МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра «Прикладная математика - 2»

Л.Ф. Кочнева, З.С. Липкина, Н.Л. Павлова

Теория вероятностей и математическая статистика
Часть 2
Учебное пособие
для студентов 2 курса
экономических специальностей

МОСКВА - 2005

УДК – 519.2

К - 59

Кочнева Л.Ф., Липкина З.С., Павлова Н.Л. Теория вероятностей и математическая статистика. Часть 2: учебное пособие. - М. : МИИТ, 2005. – 109 с.

Учебное пособие содержит краткое изложение элементов теории вероятности, варианты индивидуальных заданий и примеры решений этих заданий.

Рецензенты: Зав.каф. «Высшая математика»
доц. Платонова О.А., (МИИТ)
проф. МГУ Шмелькин А.Л.

Св. план 2005г., поз. 106

Подписано в печать - 05.12.05. Тираж - 200.

Формат - 60×84/16.

Усл. - п.л. - 7,0. Заказ № 672

127994 Москва, ул. Образцова, 15.
Типография МИИТа

§1. Ряд распределения вероятностей дискретной случайной величины.

Переменная величина, значение которой есть то или иное число, определяемое исходом случайного эксперимента, называется случайной величиной. Такие величины обозначаем X, Y, Z и т.д. и рассмотрим два основные их вида: 1) дискретные и 2) непрерывные случайные величины.

Если все возможные значения случайной величины X можно занумеровать, то X называют дискретной случайной величиной.

Пример 1. Следующие случайные величины дискретны:

X_1 - число букв на странице тетради или книги;

X_2 - число травм в шахте в месяц;

X_3 - число срабатываний выключателя до его отказа;

X_4 - число новорожденных за сутки в городе;

X_5 - число зерен в колосе. □

Разумеется каждая случайная величина X связана с векторным массовым эксперименом. Для величины X_1 этот эксперимент, явно не оговоренный, но подразумеваемый, состоит в случайном выборе страницы в данной тетради.

Чаще число значений, какие может принять дискретная случайная величина, является конечным, но иногда может быть и бесконечным. Дискретность выражается в счетности множества значений, в изолированности возможных значений.

Возможные значения случайной величины X обозначают $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и пишут в верхней строке таблицы, называемой рядом распределения вероятностей. В нижней строке числу x_i

сопоставляют вероятность p того, что X примет это значение x_i: $p_i=P\{X=x_i\}$ - вероятность события $\{X=x_i\}$.

x_i	x_1	x_2	...	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	...	p_n

Поскольку учтены все значения x_i случайной величины X, то в нижней строке сумма $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Построим ряд распределения для числа выпавших очков при·бросании игральной кости, на трех гранях которой написано по 5, на двух гранях числа 7, а на одной 1, т.е. на гранях стоят числа 1,5,5,5,7,7. Ряд распределения случайной величины X - числа выпавших очков при бросании такой кости, имеет вид:

x_i	1	5	7
p_i	1/6	3/6	2/6

Например, P{X=5}=P{появление 5 очков в опыте}=3/6, т.к. на трех из шести граней стоит число 5.

Пример 2. Опыт - бросание трех монет, X - число выпавших орлов. Ясно, что X может принять значения 0,1,2 и 3, но с какими вероятностями? Составим вспомогательную таблицу всех случаев: РРР (все решки), ОРР (на первом монете орел, на других решки) и т.д. Всего случаев 8 и вероятность каждого 1/8.

возможные случаи	РРР	ОРР	РОР	РРО	OOP	ОРО	РОО	ООО
число орлов	0	1	1	1	2	2	2	3

Подсчитаем вероятности для построения ряда распределения:

$$p_1 = P\{X=0\} = \frac{1}{8}, p_2 = P\{X=1\} = P\{OOP+POP+PPO\} = \frac{3}{8}, \ldots$$

Ряд распределения случайной величины X

x_l (значения X)	0	1	2	3
$p_l=P\{X=x_l\}$	1/8	3/8	3/8	1/8

Ряд распределения, кроме таблицы, задают и графически в виде так называемого многоугольника распределения:

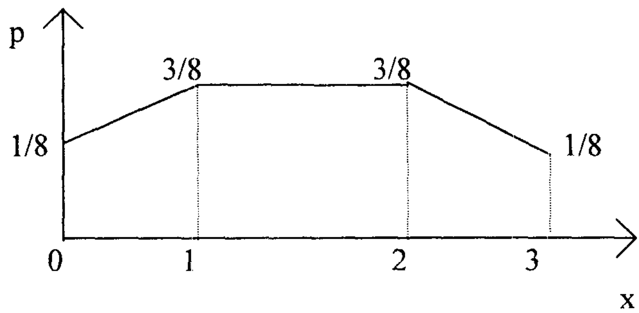


Рис.1

Пример 3. Дан ряд распределения

x_l	0	3,5	10
p_l	0,2	0,5	0,3

Придумать опыт, где мы наблюдали бы случайную величину X с таким, как говорят, законом распределения. Иначе говоря требуется дать модель (моделировать) случайные величины X.

Решение. Это можно сделать, например так. В урну кладем 10 шариков, на двух из них стоят нули; на пяти число 3,5; на трех остальных число 10.

$x_i \backslash y_j$	y_1	y_2	...	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2m}
...	...	...	...	...
x_n	p_{n1}	p_{n2}	...	p_{nm}

В клетках таблицы стоят вероятности

p_{ij}=P{X=x_i, Y=y}=P{X примет значение x_i и Y - значение y_l} - доля опытов, в которых наступает событие {X=x_i,Y=y_j} при неограниченном числе наблюдений.

$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$ - сумма вероятностей по всем клеткам равна 1.

Пример 4. В опыте с бросанием двух костей мы рассматривали следующие величины X, Y и S (число очков на первой, второй кости, в сумме). Составим таблицу вероятностей для системы (X,Y) независимых случайных величин X и Y и опишем словами. В ней 6 строк, 6 столбцов, x_i=1,2,...,6; y_j=1,2,...,6; в каждой клетке стоит вероятность 1/36.

Таблица вероятностей для системы (X,S) такова:

$x_i \backslash s_j$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

В частности, $P\{X=3,S=3\}=0$, а $P\{X=3,S=4\} = =P\{X=3,Y=1\}=1/36$

Имея таблицу вероятностей для системы (X,Y), мы можем как построить ряды распределения отдельно для компонент X,Y, так и узнать, зависимы ли они.

Сделаем это для системы (X,Y) случайных величин X и Y, заданных таблицей.

$x_i \backslash y_j$	0	3	4
1	0,1	0,2	0,2
2	0,2	0,3	0

Ряды распределения X и Y

x_i	1	2
p_j	0,5	0,5

Так p_1=P{X=1}=0,1+0,2+0,2=0,5 - сумма вероятностей в первой строке таблицы.

y_i	0	3	4
p_j	0,3	0,5	0,2

$p_1' = P\{Y=0\} = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$ - сумма вероятностей в первом столбце таблицы.

Проверяем $p_{11} = 0{,}1 \neq p_1 * p_1' = 0{,}5 * 0{,}3 = 0{,}15 \Rightarrow$ условие независимости X и Yнарушено уже в первой клетке, остальные можем не проверять. Вывод: X и Y зависимы.

§3. Непрерывная случайная величина. Функция распределения и плотность вероятности.

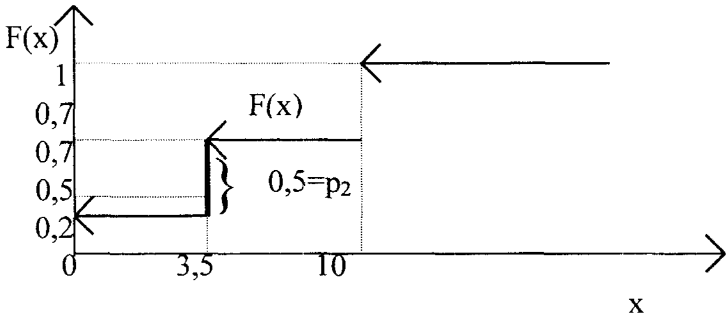
Всякую случайную величину X полностью характеризует ее функция распределения вероятности, обозначаемая F(x) либо $F_X(x)$. Взяв точку x на оси Ox, зададим в ней значение функции F(x) как вероятность P{X<x}= P(∞<X<x} - вероятность того, что случайная величина X примет значение левее заданной точки x.

Таким образом, дискретную случайную величину X можно задать как рядом распределения, так и функцией распределения F(x), причем переход от одной формы закона распределения к другому совершается однозначно: по ряду легко построить функцию F(x) и наоборот.

Пример 5. Построить функцию распределения F(x) для рассмотренной в примере 3 случайной величины X, заданной рядом распределения

x_i	0	3,5	10
p_i	0,2	0,5	0,3

Функция F(x) показана на рисунке:



Как видим, график F(x) для дискретной величины - ступенчатая линия, причем точками разрыва служат значения x_i, принимаемые случайной величиной X с ненулевой вероятностью, а высота ступеньки (приращение функции равно как раз вероятности p_i в точке x_i ряда.

Значение функции $F(x_i)$ лежит в нижней из двух ступенек, соответствующих точке x_i (об этом и говорит стрелка на рисунке). Например, F(2)=0,2; F{X<3,5}=0,2. А вот F(3,501)=0,7, т.к.
F(3,501)=P(X<3,501)=P(X=0)+P(X=3,5)=0,2+0,5=0,7.

Замечания.

1. Для всякой случайной величины $F(-\infty)=0$, $F(\infty)=1$
2. Функция F(x) определена в любой точке x оси Ox, а ее значения лежат между 0 и 1.
3. Функция F(x) возрастает.

Обратимся теперь к непрерывной случайной величине X, которая в отличие от дискретной может принять любое значение из некоторого промежутка, т.е. ее значения сплошь заполняют некоторый интервал и потому их множество несчетно. Например:

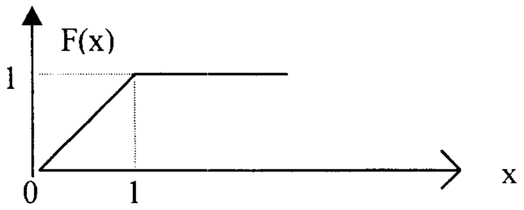
1) размер (либо прочность, вес) детали массового производства;
2) урожай с одной сотки;
3) ошибка измерения;
4) продолжительность работы устройства (холодильника и т.д.) до момента отказа.

У непрерывной случайной величины X функция распределения F(x) всюду непрерывна и кусочно-дифференцируется.

Построим функцию распределения случайной величины X, реализуемой с помощью рулетки. Рулетка - это вращающийся на оси диск и неподвижная стрелка-указатель.

На ободе диска есть шкала от 0 до 1, т.е. на обод диска «навернут» единичный отрезок [0,1]. Опыт состоит в том, что диск раскручивают и тормозят, а после остановки снимают на шкале значение, принятое в опыте. Ясно, что X может принять любое значение величины $X\in[0;1]$ и для заданного числа x между 0 и 1 имеем $F(x) = P(X < x\} = \frac{x}{1} = x$ - вероятность получить на рулетке значение меньше x.

График F(x) показан на следующем рисунке:



Вопрос: каковы вероятности P{X<0}, P{X<0,5}, P{X<2}
Ответ: 0; 0,5; 1.

Плотность вероятности.

Непрерывную случайную величину X можно задать либо функцией распределения F, либо ее производной $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$, называемой плотностью распределения вероятности или плотностью вероятности. В силу монотонности функции F(x) плотность $f(x) \geq 0$ всюду.

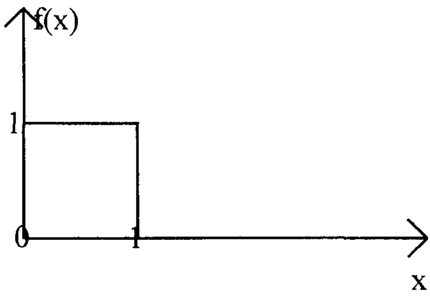
Зная F(x), можем найти плотность вероятности по формуле $f(x)=F'(x)$, а зная $f(x)$, найдем функцию распределения как $F(x)= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Ясно, что $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(\infty)=1$

Для непрерывной случайной величины X вероятность попадания ее в промежуток с концами a и b (неважно, открытый или замкнутый) равна

$$P\{a \le X \le b\} = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{в} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

Найдем плотность вероятности для рассмотренной выше случайной величины X в опыте с рулеткой .Там имели: F(x) равно 0 при x<0, x при $0 \le x \le 1$, 1 при x>1. Находим $f(x) = F''(x)$: 0 при $x \notin [0,1]$, 1 при $x \in (0,1)$



Точки 0 и 1, где производная не определена, роли не играют и будем считать, что в них $f(x)=0$.

Закон распределения рассмотренной величины X=R[0,1] показан на рисунке, его называют равномерным либо законом прямоугольника. Будем называть его стандартным равномерным и условно это записывать X~ R[0,1] . Если случайная величина распределена равномерно на [a, b], то это обозначается R[a;b].

Полезно помнить, что:

1) плотность вероятности $f(x)$ это есть $\frac{\Delta P}{\Delta x}$ - вероятность попадания X в интервал (x, x+Δx), деленная на его длину Δx, когда длина Δx исчезающе мала;

2) вся площадь между графиком $f(x)$ и осью Ox равна1.

Пример 6. Для стандартной равномерной величины X (реализуемой на рулетке) найти вероятности: 1) P{X<0,7}; P{0,1<X<0,7}; P{X>0,6}

Решение:

1) $P\{X<0,7\}=F(0,7)=0,7$

2) $P\{0,1<X<0,7\}=F(0,7)-F(0,1)=0,7-0,1=0,6$ или так

$$P\{0,1<X<0,7\}=\int_{0,1}^{0,7} 1*dx = x\Big|_{0,1}^{0,7} = 0,6$$

3) $P\{X>0,6\}=\int_{0,6}^{1} dx = 0,4$ □

§4. Математическое ожидание.

Удобно представлять себе вероятность как массу (массу вероятности), распределенную вдоль оси абсцисс. Вся масса равна 1. Если распределение дискретное, масса сосредоточена в изолированных точках x_i оси, если распределение непрерывно - масса размазана вдоль оси Ox с плотностью $f(x)$. Тогда абсциссу центра тяжести этой массы называют математическим ожиданием либо средним значением случайной величины.

Уточняя сказанное дадим определение математическим ожиданием (или средним значением) случайной величины X называют число

$$M(X)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i & (*)\\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx & (**)\end{cases}$$

(*) в дискретном случае, (**) - в непрерывном.

Вместо M(X) пишут также MX, μ, E(X).

Число M(X) является неслучайной величиной той же размерности, что X, и характеризует распределение «в среднем», являясь абсциссой центра тяжести массы вероятности.

У симметричного закона среднее значение лежит на оси симметрии. Хотя среднее значение - неполная характеристика распределения, это важная характеристика.

Так, мы вполне можем сопоставить качество жизни среднего слоя населения в России и США, если знаем, что средний доход в год на человека из этого слоя составляет в России 1200$ и в США 3500$.

Две другие характеристики положения распределения случайной величины: мода и медиана.

Мода - точка на оси абсцисс, в которой максимальна вероятность p_i, если X дискретна, и максимальна плотность $f(x)$ в непрерывном случае.

Медиана - точка d, слева и справа от которой вероятность одинакова, т.е. $P\{X<d\}=P\{X>d\}$.

Основные свойства математического ожидания:

1. Если C = const, то M(C)=C - среднее значение постоянной C равно C;

2. $M(CX)=CM(X)$ - постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания;
3. $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$ - среднее значение суммы любых случайных величин, равно сумме их средних значений;
4. $M(XY)=M(X)M(Y)$ - для независимых случайных величин.

X, Y независимы, в п. 4.

Доказательство свойств можно найти в учебниках.

Пример 7. Вероятность поражения цели при выстреле ракетой равна $p=0{,}7$. Ракетный дивизион располагает 4 ракетами и стреляет ими в цель до поражения (поразив цель, не тратит лишних ракет). Для числа X расходуемых ракет построить ряд распределения и найти среднее M(X), а также вероятность поражения цели.

Начнем с последнего.

P{поражения цели}$=p_1+p_2+p_3+p_4$, где вероятность поражения цели первым выстрелом, $p_1==0{,}7$;
p_2 - вероятность того, что первая ракета промахнется, но вторая поразит цель: $p_2=pq=0{,}3*0{,}7=0{,}21$.

Аналогично p_3=P{два промаха, третий выстрел - поражение цели}$=q*q*p=0{,}3^2*0{,}7=0{,}063$, $p_4=q^3p=0{,}0189$.

$$P\{\textit{поражение}\cdot\textit{цели}\}=\sum^{4}p_i=0{,}992\cdot$$

Вероятность $P\{X=1\}=p_1$, $P\{X=2\}=p_2$, $P\{X=3\}=p_3$ - вероятность поразить цель только с третьего раза; но $P\{X=4\}>p_4$, т.к. при первых трех промахах последняя четвертая ракета будет, очевидно истрачена с поражением цели или без него. P{X=4}=1-($p_1+p_2+p_3$) - вероятность истратить все 4 ракеты.

Ряд распределения X

x_i	1	2	3	4
p_i	0,7	0,21	0,063	0,027

Среднее MX=1*0,7+2*0,2+3*0,063+4*0,027=1,4.□

Пример 8. В круге B радиуса r = 2 с центром O наугад выбираем точку T. Вероятность попадания этой точки в любой круг B_r радиуса r<2 с центром O будем считать пропорциональной его площади, например, $m\{T \in e_1\} = \frac{\bullet``\acute{\kappa}``\acute{\kappa}\ \cdot e_1}{\bullet``\acute{\kappa}``\acute{\kappa}\ \cdot e} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Как обеспечить такую пропорциональность (например, с помощью рулетки), - отдельный вопрос, его не касаемся.

Ясно, что расстояние R от центра до точки T есть случайная величина. Найти среднее значение MR величины R.

Решение. Найдем сначала F(R), затем f(r) при заданном r<2: F(r)=P{R<r}=P{точка T выбрана в круге B_r радиуса r}$=\frac{площадь\ \ B_r}{площадь\ \ B} = \frac{\pi \cdot r^2}{\pi \cdot 2^2} = \frac{r^2}{4}; 0 < r < 2.$

Плотность вероятности

$$f(r) = F'(r) = \frac{d\left(\frac{r^2}{4}\right)}{dr} = \frac{r}{2}, 0 < r < 2.$$

Заметим, что при r<0 F(r)=f(r)=0, а при r>2 F(r)=1 и, значит, f(r)=F'(r)=0

Наконец, среднее расстояние

$$MR = \int_{-\infty}^{\infty} rf(r)dr = \int_{-\infty}^{0} rf(r)dr + \int_{0}^{2} rf(r)dr + \int_{2}^{\infty} rf(r)dr =$$

$$= 0 + \int_{0}^{2} r * \frac{r}{2} * dr + 0 = \frac{r^3}{6}\Big|_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Среднее MR больше 1, т.к. круг B_1 лишь четверть всей площади B, а 3/4 лежат вне его. □

§5. Дисперсия.

Случайные величины при общем среднем могут быть совершенно разными, например, одна может в опытах меняться в узких пределах, а вторая - в широких при одинаковом среднем.

Чтобы охарактеризовать разброс, рассеяние, изменчивость в опытах случайной величины X есть несколько показателей, но чаще всего применяют дисперсию D(X) или среднеквадратическое (стандартное) отклонение $\sigma = \sqrt{D(X)}$

Пусть μ=M(X) - среднее значение X. Рассмотрим случайную величину $(X-\mu)^2$, т.е. величину, принимающую значение $(x-\mu)^2$. Ее среднее значение и называется дисперсией случайной величины X: $DX=M((X-\mu)^2)$

По формуле (16) получим:

$$D(X) = DX = \begin{cases} \sum_i (x_i - \mu)^2 p_i & (*) \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx & (**) \end{cases}$$

(*) - в дискретном случае, (**) - в непрерывном.

Поскольку $(X-\mu)^2 \geq 0$, то $DX \geq 0$.

Важна формула

$$DX=M[(X-\mu)^2]=M(X^2-2\mu X+\mu^2)=M(X^2)-2\mu * MX+\mu^2=M(X^2)-\mu^2.$$

Словами: дисперсия равна среднему квадратов минус квадрат среднего.

Пример 9. О стрельбе ракетой и попадании точки в круг радиуса r = 2.

а)

$$DX=\sum_{i=1}^{4}(x_i-\mu)^2 p_i=(1-1{,}4)^2*0{,}7+(2-1{,}4)^2*0{,}21+(3-1{,}4)^2*$$

$$\boxed{*\,0{,}063+(4-1{,}4)^2*0{,}027=0{,}531;}$$

б)

$$DX=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx=\int_0^2\left(r-\frac{4}{3}\right)^2\frac{r}{2}dr=\int_0^2\left(\frac{r^3}{2}-\frac{4}{3}r^2+\frac{8}{9}r\right)dr=$$

$$=\left[\frac{r^4}{8}-\frac{4r^3}{9}+\frac{4r^2}{9}\right]_0^2=2-\frac{32}{9}+\frac{16}{9}=0{,}22.$$

Пример 10. Для равномерного распределения:

X=R[0,1] найти среднее и дисперсию.

Решение. Плотность вероятности f(x) равна 1 в интервале (0,1) и 0 вне его. Поэтому:

$$\mu=MX=\int_1^0 x*1*dx=\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1=\frac{1}{2}.$$

.

$$DX=MX^2-\mu^2=\int_0^1 x^2*1*dx-\mu^2=\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}\square$$

Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной величины С равна нулю: D(C)=0.
2. $D(CX)=C^2D(X)$ - постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат.

Действительно,

$D(CX)=M[(CX)^2]-[M(CX)]^2=C^2(MX^2-\mu^2)=C^2D(X)$

3. Для независимых X и Y $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$ - дисперсия суммы (разности) независимых случайных величин равна сумме их дисперсий.

Докажем свойство 3 для X+Y

$D(X+Y)=M[(X+Y)^2]-M^2[(X+Y)] =M(X^2+2XY+Y^2)-(\mu_x+\mu_y)^2=M(X^2)+2M(XY)+M(Y^2)-\mu_x^2-2\mu_x\mu_y-\mu^2_y$ $==DX+DY+2[M(XY)-\mu_x\mu_y]$

Выражение $M(XY) - \mu_x\mu_y = cov(X,Y)=0$, а $D(X+Y)=DX+DY$.

Замечание. Из этих свойств следует $D(-X)=D(X)$, $D(X+C)=D(X)$.

Пример 11. Найти дисперсию D(Y) иD(Z) для Y=X+2 и Z=2X, если X =R[0,1]- равномерная стандартная величина

Решение.

$$DY = D(X+2) = D(X) + D(2) = \frac{1}{12} + 0 = \frac{1}{12}$$

DZ=D(2X)=4D(X)=1/3 - удвоение случайной величины дает вчетверо большую дисперсию. □

Наряду с дисперсией и средним квадратичным отклонением существуют другие способы измерения рассеяния случайной величины X, математически менее полезные. Все же приведем две такие меры рассеяния.

1. Среднее отклонение равно $M|X-\mu|$ - среднее значение абсолютной величины отклонения случайной величины X от $\mu=M(X)$.

2. Для непрерывной случайной величины с симметричным распределением иногда применяют срединное отклонение. Если C - центр распределения (практически $c=\mu$), то срединное отклонение - это число r такое, что в интервале $c\pm r$

лежит половина всей массы вероятности распределения. Иначе говоря, P{|X-c|<r}=1/2.

3. ·К примеру, у равномерного закона R[1,0] центр c=μ=0,5, а срединное отклонение r = 0,25, т.к. в интервале 0,5±0,25 лежит половина площади прямоугольника, выражающего график плотности вероятности.

§6. Равномерное дискретное распределение.

Дискретная случайная величина X, заданная рядом распределения

x_i	1	2	3	...	n
p_i	1/n	1/n	1/n	...	1/n

называется равномерно распределенной на множестве {1,2,...,n}.

В опыте бросания кости мы наблюдаем случайную величину, равномерно распределенную на множестве {1,2,...,6}.

Случайную величину X с таким законом распределения для любого n легко получить, проводя опыты с урной, где шары занумерованы 1,2,3,...,n.

Среднее значение

$$\mu = M(X) = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{n} m = \frac{1}{n}(1+2+...+n) = \frac{n+1}{2}$$

Дисперсия

$$D(X) = M(X^2) - \mu^2 = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{n} m^2 - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} =$$

$$= (n+1)\frac{(7n+5)}{12}$$

§7. Гипергеометрическое распределение.

Это распределение встречается при выборах, исследованиях, контроле качества.

Допустим в урне N шаров: M белых и R черных; N=M+R.

Опыт - извлечение наугад (без возвращения) $n<N$ шаров.

Нас интересует случайная величина X - число белых шаров среди n вынутых. Для краткости назовем появление белого шара успехом. Тогда X - число успехов. Зададим натуральное m: $m \le n$ и $m \le M$.

Чтобы найти вероятность P{X=m}, применим классическое определение

$$P\{X=m\} = \frac{\text{число благоприятных случаев}}{\text{число всех случаев}}$$

Здесь элементарное событие - набор (или комбинация) из n шаров. Все они равновозможные. Благоприятны те, где m шаров белых.

Число всех случаев равно C_N^n, а благоприятных $C_M^m * C_{N-M}^{n-m}$. Поэтому

$$P\{X=m\} = \frac{C_N^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

Пример 12. Построить ряд распределения и найти среднее для числа X белых шаров среди 4 вынимаемых из урны, в которой 3 белых и 5 черных шаров.

Решение. N=8, n=4

$$P_m = P\{X = m\} = \frac{C_3^m C_5^{4-m}}{C_8^4} \cdot при \cdot m \leq M = 3 < n, \cdot C_8^4 = 70$$

Так, вероятность вынуть 1 белый среди 4 извлекаемых равна

$$p_1 = \frac{C_3^1 C_5^3}{70} = \frac{3 * \frac{5*4*3}{1*2*3}}{70} = \frac{6}{14}; \cdot p_2 = P\{X = 2\} = \frac{C_3^2 C_5^2}{70} = p_1 = \frac{6}{14}$$

m	0	1	2	3
p_m	1/14	6/14	6/14	1/14

$$MX = 0*\frac{1}{14} + 1*\frac{6}{14} + 2*\frac{6}{14} + 3*\frac{1}{14} = \frac{1}{14}(0 + 6 + 12 + 3) = 1{,}5 \ \square$$

В математической литературе доказано, что для гипергеометрического распределения среднее MX=np и дисперсия $DX = npq\frac{N-n}{N-1}, где \cdot p = \frac{M}{N}, q = 1 - p$

§8. Биномиальное распределение.

Приступим теперь к рассмотрению одной из главных схем теории вероятностей. Рассматривается последовательность взаимно независимых испытаний (в дальнейшем будем называть их единичными), т.е. таких испытаний, что вероятность того или иного результата в каждом из них не зависит от того, какие результаты имеют место в остальных. В каждом из этих единичных испытаний интересующее нас событие A может наступить (или не наступить) с вероятностью p, не зависящей от номера испытания. Эта схема изучалась впервые известным ученым Яковом Бернулли в конце XVII века и потому получила название схемы Бернулли.

Пример 13. Среди волокон хлопка определенного сорта в среднем 75% имеют длину меньше 45мм и 25% - больше (или равную) 45мм. Найти вероятность того, что среди трех наудачу взятых волокон два будут короче, а одно длиннее 45мм (событие C).

Решение.

Обозначим событие A={выбор волокна с длиной меньше 45мм }, $C = AA\overline{A} + A\overline{A}A + \overline{A}AA, где \cdot AA\overline{A} =$ {два первых выбранных волокна оказались короче, а третье длиннее 45 мм}.

Так как все три слагаемых - несовместные события, то

$$P(C) = P(AA\overline{A}) + P(A\overline{A}A) + P(\overline{A}AA)$$

По правилу умножения вероятностей для независимых событий

$$P(AA\overline{A}) = P(A)P(A)P(\overline{A}) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 * \frac{1}{4} = \frac{9}{64}; P(A\overline{A}A) = \frac{9}{64};$$

$$P(\overline{A}AA) = \frac{9}{64}; P(C) = 3*\frac{9}{64} = \frac{27}{64}\square$$

Обычно событие А в единичном испытании для краткости называют успехом, а $\overline{A}$ - неудачей.

Пример 14. В приборе 20 однотипных элементов. Вероятность отказа элемента за год работы равна 0,003. Считая отказы независимыми, найти вероятность того, что за год:

1) все 20 элементов проработают безотказно;
2) откажет ровно один элемент;
3) откажет более одного элемента.

Назовем кратко успехом безотказную работу элемента в течение года.

А={успех в единичном испытании}, Р(А)=р=0,997, q=0,003, n=20.

Х - число успехов в двадцати единичных испытаниях.

1) Р{Х=20}=Р{все 20 элементов работают безотказно}=

$$= P\left\{\underbrace{AAA\dots A}_{n\cdot штук}\right\} = \left[P(A)\right]^{20} = p^{20} = 0{,}997^{20} \approx 0{,}9417$$ - в среднем 94% приборов не имеют отказов элементов;

2) Р{Х=19}=Р{ровно 19 успехов}=

$$= P\{\overline{A}A\dots A + A\overline{A}A\dots A + \dots + AA\dots A\overline{A}\} = P\{\overline{A}A\dots A\} + P\{A\overline{A}A\dots A\} + \dots +$$

$$+ m\{AA\dots A\overline{A}\} = p^{19} q + p^{19}q + \dots + p^{19}q = 20p^{19}q = 0{,}0567;$$

3) Р{Х<19}=Р{успехов меньше 19}=1-Р{Х≥19}=1-0,9417-0,0567=0,0016.

Общий случай. Дано: р - вероятность успеха в единичном испытании, q=1-р, n - число единичных испытаний в опыте. Найти $P_{m,n}$ - вероятность получить ровно m успехов в опыте.

Вероятность получить любую конкретную комбинацию $A\bar{A}AA\bar{A}\ldots A$, содержащую на конкретных местах m букв из A, означающих успех, и (n-m) букв $\bar{A}$ (неудач) равна $p^m q^{n-m}$.

Всего же различных таких комбинаций (отличающихся лишь порядком расположения A и $\bar{A}$) имеется C_n^m - число сочетаний из n элементов по m. Отсюда

$$P_{m,n} = P\{X = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}, m = 0,1,2,\ldots,n$$

Эта формула задает биномиальное распределение, т.е. вероятность получения m успехов и n-m неудач в схеме Бернулли. Название «биномиальное» связано с тем, что $P_{m,n}$ есть слагаемое в разложении бинома Ньютона:

$$1 = 1^n = (p+q)^n = p^n + np^{n-1}q + \frac{n(n-1)}{2}p^{n-2}q + \ldots + q^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} =$$

$$= \sum_{b=0}^{m} P_{m,n}.$$

Пример 15. Имеется урна с 10 шарами: 9 белых, один черный. 5 раз наудачу вынимаем из урны шар и возвращаем его в урну. Пусть X - число появлений белого шара. Составить ряд распределения для случайной величины X.

Решение. Параметры биномиальной величины X: n=5; p=9/10=0,9; q=0,1.

Заметим, что если бы мы в опыте не возвращали шар в урну, т.е. если бы вынимали 5 шаров без возвращения (неважно, сразу все 5 или последовательно), то имели бы дело с гипергеометрическим распределением.

В нашем же случае «работает» схема Бернулли

P{X=0}=P{ни разу не вынут белый шар}=

$=C_5^0\, p^0\, q^5 = 1*1*0{,}1^5 = 0{,}00001$; $P\{x=1\} = C^1{}_5\, 0{,}9*0{,}1^4 =$ 0.00045; P(X=2)= $C_5^2\, 0{,}9^2 0{,}1^3 = 0{,}0081\cdot$

P{X=3}=P{белый шар появляется ровно 3 раза}= $C_5^3 p^3 q^{5-3} = \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3} 0{,}9^3 0{,}1^2 = 0{,}0729$; P{X=4}= $C_5^4 p^4 q^1 =$ $5\cdot0{,}9^4 0{,}1=0{,}32805$; P{X=5}= p^5 =0,59049.

Ряд распределения вероятностей

m	0	1	2	3	4	5
$P_{m,5}$	0,00001	0,00045	0,0081	0,0729	0,32805	0,59049

Проверка: $\sum_i p_i = \sum_{m=0}^{5} P_{m,5} = 1$ □

Дискретная случайная величина принимает с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$ какие-то значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$. То из этих значений, которому соответствует наибольшая из вероятностей p_i, называется модой случайной величины. В последнем примере наибольшей является вероятность 0,59049. Поэтому мода рассмотренной биномиальной величины равна 5. Иначе говоря, мода - наивероятнейшее значение случайной величины. Можно показать, что у биноминальной величины всегда одна или две моды, в зависимости от числа: k=np-q. Если же число k целое, то модой будут два целых числа: k и k+1. Если же число k нецелое, то мода одна и получается из k округлением в большую сторону до ближайшего целого. Так в предыдущем примере k=np-q=5*0,9-0,1= =4,4 - нецелое, мода=5.

У биномиальной величины X с параметрами n=5; p=0,5 получим две моды: k=np-q=5*0,5-0,5=2, мода равна 2 и мода равна 3. Примером такой величины может служить число выпавших орлов при бросании пяти монет. До точки x=2 вероятности p_i будут возрастать, в точках x=2 и x=3 достигать максимума, а затем монотонно убывать.

Для вывода формул среднего и дисперсии биномиальной величины обычно выбирают один из двух путей:

1) непосредственное применение формул, дающих M(X), $M(X^2)$ и D(X)

Так, $M(X)=\sum_i x_i p_i=\sum_{m=0}^{n} mP_{m,n}$. Подставляя $P_{m,n}$ из формулы (31) и произведя преобразования, можем получить μ=MX=np. Аналогично, $M(X^2)=\sum_{m=0}^{n} m^2 P_{m,n}$ оказывается равным n(np+q) и $D(X)=M(X^2)-\mu^2=npq$;

2) второй путь состоит в представлении биномиальной величины X как суммы независимых случайных величин и проще в вычислительном плане: $X=\sum_{j=1}^{n}\xi_j$, где ξ_j принимает значение 0, если в j-ом единичном испытании наступит неудача, и 1, если успех.

Так, в опыте с результатом $AA\bar{A}AA\bar{A}\bar{A}$ с n=7 величины ξ_1,ξ_2,ξ_4,ξ_5 приняли значение 1, а ξ_3,ξ_6,ξ_7 - значение 0, т.к. в 3, 6 и 7 испытаниях A не наступило.

Поскольку каждая случайная величина ξ_j имеет ряд распределения

ξ_j	0	1
вероятность	q	p

то сразу получаем

$$M\xi_j = p; M(X) = M\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j\right) = \sum_{j=1}^{n} M\xi_j = np$$ - среднее значение биномиальной величины.

$D\xi_j=M\xi_j^2-p^2=0^2q+1^2p-p^2=p-p^2=pq$

$$D(X) = D\sum_{j=1}^{n} \xi_j = \sum_{j=1}^{n} D\xi_j = npq$$ - с учетом взаимной независимости $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$.

Пример 16. Найти среднее и дисперсию в примерах 14 и 15.

Решение. В примере14

$M(X)=np=20*0,997=19,94;D(X)=npq= =19,94*0,003=0,06.$

В примере 15 $MX=5*0,9=4,5$; $DX=4,5*0,5=2,25$.□

Если мы сравним опыты, приводящие к распределениям гипергеометрическому и биномиальному (выбор без возвращения и с возвращением), то поймем, что при увеличении объема N совокупности элементов, из которой производится выбор небольшой части, разница между распределениями стирается, т.е. гипергеометрическое распределение в пределе переходит в биномиальное, если $N\to\infty$, а $n/N\to 0$.

§9. Распределение Пуассона.

Это широко применяемое в технических приложениях распределение можно рассматривать как предельный случай биномиального.

В биномиальном распределении величины Xn при заданных m, n и p вероятность $P\{X_n=m\}=P_{m,n}=C^m{}_n\, p^m q^{n-m}$, а среднее $M(X_n)=np$. Что, если не меняя среднего числа $np=\lambda=const$, мы будем увеличивать число n (а, значит, $p=\frac{\lambda}{n}$ уменьшать). Как будет себя вести и к чему стремиться вероятность $P\{X_n=m\}$? Чтобы дать ответ, сделаем преобразование:

$$P\{X_n=m\}=\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^m\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m}=$$

$$=\frac{n(n-1)(n-m+1)\lambda^m\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{n*n\ldots.n*m!\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^m},$$

где m фиксировано, а $n\to\infty$

Устремив n к бесконечности, обозначим предельную случайную величину через X и учтем, что $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\to e\cdot при\cdot x\to\pm\infty;$

$$\frac{n(n-1)*(n-m+1)}{n^m}=(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{m-1}{n})\to 1,\ (1-\frac{\lambda}{n})^m\to 1$$

$$p_m = \lim_{n\to\infty} P\{X_n = m\} = \frac{\lambda^m}{m!}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^m} = \frac{\lambda^m}{m!}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{-n}{\lambda}}\right]^{-\lambda} =$$

$$= \frac{\lambda^m}{m!}\left[\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{-\lambda} = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$$

где $x = -\frac{n}{\lambda}, m = 0,1,2,...и \cdot 0! = 1 \cdot$

Формула дает распределение вероятностей для m=0,1,2,... так называемой пуассоновской величины

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{p}_m = e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!} = 1$$

Это распределение зависит только от одного параметра λ, который, как можно показать, равен как среднему значению, так и дисперсии: $\lambda = M(X) = D(X)$.

Действительно, для биномиальной величины $MX_n = np = \lambda$ и $D(X_n) = npq = \lambda q$, где $q = 1 - p = 1 - \lambda/n$. Но $M(X) = \lim_{n\to\infty} M(X_n) = \lambda$ и

$D(X) = \lim_{n\to\infty} D(X_n) = \lim_{n\to\infty}\lambda\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) = \lambda \cdot$

Распределение Пуассона широко применяется в теории надежности, в теории массового обслуживания. Для него составлены таблицы вероятностей p_m в зависимости от λ. При большом значении n и малом P биномиальное распределение практически не отличается от пуассоновского. Примерами пуассоновской величины является число новорожденных за сутки в Москве, число аварий на дорогах Москвы за сутки и т.п.

Пример 17. Наблюдения на текстильной фабрике показали, что обрыв нити на прядильной машине происходит в среднем 4 раза в час. Найти вероятность того, что на данной машине за час произойдет менее 4 обрывов.

Решение. Обозначим число обрывов через X. Среднее число M(X)=λ=4. Имеем:

$$P\{X<4\}=\sum_{m=0}^{3}P\{X=m\}=p_0+p_1+p_2+p_3=e^{-\lambda}\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2}+\frac{\lambda^3}{6}\right)=$$

$$=e^{-4}\left(1+4+\frac{4^2}{2}+\frac{4^3}{6}\right)=0{,}4335$$

Встает вопрос, а почему мы решили в этом примере, что число X обрывов подчиняется закону Пуассона? В первую очередь потому, что дано среднее значение MX и нет единичных испытаний, а X может принять значения m=0,1,2...

Типичная схема, приводящая к распределению Пуассона, такова. Пусть события одного и того же типа происходят во времени и выполнены 3 условия:

1. Произойдет или нет событие в интервале времени (t,t+Δt) не зависит от событий, предшествующих моменту t;

2. Вероятность отдельного события за малый промежуток времени пропорциональна длине Δ t промежутка;

3. Вероятность двух и большего числа событий за малый промежуток (t,t+Δt) пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью одного события.

Тогда мы имеем дело с пуассоновским потоком событий, а вероятность наступления за время Δt ровно m событий дается формулой в качестве, где λ надо взять среднее число событий за время Δt.

§10. Функции дискретных случайных аргументов.

Пусть X - дискретная случайная величина, а $\varphi(x)$ заданная числовая функция одного аргумента. Тогда, приняв за аргумент случайную величину X, получим функцию случайного аргумента. Это будет новая случайная величина $Z=\varphi(X)$, которая в опытах, где X имеет значения $x_1, x_2, x_3, \ldots$ принимает соответственно значениями $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$, $\varphi(x_3), \ldots$, некоторые из которых могут совпадать.

Пример18. . Случайная величина X задана рядом распределения

x_i	-1	0	1	2	10
p_i	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

Ее легко моделировать, имея 5 шаров с числами x_i на них. Требуется построить ряд распределения случайной величины $Y=2X_i+1$. В частности $X=-1 \Leftrightarrow Y=-1*2+1=-1$ и $P\{X=-1\}=P\{Y=-1\}=0,2$ $X=0 \Leftrightarrow Y=0+1=1$ и $P\{X=0\}=P\{Y=1\}=0,2$

Ряд распределения величины $Y=2X+1$ получается из ряда для X путем замены верхней строки: вместо x_i надо написать $y_i=2\ x_i+1$:

y_i	-1	1	3	5	21
p_i	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

Для $Z=X^2$ ряд распределения имеет меньше столбцов, т.к. $P\{Z=1\}=P\{X^2=1\}=P\{X=-1\}+P\{X=1\}=0,4$ - два разных значения (±1) величины X приводят к одному значению величины Z.

z_k	0	1	4	100
p_k	0,2	0,4	0,2	0,2

Находим среднее:

M(Y)=0,2(-1+1+3+5+21)=5,8

M(Z)=1*0,4+4*0,2+100*0,2=21,2 □

§11. Равномерное распределение.

Переходя к непрерывным распределениям, рассмотрим простейшее - равномерное, называемое за вид его плотности вероятности f(x), также законом прямоугольника.

Точки a и b связаны лишь условием a<b. Плотность вероятности f(x) равна нулю вне интервала (a,b) и равна h внутри его. Высота h прямоугольника находится из условия единичной площади: $h = \dfrac{1}{b-a}$.

Таким образом,

$$f(x) \approx \begin{cases} h = \dfrac{1}{b-a} & (*) \\ h = 0 & (**) \end{cases}$$

(*) - при a<x<b; (* *) - при всех остальных значениях x.

Величину X с таким законом обозначим кратко так:

X=R[a,b] - величина X подчиняется равномерному закону на промежутке (a,b).

Этот закон в силу его простоты хорош для разных прикидок и демонстрации разных вероятностных свойств, случайная величина R[0,1], реализуемая рулеткой, служит основой моделирования других распределений в методе Монте-Карло. На практике встречаются величины, подчиняющиеся этому закону. Сюда относится, в частности, время ожидания в метро электрички пассажиром, прибывающим на платформу, а так же ошибки округления чисел при расчетах.

Функция распределения равномерной величины F(x)=P{X<x} равна нулю слева от точки a и 1 справа от b. Для точек x между a и b.

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{t}{b-a}\Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

Итак, F(x) внутри (a,b) линейно возрастает от 0 до 1. Найдем среднее MX и дисперсию DX для X=R[a,b].

$$\mu = M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{a+b}{2}$$

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = h\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$D(X) = M(X^2) - \mu^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(a+b)^2}{3} - \frac{ab}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{(a+b)^2}{12} - \frac{ab}{3} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{D(X)} = \dfrac{b-a}{\sqrt[2]{3}}$.

Пример 19. Найти вероятность попадания случайной величины X=R[0,8] в интервал ($\mu-\sigma,\mu+\sigma$).

Решение.

$$\mu = \frac{8}{2} = 4, \sigma = 4/\sqrt{3} \approx 2{,}31;$$

$$P\{\mu-\sigma < X < \mu+\sigma\} = \frac{2\sigma}{8} = 0{,}58 \cdot \square$$

Если случайной величине X=R[0,1] прибавить константу a, то опять получим равномерное распределение, но сдвинутое на величину a: Y=X+a=R[a,a+1], а если X умножить на C, то получим равномерное на интервале (0,C):

Z=CX=R[0,C]

Оказывается, сумма двух независимых, равномерно распределенных на участке (0,1) случайных величин X_1, X_2 подчиняется треугольному закону (закону Симпсона) на интервале (0,2), т.е. складывая два показания на рулетке, получим сумму S, подчиняющуюся треугольному закону.

$S=X_1+X_2$, $M(S)=M(X_1+X_2)=M(X_1)+M(X_2)=1/2+1/2=1$;

$D(S)=D(X_1)+D(X_2)=1/6$

§12. Показательное распределение.

Как и распределение Пуассона, показательное распределение (называемое также экспоненциальным) широко применяется в теории надежности и теории массового обслуживания. Им описывается длительность безотказной работы многих технических устройств. Функция задается формулой

$$F(t)=\begin{cases}0\cdot при & t\le 0\\ 1-e\cdot^{-\lambda t} & t>0\end{cases}$$

Плотность вероятности

$$f(t)=\frac{dF(t)}{dt}=\begin{cases}0\cdot при & t\le 0\\ \lambda\cdot e^{-\lambda t}\quad при & t>0\end{cases}$$

Число λ>0 называется параметром распределения.

Среднее значение $\mu=M(T)=\int\limits_0^\infty te^{-\lambda t}*\lambda dt=\frac{1}{\lambda}\cdot$

Дисперсия $D(T)=\int\limits_0^\infty (t-\lambda)^2e^{-\lambda t}*\lambda dt=\frac{1}{\lambda^2},\sigma=\frac{1}{\lambda}\cdot$

Пример 20. Положим, случайное время T работы прибора до момента отказа имеет плотность $f(t)=0{,}1e^{-0{,}1t}$ при t>0, параметр λ=0,1 характеризует интенсивность отказов. Найти вероятность того, что прибор откажет в первый год службы.

Решение. Средний срок службы M(T)=1/λ=1/0,1=10 лет.

$P\{T<1\}=F(1)=1-e^{-0{,}1}=0{,}095$, т.е. примерно 10% всех приборов данного типа выходят из строя в первый год работы.

§13. Нормальное распределение.

Непрерывная случайная величина X называется распределенной по нормальному закону (или закону Гаусса, а так же Гаусса-Лапласа), если ее плотность вероятности такова:

$$f(x) = c * \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]$$

где константы с и $\sigma>0$, константа а - любое число, exp (t) обозначает e^t.

Нормирующий множитель С однозначно определяется из условия $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ и равен $c = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

Вычисления показывают, что

$\mu = M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right] dx = a; D(X) = \sigma^2$, так что нормальное распределение зависит от двух параметров: a=M(X) и σ^2=D(X). Это кратко запишем так:X=N[a,σ^2] - нормальная величина X с M(X)=a, D(X)=σ^2. Величину ξ=N(0,1) с нулевым средним и единичной дисперсией называют стандартной нормальной. Ее плотность вероятности

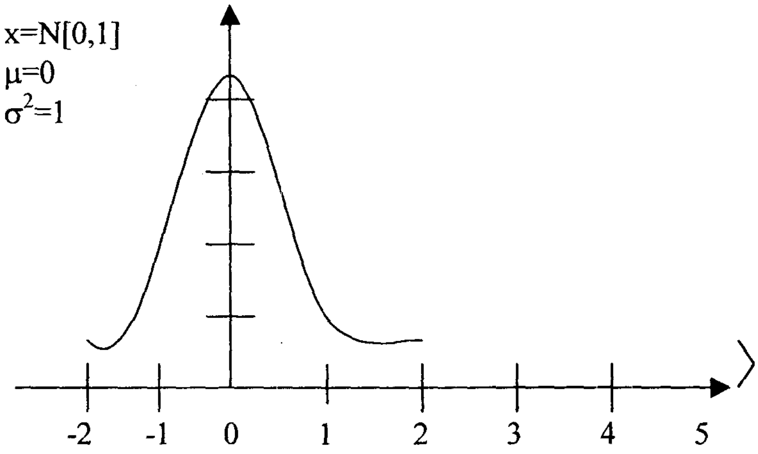
$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Плотность вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

больше нуля в любой точке x оси абсцисс; она достигает максимума, равного $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, в точке, лежащей на оси симметрии графика функции *f*. По обе стороны от точки x=μ

кривая плоскости симметрично опускается, напоминая холм или колокол и имея перегиб в точках $\mu-\sigma$ и $\mu+\sigma$



Уменьшение параметра μ означает сдвиг кривой f(x) влево на величину μ (без изменения формы). Уменьшение стандартного (или среднеквадратичного) отклонения σ означает растяжение графика функции f по вертикали и сжатие его вдоль оси x (при сохранении единичной площади под кривой). Увеличение σ означает «сплющивание» распределения вертикали.

Нормальное распределение (или почти нормальное) часто встречается в окружающем мире, оно как бы норма (отсюда название).

Размеры механически обрабатываемых деталей, ошибки всевозможных приборов, производительность труда, урожайность сельхозкультуры с 1 га, величина снежного покрова на крыше здания 1 января каждого года – случайные нормальные величины. Для стандартной нормальной величины ξ=N[0,1].

$$\Phi(x) = P\{\xi < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

Это - площадь под кривой f слева от точки x.

Ее таблицы есть в большинстве книг по теории вероятностей. Вот некоторые ее значения.

x	-3	-2	-1	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,7	1
Ф(x)	0,0014	0,023	0,159	0,500	0,54	0,579	0,618	0,655	0,691	0,758	0,841

x	1,2	1,4	1,5	1,7	2	2,5	3	3,5	4
Ф(x)	0,885	0,919	0,933	0,955	0,977	0,994	0,9986	0,9998	0,99997

Часто в целях экономии места дают значения функции Ф лишь при x≥0, тогда при x<0 следует пользоваться формулой Ф(x)=1-Ф(-x). Например, Ф(-2)=1-Ф(2)=1-0,977=0,023.

Пользуясь таблицами, надо быть внимательным. Нередко через Ф(x) обозначают функцию Лапласа, отличающуюся от формулы функции распределения стандартной нормальной величины лишь тем, что вместо -∞ нижний предел равен 0. В старых книгах предпочитали пользоваться этой функцией. Важное свойство нормального закона - воспроизводимость: сумма (разность) нормальных величин является нормальной величиной.

Вычисление вероятностей для нормальной величины.

Пусть X=N(μ,σ) и заданы числа μ,σ,a,b. Надо найти вероятность попадания случайной величины X в промежуток (a,b): P{a<X<b}=P{a<X<b}=F_X(b)-F_X(a). Прямое вычисление для X ее функции распределения F_X(x) в точке x в виде $F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]dt$ затруднительно, т.к. этот интеграл не выражается через элементарные функции. Поэтому дело сводят к уже табулированной функции Ф следующим способом: сделаем замену переменной $Z=\frac{t-\mu}{\sigma}$ в интеграле. Тогда $dZ = \frac{dt}{\sigma}$ и

$$F_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{Z^2}{2}} dz = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Значит,

$$P\{a < X < b\} = P\{a \le X \le b\} = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Пример20.. Допустим, что рост X мужчины подчиняется закону N[172,6], т.е. является нормальной величиной со средним значением 172 см. и стандартным отклонением σ=6см. Найти долю мужчин, чей рост лежит между 190 и 200 см., и долю мужчин с ростом меньше 180 см.

Решение.

1).

$$P\{190 < X < 200\} = \Phi\left(\frac{200-172}{6}\right) - \Phi\left(\frac{190-172}{6}\right) = \Phi(4{,}67) - \Phi(3) =$$

$= 1 - 0{,}9986 = 0{,}0014$ - в среднем на 10000 мужчин приходится 14 человек с ростом X>190см.

Замечание. При x>4 можно считать Ф(x)=1.

2).

$P\{X < 180\} = \Phi\left(\frac{180 - 172}{6}\right) = \Phi(1{,}333) = 0{,}909$, т.е. 90% мужчин имеют рост меньше 180 см.

Замечание. В жизни все обстоит сложнее, чем в схемах. Так, взятые здесь данные с M(X)=172 см., возможно устарели, поскольку последние десятилетия наблюдается акселерация и средний рост населения увеличивается. Безусловно, такие данные для мужчин РФ есть в военкоматах..

Пример21.. Даны две независимые случайные величины X=N[18,4] и Y=[8,3]. Для величины Z=X-Y найти вероятность ее попадания в интервал (10,20).

Решение.

Z=N[M(Z)),D(Z)], M(Z)=M(X-Y)=M(X)-M(Y)=18-8=10;

В силу независимости X и Y:

D(Z)=D(X-Y)=D(X)+D(Y)=16+9=25;

Z=N[10,5];

$$P\{10 < Z < 20\} = \Phi\left(\frac{20-10}{5}\right) - \Phi\left(\frac{10-10}{5}\right) = \Phi(2) - \Phi(0) = 0{,}977 - 0{,}5 = 0{,}477. \square$$

Вычислим теперь срединное отклонение E случайной величины X=N[μ,σ], исходя из условия P{|X–μ|<E}=1/2. Находим:

$$\frac{1}{2} = P\{\mu - E < X < \mu + E\} = \Phi\left(\frac{\mu + E - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - E - \mu}{\sigma}\right) =$$

$$\Phi\left(\frac{E}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{E}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{E}{\sigma}\right)-\left[1-\Phi\left(\frac{E}{\sigma}\right)\right]=2\Phi\left(\frac{E}{\sigma}\right)-1.$$

$\Phi\left(\frac{E}{\sigma}\right)$=0,75. По подробной таблице функции Ф находим $\Phi\left(\frac{E}{\sigma}\right)=0{,}674$, т.е. отложив от центра распределения в обе стороны по 0,674 σ, мы захватим 50% площади кривой f(x).

Уместно привести один из критериев, связывающих теорию с опытом: если вероятность осуществления события пренебрежимо мала, то это событие практически не должно осуществиться в единичном опыте и называется практически невозможным. Для нормальной величины X – это попадание её за пределы промежутка μ±3σ, и это правило называют правилом 3-х сигм. Напротив, событие, имеющее вероятность, близкую к 1, принято считать практически достоверным. Сев в поезд, везущий нас к месту работы или отдыха, мы не считаемся в силу принципа практической достоверности с возможностью какой-то катастрофы и уверены, что доберемся до цели поездки нормально.

Распределение (хи квадрат) χ^2_n

Рассмотрим n нормально распределенных независимых случайных величин, причем математическое ожидание каждой равно нулю, а дисперсия - единице. Сумму квадратов таких случайных величин обозначим:

$$\chi_n^2=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2, \quad где \quad \xi_i=N\,[0,1]$$

Закон распределения такой суммы называется законом «хи квадрат» с n степенями свободы. Если случайные величины связаны одним линейным соотношением, то число степеней свободы k=n-1. С увеличением числа степеней свободы распределение приближается к нормальному.

Распределение Стьюдента.

Из двух независимых случайных величин $\xi=N(0,1)$ и χ^2_n, деля одну на корень из другой, создадим случайную величину $t_n = \dfrac{\xi}{\sqrt{\chi_n^2 / n}}$. Распределение величины t_n называют t-распределением (или распределением Стьюдента) с n степенями свободы. Поскольку в числителе стоит нормальная стандартная величина, то распределение t_n симметрично относительно оси ординат. Это распределение при увеличении n неограниченно приближается к N[0,1]. При n>50 t-распределение практически совпадает с N[0,1].

F- распределение (Фишера - Снедекора)

Пусть $\chi_m^2 u \chi_n^2$ независимые и случайные величины. Отношение случайных величин χ^2_m/m и χ^2_n/n называется дисперсионным отношением и обозначается $F_{m,n} = \dfrac{\chi^2_m}{m} \bigg/ \left(\dfrac{\chi^2_n}{n}\right)$.

F - случайная величина, подчиняющаяся F-распределению с m и n степенями свободы. Поскольку среднее величин $\chi^2_m \chi^2_n$ равно 1, а дисперсия стремится к нулю с ростом m и n, то не удивительно, что F-распределение концентрируется вблизи 1 и становится все более иглообразным с ростом m и n.

Распределения χ^2_n, t_n и F имеют чрезвычайно важное значение в статистике и для них составлены многочисленные подробные таблицы.

§14. Закон больших чисел.

Этот закон выражает общий принцип, в силу которого совместное действие случайных факторов приводит при некоторых весьма общих условиях к результату, почти не зависящему от случая. Сближение частоты наступления случайного события с его вероятностью при возрастании числа испытаний (подмеченное сначала, по- видимому, на азартных играх) может служить первым примером действия этого закона.

На рубеже XVII и XVIII вв. Я.Бернулли доказал теорему, утверждающую, что в последовательности независимых испытаний по схеме Бернулли (т.е. когда вероятность p наступления интересующего нас события A не меняется от испытания к испытанию), верно соотношение

$$P\left\{\left|\frac{m_n}{n}-p\right|>\varepsilon\right\}\to 0$$ при любом $\varepsilon>0$ и $n\to\infty$;

Здесь m_n число появлений события в первых n испытаниях, $\frac{m_n}{n}$ - частота появлений.

Грубо говоря, эта теорема - простейшая форма закона больших чисел - утверждает, что с ростом числа испытаний n частота приближается к вероятности, т.е. доказывается та устойчивость частоты, о которой упоминалось в самом начале и которая прежде была подмечена экспериментально. Образно говоря, «семь раз отмерь и один раз отрежь».

П.Л.Чебышев (1867г.) доказал закон больших чисел в более общей, чем у Бернулли, форме, а именно:

Пусть мы имеем n взаимно независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ с одним и тем же математическим ожиданием μ и одним и тем же стандартным отклонением σ. Тогда среднее арифметическое значение этой случайных величин, то есть величина $\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$ при достаточно большом n будет с вероятностью, как угодно близкой к единице (практически достоверно), как угодно мало отличаться от μ.

Это частный случай закона больших чисел.

В наше время доказаны куда более общие и сложные варианты этого закона. Но содержательный смысл этого замечательного закона доступен и неспециалисту и состоит в том, что, в то время как отдельная случайная величина может часто принимать значения, далекие от ее математического ожидания (иметь большое рассеяние), среднее арифметическое большого числа случайных величин ведет себя в этом отношении иначе: такая величина очень мало рассеяна и с очень высокой вероятностью принимает значения, близкие к ее среднему значению. На практике закон больших чисел используется, например, в том, что по сравнительно небольшой пробе (выборке) судят о качестве однородного материала.

Так, о качестве хлопка, находящегося в кипе, судят по нескольким маленьким его пучочкам (штапелям), выхваченным случайно из разных мест кипы. Или о качестве большой партии зерна судят по нескольким небольшим меркам (пуркам), наполненным зернами из разных случайных мест оцениваемой партии. Или, наконец, по опросу сравнительно небольшой, сделанной с учетом случайности выборки граждан, социологи делают достаточно верные предсказания к тем или иным проблемам.

§15. Центральная предельная теорема.

Под этим названием в теории вероятностей существует ряд предельных теорем.

Смысл их в том, что при суммировании большего числа независимых или слабо зависимых случайных величин закон распределения их суммы становится близким к нормальному при выполнении некоторых условий. Суть этих условий состоит в том, что если слагаемое не является нормальной величиной, его дисперсия не должна быть слишком большой сравнительно с другими.

Например, если сложить дюжину независимых стандартных равномерных величин (т.е. 12 показателей рулетки) $X_1,X_2,...,X_{12}$=R(0,1), то их сумма $S=\sum_{i=1}^{12} X_1$ практически подчиняется нормальному закону. Именно этим способом на ЭВМ моделируют нормальное распределение.

Среднее $M(S)=M\sum_{1}^{12} X_1 = \sum_{1}^{12} MX_1 = 12*\frac{1}{2}=6\cdot$

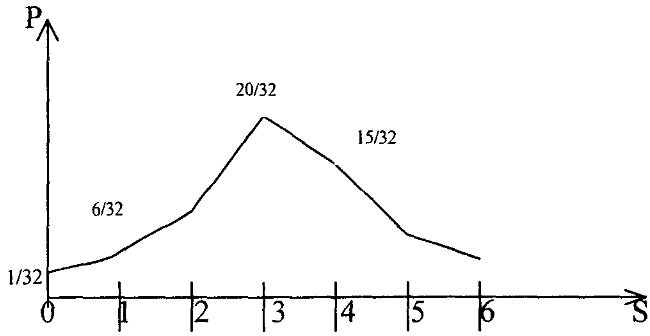
Дисперсия $D(S)=\sum_{1}^{6} DX_1 = 12*\frac{1}{12}=1\cdot$

Значит,S=N[6,1]. Тогда ξ=S-6=N[0,1]. Поэтому для получения одного случайного числа стандартного нормального закона получают 12 чисел - реализаций закона R(0,1), складывают их, получая реализацию случайной величины S и, наконец, из S вычитают 6.

Можно подумать, что центральная предельная теорема касается лишь непрерывных случайных величин. Отнюдь нет. Возьмем, например, 6 монет, на сторонах каждой стоит 0 и 1, так число X_i очков на i-й монете при ее бросании подчиняется закону

x_i	0	1
p_i	1/2	1/2

Закон распределения суммы $S=\sum_{i=1}^{6} X_i$ очков, выпадающих на всех 6 монетах, имеет симметричный вид. Величина S - число выпавших единиц - биномиальная величина с параметрами p=1/2; n=6.



Здесь

$$P\{S=0\}=\frac{1}{2^6}=\frac{1}{32}, P\{S=1\}=C_6^1 p^1(1-p)^5=\frac{6}{32},...$$

Как видим, форма многоугольника распределения суммы выпавших очков сдвинется вправо, среднее станет равным $6\cdot\frac{1}{2}=3$ вместо 1/2, дисперсия также возрастет. А при числе слагаемых $n\to\infty$ и среднее, и дисперсия $\to\infty$. Поэтому вместо S рассматривают величину $S^*=\dfrac{S-M(S)}{\sigma_S}$ - нормированную величину S.

Достоинство нормировки в том, что всегда среднее значение $M(S^*)=0$, а $D(S^*)=1$.

Действительно,

$$M(S^*)=M\left(\frac{S-M(S)}{\sigma_S}\right)=\frac{1}{\sigma_S}M(S)-M(S)=0$$

$$D(S^*) = D\left(\frac{S - M(S)}{\sigma_S}\right) = \frac{1}{\sigma_5^2}\left(D(S) - 0\right) = 1$$

В центральной предельной теореме сравниваются функции распределения нормированной суммы S_n - суммы n случайных величин и нормированной величины ξ=N(0,1) и утверждается, что с ростом числа слагаемых n функция распределения F_{Sn} суммы S_n приближается в функции распределения ξ:
при любом x $|F_{Sn}(x)-\Phi(x)| \to 0$ при $n \to \infty$.

Условия этой теоремы мы рассматривать не будем, а рассмотрим ее частный случай: предельную (интегральную) теорему Муавра-Лапласа.

Теорема Муавра-Лапласа - один из первых вариантов центральной предельной теоремы, относится к биномиальным величинам.

Теорема Муавра-Лапласа

Пусть мы имеем дело со схемой Бернулли: р - вероятность успеха в единичном испытании, n - число таких испытаний, X_n - число успехов в n единичных испытаниях - биномиальная величина с параметрами n и p>0.

Нормировкой получим $X_n^* = \dfrac{X_n - MX_n}{\sqrt{DX_n}} = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{npq}}$.

Тогда при неограниченном увеличении n функция распределения величины X* неограниченно приближается к функции распределения стандартного нормального закона N(0,1) и, следовательно, $\lim P\{a<X^*_n<b\}=\Phi(b)-\Phi(a)$.

На практике это позволяет при больших значениях n вычислять вероятность для биномиальной величины.

Так, пусть при большом n надо вычислить для числа успехов X_n вероятность попадания в отрезок $[m_1, m_2]$, где m_1, m_2 - заданные натуральные числа.

$$P\{m_1 \le X_n \le m_2\} \approx P\left\{\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right\} = P\{a \le X^* \le b\} =$$

$$= \Phi(b) - \Phi(b)$$

где $a = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $b = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Это соотношение строго верно в пределе. При конечном n лучше ввести поправку $a = \dfrac{m_1 - np - \frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}$, $b = \dfrac{m_2 - np + \frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}$.

Пример22. В автопарке 100 автобусов. Из опыта известно, что вероятность отказа в течении суток мотора автобуса равна 0,1. Найти вероятность того, что за сутки неисправных моторов будет больше 5.

Решение. n=100, p=0,1 - вероятность отказа мотора, np=10, X - число автобусов с отказавшим за день мотором.

1-ый путь строгий, но утомительный:

$P\{X>5\} = P_{6,100} + P_{7,100} + \ldots + P_{100,100}$

где $P_{m,100} = C_{100}^{m} p^{m} (1-p)^{100-m}$ - совершенно не практичный путь, неприемлемо.

Лучше $P\{X>5\} = 1 - P\{X \le 5\} = 1 - P_{0,100} - P_{1,100} - P_{2,100} - \ldots - P_{5,100}$ - лучше, но тяжело.

2-ой путь. С помощью теоремы Муавра-Лапласа

$$P\{X>5\}=P\{6\le X\le 100\}=\Phi\left(\frac{100-np+\frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{6-np-\frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{100{,}5-10}{\sqrt{9}}\right)-\Phi\left(\frac{5{,}5-10}{\sqrt{9}}\right)=\Phi(30)-\Phi(-1{,}5)=1-0{,}1=0{,}9$$

- в среднем в 90% всех дней года потребуется ремонт больше пяти моторов из 100 имеющихся. □

Пример23. Работница обслуживает больше 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на веретене за смену равна 0,005. Найти вероятность того, что число X обрывов не превысит 2.

Решение. n=1000, p=0,005, q=1-p=0,995, np=5, $npq=2{,}23$

1-й способ.

$$P\{X\le 2\}=P_{0,1000}+P_{1,1000}+P_{2,1000}=0{,}995^{1000}+1000*0{,}095^{999}*0{,}005+$$

$$+\frac{1000*999}{2}0{,}995^{998}*0{,}005^{2}=0{,}12$$

- строгое, но утомительное решение.

2-й способ. Формула Муавра-Лапласа.

$$P(X\le 2)=P(0\le X\le 2)=\Phi\left(\frac{2-np+0{,}5}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{2-np-0{,}5}{\sqrt{npq}}\right)=$$

$$\Phi\left(\frac{-2{,}5}{2{,}23}\right)-\Phi\left(\frac{-5{,}5}{2{,}23}\right)=\Phi(-1{,}12)-\Phi(-2{,}47)=0{,}13-0{,}007=0{,}124$$

.

3-й способ. Биномиальное распределение при большом n и малом p хорошо приближается пуассоновским распределением с $\lambda=np=5$.

$$P\{X\le 2\} = P_0 + P_1 + P_2 = e^{-5} + \frac{\lambda}{1!}e^{-5} + \frac{\lambda^2 e^{-5}}{2!} = e^{-5}\left(1+5+\frac{25}{2}\right) = \frac{18{,}5}{148} = 0{,}125$$

Как видим, все три способа дают близкие результаты.

§17. Моменты случайных величин, коэффициент корреляции.

Мы близко познакомились с двумя неслучайными числами: средним и дисперсией случайной величины. Они относятся к так называемым моментам распределения. Число $\mu_к$, равное среднему значению случайной величины $X^к$, называют к-м начальным моментом случайной величины X:

$$\mu_K = M(X^K) = \begin{cases} \sum\limits_i x^K{}_i p_i & (*) \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^K f(x)dx & (**) \end{cases}$$

(*) - дискретная случайная величина X, (* *) - непрерывная.

С начальным моментом 1-го и 2-го порядка мы имели дело:

$\mu_1=\mu=M(X)$, $\mu_2=M(X^2)$, и выражали через них дисперсию $D(X)=\mu_2-\mu^2$.

Центральный момент к-го порядка для величины X - это число $\nu_к=M[(X-\mu)^к]$, т.е. мы центрируем X (вычитаем ее центральный момент второго порядка: $D(X)=\nu_2$.

Третий начальный момент величины $\frac{X}{\sigma}, т.е. M\left[\left(\frac{X}{\sigma}\right)^3\right] = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$, называется коэффициентом асимметрии.

Для симметричных распределений он равен нулю; для распределений : показательное, χ^2, логнормальное («хвост» распределения тянется направо) он положителен.

Даже если распределение симметрично (например Стьюдента), желательно сравнить его с нормальным по степени островершинности. Для этого используют коэффициент эксцесса, равный

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{M(X-\mu)^4}{\sigma^4} - 3 \cdot$$

Для нормального закона $\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3 u \gamma_2 = 0$

Если коэффициент эксцесса положительный, то график плотности рассматриваемого распределения в окрестности моды имеет более острую и более высокую вершину, чем нормальная кривая.

В случае системы двух случайных величин (X,Y) в качестве одного из показателей связи между компонентами X и Y служит коэффициент корреляции *r=rxy*.Число *r* является средним значением произведения нормированных случайных величин.

$$X^* = \frac{X-\mu_x}{\sigma_x} \, u \, Y^* = \frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}; r = M\left[\left(\frac{X-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right],$$ где μ_X и μ_Y - средние значения величин X и Y, σ_X и σ_Y - стандартные отклонения X и Y.

Если провести элементарные преобразования, то из формулы легко получить другое выражение

$r=(M(XY)-\mu_X\mu_Y)/\sigma_X\sigma_Y$

Числитель формулы нам встречался в §5 и был назван ковариацией.

Коэффициент корреляции r обладает свойствами:

1) всегда $-1 \le r \le 1$;
2) $r=\pm 1$, если X и Y связаны линейной зависимостью: Y=aX+b. Например, если Y=2X+1, то $r=1$, а если Y=-2X+1, то $r=-1$;
3) если X и Y независимы, то $r=0$;
4) Коэффициент r не меняется по модулю при линейных преобразованиях компонент, например, у U=2X+7 и Y=3X-1 он точно такой же, как у X и Y: $r_{xy}=r_{uv}$.
5) если X и Y нормальные случайные величины, то из $r=0$ следует что X и Y. Независимы.

Пример 24. Найти коэффициент корреляции, если система (X,Y) дискретных случайных величин задана таблицей вероятностей

x_i / y_j	1	2
0	0,1	0,2
3	0,3	0,4

Итак, в каждом опыте мы имеем один из четырех исходов:

1) {X=0, Y=1}, 2) {X=0, Y=2} ,3) {X=3, Y=1} и 4) {X=3,Y=2} и вероятности их соответственно 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; $\sum_i \sum_j p_i = 1$.

Находим

$\mu_X = M(X) = 0*0,3+3*0,7=2,1$

$M(X^2)=0^2*0,3+3^2*0,7=6,3$

$D(X)=M(X^2)-(MX)^2=6,3-2,1^2=1,89$, $\sigma_X=\sqrt{1.89}=1.37$

$\mu = M(Y) = 1*0,4+2*0,6=1,6$

$M(Y^2)=1^2*0,4+2^2*0,6=2,8$

$D(Y)=M(Y^2)-(MY)^2=2,8-1,6^2=0,24$, $\sigma_Y=\sqrt{0.24}=0.49$

$M(XY)=\sum_i\sum_j x_i y_j p_{ij} = 0*1*0,1+0*2*0,2+1*3*0,3+3*2*0,4=0,9+2,4=3,3$

По формуле $r_{XY} = \dfrac{3,3-2,1*1,6}{1,37*0,49} = \dfrac{-0,06}{0,67} = -0,09$. □

Коэффициент корреляции удовлетворительно отражает связь распределений, близких к нормальным. При этом он показывает, насколько зависимость между X и Y близка к линейной. Для других распределений он может быть мало пригоден.

Задачи для домашних заданий.

Вариант 1.

Задача 1. Вероятность попадания в мишень Р=0,8. Стрелок имеет 4 патрона и ведет стрельбу до первого попадания в мишень. Написать закон распределения случайной величины X, равной числу израсходованных патронов.

Вычислить: 1) М(х); 2) Д(х); 3) $P(-2 \le X \le 1{,}3)$; 4) $P(3 \le X \le 8)$. Построить функцию распределения F(x).

Задача 2. В коробке находится 6 красных и 4 черных шара. Достают из коробки первый раз 3 шара, а затем еще 2. Написать закон распределения системы случайных величин (X,Y), где X - количество черных шаров среди трех, а Y - количество черных среди двух шаров, вынутых из коробки.

Задача 3.

X	-1	2	4
вер.	0.2	?	0.4

Y	0	1	2
вер.	?	0.5	0.1

Написать закон распределения для Z=2X+Y, вычислить M(Z), Д(Z). Чему равны $M(X^2)$ и Д(X-Y)?

Задача 4. Плотность вероятности задана в виде:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < -2 \\ Ax^2, -2 \le x \le 3 \\ 0, x > 3 \end{cases}$$

Найти: 1) А, 2) М(х), 3) Д(х), 4) $P(0 \le X \le 2M)$, 5) вычислить вероятность P_4(более двух раз $x \in [M, M+Д]$) при четырех испытаниях.

Задача 5. Случайная величина X распределена по нормальному закону N (1;3). Вычислить вероятности случайных событий: 1) X более 6, 2) произвели 2 испытания, в первом X $\in$[M, Д], а во втором X$\in$[0,2], 3) произвели 10 испытаний, хотя бы 2 раза X$\in$[M,M+ Д].

Задача 6. Вычислить вероятность того, что хотя бы один раз X$\in$[1,2] при трех испытаниях, если X распределено по равномерному закону R[-2;2].

Задача 7. Случайный вектор равномерно распределен в треугольнике AOB, где A(2,0), O(0,0), B(0,4). Найти: плотность системы и плотности компонент, условные плотности, M(X/У=1) и M(У\X=0,5); зависимы ли X и У?

Задача 8. Случайные величины X и У независимы и распределены по показательным законам с параметрами $\lambda_x = 2,\quad \lambda_y = 3, U = 3X, V = 2Y.$ Найти плотность и функцию распределения случайного вектора (U, V), а также вероятность P(0<u<1,2<v<3).

Задача 9. Случайные величины X=N[0,2], Y=N[-1,3] распределены по нормальным законам, $r_{xy} = -\frac{1}{2}.$ Найти линию регрессии У на X, M(У\X=0), σ(X\У).

Вариант 2.

Задача 1. Бросаем игральную кость до первого появления шестерки. Случайная величина X равна количеству бросков кости. Найти закон распределения случайной величины X, вычислить M(X), если произвели не более 3 бросков; вычислить

Д(X), функцию распределения F(x) при тех же условиях; вычислить вероятности событий
$X\in[-2,1,3]$и $X\in[3,8]$.

Задача 2. В коробке лежат 5 белых и 3 желтых конверта. Вынимаем 3 конверта и X- количество желтых среди них, затем вынимаем два конверта и У - количество желтых среди двух вынутых. Написать закон распределения системы случайных величин (X,У).

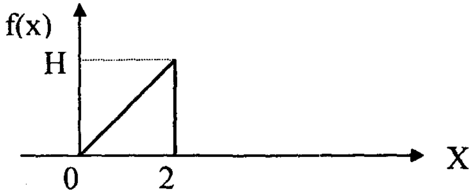
Задача 3.

X	2	0	4
вер.	0.7	?	0.1

Y	-2	0	1
вер.	0.6	0.2	?

Написать закон распределения Z=X+2Y и вычислить M(3X+6-Y) и Д(3Y+4), M(Z), Д(Z), $M(X^2)$.

Задача 4. Плотность вероятности задана в виде графика:



Определить H; вероятность события $X\in$[M, Д+M]; вероятность того, что при 4 испытаниях более двух раз X попала в интервал [M, Д+M].

Задача 5. Случайная величина распределена по нормальному закону N(0;4). Вычислить: 1) вероятность того, что

$X\in[-6;1]$; 2) вероятность того, что при 11 испытаниях 5 раз X попадет в интервал [М,Д]; 3) вероятность того, что в первом испытании $X\in[-6;1]$, а во втором $X\in[0;2]$.

Задача 6. Вычислить вероятность того, что из четырех испытаний хотя бы один раз X попадет в интервал [-1;6], если распределено по равномерному закону R[0;10].

Задача 7. Случайный вектор равномерно распределен в треугольнике АОВ, где A(4,0), O(0,0), B(0,2). Найти М(Х), М(У), Д(Х), Д(У) и уравнение линий регрессии.

Задача 8. Случайные величины X и У независимы и распределены по показательным законам с параметрами $\lambda_x = 3$, $\lambda_y = 2$. $Z = 2X + 3Y$. Найти M(Z), Д(Z), линии регрессии.

Задача 9. Случайные величины X=N[0,2], Y=N[-1,3] распределены по нормальным законам, $r_{xy} = \frac{1}{2}$. Найти плотность случайного вектора Z=2X-Y, M(Z), D(Z) и вероятность P(0<Z<1).

Вариант 3.

Задача 1. В ящике 5 изделий, среди которых одно бракованное. Изделия извлекают одно за другим до тех пор, пока не будет вынуто бракованное. Найти закон распределения случайной величины X, равной числу вынутых изделий. Вычислить М(Х), Д(Х), функцию распределения F(X). Вычислить вероятности событий
$X\in[-2;1.3]$ и $X\in[3;8]$.

Задача 2. В ящике лежат 6 красных и 3 белых шара. Вынимают два шара и X - количество белых шаров среди них, затем вынимают 3 шара и Y - количество белых шаров в тройке. Написать закон распределения системы случайных величин (X;Y).

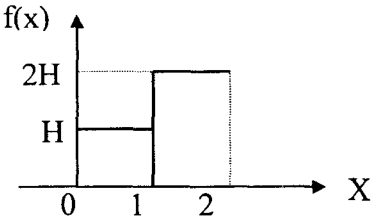
Задача 3.

X	-2	0	2
вер.	0.2	?	0.2

Y	-3	0	2
вер.	?	0.3	0.5

Написать закон распределения случайной величины Z=X+Y, вычислить M(Z), Д(Z), M(3+2Y), Д(3X-6Y), $M(X^2)$.

Задача 4. Плотность вероятности случайной величины задана в виде графика:



Определить H; вероятность события X>2M; вероятность того, что при трех испытаниях более одного раза
X∈[M, M+Д].

Задача 5. Случайная величина распределена по нормальному закону N(1;3). Вычислить: 1) вероятность того, что X∈[-6;1], 2) вероятность того, что в первом испытании X∈[M,Д], а во втором X∈[0;2], 3) вероятность того, что при 11 испытаниях 5 раз X∈[M,Д].

Задача 6. Вычислить вероятность того, что из четырех испытаний хотя бы два раза X попадет в интервал [1;2], если распределено по равномерному закону R(-4, 2).

Задача 7. Случайный вектор равномерно распределен в треугольнике AOB, где A(2,0), O(0,0), B(0,3). Найти коэффициент корреляции r_{xy}, Cov (2X,-3Y).

Задача 8. Случайные величины X и У независимы и распределены по показательным законам с параметрами $\lambda_x = \lambda_y = 2$,U=X+Y, V=2X-βY. При каком значении параметра β случайные векторы U и V некоррелированы?

Задача 9. Нормальные случайные величины X=N[−1,2], Y=N[2,1] независимы. T=2X+1,Z=2Y−2. Найти M(T), M(Z), $Д(T)$, $D(Z)$, и плотность случайного вектора (T,Z) , а так же вероятность P(|T|≤1; |Z|≤1).

Вариант 4.

Задача 1. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти закон распределения случайной величины X, равной числу поврежденных изделий; чему равно M(X), Д(X), построить функцию распределения F(X) и вычислить вероятности событий X∈[−2;1.3] и X∈[3;8].

Задача 2. В коробке имеются 3 красных и 6 белых шаров. Вынимаем 3 шара и X - количество красных шаров среди них, затем вынимаем два шара и Y - количество красных шаров во второй паре. Написать закон распределения системы случайных величин (X,Y).

Задача 3.

X	-1	0	1
вер.	0.2	0.3	?

Y	-3	0	2
вер.	?	0.5	0.3

Написать закон распределения случайной величины $Z=2X+Y$. Вычислить $M(Z)$, $Д(Z)$, $M(3+2Y)$, $Д(3X-6Y)$, $M(X^2)$.

Задача 4. Плотность вероятности задана в виде:

$$f(x)=\begin{cases} 0, x\le 0 \\ A\cos x, 0<x<\dfrac{\pi}{2} \\ 0, x\ge\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Определить A. Вычислить вероятность того, что x>3M. Определить вероятность того, что при 4 испытаниях два раза $X\in[0;M/2]$.

Задача 5. Случайная величина распределена по нормальному закону N(3;1). Вычислить вероятности случайных событий: 1) $X\in[-1;4]$ 2) из трех испытаний хотя бы один раз $X\in[M,M+2Д]$, 3) из 14 испытаний 4 раза $X\in[-1;4]$.

Задача 6. Вычислить вероятность того, что при семи испытаниях хотя бы один раз X попадет в интервал [0;2] , если распределено по равномерному закону R(-1;5).

Задача 7. Случайный вектор (X,У) равномерно распределен в прямоугольнике $0<X<2, 0<Y<4$. Найти плотность случайной величины $Z=X+Y$.

Задача 8. Случайные величины X и У независимы и распределены по показательным законам с параметрами $\lambda_x = 1$, $\lambda_y = 2$, $U=3X$, $V=2Y$. Найти плотность и функцию распределения случайного вектора (U,V), M(3X+2Y), D(3X+2Y).

Задача 9. Коэффициент корреляции нормальных случайных величин X=N[-2,1], Y=N[1,2], $r_{xy} = \frac{1}{3}$. Найти M(Y\X=0), M(X\Y=1), а также D(2X-3Y).

Вариант 5.

Задача 1. X - случайная величина, равная числу мальчиков в семьях с 5 детьми. Построить закон распределения X, вычислить M(X), Д(X), построить функцию распределения F(X), вычислить вероятность событий $X\in[-2;1.3]$ и X[3;8].

Задача 2. В коробке 5 белых и 3 красных соломинки. Вынимаем одну соломинку и X - количество вынутых белых соломинок, затем вынимаем две соломинки и Y - количество белых соломинок в паре. Написать закон распределения системы случайных величин (X,Y).

Задача 3.

X	-1	0	1
вер.	0.2	0.3	?

Y	0	1	2
вер.	0.3	?	0.6

Написать закон распределения случайной величины $Z=X^2+Y$. Вычислить M(Z), Д(Z), M(4X+Y), Д(3Y-2X), $M(X^2)$.

Задача 4. Плотность случайной величины задана в виде:

$$f(x)=\begin{cases} 0, x\le 0 \\ A\sin x, 0<x<\dfrac{\pi}{2} \\ 0, x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Определить А. Вычислить вероятность событий: 1) X>3M, 2) из четырех испытаний два раза $X\in[0;M/2]$.

Задача 5. Случайная величина распределена по нормальному закону N(3;1). Вычислить вероятность случайных событий: 1) $X\in[1;6]$; 2) из двух испытаний один раз переменная $X\in[1;6]$. 3) произвели 10 испытаний. Вычислить вероятность того что хотя бы два раза $X\in[M,M+D]$.

Задача 6. Вычислить вероятность того, что при пяти испытаниях хотя бы один раз X попадет в интервал [-1;1], если распределено по равномерному закону R[-3;0].

Задача 7.

Случайный вектор (X,У) равномерно распределен в прямоугольнике $0\le X\le 3, 0\le Y\le 2$. Z=X+Y. Найти M(Z), D(3X-Y), вероятность $P(1\le Z\le 3)$.

Задача 8. Случайные величины X и У независимы и распределены по показательным законам с параметрами $\lambda_x=3,\quad \lambda_y=2$. Найти вероятность P(0<Z<4), где Z = X+Y.

Задача 9. Нормальные случайные величины X=N[0,2], Y=N[-1,2] независимы. Найти плотность случайного вектора Z=2X-5Y и вероятность $P(|Z| \le 1)$.

Вариант 6.

Задача 1. Бросаем неправильную игральную кость. На ее гранях написано три раза 5, два раза 7 и один раз 1. Написать закон распределения случайного числа Z, равного количеству выпадения числа 5 при трех бросаниях. Вычислить M(Z), Д(Z), написать функцию распределения F(Z); вычислить вероятности событий $Z \in [-2;1.3]$ и $Z \in [3;8]$

Задача 2. В коробке 6 красных и 3 белых шара. Вынимаем 3 шара и X - количество белых шаров в тройке, затем вынимаем два шара и Y - количество белых шаров в паре. Написать закон распределения системы случайных величин (X,Y).

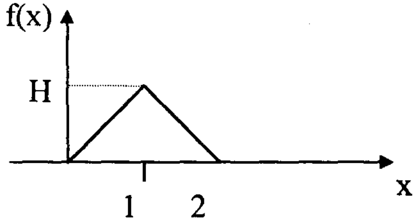
Задача 3.

X	-3	0	2
вер.	?	0.5	0.3

Y	-2	0	2
вер.	?	0.2	0.2

Написать закон распределения Z=X+Y. Вычислить: M(Z), Д(Z), M(3+2Y), Д(3X-6Y), $M(X^2)$.

Задача 4. Вероятность случайной величины задана графически:



Определить Н. Вычислить вероятность следующих событий: 1) X>1.5M; 2) из четырех испытаний три раза $X \in$[Д;М].

Задача 5. Случайная величина распределена по нормальному закону N(2;1). Вычислить вероятности следующих событий: 1) $X \in$[-1;6], 2) в первом испытании $X \in$[-1;6], а во втором $X \in$[M;M+Д]; 3) из 14 испытаний 6 раз $X \in$[M;M+Д].

Задача 6. Вычислить вероятность того, что при четырех испытаниях хотя бы один раз X попадет в интервал [М+Д;М+3Д], если распределено по равномерному закону R[0;4].

Задача 7 .Случайный вектор (X,У) равномерно распределен в квадрате 0<X,Y<1 Z=2X+5Y. Найти M(Z),D(Z), f(Z).

Задача 8. Случайные величины X и У независимы и распределены по показательным законам с параметрами $\lambda_x = 2, \quad \lambda_y = 3,$

U=2X+1, V=3У+2. Найти M(U),M(V), D(U), D(V) и плотность f(U,V).

Задача 9. Коэффициент корреляции нормальных случайных величин X=N[0,3], Y=N[-1,2] равен $r_{xy} = \frac{1}{4}$.При каком β случайный вектор U=X-βY u V=βX+2Y некоррелированы?

Вариант 7.

Задача 1. Стрелок имеет 4 патрона и ведет стрельбу до первого попадания с вероятностью попадания при одном выстреле p=0,7. Z - число израсходованных патронов. Найти закон распределения Z, вычислить М(Z), Д(Z), написать функцию распределения F(Z), вычислить вероятность событий $Z \in [-1;1.3]$ и $Z \in [3;8]$.

Задача 2. В столе лежат 5 белых и 3 желтых конверта. Вынимаем один конверт и X равен 1, если он белый и 0 в противоположном случае. Затем вынимаем два конверта и Y - количество белых конвертов среди двух вынутых. Написать закон распределения системы случайных величин (X,Y).

Задача 3.

X	-1	0	1
вер.	0.2	0.3	?

Y	0	1	2
вер.	0.3	?	0.6

Написать закон распределения случайной величины $Z=X^2+Y$. Вычислить М(Z), Д(Z), М(4X+Y), Д(3Y-2X+5), $M(X^2)$.

Задача 4. Плотность вероятности случайной величины задана в виде:

$$f(x)=\begin{cases} 0, x \le 0 \\ Ae^x, 0 < x < 1 \\ 0 \quad , x \rhd \ 1 \end{cases}$$

Определить А. Вычислить вероятности следующих событий: 1) 0<x<M; 2) из трех испытаний два раза $X \in [M;\infty]$.

Задача 5. Случайная величина распределена по нормальному закону N(2;2). Вычислить вероятность следующих событий: 1) $X \in [M;M+Д]$; 2) из 14 испытаний 8 раз $X \in [M;M+Д]$.

Задача 6. Вычислить вероятность того, что при пяти испытаниях хотя бы два раза X попадет в интервал [0;M], если распределено по равномерному закону R[0;6].

Задача 7. Случайный вектор (X,У) распределен в круге $x^2 + y^2 \le 4$. Найти M(x),M(y), D(x), D(y) и r_{xy}. Указать линии регрессии.

Задача 8. X и У независимы и распределены по показательным законам, причем M(X)=M(У). Найти M(X),M(У), D(X), D(Y), если вероятность попадания вектора (X,У) в квадрат $0 \le X, Y \le 1$ равна 0,25.

Задача 9. X и У нормальные случайные величины , причем M(X)=1, M(У)=2, D(X)=D(Y)=5, $r_{xy} = -0{,}5$. Найти условную плотность распределения случайного вектора У,если X=2.

Вариант 8.

Задача 1. Монету бросают 5 раз. Написать закон распределения случайной величины Z, равной разности между удвоенным количеством выпадений герба и количеством выпавших «решеток». Вычислить M(Z), Д(Z), написать выражение функции распределения F(Z), вычислить вероятность того, что $Z \in [-2;1.3]$ и $Z \in [3;8]$.

Задача 2. В коробке лежат 3 красных и 6 синих карандашей. Вынимаем три карандаша и X - количество красных карандашей среди них. Затем вынимают один карандаш и Y равно количеству красных карандашей. Написать закон распределения системы случайных величин (X,Y).

Задача 3.

X	-1	0	1
вер.	0.3	0.3	?

Y	-3	0	2
вер.	?	0.5	0.3

Написать закон распределения случайной величины Z=2X+Y. Вычислить М(Z), Д(Z), М(3+2Y), Д(3X-6Y+5), $M(X^2)$.

Задача 4. Плотность вероятности случайной величины задана следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases} 0; x \le 1 \\ A\ln x; 1 < x < e^2 \\ 0; \quad x > e^2 \end{cases}$$

Определить А. Вычислить вероятности следующих событий: 1) X∈[M;2M], 2) из трех испытаний два раза X∈[0.5;1.5].

Задача 5. Случайная величина распределена по нормальному закону N(4;2). Вычислить вероятности следующих событий: 1) X∈[0;6]; 2) произвели два испытания, оба раза X∈[M;M+Д]; 3) из 10 испытаний 6 раз X∈[M;M+Д].

Задача 6. Вычислить вероятность того, что из трех испытаний хотя бы один раз X попадет в интервал [0;M], если распределено по равномерному закону R[1;6].

Задача 7. Случайный вектор (X,У) равномерно распределен в полукруге $x^2+y^2 \le 1$, У≥ 0. Найти плотность системы, плотность компонент, условные плотности и центр рассеяния.

Задача 8. Случайные величины X и У независимы и распределены по показательным законам с параметрами $\lambda_x = \lambda_y = 2.\quad Z = 2X + 4Y$. Найти M(Z), D(Z) и плотность f(z).

Задача 9. X=N[0,2], Y=N[-1,1] – независимые нормальные случайные величины. Какова вероятность, что в трех испытаниях хотя бы один раз случайный вектор Z=2X-Y примет значение в интервале $[-1,2]^2$.

Вариант 9.

Задача 1. В круг радиуса 9 вписан равносторонний треугольник. Четыре раза наугад ставим точку внутри круга. Построить закон распределения X - случайного числа попаданий точки в треугольник, вычислить M(X), Д(X), написать выражение функции распределения F(X), вычислить вероятность событий $X\in[-2;1.3]$ и $X\in[3;8]$.

Задача 2. В студенческой группе 5 юношей и 3 девушки. По списку выбирают двух человек и X - количество юношей среди них. Затем выбирают еще двух и Y - количество юношей во второй паре. Построить закон распределения системы случайных величин (X,Y).

Задача 3.

X	-1	0	1
вер.	0.5	?	0.1

Y	-2	-1	0
вер.	0.1	0.1	?

Написать закон распределения случайной величины Z=X+2Y; вычислить M(Z), Д(Z), M(3+4X), Д(Y-X+3), $M(X^2)$.

Задача 4. Плотность вероятности случайной величины задана следующим выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0; \, x \le 0 \\ Ax^3; 0 < x < 2 \\ 0 \quad , x \quad \ge 2 \end{cases}$$

Определить А. Вычислить вероятности следующих событий: 1) X∈[M;2M]; 2) из пяти испытаний три раза X∈[M;M+Д].

Задача 5. Случайная величина распределена по нормальному закону N(2;1). Вычислить вероятности следующих событий: 1) X∈[0;6]; 2) из трех испытаний два раза X∈[0;6],а один раз $X \in [-4{,}0]$, 3) произвели 9 испытаний, не менее одного раза, но не более пяти раз X∈[-4;0].

Задача 6. Вычислить вероятность того, что из пяти испытаний хотя бы один раз X попадет в интервал [0;M], если распределено по равномерному закону R[2;8].

Задача 7. Случайный вектор равномерно распределен в нижнем полукруге $X^2 + Y^2 \le 4, \quad Y \le 0.$ Найти плотность системы, плотность компонент и линии регрессии.

Задача 8. X и У независимые случайные векторы, распределенные по показательным законам с параметрами $\lambda_x = 3, \quad \lambda_y = 2.$ Найти их плотности и вероятность попадания вектора (X,У) в треугольник АОВ, где А(1,0), В(0,1), О(0,0).

Задача 9. X=N[0,1], Y=N[0,2] нормально распределенные случайные величины. Чему равен их коэффициент корреляции, если D(2X-3Y)=36?

Вариант 10.

Задача 1. Два стрелка стреляют каждый в свою мишень. Меткость первого стрелка оценивается вероятностью p=0,9, а второго - p=0,7. Каждый стрелок делает два выстрела. Случайная величина X равна разности между числом попаданий первого стрелка и числом попаданий второго. Найти закон распределения X, вычислить M(X), Д(X), написать выражение функции распределения F(X), вычислить вероятность следующих событий: 1) $X \in [-1;1.3]$; 2) $X \in [3;8]$.

Задача 2. В копилке лежит 3 рублевых монеты и 2 монеты по 5 рублей. Вынимаем две монеты и X равно количеству полученных рублей, затем вынимаем еще две монеты и Y равно количеству рублей, полученных во второй раз. Написать закон распределения системы случайных величин (X,Y).

Задача 3.

X	-1	0	1
вер.	0.2	0.1	?

Y	-2	-1	0
вер.	?	0.5	0.1

Написать закон распределения случайной величины Z=X*Y; вычислить M(Z), Д(Z), M(3X+2Y), Д(3-3Y), $M(X^2)$.

Задача 4. Плотность вероятности случайной величины задана следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases} 0; x\le 0 \\ A\sin x; 0<x<\dfrac{\pi}{2} \\ 0 \qquad x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Определить А. Вычислить вероятности следующих событий: 1) $X\in[M/3;\infty]$; 2) из четырех испытаний три раза $X\in[0;M/2]$.

Задача 5. Случайная величина распределена по нормальному закону N(3;1). Вычислить вероятности следующих событий: 1) $X\in[-1;6]$; 2) из двух испытаний один раз $X\in[М;М+2Д]$, один раз$X\in$ [-4;0]; 3) произвели 20 испытаний и четыре раза $X\in$[М;М+2Д].

Задача 6. Вычислить вероятность того, что из черырех испытаний более двух раз X попадет в интервал [1;М], если распределено по равномерному закону R[2;6].

Задача 7. Случайный вектор (X,У) равномерно распределены в правом полукруге $X^2+Y^2\le 1$, $X\ge 0$. Найти центр рассеяния, условные плотности распределения, линии . регрессии.

Задача 8 Независимые случайные величины X и У распределены по показательным законам с одинаковыми дисперсиями. Найти плотность случайного вектора(X, У), если вероятность того, что в двух испытаниях хотя бы один раз он примет значение в квадрате $0\le X\le 1$, $0\le Y\le 1$ равна 0,75.

Задача 9. X=N [0,1], Y=N[-1,2] нормальные случайные величины , $r_{xy} = \frac{1}{3}$. Найти значение параметра β, для которого случайные величины U=βX+Y, V=X-βY не коррелированы.

Вариант 11.

Задача 1. Имеем 10 деталей, среди которых 4 дефектных. Пять деталей отбирают случайным образом. Пусть X - число дефектных деталей среди отобранных. Найти закон распределения X, вычислить M(X), Д(X), написать выражение функции распределения F(X), вычислить вероятность следующих событий: 1) $X \in [-1;1.3]$; 2) $X \in [3;8]$.

Задача 2. 10 деталей, среди которых 4 дефектных, распределяют в два ящика по 5 деталей в каждый. Пусть X - число дефектных деталей в первом ящике, Y - число дефектных деталей во втором ящике. Написать закон распределения системы случайных величин (X,Y).

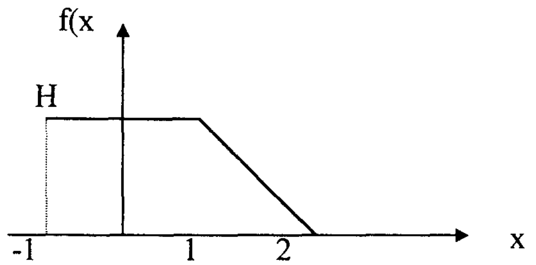
Задача 3.

X	-1	0	1
вер.	0.2	0.3	?

Y	-3	0	2
вер.	?	0.5	0.3

Написать закон распределения случайной величины Z=2X+Y. Вычислить M(Z), Д(Z), M(XY+4), Д(3-3X), $M(X^2)$.

Задача 4. Плотность вероятности случайной величины задана следующим образом:



Определить H. Вычислить вероятность следующих событий: 1) X∈[M;∞]; 2) из четырех испытаний два раза X∈[0;M].

Задача 5. Случайная величина распределена по нормальному закону N(1;4). Вычислить вероятности следующих событий: X∈[−1;6]; 2) из двух испытаний хотя бы один раз X∈[0;6]; 3) произведено 10 испытаний, количество попаданий в сегмент [0;6] от двух до пяти.

Задача 6. Вычислить вероятность того, что при пяти испытаниях менее двух раз X попадет в интервал [0;Д], если распределено по равномерному закону R[2;6].

Задача 7. Случайный вектор равномерно распределен в левом полукруге $X^2 + Y^2 \le 4, \quad X \le 0$. Найти плотность системы, плотность компонент, ковариацию и М(У/X=-1).

Задача8. Случайные величины X и У независимы и распределены по показательным законам, причем М(X)=М(У)=2. Найти плотность случайной величины Z=2X+5Y

Задача 9. Случайные величины X и У независимы и имеют равные дисперсии и распределены по нормальным законам, причем $r_{xy} = -2/3, \quad \operatorname{cov}(X,Y) = -12$. При каком значении параметра β случайные величины $U=\beta X+Y$, $V=X+2\beta Y$ некоррелированы и чему в этом случае равны их дисперсии ?

Вариант 12.

Задача 1. Стрелок попадает в цель с вероятностью $p=0,8$. Пусть X - количество патронов, истраченных стрелком до первого поражения цели. Всего стрелок получает пять патронов. Найти закон распределения X, $M(X)$, $Д(X)$, написать выражение функции распределения $F(X)$, вычислить вероятность следующих событий: 1) $X\in[-1;1.3]$; 2) $X\in[3;\infty]$.

Задача 2. Два стрелка поочередно стреляют в одну мишень до ее первого поражения. Вероятность попадания первого стрелка $p_1=0,9$; а у второго $p_2=0,7$. Пусть X - количество патронов, потраченных первым стрелком, а Y - вторым. Написать закон распределения системы случайных величин (X,Y), если у каждого стрелка по два патрона.

Задача 3.

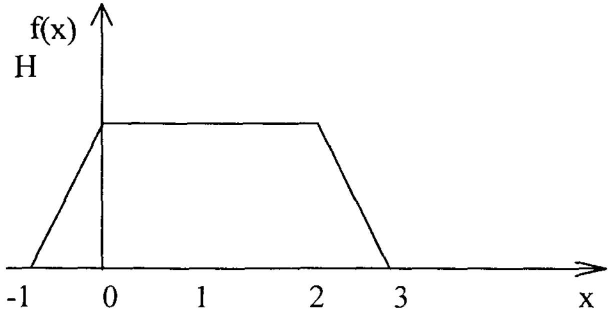
X	-3	0	2
вер.	?	0.4	0.3

Y	0	1	2
вер.	?	0.2	0.1

Написать закон распределения случайной величины $Z=2+XY$. Вычислить $M(Z)$, $Д(Z)$, $M(X-4Y+1)$, $Д(4X-Y+6)$, $M(X^2)$.

Задача 4.

Плотность вероятности случайной величины задана следующим образом:



Найти H. Вычислить вероятности следующих событий: 1) $X \in [3Д;\infty]$; 2) $X \in [0;2М]$ - два раза из четырех испытаний.

Задача 5. Случайная величина распределена по нормальному закону N(1;2). Вычислить вероятность следующих событий: 1) $X \in [-1;6]$; 2) из двух испытаний хотя бы один раз $X \in [М;М+Д]$; 3) произведено 20 испытаний, четыре раза $X \in [М;М+Д]$.

Задача 6. Вычислить вероятность того, что при шести испытаниях более двух раз X попадет в интервал [М;2М], если распределено равномерно по закону R[0;6].

Задача 7. Случайный вектор X,У равномерно распределен в треугольнике ABC, где A(2,0), B(0,3), C(-2,0). Найти плотность системы, плотность компонент, центр рассеяния.

Задача 8. Случайные величины X и У независимы и распределены по показательным законам с параметрами

$\lambda_x = 3$,. $\lambda_y = 4$. Найти функцию распределения случайного вектора (U,V), где U=3X, V=2Y и вероятность $P(|U| \le 1, |V| \le 1)$.

Задача 9. Коэффициент корреляции нормальных случайных величин X=N[-1,2], Y=N[2,1], $r_{xy} = -0{,}5$. Написать уравнения регрессии и найти M(X/У=1) и M(У/X=0).

Вариант 13.

Задача 1. Вероятность прибытия поезда без опоздания 0.9. Через станцию в день проходит 6 поездов. Пусть X - количество поездов пришедших без опоздания. Найти закон распределения случайной величины X·Вычислить M(X), D(X), вероятность событий:1)$X \in [-1;1,3]$; 2) $X \in [3;\infty]$.

Задача 2. В цех поступает 12 деталей и среди них бывает две бракованные. Детали распределяют по двум рабочим поровну, по 4 штуки каждому. Пусть X - число бракованных деталей, попавших первому рабочему, а Y - второму. Написать закон распределения системы случайных величин (X,Y).

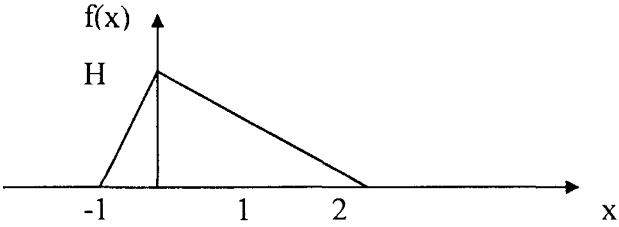
Задача 3.

X	0	1	2	3
вер.	0.1	?	0.2	0.1

Y	-1	1
вер.	0.3	?

Написать закон распределения случайной величины Z=XY, вычислить M(Z), Д(Z), M(3X-Y+5), Д(3Y-X+5), $M(2X^2+3)$.

Задача 4. Плотность вероятности случайной величины задана следующим образом:



Определить H. Вычислить вероятность следующих событий: 1) $X \in [M;Д+M]$; 2) из трех испытаний два раза $X \in [0{,}5;1{,}5]$.

Задача 5. Случайная величина распределена по нормальному закону N(4;1). Вычислить вероятности следующих событий: 1) $X \in [0;6]$; 2) произведено два испытания, оба раза $X \in [M;Д+M]$; 3) произвели 10 испытаний, шесть раз $X \in [M;Д+M]$.

Задача 6. Вычислить вероятность того, что при шести испытаниях хотя бы один раз X попадет в интервал [0;M], если распределено по равномерному закону R[1;7].

Задача7. Случайный вектор равномерно распределен в треугольнике ABC, где A(-2,0), B(0,4), C(2,0). Найти центр рассеяния и ковариацию Cov (2X,-5Y).

Задача 8. Случайные величины X и У независимы ,распределены по показательным законам с одинаковыми параметрами. Найти плотность и функцию распределения случайного вектора (X,2У), если вероятность попадания вектора (X,У) в квадрат $0 \le X,У \le 1$ равна 0,25.

Задача 9. Случайные величины X=N[-2,1], Y=N[1,2] независимы и имеют нормальное распределение. Найти плотность Z=3X-2Y и вероятность того, что $P(|Z| \le 1)$.

Вариант 14.

Задача 1. В круг вписан правильный шестиугольник. Случайным образом поставили пять точек в круг. Пусть X - количество точек, попавших в шестиугольник. Написать закон распределения случайной величины X, вычислить M(X), Д(X), вероятность попадания X в интервалы:
1) [-1;1.3]; 2) [3;∞].

Задача 2. Имеется пять шаров, среди которых три белых. Их раскладывают в две коробки: три штуки - в первую и 2 - во вторую. Пусть X - количество белых шаров попавших в первую коробку, Y - количество белых шаров, попавших во вторую коробку. Написать закон распределения системы случайных величин (X,Y).

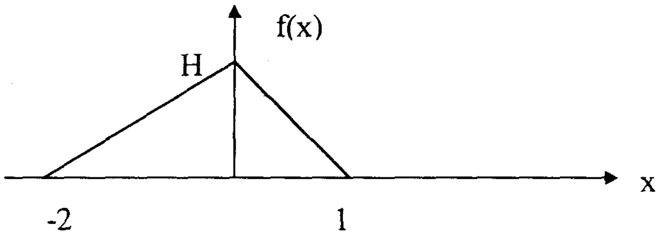
Задача 3.

X	-1	0	1	2
вер.	0.1	0.1	?	0.5

Y	1	2
вер.	0.4	?

Написать закон распределения случайной величины Z=X+Y, вычислить M(Z), Д(Z), M(3X-6Y+5), Д(3Y-6X+4), $M(X^2)$.

Задача 4. Плотность вероятности случайной величины задана следующим образом:



Определить H. Вычислить вероятности следующих событий: 1) $X \in [M;M+2Д]$; 2) из трех испытаний два раза $X \in [0,5;1,5]$.

Задача 5. Случайная величина распределена по нормальному закону N(-1;4). Вычислить вероятности следующих событий: 1) $X \in [0;6]$; 2) два раза $X \in [M;M+Д]$; 3) из 10 испытаний 6 раз $X \in [M;M+Д]$.

Задача 6. Вычислить вероятность того, что при четырех испытаниях хотя бы один раз X попадет в интервал [0;M], если распределено по равномерному закону R[2;6].

Задача 7. Случайный вектор равномерно распределен в треугольнике ABC , где A(-3,0), B(0,2), C(3,0). Найти центр рассеяния и линии регрессии.

Задача8. Случайные величины X и У независимы и имеют одинаковое показательное распределение. При каком значении параметра β $M(Z)=0$, если $Z=2\beta X+Y$?. Найти D(Z) и $r_{x,z}$ для этого значения β.

Задача 9. Случайные величины X=N[-2,2], Y=N[0,1] независимы и нормально распределены. Какова вероятность того, что в пяти испытаниях хотя бы один раз $Z \in [[0,1]$, если $Z=5X+3Y$?

Вариант 15.

Задача 1. В круг вписан правильный треугольник. Случайным образом в круг ставят четыре точки. Пусть X - количество точек, попавших в треугольник. Написать закон распределения случайной величины X, вычислить M(X), Д(X), вероятность попадания в интервалы: 1) $X \in [-1;1,5]$; 2) $X \in [3;\infty]$.

Задача 2. Имеем 10 семян двух сортов одной культуры: 6 семян сорта A и 4 семени сорта B. Отбирают две партии семян по 3 штуки для контроля всхожести. Пусть X - количество семян сорта B в первой тройке, а Y - во второй. Написать закон распределения системы случайных величин (X,Y).

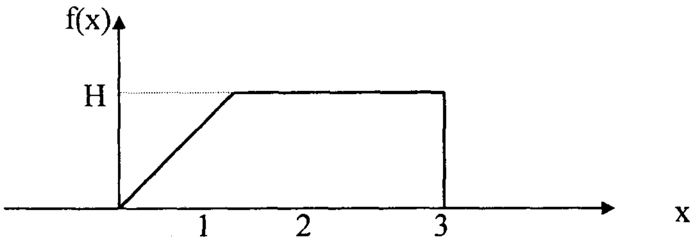
Задача 3.

X	-2	-1	0	2
вер.	?	0.2	0.3	0.1

Y	1	2
вер.	0.4	?

Написать закон распределения случайной величины Z=2Y+X, вычислить M(Z), Д(Z), M(4-X+6Y), Д(4Y-5), $M(X^2)$.

Задача 4. Плотность вероятности случайной величины □(x) задана следующим образом:



Определить Н, вычислить вероятность следующих событий: 1) $X \in [M;M+2Д]$; 2) $X \in [0,5;1,5]$ два раза из четырех испытаний.

Задача 5. Случайная величина распределена по нормальному закону N(-2;1); вычислить вероятности следующих событий: 1) $X \in [0;3]$; 2) два раза $X \in [M;M+Д]$; 3) из 10 испытаний 4 раза $X \in [M;M+Д]$.

Задача 6. Вычислить вероятность того, что при четырех испытаниях более двух раз X попадет в интервал [0;1], если распределен по равномерному закону R[-2;2].

Задача 7. Случайный вектор равномерно распределен в квадрате $0 \le X,У \le a$, причем вероятность того, что он попадет в такой же квадрат, но со стороной 1, равна 0,25. Найти плотность композиции Z=X+Y.

Задача 8. Случайные величины X и У независимы и имеют одинаковое показательное распределение, причем D(2X-3Y)=13. Найти M(X), D(X), плотность случайного вектора (U,V),если U=3X,V=2Y.

Задача 9. Коэффициент корреляции r_{xy} нормально распределенных случайных величин X=N[0,2], Y=N[-1,1] равен 1/3. Найти условную плотность случайной величины X, если У=0. Написать уравнение линии регрессии.

Вариант 16.

Задача 1. В правильный треугольник вписан круг. Случайным образом ставят четыре точки. Пусть X - количество точек, попавших в треугольник и лежащих вне круга. Построить закон распределения X, вычислить M(X), Д(X), вероятность попадания X в интервалы: 1) [-1;1,3]; 2) [3;∞].

Задача 2. 5 шаров, среди которых 3 белых, раскладывают в две коробки. В первую кладут 3 шара, во вторую два. Пусть X - количество белых шаров, попавших в первую коробку, а Y - во вторую. Написать закон распределения системы случайных величин (X,Y).

Задача 3.

X	-3	0	1	2
вер.	0.3	0.1	?	0.2

Y	1	2
вер.	0.3	?

Написать закон распределения Z=XY, вычислить M(Z), Д(Z), M(X-3Y+4), Д(Y-3X+2), $M(Y^2)$.

Задача 4. Плотность вероятности случайной величины $f(x)$ задана следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases} 0; x \le 1 \\ Ax^3; 1 < x \le 2 \\ 0 \quad x > 2 \end{cases}$$

Определить A; вычислить вероятности следующих событий: 1) X∈[M;3M]; 2) из пяти испытаний три раза X∈[M;M+Д].

Задача 5. Случайная величина распределена по нормальному закону N(-2;1). Вычислить вероятности следующих событий: 1) X∈[0;3]; 2) два раза X попал в сегмент [0;6]; 3) произвели 10 испытаний, количество попаданий X в сегмент [M;M+2Д] более 2, но не менее 5.

Задача 6. Вычислить вероятность того, что при семи испытаниях хотя бы два раза X попадет в интервал [0;M], если распределено по равномерному закону R[-2;6].

Задача 7. Случайный вектор X,У равномерно распределен в треугольнике ABC, где A(a,0), C(0,0), B(0,a), причем вероятность того, что он попадет в квадрат $0 \le X, У \le 1$ равна 0,5. Написать уравнения линий регрессии и найти центр рассеяния.

Задача 8. Случайные величины X и У независимы и имеют одинаковое показательное распределение, причем D(2X-3Y)=52. Найти плотность и функцию распределения случайного вектора (U,V), если U=2X, V=3Y.

Задача 9. Нормальные случайные величины X и У независимы, имеют одинаковую дисперсию, причем $P(|X - M(X)| \le 1,\quad |У - M(У)| \le 1) = 0{,}5$. Найти D(3X-4Y) и вероятность $P(|X - M(X)| \ge 1,\quad |У - M(У)| \le 1)$.

Вариант 17.

Задача 1. В правильный шестиугольник вписан круг. Случайным образом в шестиугольник ставят пять точек. Пусть X - количество точек, попавших в круг. Написать закон распределения X, вычислить M(X), Д(X), вероятность попадания X в интервалы: 1) [-1;1,3]; 2) [3;∞].

Задача 2. Имеем шесть карандашей, среди которых два красных. Раскладываем карандаши в две коробки. В первую кладут 2 штуки, а во вторую тоже два. X - количество красных карандашей в первой коробке, а Y - во второй. Написать закон распределения системы случайных величин (X,Y).

Задача 3.

X	-1	1
вер.	0.4	?

Y	0	1	3	4
вер.	0.1	0.3	0.5	?

Написать закон распределения Z=XY, вычислить M(Z), Д(Z), M(X-2Y+3), Д(Y+3X-6), $M(Y^2)$.

Задача 4. Плотность вероятности случайной величины f(x) задана следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases} 0; x\le 1 \\ Ae^{x-1}; 1<x\le 2 \\ 0 \qquad x\ge 2 \end{cases}$$

Определить A; вычислить вероятности следующих событий: 1) X∈[0;M]; 2) два раза X∈[M;∞].

Задача 5. Случайная величина распределена по нормальному закону N(-2;2). Вычислить вероятности следующих событий: 1) X∈[-1;6]; 2) произвели два испытания, первый раз X∈[-1;6], а во второй X∈[M;M+Д]; 3) произвели 10 испытаний, количество попаданий X в сегмент [M;M+Д] более 2, но не менее 7.

Задача 6. Вычислить вероятность того, что при семи испытаниях менее трех раз X попадет в интервал [0;M/2], если распределено по равномерному закону R[0;6].

Задача 7. Случайный вектор распределен в круге радиуса R с центром в начале координат. Найти плотность системы и плотности компонент, если вероятность попадания вектора в круг радиуса 1 равна 1/9.

Задача 8. Случайные величины X и У независимы и распределены по показательным законам с параметрами $\lambda_x = 4$ $\lambda_y = 2$. Найти $M(Z)$, Д(Z), если Z=X+2У.

Задача 9. Случайные величины X и У независимы и нормально распределены. X=N[0,3];Y=N[−2,1].Найти плотность случайного вектора (U,V), если U=2X+1, V=3Y-2, а так же вероятность P(U<1;V>5) .

Вариант 18.

Задача 1. Игральный кубик размечен следующим образом : на трех гранях написана 1, на двух 2, на одной 3. Бросают кубик до первого появления цифры 2. Случайная величина Z - количество произведенных бросков, которых не может быть более четырех. Написать закон распределения Z, вычислить M(Z), дисперсию D(Z), вычислить вероятность события $Z \in [-2;\ 2{,}2]$ и события $Z \in [3;8]$.

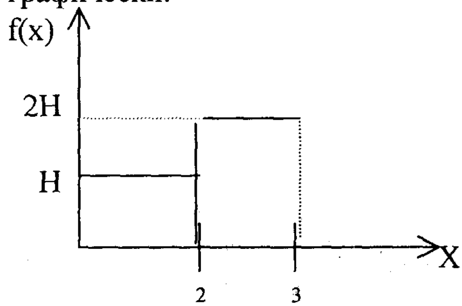
Задача 2. Слово АМЕРИКА разрезано по буквам. Случайным образом вынимаем три буквы и X – количество гласных среди вынутых букв, далее вынимаем две буквы и У – количество гласных среди двух вынутых букв. Составить закон распределения системы случайных величин X,У.

Задача 3.

X	-1	-2	2	3
Вероятн.	0,2	0,1	?	0,3
Y	-2	1	2	3
Вероятн.	0,6	?	0,1	0,2

Написать закон распределения Z=Y-X и вычислить M(3X+6У), D(3Y-4), M(Z), M(X^2).

Задача 4. Плотность вероятности случайной величины задана графически.



Определить H, выч ть вероятность события X$\in[M, M+1]$, вероятность того, что при пяти испытаниях хотя бы один раз X$\in[1, M]$.

Задача 5.Случайгая величина X распределена по нормальному закону N[-1,2]. Вычислить 1) вероятность того, что $X\in[-6,1]$, 2) вероятность того, что при пяти испытаниях три раза $X\in[M, M+D]$.

Задача 7.

Случайный вектор (X,У) равномерно распределен в круге

$x^2 + y^2 \le 9$. Найти M(X), M(У),D(X), D(Y),. r_{xy}., линии регрессии.

Задача 8. Случайный величины X и У независимы и распределены по показательным законам. Случайная величина Z=2X + Y распределена так, что M(Z)=4,а

D(Z)=8. Найти плотность и функцию распределения случайного вектора (X , Y).

Задача 9. Нормальные случайные величины X=N[-1,1], Y=N[2,3] независимы, Z=X-2Y. Найти M(Z), D(Z), f(z) , $P(|Z| \le 2)$.

Вариант 19

Задача 1. Два кубика размечены следующим образом: на гранях первого написано 1,1,2,2,2,3, на гранях второго –1,1,-2,2,-3,3. Пару кубиков бросают до первого появления суммы индексов , равной нулю. Случайная величина T - количество произведенных бросков. Написать закон распределения T, если количество бросков не более четырех. Вычислить M(T), Д(T), вероятность события $T \in [-2,3]$.

Задача 2. Слово МОСКВА разрезано по буквам. Случайным образом вынимают две буквы, X – количество согласных, затем вынимают три буквы и Y- количество согласных среди них. Написать закон распределения системы случайных величин XY.

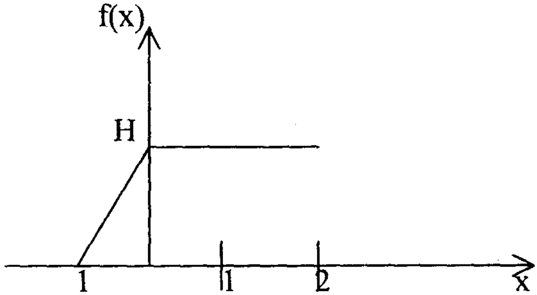
Задача 3.

X	0	2	3	5
Вер.	0,1	0,2	?	0,2

Y	1	2	4	
Вер.	0	0,5	0,2	?

Написать закон распределения Z=XY, вычислить M(Z), M(3X+Y-8), D(Y-8), M(χ^2).

Задача 4. Плотность вероятности случайной величины задана графически.



Определить H, вычислить вероятность события X∈[M;M+1], вероятность того, что при пяти испытаниях хотя бы один раз X∈[1;M].

Задача 5. Случайная величина X распределена по нормальному закону N[–1;2]. Вычислить 1) вероятность того, что X∈[–6,1], 2) вероятность того, что при пяти испытаниях три раза X∈[M;M+D].

Задача 6. Случайная величина X распределена по равномерному закону R[-,5]. Вычислить вероятность того, что при четырех испытаниях хотя бы один раз X попадет в интервал [-1,6].

Задача 7. Случайный вектор (X,У) равномерно распределен в четверти круга $x^2 + y^2 \le R^2, x \le 0, y \le 0,$ причем $P(x^2 + y^2 \le 1) = \frac{1}{4}$. Найти M(x), M(y), M(x/y=0.5), D(x), D(y).

Задача 8. Независимые случайные величины X и У распределены по показательным законам с параметрами $\lambda_x = 2, \quad \lambda_y = 6.$ Найти плотность случайной величины Z=2X+3Y.

Задача 9 . X и У случайные величины, распределенные по нормальным законам с параметрами $M_x = M_y = 1, \quad D_x = 1, \quad D_y = 4.$ Известно, что коэффициент их корреляции $r_{xy} = -\frac{1}{2}.$ При каком значении параметра β случайные величины U=X+Y и V=βX-Y некоррелированы ? Написать плотность вероятности случайного вектора (U,V) для этого значения β, если X и У нормальные случайные величины.

Вариант 20.

Задача 1. Стрелку выдали пять патронов. Пусть Z – количество попаданий в мишень в серии из пяти выстрелов. Написать закон распределения Z, если вероятность попадания в мишень при одном выстреле p=0,7. Вычислить M(Z),D(Z) и вероятность того, что Z[-2,2].

Задача 2. Слово РОССИЯ разрезано по буквам. Случайным образом вынимаем две буквы, тогда X- количество гласных среди них, затем вынимаем еще две буквы и У – количество гласных во второй паре. Составить закон распределения системы случайных величин X,У.

Задача 3.

X	-1	2	3
Вер.	0,5	?	0,2

У	-2	-1	0	1
Вер.	0,2	0,2	?	0,1

Написать закон распределения Z=X+Y. Вычислить M(Z), $M(X^2)$,D(3Y-10), M(2Y-X).

Задача 4. Плотность вероятности случайной величины задана формулой $f(X)=\begin{cases} 0 & x \le 0 \\ A(2-x^2) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x\rangle 1 \end{cases}$ Определить A, вероятность того, что $X \in [M,2M]$, где M- математическое ожидание этого распределения. Вычислить вероятность того, что при четырех испытаниях хотя бы один раз X попадет в интервал [0,M].

Задача 5. Случайная величина распределена по нормальному закону N[-2,2]. Вычислить 1) вероятность того, что X $\in$(-6,1), 2) вероятность того, что при пяти испытаниях три раза X попадает в интервал [M+D,-M], где M- математическое ожидание, а D – дисперсия этого распределения.

Задача 6. Случайная величина X распределена по равномерному закону R[-3;5]. Вычислить вероятность того, что при четырех испытаниях хотя бы один раз X попадет в интервал [-1,6].

Задача 7. Случайный вектор (X,У) равномерно распределен в прямоугольнике $0<X<a, 0<Y<b$, причем $M_x = 1$, $M_y = 2$. Найти плотность случайной величины Z=X+У.

Задача 8. Независимые случайные величины X и У по показательному закону, причем $M_x = M_y$, а вероятность $P(0<X,У<1)=0,5$. Найти плотность и функцию распределения случайного вектора (2X,4У).

Задача 9. X и У случайные величины, распределенные по нормальному закону: X=N[-1;2], У=N[2;4]. Известно, что коэффициент корреляции $r_{xy}=-0,5$. Найти линии регрессии и плотность $f(X|Y=2)$ – распределения X, если У=2.

Примеры решения задач.

Рассмотрим примеры решения задач, аналогичных тем , которые составляют вариант домашних расчетных заданий.

Задача 1. Стрелок имеет три патрона и ведет стрельбу до первого попадания в цель. Его меткость оценивается вероятностью попадания в мишень при одном выстреле и равна p=0,7. Написать закон распределения случайной величины Z, равной числу использованных патронов. Вычислить вероятность того, что $2<Z<8$.

Решение. Возможные значения Z: 1, 2 или 3. Рассчитаем вероятность того, что Z=1. P(Z=1)=P(мишень поражена с первого выстрела)=0,7. Вычислим $P(Z=2)=0,3\cdot 0,7=0,21$.

Вычислим P(Z=3)=1-P(Z1)-P(Z=2)=1-0,21 –0,7=1-0,91=0,09. Составим закон распределения Z

Z	1	2	3
Вер.	0,7	0,21	0,09

Вероятность P(2<Z<8)=P(Z=3)=0,09.

Задача 2. В круг вписан квадрат, радиус круга R=1. Случайным образом внутри круга отмечают четыре точки. Пусть Z – количество точек, попавших внутрь квадрата. Написать закон распределения Z, вычислить M(Z), D(Z).
Решение.

Возможные значения Z: 0, 1, 2, 3, 4. Вычислим вероятность того, что Z=0, т.е. P(Z=0)=$C_4^0 p^0 (1-p)^4$, где p- вероятность попадания точки внутрь квадрата. Для вычисления p используем понятие геометрической вероятности,. т.е. $p = \frac{S_{квадрат}}{S_{круг}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{\pi 1^2} = \frac{2}{3,14} = 0,64 \cdot$ Тогда P(Z=0)=(1-0,64)^4=0,017.

Вычислим P(Z=1)=$C_4^1 p^1 (1-p)^3 = 4 \cdot 0,64 \cdot (1-0,64)^3 = 0,119$

P(Z=2)=$C_4^2 p^2(1-p)^2 = 6\cdot 0{,}64^2\cdot(1-0{,}64)^2 = 0{,}319$

P(Z=3)=$C_4^3 p^3(1-p)^1 = 4\cdot 0{,}64^3\cdot 0{,}36 = 0{,}378$

P(Z=4)=1-P(Z=0)-P(Z=1)-P(Z=2)-P(Z=3)=0,167.

Составим закон распределения

Z	0	1	2	3	4
Вер	0,017	0,119	0,319	0,378	0,167

Поскольку данное распределение является биномиальным, то M(Z)=n·p=4·0,64=2,56, а D(Z)=np(1-p)=0,922.

Задача 3 Даны случайные величины X и У :

X	-1	0	**1**
Вер.	0,2	0,1	**?**

У	**-2**	2	3
Вер	?	0,5	0,2

Составить закон распределения случайной величины Z=X+2Y. Вычислить M(Z)и D(Z **)**.

Решение: Рассмотрим возможные значения Z:

$-5\ \begin{pmatrix} x=-1 \\ y=-2 \end{pmatrix},\ -4\ \begin{pmatrix} x=0 \\ y=-2 \end{pmatrix},\ -3\ \begin{pmatrix} x=1 \\ y=-2 \end{pmatrix},\ 3\ \begin{pmatrix} x=-1 \\ y=2 \end{pmatrix},$

$4\ \begin{pmatrix} x=0 \\ y=2 \end{pmatrix}\ ,5\ \begin{pmatrix} x=1 \\ y=2 \end{pmatrix},\ 5\ \begin{pmatrix} x=1 \\ y=3 \end{pmatrix},\ 6\ \begin{pmatrix} x=0 \\ y=3 \end{pmatrix},\ 7\ \begin{pmatrix} x=1 \\ y=3 \end{pmatrix}.$

Рассчитаем вероятность того, что Z приняло определенное значение, пользуясь теоремой о вероятности суммы и произведения случайных событий.

P(Z=-5)=P(X=-1)P(У=-2)=0,2·0,3=0,06

P(Z=-4)=P(X=0)P(У=-2)=0,1·0,3=0,03

P(Z=-3)=P(X=1)P(У=-2)=0,7·-,3=0,21

P(Z=3)=P(X=-1)P(У=2)=0,2·0,5=0,21

P(Z=4)=P(X=0)P(У=2)=0,1·0,5=0,05

P(Z=5)=P(X=1)P(У=2)+P(X=-1)P(У=3)=0,7·0,5+0,2·0,2=0,39.

P(Z=6)=P(X=0)P(У=3)=0,1·0,2=0,02

P(Z=7)=P(X=1)P(У=3)=0,7·0,2=0,14.

Оформим таблицу закона распределения Z:

Z	-5	-4	-3	3	4	5	6	7
Вер	0,06	0,03	0,21	0,1	0,05	0,39	0,02	0,14

Для вычисления M(Z) можно использовать закон распределения, тогда M(Z) равно:

M(Z)=-5·0,06-4·0,03-3·0,21+3·0,1+4,0,05+5·0,39+6·0,02+7·0,14=2,5

.Подсчитаем M(Z), используя свойства математического ожидания.

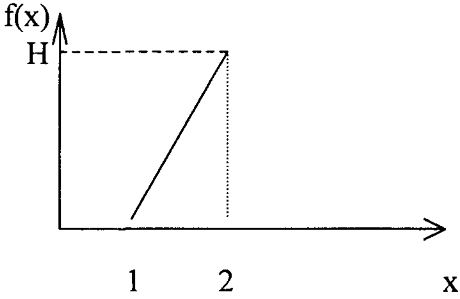
Для этого вычислим M(X)=-1·0,2+1·0,7=0,5, M(У)=-2·0,3+2·0,5+3·0,2=1, тогда M(Z)=M(X)+2M(У)=0,5+2·1=2,5.

Для вычисления D(Z) использована формула $D(Z)=M(Z^2)-M^2(Z)=25\cdot0{,}06+16\cdot0{,}3+9\cdot0{,}21+9\cdot0{,}1+16\cdot0{,}05+25\cdot0{,}39+36\cdot0{,}02+49\cdot0{,}14-2{,}5^2=16{,}65$. Можно для вычисления дисперсии пользоваться свойствами ,.тогда надо вычислить D(X) и D(Y):

$D(X)=1\cdot0{,}2+1\cdot0{,}7-0{,}5^2=0{,}65$, $D(Y)=4\cdot0{,}3+4\cdot0{,}5+9\cdot0{,}2-1^2=4$. По свойствам дисперсии $D(Z)=(X+2v)=D(X)+4D(Y)=0{,}65+4\cdot4=16{,}65$.

Задача 4.

Плотность вероятности непрерывной случайной величины задана графически



Определить H, вероятность P(X>2M(X)). Рассчитать вероятность того, что при четырех испытаниях хотя бы один раз X попадет в интервал X>2M(X).

Решение: Определим H из условия, что площадь треугольника равна 1. $S_\Delta=1/2\cdot H1=1$, $H=2$.

Для того, чтобы вычислить математическое ожидание M(X) необходимо установить уравнение прямой, являющейся гипотенузой треугольника. По координатам двух точек, расположенных на гипотенузе, восстанавливаем уравнение прямой: f(X)=2X-2. Тогда

$$M(X)=\int_1^2 f(x)\cdot xdx=\int_1^2 2(x-1)\cdot xdx=2\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)=5/3 \quad .$$

Вычислим вероятность $P(X>2M(X))=P(X>10/3)=\int_{\frac{10}{3}}^{\infty} f(x)dx=0$.

Задача 5.

Плотность вероятности задана формулой

$$f(X)=\begin{cases} 0, & x \le -2 \\ AX^2 & -2 \le X \le 0 \\ 0 & X \ge 0 \end{cases}$$

Рассчитать вероятность того, что P(X>M(X)/2).

Решение: Определим величину параметра A из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1, \text{ т.е. } \int_{-2}^{0} Ax^2 dx = Ax^3 \Big|_{-2}^{0} \cdot \tfrac{1}{3} = 1 \qquad A = \tfrac{3}{8}$$

Вычислим математическое ожидание M(X) по формуле

$$M(X)= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-2}^{0} x \cdot \tfrac{3}{8} x^2 dx = \tfrac{3}{8} \int_{-2}^{0} x^3 dx = \frac{x^4}{4} \cdot \tfrac{3}{8} \Big|_{-2}^{0} = -\tfrac{3}{2}$$

Теперь можем вычислить вероятность указанного события.

$$P(X>M(X)/2)=P(X>-3/4)= \int_{-\frac{3}{4}}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\frac{3}{4}}^{0} \tfrac{3}{8} x^2 dx = \frac{x^3}{8} \Big|_{-\frac{3}{4}}^{0} = 0{,}0527.$$

Задача 6. Вычислить вероятность того, что при пяти испытаниях хотя бы один раз X попадет в [1;2], если X случайная величина, распределенная по равномерному закону R[-2;4].

Решение: Для вычисления вероятности необходимо обратиться к §11, где выведены формулы вычисления вероятности попадания в заданный интервал при равномерном распределении. В соответствии с этими формулами P(X[1;2])= $(2-1)\cdot\frac{1}{4-(-2)} = \frac{1}{6}$. Тогда P(хотя бы один раз X попадет в [1;2])=1-P(ноль раз X попадет в [1;2])=1- $\frac{5}{6}^5 = 0{,}605$.

Задача №7. Случайный вектор (X;Y) равномерно распределён в квадрате $0 \le X \le 1$; $0 \le Y \le 1; Z = 2X + 4Y$. Найти: MZ, DZ, D(2X-3Y),плотность f(Z), вероятность $P(0 \le Z \le 1)$.

Решение. Случайные величины X и Y независимы и равномерно распределены в интервале $[0,1]$.Поэтому $MX=MY=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$; $DX = DY=\frac{(1-0)^2}{12}=\frac{1}{12}$. Отсюда

$$MZ=M(2X+4Y)=2MX+4MY=2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{2}=3$$

$$DZ = D(2X+4Y)=4DX+16DY=20\cdot\frac{1}{12}=\frac{5}{3}$$

$$D(2X-3Y)= 4DX+ 9DY=13\cdot\frac{1}{12}=\frac{13}{12}$$

Обозначим U=2X;V=4Y. Тогда случайный вектор (U;V) равномерно распределён в прямоугольнике $0 \le U \le 2, 0 \le V \le 4$.

Плотность

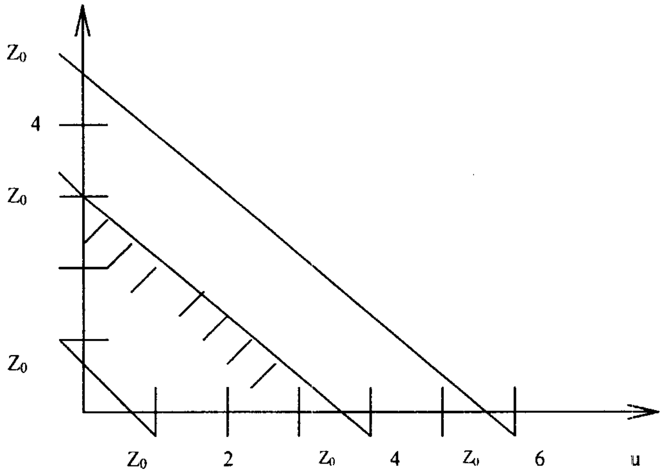
$$f(U;V)=\frac{1}{s}=\begin{cases}\frac{1}{2\cdot 4}=\frac{1}{8} & (U,V) \in \textit{прямоугольнику}\\ 0 & (U,V) \notin \textit{прямоугольнику}\end{cases}$$

Пусть $F(z_0)$ функция распределения случайной величины Z=2X+4Y=U+V для Z=Z0.

$$F(z_0)=P(U+V<Z0)=\frac{1}{S}S(D(Z_0))=\frac{1}{8}S(D(Z_0)).$$

Здесь $S(D(Z_0))$ – площадь той части прямоугольника, которая содержится внутри области $U+V=Z_0$.

$$F(Z_0)=\begin{cases} 0, & Z_0 \le 0 \\ \frac{1}{8}\dfrac{Z_0^2}{2}, & Z_0 \in [0,2] \\ \dfrac{2(Z_0-1)}{8}, & Z_0 \in [2,4] \\ 1-\dfrac{(6-Z_0)^2}{2}\frac{1}{8}, & Z_0 \in [4,6] \\ 1, & Z_0 \ge 6 \end{cases}$$



Пояснение к рисунку:. Если $0 \le Z_0 \le 2$, то $S(D(Z_0))=\dfrac{Z^2{}_0}{2}$

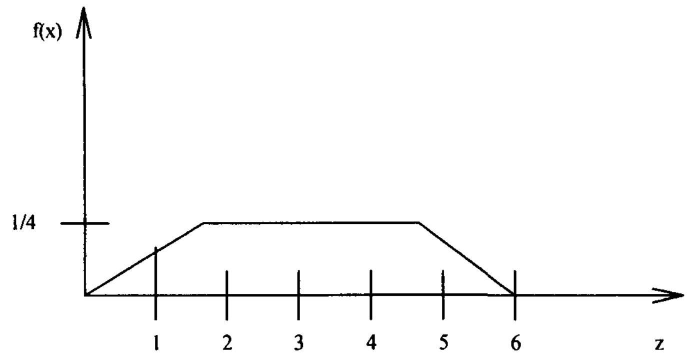
Если $2 \le Z_0 \le 4$, то D(Z_0)-трапеция и S(D(Z_0))=$\frac{Z_0 + Z_0 - 2}{2} \cdot 2$

Если $4 \le Z_0 \le 6$, то D(Z_0)- часть прямоугольника, полученная отсечением треугольника и

$$S(D(z_0)) = \left(1 - \frac{(6 - z_0)^2}{2}\right)\frac{1}{8}$$

Поэтому f(Z)=F' (Z)= $\begin{cases} 0, & Z \notin [0,6] \\ \frac{Z}{8}, & Z \in [0,2] \\ \frac{1}{4}, & Z \in [2,4] \\ \frac{6 - Z}{8}, & Z \in [4,6] \end{cases}$

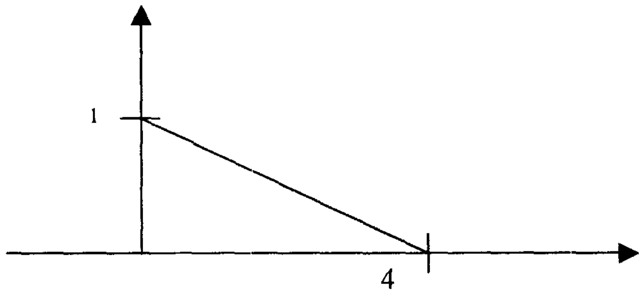
График f(Z) имеет вид



$$P(0 \prec Z \prec 1) = \int_0^1 \frac{Z}{8} dZ = \frac{Z^2}{16}\Big|_0^1 = \frac{1}{16}$$

Эту же вероятность можно вычислить геометрически. Она равна площади заштрихованного треугольника P=(1/8 ·1) ·½=1/16

Задача №8. Случайный вектор (X,Y) равномерно распределён в треугольнике.



Найти: f(X.Y) ,f_1 (x) ,f_2(Y) , MX , MY , DX, DY, cov(X.Y) , r(X.Y).,условные плотности f(X\Y) и f(Y\X)

Зависимы ли X и Y? Построить линии регрессии Y на X и X на Y. Найти M(X/Y)=1/2.

Так как (X.Y) равномерно распределён в треугольнике.

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{S_\Delta} = \frac{1}{2}, & если (x,y) \in \Delta \\ 0, & если \quad (x,y) \notin \Delta \end{cases}$$

Поскольку интервал изменения случайной величины. Y зависит от значений, принимаемых случайной величиной X, то X и Y зависимы. Найдём плотности компонент

$$f_1(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_0^{1-\frac{x}{4}}\frac{1}{2}dy=\begin{cases}\frac{1}{2}(1-\frac{x}{4}), & x\in[0,4]\\ 0, & x\notin[0,4]\end{cases}$$

Здесь Y=1-X/4 – уравнение стороны треугольника .Аналогично

$$f_2(Y)=\int_0^{4(1-Y)}\tfrac{1}{2}dx=\begin{cases}2(1-Y), & Y\in[0,1]\\ 0, & Y\notin[0,1]\end{cases}$$

Найдем условные плотности

$$f(Y\mid X)=f(X,Y)\mid f_1(X)=\begin{cases}\dfrac{4}{4-X}, & Y\in[0,1]\quad (X,Y)\in\Delta\\ 0, & (X,Y)\notin\Delta\end{cases}$$

$$f(X\mid Y)=f(X,Y)\mid f_2(Y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4(1-Y)}, & Y\in[0,1],\quad (X,Y)\in\Delta\\ 0, & (X,Y)\notin\Delta\end{cases}$$

Найдем центр рассеивания. Он совпадает с центром масс, который в свою очередь совпадает с центром треугольника, имеющим постоянную массу. Центр треугольника – это точка пересечения медиан, координаты этой точки являются средними арифметическими координат вершин, т.е. MX$=\dfrac{4+0+0}{3}=\frac{4}{3}$, $MY=\dfrac{0+0+1}{3}=\frac{1}{3}$

Теперь найдем дисперсию. Удобнее всего воспользоваться формулой $DX=M(X^2)-M^2(X)$.

$$M(X^2)=\iint_D X^2 f(X,Y)dXdY=\int_0^4 X^2dX\int_0^{1-\frac{X}{4}}\tfrac{1}{2}dY=\int_0^4\frac{X^2(4-X)}{8}dX=\tfrac{8}{3}.$$

$$DX=\tfrac{8}{3}-\tfrac{16}{9}=\tfrac{8}{9}.$$

Аналогично $M(Y^2)=\int Y^2(1-Y)2dY=\frac{1}{6}, \quad DY=\frac{1}{6}-\frac{1}{9}=\frac{1}{18}.$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=M(XY)-MX\cdot MY.$$

Теперь найдем $M(XY)=\iint_D XY\tfrac{1}{2}dXdY=\tfrac{1}{2}\int_0^4 XdX\int_0^{1-\frac{X}{4}}YdY=\tfrac{1}{3}$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}=-\tfrac{1}{9}.$$

Тогда коэффициент корреляции $r(X,Y)=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}}=-\dfrac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{9}}=\dfrac{1}{2}$

Здесь r(X,Y)- коэффициент корреляции, cov(X,Y)-ковариация или корреляционный момент. Найдем теперь линии регрессии. При каждом фиксированном значении X случайная величина У распределена в интервале [0,1-X/4] и ее среднее значение лежит в середине этого интервала, т.е. равно $\dfrac{0+1-\frac{X}{4}}{2}=\dfrac{4-X}{8}$, а линия регрессии – это средняя линия треугольника, т.е. прямая, пересекающая оси координат в точках 4; и 1|2, а потому ее уравнение $\dfrac{У}{½}+\dfrac{X}{4}=1 \quad т.е. У=\dfrac{4-X}{8}$, поэтому М(У|X)=(4-

X)|8. Аналогично линия регрессии X на У пересекает оси координат в точках 2 и 1:

$$\frac{У}{1}+\frac{X}{2}=1 \quad и \quad X=2(1-У), т.е. M(X\mid Y)=2\cdot(1-У),$$

А значит M(X|У=0,5)=2·0,5=1.

Нормальное распределение вектора.

Задача №9 Случайные величины X=N[-1,2] и Y=N[3,1] независимы и распределены по нормальным законам, случайная величина Z=2X-Y. Найти MZ, DZ, P(0<Z<3).

Решение: Поскольку MX=-1, MУ=3, то MZ=2(-1)-3=-5. Так как X и У независимы, то DZ=D(2X-Y)=4DX+DY=4·4+1=17, потому что σ(X)=2 и σ(Y)=1. Случайная величина Z имеет нормальное распределение Z=N[-5, $\sqrt{7}$], а потому P(0<Z<3)

$$\Phi=\left(\frac{3-(-5)}{\sqrt{17}}\right)-\Phi\left(\frac{0-(-5)}{\sqrt{17}}\right)=\Phi\left(\frac{8}{\sqrt{17}}\right)-\Phi\left(\frac{5}{\sqrt{17}}\right)=$$

$$\Phi(1{,}94)-\Phi(1{,}21)=0{,}4378-0{,}3869=0{,}05$$

Задача 10. Случайные величины X и У имеют нормальное распределение с параметрами MX=-1, MУ=0, σX=2, σY=1, r(X,Y)=0,2.Случайная величина Z=Y2X. Найти MZ, DZ, линии регрессииУ нп X и X на У, M(У|X=2). Найти плотности компонент $f_1(X)$ и $f_2(Y)$, а так же условные плотности, условные математические ожидания и условные средние квадратические отклонения.

Решение: MZ=M(Y-2X)=0-2(-1)=2,

cov(X,Y)=r(X,Y)·σ(X)σ(Y)=0,2·2 ·1=0,4, а потому

Значит

$$M(Y\mid X)=MY+r\frac{\sigma x}{\sigma y}(x-Mx)=0+\tfrac{1}{2}\cdot 0{,}2\cdot(X+1)=\frac{X+1}{10}\cdot \qquad А$$

потому линия регрессии У на X есть прямая У=(X+1)/10. Аналогично M(X|У)=0,4У-1. Линия регрессии X на У есть прямая X=0,4У-1. $M(X/Y)=MX+r\dfrac{\sigma x}{\sigma y}(Y-My)\cdot$

Условные средние квадратические отклонения равны

$$\sigma(X\mid Y)=\sigma(X)\sqrt{1-r^2(X,Y)}=2\sqrt{1-0{,}04}=1{,}96$$

$$\sigma(Y/X)=\sigma(Y)\sqrt{1-r^2(X,Y)}=1\cdot\sqrt{1-0{,}04}=0{,}98$$

Поскольку случайные величины X и У имеют нормальное Распределение, то

$$f(Y\mid X)=\frac{1}{\sigma(Y)\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2}}\exp(\frac{-1}{2(1-r^2)}(\frac{Y-MY}{\sigma(Y)^2}-r\frac{X-MX}{\sigma(X)^2})^2)$$

$$f(X\mid Y)=\frac{1}{\sigma(X)\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2}}\exp(-\frac{1}{2(1-r^2)}(\frac{X-MX}{\sigma(X)}-r\frac{Y-MY}{\sigma(Y)})^2)$$

$$f(Y\mid X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{0{,}96}}\exp(-\frac{1}{2\cdot 0{,}96}(\frac{Y}{1}-0{,}2\cdot\frac{X+1}{2})^2)=$$

$$\frac{1}{0{,}98\sqrt{2\pi}}\exp(-(Y-0{,}1X-0{,}1)^2\setminus 1{,}92).$$

$$f(X\mid Y)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{0{,}96}}\exp(-\frac{1}{2\cdot 0{,}96}(\frac{X+1}{2}-0{,}2\frac{Y}{1})^2)=$$

$$\frac{1}{1{,}96\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(X+1-0{,}4Y)^2}{7{,}68}).$$

Задача 11. Случайные величины X и У независимы и распределены по показательным законам с параметрами λ_X=а=2 и $\lambda_У$=в=3. Найти : 1) плотность случайной величины Z=X+Y, MZ, DZ. 2) линии регрессии У на X и X на У 3) плотность и функцию распределения случайного вектора (X,У) 4) для случайной величины Z=2X+6Y найти плотность f(Z) и вероятность P(1<Z<2)

Решение:

$$MX = \frac{1}{a} = \tfrac{1}{2}, \quad MУ = \frac{1}{в} = \tfrac{1}{3}, \quad DX = \frac{1}{a^2} = \tfrac{1}{4}, \quad DY = \frac{1}{b^2} = \tfrac{1}{9}.$$

Откуда

$M(X+Y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}, \quad D(X+Y) = DX + DY = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{13}{36}$. Найдем плотность композиции X+У: $f(z) = f_1(x) * f_2(y)$, т.е. свертке плотностей $f_1(x)$ *и* $f_2(y)$ *компонент*

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\cdot f_2(z-x)dx = \int_0^z f_1(x)\cdot f_2(z-x)dx = \int_0^z ae^{-ax}be^{-b(z-x)}dx =$$

$$ab\int_0^z e^{-bz}\cdot e^{x(b-a)}dx = \frac{ab}{b-a}e^{-bz}e^{x(b-a)} = \frac{ab}{b-a}e^{-bz}(e^{z(b-a)}-1) =$$

$$\frac{ab}{b-a}(e^{-az}-e^{-bz}) \quad z \ge 0$$

поскольку $f_1(x)=0$ при $x<0$ и $f_2(z-x)=0$, если $x>z$.

2) Так как X и У независимы, то M(X|Y)= MX и M(У|X)=MY,а значит линии регрессии – это прямые, параллельные осям координат y=MУ=1/3 и X=MX=1/2.

3) Так как X и У независимы, то

$$f(x,y) = f_1(x)f_2(y) = abe^{-ax-by} = 6e^{-2x-3y}$$

$$F(x,y) = F_1(x)\cdot F_2(y) = (1-e^{-ax})(1-e^{-by}) = (1-e^{-2x})$$

$$(1-e^{-3y}).$$

4) Введем обозначения U=2X, V=6Y. Случайные величины U и V независимы и также имеют показательное распределение, причем MU=2MX=1, MV=6MY=2, то λ_u=1 и λ_v=1/2, а потому плотность случайной величины Z=2X+6Y- это плотность композиции U+V, т.е.

$$f(z)=\frac{1\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}(e^{-\frac{z}{2}}-e^{-z})=e^{-\frac{z}{2}}-e^{-z},\quad z\geq 0$$

а потому

P(1<z>2)=

$$\int_1^2\left(e^{-\frac{z}{2}}-e^{-z}\right)dz=\left(-2e^{-\frac{z}{2}}+e^{-z}\right)\Bigg|_1^2=-2e^{-1}+e^{-2}+2e^{-\frac{1}{2}}-e^{-1}=$$

$$2e^{-0.5}-3e^{-1}+e^{-2}=2\cdot 0.607-3\cdot 0.368+0.135=$$

$$1.214-1.104+0.135=0.245$$

Оглавление

Стр.