравенства, которые надо было проверить, выполняются.

Раздел 5

1. 1. 386086.75 руб.
2. 383917.52 руб. Значение a12о;5/12% надо вычислить по формуле (6.1) и s12;5/12%;— по формуле (5.1).
3. 383714.58 руб.
4. 390853.97 руб. Значение a10;/8/12% надо вычислить по формуле (6.4), используя Таблицы 3 и 4.
5. 389346.91 руб. Надо применить формулу (6.7); значение a30;5/3% следует вычислить по формуле (6.1), значение s*3/2;* 5/з%: — по формуле (5.1).
6. 388571.47 руб.
7. 436235.50 руб. Надо применить формулу (6.5); значение a26;10% находим по Таблице 3, значение s2;10% — по Таблице 2.
8. 427321.09 руб.
9. 418118.74 руб.
10. 1000000 руб.
11. 1018559.42 руб.
12. 951625.69 руб.
13. 979368.41руб.
14. 997923.91 руб.
15. 1000000 руб.
16. 931027.48 руб.
17. 975208.33 руб.
18. 993763.02 руб.
19. 926874.30 руб.
20. Срочная уплата
a = 12 000 000/a4;5% = 3384142. План погашения долга таков:

Номер года t	Остаток долга на начало t-го года (руб.) ***st =***	Срочная уплата a	Сумма выплаченных в t-ом году процентов	Сумма погашения долга в t-ом году *dt*= *a*--

	$= S_{t-1} — d_{t-1}$		(руб.) $S_t \times 0.05$	$S_T \times 0.05$
1 2 3	12000000	3384142	600000	2784142
4	9215858	3384142	460793	2923349
	6292509	3384142	314625	3069517
	3222992	3384142	161150	3222992
			Итого:	12000000

21. План погашения долга приведён в следующей таблице:

Номер года t	Остаток долга на начало t-го года (руб.) ***st =*** = St-1 - dt-1	Срочная уплата *a*	Сумма выплаченных в t-ом году процентов (руб.) St×0.05	Сумма погашения долга в t-ом году *dt = a- -St×0.05*
1 2 3	12000000	3500000	600000	2900000
4	9100000	3500000	455000	3045000
	6055000	3500000	302 750	3197250 2
	2857750	3000637	142887	857750
			Итого:	12000000

На начало четвёртого года остаток долга St составил сумму 2 857 750 руб. Это меньше, чем принятая срочная уплата. На эту сумму в четвёртом году будут начислены проценты в сумме
Stq = 2857 750×0.05 = 142887 руб. и срочная уплата в четвёртом году будет равна: 2 857 750 + 142 887 = 3 000 637 руб.

22. По условию задачи n = 2, *q = 5% ×2* = 10% = 0.1, т.е. за период между уплатами (2 года) на долг начисляется 10%.

Срочная уплата равна:

$$a = \frac{S}{a_{n;q}} = \frac{12000000}{a_{2;10\%}} = \frac{12\,000\,000}{1.735537190} = 6914285.72$$

$$a = \frac{S}{a_{n;q}} = \frac{12000000}{a_{2;10\%}} = \frac{12\,000\,000}{1.735537190} = 6914285.72$$

План погашения долга приведён в следующей таблице:

Номер года *t*	Остаток долга на начало *t-го* года	Срочная уплата *a*	Сумма выплаченных в t-ом	Сумма погашения долга в t-ом

	(руб.) $S_t = = S_{t-1} - d_{t-1}$		году процентов (руб.) St x 0.1	году $d_t = a—$ -St x 0.1
2	12000000	6914286	1200000	5714286
4	6285714	6914286	628571	6285714
			Итого:	12000000

23. План погашения долга приведён в таблице ниже.

24.План погашения долга приведён в таблице ниже. Остаток долга на начало двенадцатого месяца — 162177 руб. На эту сумму в двенадцатом месяце начисляются проценты, сумма которых равна: 162 177× 0.008(3) = 1351 руб. Срочная уплата за двенадцатый месяц равна 162177 + 1351 = 163528
руб.

25. 3.97%.

26. 3.64%

Таблица 1. План погашения долга к утш. 23

Номер месяца t	Остаток долга на начало t-ro месяца (руб.) st = = S t--1— dt-1	Срочная уплата a	Сумма выплачен-ных В t-OM месяце процентов (руб.) St × 0.008 (3)	Сумма погашения долга В t-OM месяце $d_t = a$ -St ×0.008(3)
1	8000000	703327	•46667	636660
2	7363340	703327	61361	641966
3	6721374	703327	56011	647316
4	6074058	703327	50617	652 710
5	5421348	703327	45178	658149
6	4763199	703327	39693	663634
7	4099565	703327	34163	669164
8	3430401	703327	28587	674 740
9	2 775661	703327	22 963	680364
10	2075297	703327	17294	686033
11	1389264	703327	11577	691 750
12	697514	703327	5813	697 514
Итого:				

1. 8000000

   Таблица 2. План погашения долга к упр. 24

Номер месяца *t*	Остаток долга на начало *t-го* месяца (руб.) . $S_t = = S_{t-1} – d_{t-1}i$	Срочная уплата *a*	Сумма выплаченных в *t-ом* месяце процентов (руб.) $S_t \times 0.008(3)$	Сумма погашения долга в ***t-ом*** месяце $d_t = a-$ $-S_t \times 0.008(3)$
1	8000000	750000	66667	683333
2	7316667	750000	60972	689028
3	6627639	750000	55230	694 770
4	5932869	750000	49441	700559
5	5232310	750000	43603	706397
6	4525912	750000	37716	712284
7	3813628	750000	31780	718220
8	3095408	750000	25795	724205
9	2371203	750000	19760	730240
10	1640963	750000	13675	736325
11	904638	750000	7539	742461
12	162177	163528	1351	162177
			Итого:	8000000

Раздел 6

1. 293122.60 руб.
2. 37870080.03 руб.
3. Современная ценность первого контракта $A1$ = 12120253.06 руб., а второго — $A2$ = 13797269.88 руб. Следовательно, первый контракт выгоднее для покупателя, чем второй.
4. Вычислите современную ценность $A2$ контракта со вторым заводом при N = 6, N = 7, N = 8. При N = 6 имеем следующее значение $A2$ = 13110170.89 руб.; оно больше, чем современная ценность A1контракта с первым заводом. При N=7 $A2$ = 12466796.35 руб.; оно тоже больше, чем *A1.* При N = 8 $A2$ = 11864363.88 руб.; оно меньше, чем *A1.* Следовательно, при сроке кредита, предоставляемого вторым заводом, равном 8 годам, фермеру становится выгоднее купить трактор у второго завода.
   Задачу можно решить иначе: найти значение *N,* при котором $A2 = A1$ для этого надо решить уравнение:
   $3 + 15 \times 1.03N \times 1.1N = 12.12025306.$
   Решаем это уравнение:
   $15 \times 1.03N \times 0.(90)N = 9.12025306; (0.9(36))N = 0.60801687.$
   Логарифмируем обе части уравнения:

$N \ln 0.9(36) = \ln 0.60801687$; $N = 7.567182083$.
Так как *A2* убывает с ростом N, то наименьшее целое значение *N,* при котором *A2* < *Ai,* есть *N* = 8.

5. При g = 2%, *A2* = 13283209.69 руб.; при g= 1%, *A2* = 12 788918.26 руб.; при g = 0%, *A2* = 12313819.85 руб. То есть современная ценность контракта со вторым заводом с уменьшением значения gубывает, следовательно, выгодность контракта возрастает, но даже при беспроцентном кредите *(g* = 0) современная ценность контракта со вторым заводом остаётся больше, чем нынешняя ценность контракта с первым заводом (*A1* = 12120253.06 руб.).
6. Современная ценность контракта с первой организацией равна 16 821121.76 руб., со второй — 16 730 756.89 руб., т. е. контракт со второй фирмой несколько выгоднее, чем с первой.
7. Первая организация одержит победу в конкурсе, так как современная ценность контракта с ней будет после увеличения срока кредита до 5 лет равна 16569579.62 руб., что меньше, чем современная ценность контракта со второй строительной организацией, которая была вычислена при решении упражнения 6.
8. Да — контракт с первой организацией будет теперь выгоднее для фирмы, так как современная ценность контракта с первой организацией теперь равна 15953353.16 руб., что меньше современной ценности контракта со второй организацией, которая была найдена при решении упражнения 6.
9. Нет — в условиях данного упражнения контракт с первой организацией будет для фирмы менее выгодным, чем контракт со второй организацией. Современная ценность контракта с первой организацией в этом случае 16779799.44 руб., что больше современной ценности контракта со второй организацией, которая была найдена при решении упражнения 6.
10. Современная ценность контракта с первой фирмой составляет 6882913.15 руб., а со второй — 7826196.54 руб., т.е. контракт с первой фирмой выгоднее. При вычислении современной стоимости контракта с первой фирмой надо учитывать, что *aN;i* = a4;5% aN;g = a4:3%, так как период ренты — 0.5 года, т. е. число членов ренты равно 4 и ставку сравнения и годовую ставку процентов, начисляемых на кредит, следует разделить на 2.
11. В случаях а), б), в) контракт со второй фирмой остаётся менее выгодным для заказчика, чем с первой, так как современная ценность контракта со второй фирмой в случае а) равна 7543096.93 руб., в случае б) — 7656113.78 руб., в случае в) она составляет 7087403.52 руб.; эти числа больше современной ценности контракта с первой организацией, которая была найдена при решении предыдущего упражнения: 6882913.15 руб. В случае г) контракт со второй фирмой становится выгодным для заказчика, чем с первой, так как в этом случае современная ценность контракта со второй фирмой равна 6860923.82 руб., т.е. меньше, чем современная ценность контракта с первой фирмой.
12. а) 14.87%; б) 14.92%; в) 12.72%.
13. а) 12.55%; б) 12.83%; в) 12.74%.
14. а) 5.19%; б) 5.83%; в) 5.65%.
15. 394000 руб.

16. 389500 руб.
17. Доходность операции для банка — 4.1216%.
18. Доходность операции для банка — 7.3792%.
19. 506675 руб.
20. 482937.50 руб.
21. 4.1597%.
22. 11.0596%.
23. 14.3629%.
24. При *n* = 5 доходность равна 15.2417%; при *n* = 10 доходность равна 15.1012%; при *n* = 20 доходность равна 14.1197%. Сравнивая эти результаты и результат решения предыдущего упражнения, видим, что с увеличением срока потребительского кредита доходность операции для кредитора сначала растёт, а затем уменьшается.
25. Следует вычислить доходность операции при n = 6, n = 7, n = 8, *n* = 9. Доходность, соответственно, равна 15.3457%, 15.3510%, 15.2983%, 15.2105%. Следовательно, наибольшая доходность операции имеет место при сроке кредита, равном 7 годам.
26. 13.4585%.
27. 14.6456%. Сравнивая этот результат с результатом решения предыдущего упражнения, замечаем, что при увеличении частоты выплат доходность кредита для кредитора повышается.
28. При *n* = 5 доходность равна 13.7190%; при *n* = 10 доходность равна 13.2037%. Сравнивая эти результаты и результат решения упражнения 26, замечаем, так же, как и при решении упражнения 24, что при увеличении срока кредита его доходность для кредитора сначала повышается, а затем снижается.
29. С ростом значения *in* при фиксированном значении п величина дроби $\frac{n}{1+n\bar{i}_n}$ убывает, так как её знаменатель увеличивается. Следовательно, правая часть уравнения $a^{(p)}_{n;\bar{i}} = 1 + \frac{n}{1+n\bar{i}_n}$ с ростом *in*уменьшается. Так как коэффициент приведения $a^{(p)}_{n;\bar{i}_э}$, убывает по аргументу iэ, то с уменьшением левой части уравнения его корень iэ увеличивается. Впрочем, кредитору и без математических выкладок очевидно, что если он увеличит взимаемый процент (при прочих равных условиях), то выгодность сделки для него возрастёт.
30. Взимаемый процент можно уменьшить до 7.8429%. Надо решить относительно *in*уравнение a5;13.4585% = 5/(1+5iп)
31. 7.73%.
32. 7.9125%.
33. 7.9544%. Сравнивая этот результат с результатом решения предыдущего упражнения, видим, что с увеличением частоты выплат по купонам доходность покупки облигации растёт.
34. 5.8237%.
35. 6.0338%. С увеличением дополнительных расходов цена привлечения средств увеличивается.
36. 10.5135%.

Приложение А
Финансовая арифметика в России
Наброски к историческому очерку *А. В. Бухвалов, А.Л.Дмитриев*

В настоящее время, с возрождением в России рыночных отношений, появлением соответствующих рыночных институтов начинают издаваться и учебные пособия по различным отраслям экономики. Финансы фирмы — не исключение. Чаще — это переводные учебники, реже — отечественные. Однако и последние (включая настоящую книгу), как правило основаны на западном опыте преподавания дисциплины. Но давайте зададимся вопросом: а что было известно нашим русским коммерсантам конца XIX - начала XX столетия?

В конце этого Приложения читатель найдёт список некоторых книг, не утративших значения и по сей день.

Перелистаем некоторые из них. Это даст нам возможность судить об уровне финансовой образованности тогдашних финансистов и коммерсантов (не бойтесь этого слова — приказчиков). Речь идёт о массовом уровне грамотности — мы основываемся на популярных учебниках П.М. Гончарова для коммерческих училищ. Отметим, что ещё в 1877 г. преподаватель бухгалтерии и коммерческой арифметики Московской практической академии коммерческих наук А.В.Прокофьев издал учебник *Коммерческая арифметика и торговые операции,* предназначенный для реальных училищ [8]. До конца века книга выдержала шесть переизданий. Автор пишет: Цель предлагаемого руководства < ... > объяснить самую сущность торговых оборотов, указать на их взаимную связь и влияние, дать возможность с изменениями различных цифр соединять представление о причинах, вызывающих изменения, — словом заставить смотреть на цифры не как на простые арифметические знаки.

Мы хотим также дать представление о той терминологии, которая существовала в отечественных изданиях, а затем была практически полностью утрачена вместе с её носителями.

Начнем с того, что приведём краткое оглавление учебника [2] — это сразу введёт нас в курс дела:

Сокращенные и приближенные вычисления. Метрология. Правила цепное и процентов. Средние величины, пропорциональное деление и учение о пробе. Товарные вычисления. Калькуляция. Вексельные вычисления. Процентные бумаги. Контокорренты. Ведение контокоррента при разных осложнённых случаях. Вклады и ссуды. Монетные вычисления. Монетные паритеты. Вексельно-курсовые вычисления. Расплаты при заграничной торговле. Хлебная торговля. Иностранные товарные вычисления. Калькуляция иа заграничные товары. Торговля русскими %%-ными бумагами на иностранных биржах. Торговля драгоценными металлами и иностранной валютой. Арбитражи. Предельный курс. Авария.

Отметим, что даже в курсах для коммерческих училищ активно используются буквенные обозначения, формулы для прогрессий и рент,

чего зачастую боятся авторы американских финансовых учебников для „университетов" (на самом деле речь часто тоже идёт о техникуме). Подробнейшие арифметические выкладки чередуются с необходимыми определениями и информацией о коммерческих операциях.
Приведём цитату из [2] как образец живого русского финансового языка:
как правительства, так и большие акционерные компании, очень часто нуждаются в увеличении своего наличного капитала для всякого рода потребностей. В таких случаях и первые и вторые (но последние только с разрешения правительства) прибегают к публичным займам посредством выпуска облигаций. Облигация есть свидетельство, выдаваемое должниками (правительством или частной акционерной компанией) кредитору, т.е. всякому лицу, которое внесет сумму, обозначенную на облигации. В этом документе, как в обязательстве долговом, прямо указано, сколько %%-в кредитор получает вознаграждения за свой капитал и в один, в два или в четыре срока в год эти интересы будут ему выплачиваться. Уплата интересов производится посредством купонов. Так называются отпечатанные на втором полулисте облигации небольшие прямоугольники, на которых обозначена их цена и срок. Когда наступит этот срок, купон отрезается и при платежах всякого рода может быть употреблен наравне с прочими денежными знаками (золотом, серебром и кредитными билетами)...
Кстати, здесь читатель найдёт историческое объяснение термина купонный *платёж,* который часто использовался в основном тексте книги. Хотя сами отрезные купоны уже реально, как правило, не печатаются, термин сохранился во всех языках.
Продолжим цитату про облигации:
Всякий, имеющий сбережения или вообще свободный капитал, старается поместить его так, чтобы он приносил какую-либо прибыль. Одно из средств < ... > — есть приобретение %%-ых бумаг. < ... > Курс 100, который показывает, что номинальная стоимость равняется биржевой, носит название курса альпари (al pari). Курс выше или ниже номинальной стоимости, например, $101\frac{3}{4}$ или $97\frac{1}{2}$, может быть обозначен прямо указанием %-та, на сколько данный курс выше или ниже курса al pari, причем слово „выше" заменяется ажио (agio), а „ниже" дизажио (disagio). Так, вышеуказанные курсы могут быть прочитаны так: первый — ажио $1\frac{3}{4}$ %, а второй — дизажио *2* $\frac{1}{2}$*%.*

Интерес для современного читателя представляет вариантный подход, когда финансовые вычисления делаются с целью принятия наиболее целесообразных решений. Отдельная глава в [2] посвящена понятию *арбитража* — начисто забытому в нашей практике и словоупотреблении. Речь идёт не об арбитражном суде и арбитражных тяжбах, а об умении думать и анализировать возможности (современный подход см. в переводном издании [2] из списка литературы к Введению). Опять приведём цитату из [2]:

При ведении всякого коммерческого предприятия недостаточно еще уметь производить только соответствующие вычисления. < ... > Купец, банкир, комиссионер, — словом каждый коммерческий деятель, естественно стремится к тому, чтобы получить больший % на свой оборотный капитал. В виду этого он должен не только суметь правильно вычислить всякую покупку, продажу, спекуляцию,— но ещё и определить, при каких обстоятельствах эти последние могут принести ему наибольший интерес. Вычисления, преследующие эту цель, называются арбитражами. < ... >
При покупке купец, естественно определяет, где ему дешевле купить товар, — а при продаже ищет тот рынок, на котором он может выручить за товар наибольшую сумму. На основании сказанного будем различать арбитражи следующих видов: товарный, вексельный, фондовый и спекулятивный.
Арбитражные вычисления сводятся обыкновенно к составлению и решению целого ряда паритетов, благодаря которым потом уже легко решается вопрос о наивыгоднейшем способе осуществления какой угодно торговой сделки.
Среди многочисленных примеров, разобранных в [2], рассмотрим один пример товарного арбитража. Для его понимания мы должны привести ряд объяснений, тоже заимствованных из того же источника:
• Комиссией называется оплата за труды по исполнению поручений.

1. Куртажом называется вознаграждение маклера за услугу поиска продавцу покупателя, и наоборот.
2. Под фрахтом понимается провозная плата владельцу транспортного средства за перевозку грузов.
3. Страхование есть условие, которое заключается со страховым обществом и состоит в том, что в случае несчастья с товаром в пути (аварии) общество уплачивает грузоотправителю оговоренную сумму — страховую премию.
4. oz — унция (золота).

1. sh — шиллинг (запись sh 77-8 означает 77 шиллингов 8 пенсов); d — пенс.
2. %o — промилле (тысячная доля какого-либо числа).
3. Тратта — переводной вексель.

Приведём текст и сокращённое решение задачи на арбитраж из [2]:
Где выгоднее продать турецкие лиры. В Петрограде курс 8.46; в *Лондоне* — sh 77-8, *куртаж* 1%o , *комиссия* 21 %o , *фрахт* 4 %o , страхование 1 %o , средний вес лиры 0.2316 oz. *Курс в Вене* 21.80, куртаж 0.4 %o, *комиссия* 1/5%o , *фрахт* 2%o , страхование 1/4*%o . Вексельные курсы в Петрограде: на Лондон* 94.25, на *Вену* 39.621. Куртаж при продаже тратт 1/10 %.
Определим теперь русские паритеты Лондонского и Венского курса турецких лир. Так как все расходы даны в %o -ях с одной и той же суммы, то мы можем соединить их вместе, чтобы не вводить в цепь отдельных строк, соответствующих каждому расходу, а заменить их одною.

Расходы при продаже в Лондоне следующие:
Куртаж 1%o

Комиссия 2,5%о
Фрахт 4%о
Страхование 1%о
Всего 8,5%о
Составим теперь цепь.
X руб. 1 тур. лир
1 тур. лира 0.2316 *он*

1. oz 932 d
2. 000 d без расходов 1983 d за вычетом расходов 240 240d 1 £

10 £94.25 руб.
1000 руб. 999 руб. за вычетом куртажа

$$X = \frac{0.2316 \times 932 \times 1983 \times 94.25 \times 999}{2000 \times 240 \times 10 \times 1000} = 8.395$$

Далее в [2] аналогично рассчитываются расходы при продаже в Вене: *X* = 8.588. Отсюда делается вывод:

Очевидно выгоднее всего продать в Вене, т. к. здесь выручка за каждую лиру = Р. 8.58 $\frac{8}{10}$, тогда как в Лондоне Р. 8.39 $\frac{1}{2}$, а в Петрограде Р. 8.46.

Как видно из вышеприведённого примера, русские коммерсанты прекрасно знали об арбитраже. Что же произошло с этим понятием после 1917 г.? Ответить на этот вопрос помогут нам три издания Большой Советской Энциклопедии.

В томе 3 Большой Советской Энциклопедии первого издания (том увидел свет в 1926 г. в издательстве «АО „Советская Энциклопедия"») на стр.246-247 помещена статья Ш.М.Дво-лайцкого «Арбитраж». В ней читаем: «*Арбитраж* (фр.), особый вид коммерческой деятельности, направленный к извлечению прибыли из разницы цен одинаковых биржевых объектов на разных рынках. Различают А. вексельный, фондовый и товарный. < ... > Фондовый и товарный А. в советской практике почти неизвестны.» Но не пытайтесь искать подобные статьи во 2-ом и 3-ем изданиях БСЭ — их там просто нет: есть арбитраж в смысле суда, «Арбитраж государственный в СССР», но .коммерческого и финансового — нет. Причины этого вполне очевидны: эти издания вышли уже после того, как «АО „Советская Энциклопедия"» было преобразовано в «Государственное научное издательство „Большая Советская Энциклопедия"».

Наконец, хотя это и не тема нынешнего разговора, отметим, что счастливо живут англичане: у них есть соответственно два разных слова для коммерческого арбитража (arbitrage) и для процесса разрешения споров, в том числе, по коммерческим контрактам (arbitration). Впрочем, новые-старые возможности возникают и у нас — недавно принят Закон о третейском суде.

Немало трудностей современным авторам, редакторам и переводчикам доставляет выбор подходящих русских терминов. Английское Present Value (сросшееся с сокращением PV) переводится на русский язык многими способами: современная ценность или стоимость, настоящая стоимость, сегодняшняя стоимость или ценность, текущая стоимость, приведённая (к настоящему моменту времени) стоимость, дисконтированная стоимость. Кстати, два последних термина не уходили ни из языка, ни из отечественной практики и использовались при обосновании эффективности капиталовложений. Некоторые из перечисленных прилагательных очевидным образом неудачны: *текущая* стоимость по смыслу должна относиться к рыночной цене актива в текущий момент, а не к теоретической формуле приведения; *настоящая* стоимость как бы предполагает, что бывает и *ненастоящая стоимость,* что не так. Так как парным понятием к PV является Future Value (FV) — будущая ценность, то приемлемы термины *современная* и *сегодняшняя* ценность, из которых мы выбрали первый. Различие между терминами *ценность* (value) и *стоимость* (cost) подробно рассмотрена в статье В.М. Гальперина, упомянутой во Введении. Некоторого труда стоило выяснить, какой же термин употреблялся в дореволюционной России. Оказалось, что использовались термины *дисконтированная* стоимость (ценность) [9]. Для будущей ценности также применялся термин иноязычного происхождения — *пролонгированная* стоимость. Однако, когда в [9] появилась потребность в образномобъяснении термина дисконтированная стоимость, возникло хорошее русское прилагательное *теперешняя. Теперешняя ценность* — чем не термин!? Мы надеемся, что эти краткие исторические заметки привлекут внимание читателей, а главное — „писателей" к проблемам формирования русской экономической и финансовой терминологии.

Литература

1. *Банковая энциклопедия.* / Под ред. Л.Н. Яснопольского. — Киев: Изд-во Банковой энциклопедии, т. **1, 1914** — 408 с т. **2, 1916-1917. —412** с.
2. **Гончаров П.М.** *Коммерческая арифметика.* — 5-е изд., Пг.: Тип. В.Д. Смирнова, 1915. — xi + 255 с.
3. **Гончаров П.М.** *Элементарный курс коммерческой арифметики.* — 2-е изд., Пг.: Тип. В.Д.Смирнова, 1915. — 168 с.
4. **Гончаров П.М.** *Сборник задач по коммерческой арифметике.* — 6-е изд., Пг., **1917.** — 158 с.
5. **Гончаров П.М.** *Долгосрочные финансовые операции: Курс элементарный.* — СПб.: Тип. В.Д.Смирнова, 1910. — 98 + 81 с.
6. **Мансфельд А.[А.]** *Курс коммерческой арифметики и торговых операций: Руководство для лиц, желающих заниматься коммерческими делами.* — М.: Типо-литогр. Торг. дома А.С. Клиенков и К2, 1900. — 404 с.
7. *Коммерческая энциклопедия М. Ротшильда, в полной переделке сообразно потребностям русских предпринимателей ь с добавлением б новых русских отделов:* Настольная справочная книга по всем отраслям коммерческих знаний / Под рел С.С.Григорьева. — СПб., т.1, 1899. — 525 с; т.2, 1899 — 489 с; т. 3, 1900. — 468 с; т. 4, 1901. — iv + 465 с.
8. **Прокофьев А.В.** *Коммерческая арифметика и торговые операции.* ~ 6-е изд., М.: Т-во тип. А.И.Мамонтова, 1895 — iv + 256 с.
9. ТолвинскиЙ А.И. *Капитализация доходов.* —Вильна: Тип. М.В. Жирмунского, 1890. — viii + 55 с.

Приложение Б. Таблицы

Таблица!. Множитель наращения для сложных процентов: (l+i)n.

Число периодов	Ставка процентов i			
п	0.25	0.333	0.5	0.75
1	1.002500000	1.003333333	1.005000000	1.007500000
2	1.005006250	1.006677778	1.010025000	1.015056250
3	1.007518766	1.010033370	1.015075125	1.022669172
4	1.010037563	1.013400148	1.020150501	1.030339191
S	1.012562656	1.016778149	1.025251253	1.038066735
6	1.015094063	1.020167409	1.030377509	1.045852235
7	1.017631798	1.023567967	1.035529397	1.053696127
8	1.020175878	1.026979861	1.040707044	1.061698848
9	1.022726317	1.030403127	1.045910579	1.069560839
10	1.025283133	1.033837804	1.051140132	1.077582545
11	1.027846341	1.037283930	1.056395833	1.085664415
12	1.030415957	1.040741543	1.061677812	1.093806898
13	1.032991997	1.044210681	1.066986201	1.102010449
14	1.035574477	1.047691384	1.072321132	1.110275528
15	1.038163413	1.051183688	1.077682738	1.118602594
16	1.040758822	1.054687634	1.083071151	1.126992114
17	1.043360719	1.058203259	1.088486507	1.135444555
18	1.045969120	1.061730604	1.093928940	1.143960389
19	1.048584043	1.065269706	1.099398584	1.152540092
20	1.051205503	1.068820605	1.104895577	1.161184142
21	1.053833517	1.072383340	1.110420055	1.169893023
22	1.056468101	1.075957951	1.115972155	1.178667221
23	1.059109271	1.079544478	1.121552016	1.187507225
24	1.061757044	1.083142959	1.127159776	1.196413529
2S	1.064411437	1.086753436	1.132795575	1.205386631
И	1.067072465	1.090375947	1.138459553	1.214427031
27	1.069740147	1.094010534	1.144151851	1.223535233
28	1.072414497	1.097657235	1.149872610	1.232711748
29	1.075095533	1.101316093	1.155621973	1.241957086
30	1.077783272	1.104987147	1.161400083	1.251271764
31	1.080477730	1.108670437	1.167207083	1.260656302
32	1.083178925	1.112366005	1.173043119	1.270111224
33	1.085886872	1.116073892	1.178908334	1.279637058
34	1.088601589	1.119794138	1.184802876	1.289234336
35	1.091323093	1.123526785	1.190726890	1.298903594
38	1.094051401	1.127271875	1.196680525	1.308645371
37-	1.096786529	1.131029447	1.202663927	1.318460211

38	1.099528496	1.134799546	1.208677247	1.328348663
39	1.102277317	1.138582211	1.214720633	1.338311278
40	1.105033010	1.142377485	1.220794236	1.348348612
41	1.107795593	1.146185410	1.226898208	1.358461227
42	1.110565082	1.150006028	1.233032699	1.368649686
43	1.113341494	1.153839381	1.239197862	1.378914559
44	1.116124848	1.157686512	1.245393861	1.389256418
45	1.118915160	1.161544464	1.251620821	1.399675841
46	1.121712448	1.165416279	1.257878925	1.410173410
47	1.124516729	1.169301000	1.264168319	1.420749710
48	1.127328021	1.173198670	1.270489161	1.431405333
49	1.130146341	1.177109332	1.276841607	1.442140873
50	1.132971707	1.181033030	1.283225815	1.452956930
60	1.161616782	1.220996594	1.348850152	1.565681027
70	1.190986093	1.262312437	1.417830527	1.687150546
80	1.221097954	1.305026318	1.490338568	1.818043980
90	1.251971136	1.349185542	1.566554679	1.959092460
100	1.283624889	1.394839018	1.646668492	2.111083840

Таблица 1. Множитель наращения для сложных процентов: (1+i)n. (продолжение)

Число периодов	Ставка процентов *i*			
n	1	3	5	10
1	1.010000000	1.030000000	1.050000000	1.100000000
2	1.020100000	1.060900000	1.102500000	1.210000000
3	1.030301000	1.092727000	1.157625000	1.331000000
4	1.040604010	1.125508810	1.215506250	1.464100000
5	1.051010050	1.169274074	1.276281562	1.610510000
6	1.061520151	1.194052297	1.340095641	1.771561000
7	1.072135352	1.229873865	1.407100423	1.948717100
8	1.082856706	1.266770081	1.477455444	2.143588810
9	1.093685273	1,304773184	1.551328216	2.357947691
10	1.104622125	1.343916379	1.628894627	2.593742460
11	1.115668347	1.384233871	1.710339358	2.853116706
12	1.126825030	1.425760887	1.795856326	3.138428377
13	1.138093280	1.468533713	1.885649142	3.452271214
14	1.149474213	1.512589725	1.979931599	3.797498336
15	1.160968955	1.557967417	2.078928179	4.177248169
16	1.172578645	1.604706439	2.182874588	4.594972986
17	1.184304431	1.652847632	2.292018318	5.054470285
18	1.196147476	1.702433061	2.406619234	5.559917314
19	1.208108950	1.753506053	2.526950195	6.115909045

20	1.220190040	1.806111235	2.653297705	6.727499949
21	1.232391940	1.860294572	2.785962590	7.400249944
22	1.244715860	1.916103409	2.925260720	8.140274939
23	1.257163018	1.973586511	3.071523756	8.954302433
24	1.269734649	2.032794106	3.225099944	9.849732676
25	1.282431995	2.093777930	3.386354941	10.83470594
2в	1.295256315	2.156591268	3.555672688	11.91817654
27	1.308208878	2.221289006	3.733456322	13.10999419
28	1.321290967	2.287927676	3.920129138	14.42099361
29	1.334503877	2.356565506	4.116135595	15.86309297
30	1.347848915	2.427262471	4.321942375	17.44940227
31	1.361327404	2.5O0O80345	4.538039494	19.19434250
32	1.374940679	2.575082756	4.764941468	21.11377675
33	1.388690085	2.652335238	5.003188542	23.22615442
34	1.402576986	2.731905296	5.253347969	25.54766986
35	1.416602756	2.813862454	5.516015367	28.10243685
36	1.430768784	2.898278328	5.791816136	30.91268053
37	1.445076471	2.985226678	6.081406943	34.00394859
38	1.459527236	3.074783478	6.385477290	37.40434346
39	1.474122509	3.167026983	6.704751154	41.14477779
40	1.488863734	3.262037792	7.039988712	45.25925557
41	1.503752371	3.359898926	7.391988148	49.78618113
42	1.518789895	3.460695894	7.761587555	54.76369924
43	1.533977794	3.564516770	8.149666933	60.24006916
44	1.549317572	3.671452274	8.557150279	66.26407608
45	1.564810747	3.781595842	8.985007793	72.89048369
46	1.580458855	3.895043717	9.434258183	80.17953206
47	1.596263443	4.011895029	9.905971092	88.19748526
48	1.612236078	4.132251879	10.40126965	97.01723379
49	1.628348338	4.256219436	10.92133313	106.7189572
50	1.644631822	4.383906019	11.46739979	117.3908529
60	1.816696699	5.891603104	18.67918589	304.4816395
70	2.006763368	7.917821913	30.42642553	789.7469568
80	2.216715217	10.64089056	-49.56144106	2048.400215
90	2.448632675	14.30046711	80.73036504	5313.022612
100	2.704813829	19.21863198	131.5012578	13780.61234

Таблица 2. Коэффициенты наращения годовой ренты $s_{n;i}=((1+i)^n-1)/i$

Число периодов	Ставка процентов i			
n	0.25	0.333	0.5	0.75
1	1.000000000	1.000000000	1.000000000	1.000000000
2	2.002500001	2.003333334	2.005000000	2.007500000
з	3.007506251	3.010011123	3.015024999	3.022656250
4	4.015025017	4.020044482	4.030100124	4.045225422

5	6.0250625805.0334446315.0502506245.075564612
з	6.0376252376.0302227806.0755018776.113631347
7	7.0527193007.0703901897.10S8793877.159483582
8	8.0703510988.0939581578.1414087848.213179709
g	9.0905269769.1209380179.1821158279.274778556
10	10.1132532910.1513411410.2280264110.34433940
IX	11.1385364311.1851789511.2791665411.42192194
12	12.1663827712.2224628812.3355623712.50758636
13	13.1967987313.2632044213.3972401813.60139325
14	14.2297907214.3074151014.4642263814.70340370
15	15.2653652015.3551064915.5365475115.81367923
16	16.3035286116.4062901816.6142302516.93228182
17	17.3442874417.4609778117.6973014018.05927394
18	18.3876481518.5191810718.7857879119.19471849
19	19.4336172719.5809116719.8797168520.33867888
20	20.4822013220.6461813820.9791154321.49121897
21	21.5334068221.7150019822.0840110122.65240312
22	22.5872403422.7873853223.1944310723.82229614
23	23.6437084423.8633432724.3104032225.00096336
24	24.7028177124.9428877525.4319552426.18847058
25	25.7645747626.0260307126.5591150127.38488411
26	26.8289861927.1127841527.6919105928.59027074
27	27.8960586628.2031601028.8303701429.80469778
28	28.9657988129.2971706329.9745219931.02823301
29	30.0382133030.3948278631.1243946032.26094476
30	31.1133088431.4961439632.2800165733.50290184
31	32.1910921132.6011311133.4414166634.75417361
32	33.2715698433.7098015434.6086237436.01482991
33	34.3547487634.8221675535.7816668637.28494113
34	35.4406356435.9382414436.9605751938.56457819
35	36.5292372337.0580355838.1453780739.85381253
36	37.6205603238.1815623639.3361049641.15271612
37	38.7146117239.3088342440.5327854842.46136149
38	39.8113982540.4398636941.7354494143.77982170
39	40.9109267541.5746632342.9441266645.10817036
40	42.0132040642.7132454444.1588472946.44648164
41	43.1182370743.8556229345.3796415347.79483025
42	44.2260326745.0018083446.6065397349.15329148
43	45.3365977546.1518143747.8395724350.52194117
44	46.4499392447.3056537549.0787702951.90085573
45	47.5660640948.4633392650.3241641553.29011214
46	48.6849792549.6248837251.5757849754.68978799
47	49.8066917050.7903000052.8336638956.09996140
48	50.9312084351.9596010054.0978322157.52071111
49	52.0585364553.1327996755.3683213758.95211644
50	53.1886827954.309909015664516298 60.39425731
60	64.6467126466.2989782069.7700305075.42413692
70	76.3944373878.6937311683.5661054791.62007285

80	88.43918142	91.50789534	98.06771355	109.0725307
90	100.7884543	104.7556627	113.3109358	127.8789947
100	113.4499555	118.4517054	129.3336984	148.1445120

Таблица 2. Коэффициенты наращения годовой рейты $s_{n;i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ (продолжение)

Число периодов n	Ставка процентов i: 1	3	5	10
1	1.000000000	1.000000000	1.000000000	1.000000000
2	2.010000000	2.030000000	2.050000000	2.100000000
3	3.030100000	3.090900000	3.152500000	3.310000000
4	4.060401000	4.183627000	4.310125000	4.641000000
5	5.101005010	5.309135810	5.525631250	6.105100000
6	6.152015060	6.468409885	6.801912812	7.718610000
7	7.213535211	7.662462181	8.142008453	9.487171000
8	8.285670563	8.892336047	9.549108876	11.43588810
9	9.368527269	10.15910613	11.02656432	13.57947691
10	10.46221254	11.46387931	12.57789254	15.93742460
11	11.56683467	12.80779569	14.20678716	18.53116706
12	12.68250301	14.19202956	15.91712652	21.38428377
13	13.80932804	15.61779045	17.71298285	24.52271214
14	14.94742132	17.08632416	19.59863199	27.97498336
15	16.09689554	18.59891389	21.57856359	31.77248169
16	17.25786449	20.15688130	23.65749177	35.94972986
17	18.43044314	21.76158774	25.84036636	40.54470285
18	19.61474757	23.41443538	28.13238467	45.59917314
19	20.81089504	25.11686844	30.53900391	51.15909045
20	22.01900400	26.87037449	33.06595410	57.27499949
21	23.23919404	28.67648572	35.71925181	64.00249944
22	24.47158598	30.53678030	38.50521440	71.40274939
23	25.71630184	32.45288371	41.43047512	79.54302433
24	26.97346485	34.42647022	44.50199887	88.49732676
26	28.24319950	36.45926432	47.72709882	98.34705943
25	29.52563150	38.55304225	51.11345376	109.1817654
27	30.82088781	40.70963352	54.66912645	121.0999419
28	32.12909669	42.93092253	58.40258277	134.2099361
29	33.45038766	45.21885020	62.32271191	148.6309297
30	34.78489153	47.57541571	66.43884750	164.4940227
31	36.13274045	50.00267818	70.76078988	181.9434250
32	37.49406785	52.50275852	75.29882937	201.1377675
33	38.86900853	55.07784128	80.06377084	222.2515442

34	40.2576986257.7301765285.06695938245.4766986
35	41.6602756060.4620818190.32030735271.0243685
36	43.0768783663.2759442795.83632272299.1268053
37	44.5076471466.17422260101.6281389330.0394659
38	45.9527236269.15944928107.7095458364.0434345
39	47.4122508572.23423275114.0950231401.4477779
40	48.8863733675.40125974120.7997742442.5925557
41	50.3752370978.66329753127.8397630487.8518113
42	51.8789894682.02319645135.2317511537.6369924
43	53.3977793685.48389235142.9933387592.4006916
44	54.9317571589.04840912151.1430056652.6407608
45	56.4810747292.71986139159.7001559718.9048369
46	58.0458854796.50145723168.6851637791.7953206
47	59.62634433100.3965010178.1194218871.9748526
48	61.22260777104.4083960188.0253929960.1723379
49	62.83483385108.5406479198.42666261057.189572
50	64.46318219112.7968673209.34799571163.908529
60	81.66966986163.0534368353.58371793034.816395
70	100.6763368230.5940638588.52851077887.469568
80	121.6715217321.3630186971.228821320474.00215
90	144.8632675443.34890371594.60730153120.22612
100	170.4813829607.28773272610.025157137796.1234

Таблица 3. Коэффициенты приведения годовой ренты $a_{n,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

Число периодов n	Ставка процентов i 0.25	0.333	0.5	0.75
	0.9975062340.996677741			0.992555831
	1.9925249231.990044260			1.977722909
1	2.9850622682.9801105590.9950248752.955556238			
2	3.9751244573.9668876001.9850993783.926110410			
3	4.9627176634.9503863132.9702481374.889439612			
4	5.9478480435.9306175883.9504956595.845597630			
5	6.9305217396.9075922804.9258663276.794637846			
6	7.9107448777.8813212105.8963844057.736613247			
7	8.8885235688.8518151596.8620740358.671376423			
8	9.8638639089.8190848777.8229592389.599579577			
9	10.8367719810.783141078.77906391910.52067452			
10	11.8072538411.743994439.73041186911.43491267			
11	12.7753155612.7016555710.6770267312.34234508			
12	13.7409631513.6561351211.6189320613.24302242			
13	14.7042026414.6074436412.5561513114.13699495			
14	15.6650400415.5555916713.4887077715.02431261			
15	16.6234813416.5005897114.4166246515.90502492			

16	17.57953251	17.44244821	15.33992502	16.77918106
17	18.53319951	18.38117762	16.25863186	17.64682984
18	19.48448829	19.31678833	17.17276802	18.50801969
19	20.43340478	20.24929069	18.08235624	19.36279870
20	21.37995489	21.17869504	18.98741914	20.21121459
21	22.32414453	22.10501167	19.88797925	21.05331473
22	23.26597958	23.02825083	20.78405895	21.88914614
23	24.20546592	23.94842276	21.67568055	22.71875547
24	25.14260939	24.86553763	22.56286622	23.54218905
26	26.07741585	25.77960561	23.44563803	24.35949286
25	27.00989113	26.69063682	24.32401794	25.17071251
27	27.94004102	27.59864135	25.19802780	25.97589331
28	28.86787135	28.50362926	26.06768935	26.77508021
29	29-	29.40561056	26.93302423	27.56831783
30	79338788	30.30459524	27.79405396	28.35565045
31	30.71659638	31.20059326	28.65079996	29.13712203
32	31.63750263	32.09361455	29.50328354	29.91277621
33	32.55611235	32.98366898	30.35152591	30.68265629
34	33.47243127	33.87076643	31.19554817	31.44680525
35	34.38646511	34.75491671	32.03537132	32.20526576
36	35 29821956	35.63612961	32.87101623	32.95808016
37	36.20770031	36.51441489	33.70250372	33.70529048
38	37.11491303	37.38978228	34.52985444	34.44693844
39	38.01986337	38.26224148	35.35308900	35.18306545
40	38.92255698	39.13180214	36.17222786	35.91371260
41	39.82299948	39.99847389	36.98729140	36.63892070
42	40.72119649	40.86226634	37.79829990	37.35873022
43	41.61715360	41.72318904	38.60527353	38.07318136
44	42.61087641	42.58125154	39.40823237	38.78231401
45	43.40237049	43.43646333	40.20719639	39.48616775
46	44.29164138	44.28883388	41.00218546	40.18478188
47	45.17869465	45.13837264	41.79321937	40.87819542
48	46.06353581	45.98508901	42.58031778	41.56644707
49	46.94617038	54.29906891	43.36350028	48.17337352
50	55.65235770	62.34092990	44.14278634	54.30462210
60	64.14385340	70.11957850	51.72556074	59.99444012
70	72.42595171	77.64362974	58.93941755	65.27460918
80	80.50381629	84.92141665	65.80230537	70.17462272
90	88.38248348		72.33129957	
100			78.54264475	

Таблица 3. Коэффициенты приведения годовой ренты $a_{n,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ **(продолжение)**

Число периодов n	Ставка процентов i			
	1	3	5	10
		0.970873786		0.909090909
		1.913469696		1.735537190
1	0.990099010	2.828611355	0.952380952	2.486851991
2	1.970395059	3.717098403	1.859410431	3.169865446
3	2.940985207	4.579707187	2.723248029	3.790786769
4	3.901965552	5.417191444	3.545950504	4.355260699
5	4.853431239	6.230282955	4.329476671	4.868418818
6	5.795476475	7.019692190	5.075692067	5.334926198
7	6.728194529	7.786108922	5.786373397	5.759023816
8	7.651677752	8.530202837	6.463212759	6.144567106
9	8.566017576	9.252624114	7.107821676	6.495061005
10	9.471304531	9.954003994	7.721734929	6.813691823
11	10.36762825	10.63495533	8.306414218	7.103356203
12	11.25507747	11.29607314	8.863251636	7.366687457
13	12.13374007	11.93793509	9.393572987	7.606079506
14	13.00370304	12.56110203	9.898640940	7.823708642
15	13.86505252	13.16611847	10.37965804	8.021563311
16	14.71787378	13.75351308	10.83776956	8.201412101
17	15.56225127	14.32379911	11.27406625	8.364920092
18	16.39826858	14.87747486	11.68958690	8.513563720
19	17.22600850	15.41502414	12.08532086	8.648694291
20	18.04555297	15.93691664	12.46221034	8.771540264
21	18.85698314	16.44360839	12.82115271	8.883218422
22	19.66037934	16.93554212	13.16300258	8.984744020
23	20.45582113	17.41314769	13.48857388	9.077040018
24	21.24338726	17.87684242	13.79864179	9.160945471
26	22.02315570	18.32703147	14.09394457	9.237223156
25	22.79520366	18.76410823	14.37518530	9.306566505
27	23.55960759	19.18845459	14.64303362	9.369605914
28	24.31644316	19.60044135	14.89812726	9.426914467
29	25.06578530	20.00042849	15.14107358	9.479013152
30	25.80770822	20.38876553	15.37245103	9.526375593
31	26.54228537	20.76579178	15.59281050	9.569432357
32	27.26958947	21.13183668	15.80267667	9.608574870
33	27.98969255	21.48722007	16.00254921	9.644158973
34	28.70266589	21.83225250	16.19290401	9.676508157
35	29.40858009	22.16723544	16.37419429	9.705916506
36	30.10750504	22.49246159	16.54685171	9.732651369
37	30.79950994	22.80821513	16.71128734	9.756955790
38	31.48466331	23.11477197	16.86789271	9.779050718
39	32.16303298	23.41239998	17.01704067	9.799137017
40	32.83468611	23.70135920	17.15908635	9.817397288
41	33.49968922	23.98190214	17.29436796	9.833997535
42	34.15810814	24.25427392	17.42320758	9.849088668

43	34.81000806	24.51871254	17.54591198	9.862807880
44	35.46545353	24.77544907	17.66277331	9.875279891
45	36.09450844	25.02470783	17.77406982	9.886618082
46	36.72723608	25.26670664	17.88006650	9.896925530
47	37.35369909	25.50165693	17.98101571	9.906295936
48	37.97395949	25.72976401	18.07715782	9.914814487
49	38.58807871	27.67656367	18.16872173	9.967157297
50	39.19611753	29.12342135	18.25592546	9.987337716
60	44.95503841	30.20076345	18.92928953	9.995118141
70	50.16851435	31.00240714	19.34267665	9.998117832
80	54.88820611	31.59890534	19.59646048	9.999274343
90	59.16088148		19.75226174	
100	63.02887877		19.84791020	

Таблица 4. Значение коэффициента $K_{p,i} = \frac{i}{p((1+i)^{1/p}-1)}$

Ставка процентов	Число членов ренты в году, p			
i	2	4	6	12
1.00	1.002493781	1.003742226	1.004158605	1.004575099
1.25	1.003115295	1.004675369	1.005195753	1.005716317
1.50	1.003736042	1.005607553	1.006231906	1.006856519
1.75	1.004356025	1.006538781	1.007267070	1.007995709
2.00	1.004975247	1.007469058	1.008301246	1.009133892
2.25	1.005593710	1.008398388	1.009334439	1.010271070
2.50	1.006211418	1.009326773	1.010366653	1.011407248
2.75	1.006828373	1.010254217	1.011397891	1.012542429
3.00	1.007444578	1.011180723	1.012428157	1.013676617
3.25	1.008060036	1.012106295	1.013457454	1.014809816
3.50	1.008674749	1.013030935	1.014485785	1.015942028
3.75	1.009288720	1.013954649	1.015513155	1.017073258
4.00	1.009901951	1.014877439	1.016539566	1.018203509
4.25	1.010514446	1.015799307	1.017565022	1.019332784
4.50	1.011126207	1.016720258	1.018589527	1.020461088
4.75	1.011737237	1.017640295	1.019613084	1.021588424
5.00	1.012347538	1.018559421	1.020635696	1.022714794
5.25	1.012957113	1.019477640	1.021657367	1.023840203
5.50	1.013565965	1.020394954	1.022678100	1.024964654
5.75	1.014174095	1.021311366	1.023697898	1.026088150
6.00	1.014781507	1.022226881	1.024716765	1.027210695
6.25	1.016388203	1.023141501	1.025734704	1.028332292

6.50	1.015994186	1.024055229	1.026751718	1.029452944
6.75	1.016599458	1.024968068	1.027767810	1.030572656
7.00	1.017204022	1.025880022	1.028782985	1.031691429
7.25	1.017807879	1.026791093	1.029797244	1.032809267
7.50	1.018411034	1.027701285	1.030810591	1.033926174
7.75	1.019013487	1.028610601	1.031823029	1.035042153
8.00	1.019615242	1.029519044	1.032834562	1.036157207
8.25	1.020216301	1.030426616	1.033845193	1.037271339
8.50	1.020816666	1.031333322	1.034854924	1.038384552
8.75	1.021416340	1.032239163	1.035863759	1.039496850
9.00	1.022015325	1.033144143	1.036871701	1.040608236
9.25	1.022613624	1.034048264	1.037878753	1.041718712
9.50	1.023211238	1.034951531	1.038884917	1.042828283
9.75	1.023808171	1.035853945	1.039890198	1.043936950
10.00	1.024404424	1.036755509	1.040894598	1.045044718
10.25	1.025000000	1.037656227	1.041898120	1.046151588
10.50	1.025594901	1.038556101	1.042900766	1.047257565
10.75	1.026189129	1.039455134	1.043902541	1.048362652
11.00	1.026782688	1.040353329	1.044903446	1.049466850
11.25	1.027375578	1.041250689	1.045903486	1.050570164
11.50	1.027967802	1.042147216	1.046902662	1.051672596
11.76	1.028559363	1.043042914	1.047900977	1.052774148
12.00	1.029150262	1.043937785	1.048898436	1.053874826
12.25	1.029740503	1.044831832	1.049895039	1.054974630
12.50	1.030330086	1.045725058	1.050890791	1.056073564
12.75	1.030919015	1.046617464	1.051885693	1.057171631
13.00	1.031507291	1.047509055	1.052879750	1.058268833
13.25	1.032094916	1.048399833	1.053872963	1.059365174
13.50	1.032681894	1.049289800	1.054865336	1.060460656
13.75	1.033268225	1.050178960	1.055856870	1.061555283
14.00	1.033853913	1.051067314	1.056847570	1.062649057