Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования

**«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»**

КАФЕДРА «МАТЕМАТИКА»

З.С. ЛИПКИНА

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Часть I

Учебное пособие

МОСКВА – 2014

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования

**«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»**

КАФЕДРА «МАТЕМАТИКА»

З.С. ЛИПКИНА

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА
Часть I

Рекомендовано редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия для бакалавров направления «Экономика»

Москва – 2014

УДК 519.1

Л.61

Липкина З.С. Дискретная математика. Часть I.: Учебное пособие – М.: МИИТ, 2014. – с.

Предназначено для студентов, в учебных планах которых предусмотрена дисциплина «Дискретная математика». Содержит разделы: множества, отношения, функции, булевы функции, алгебра высказываний, контактные схемы. По каждой теме приведены задачи, их решения или ответы, примеры тестов и вопросы по курсу.

Рецензенты:

О.А. Платонова, к.ф.-м.н., зав. кафедрой «Высшая вычислительная математика» МИИТа;

А.Л. Шмелькин, д.ф.-м.н., профессор механико-математического факультета МГУ им.М.В. Ломоносова.

Глава 1. Множества, отношения, функции.

§ 1.Множества. Определения.

Понятие множества – фундаментальное понятие математики, поэтому невозможно дать явное его определение, обычно термин «множество» лишь понимают на примере. Так, перечисляя: картофель, капуста, морковь и т. д, можно назвать их одним словом «овощи». Итак, множество – это совокупность объектов, рассматриваемых как единое целое, т.е. новый объект.

Имеется два существенно различных способа задания множества. Первый способ – описание: A – множество натуральных чисел, не превосходящих 5. Второй способ –перечисление: A=(1,2,3,4,5). Тот факт, что объект $\boldsymbol{x}$ принадлежит множеству A обозначается: $x \in A;$ и $x \notin A$ означает, что x *не* является элементом множества A.

Заметим, что объект a и множество (a) – различные объекты. Если $a \in (a)$ – истинное утверждение, то $(a) \in a$ – ложное. Перечисление годится только в том случае, когда A содержит конечное и небольшое количество элементов. Описательный способ состоит в указании <u>общего свойства</u> объектов, составляющих данное множество. Оно имеет вид $A=\{x/P(x)\}$, где $P(x)$ – формула или высказывание, характеризующие в точности все элементы данного множества (принцип абстракции Кантора).

Используются специальные символы для обозначения некоторых множеств: $N, Q, R, C, Z, Q^+, R^+, Z^+$ - обозначение соответственно множеств, натуральных, рациональных, действительных, комплексных, целых чисел. Знак «+» означает, что рассматриваются только положительны числа.

Примеры:

a) $A=\{ x\in R|\ x>10\}$ – действительные числа, больше 10
b) $A=\{2n|n\in Z\}$ –четные целые числа
c) $A=(-2,+\infty)$ – действительные числа, больше, чем -2
d) $A=(-2,4]$ – интервал, содержащий 4 и не содержащий -2
e) $\varnothing=\{x|x\neq x\}$ –пустое множество, не содержащие ни одного элемента.

Два множества считаются равными тогда и только тогда, когда они состоят из одних и тех же элементов (принцип объёмности).

Множество *B* называется подмножеством множества *A* (обозначается $B\leq A$) тогда и только тогда, когда каждый элемент множества *B* принадлежит множеству *A*. Отношение между множеством *A* и любым его подмножеством называется <u>включением.</u> Отметим важные свойства понятия включения:

1. $A\leq B$. Любое другое подмножество *B*, отличное от *A* называется <u>собственным</u> и обозначается $B<A$, при этом $\varnothing$ является подмножеством любого множества.
2. $A=B\leftrightarrow A\leq B$ и $B\leq A$ (симметричность)
3. Если $A\leq B$ и $B\leq C$, то $A\leq C$ (транзитивность)

Если все рассматриваемые в данной задаче множества являются подмножествами некоторого множества U, то это множество U называют универсальным, в элементарной арифметике универсальным множеством служит *Z*– множеством целых чисел, в аналитической геометрии на плоскости – множество *(x, y)* упорядоченных пар действительных чисел и т.д.

Пусть $U= (a_1, ..., a_n)$. Число элементов множества U назовем его мощностью и обозначим $|U|=n$. Множество всех подмножеств множества U называется степень - множеством множества U и обозначается $P(U)$.

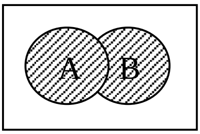
Теорема. Мощность степень-множества $|P(U)|$ равна $2^{|u|}$.

Доказательство. Пусть $U=(a_1,..., a_n)$ и $B\leq U$. Поставим в соответствие подмножеству В последовательность длинны n из нулей и единиц по следующему правилу: если $a_i \in B$, то на *i-ом* месте в последовательности стоит 1, а если $a_i \notin B$, то 0. Например, пустому множеству соответствует последовательность из одних нулей, а самому U– из одних единиц. Так как число всех последовательностей равно 2^n, то это доказывает теорему.

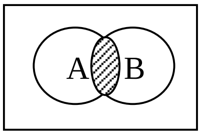
§2 Операции над множествами.

Определим операции, позволяющие из двух подмножеств строить новое.

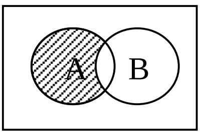
1. Объединение (сумма). Обозначается $A \cup B$, соответствует союзу «или» (в не исключающим смысле).
   $A \cup B = \{x | x \in A$ или $x \in B\}$
2. Пересечение (произведение). Обозначается $A \cap B$, соответствует союзу «*и*».
   $A \cap B = \{x | x \in A,\ x \in B\}$
3. Разность. Обозначается A\B. Это множество тех элементов множества *A*, которые не принадлежат множеству *B*.
   $A \backslash B = \{x \in A |\ x \notin B\}$
4. Дополнение. Обозначается $\bar{A} = U \backslash A$



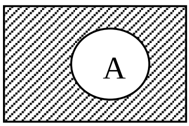
$A \cup B$



$A \cap B$



$A \backslash B$



$\bar{A}$

Для лучшего понимания этих операций используют диаграммы Эйлера – Венна. Универсальное множество изображается в виде прямоугольника, а подмножества в виде кругов.

<u>Теорема.</u> Для любых подмножеств A, B, C универсального множества $\mathcal{U}$ справедливы следующие равенства

1. $A\cup B = B\cup A$	1' $A\cap B=B\cap A$
2. $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$	2' $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
3. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	3' $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
4. $A\cup(A\cap B)=A$	4' $A\cap(A\cup B)=A$
5. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$	5' $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$
6. $A\cup A=A$	6' $A\cap A=A$
7. $A\cup\overline{A}=\mathcal{U}$	7' $A\cap\overline{A}=\varnothing$
8. $A\cup\mathcal{U}=\mathcal{U}$	8' $A\cap\varnothing=\varnothing$
9. $A\cup\varnothing=A$	9' $A\cap\mathcal{U}=A$
10 $\overline{\overline{A}}=A$	

Эти равенства носят названия: 1,1′ - коммутативность сложения и умножения; 2,2′ - ассоциативность сложение и умножения; 3,3′ - дистрибутивность 4,4′-законы поглощения, 5,5′-законы де Моргана; 6,6′ идемпотентность; 10 – закон снятия двойного отрицания.

Докажем, например, равенство 5.

Пусть $x \in \overline{A \cup B}$, значит, $x \notin A \cup B$, т.е. $x \notin A$ и $x \notin B$, $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$, откуда $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Обратно. Пусть $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, значит, $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$, т.е. $x \notin A$ и $x \notin B$, т.е. $x \notin A \cup B$ т.е. $x \in \overline{A \cup B}$.

Заметим, что равенства левого столбца получаются из равенства правого столбца заменой символа $\cap$ («крышки») на символ $\cup$ («чашки») и наоборот. Символ пустого множества $\varnothing$ заменяется символом универсального множества U и наоборот.

§3 Прямое произведение множеств.

Пусть А, В – два множества. Их прямым (декартовым) произведением называется множество упорядоченных пар $AxB=((x,y)| \, x \in A, \, y \in B)$.При этом, если $(x,y)=(u,v)$ то $x=u, \, y=v$. Будем называть x первой координатой, а y- второй координатой упорядоченной пары. Аналогично определяются упорядоченные *тройки* (x,y,z) и т.д. Вообще, пусть $A_1,A_2,..A_k$ – множества. Тогда их прямым произведением назовем множество упорядоченных последовательностей $(x_1,x_2,..x_k)$ таких, что $x_i \in A_i, \, i=1,2\ldots k$.

$A_1xA_2x\ldots xA_k=\{(x_1,..x_k) \, / x_i \in A_i, \, i=1,2..k\}$

В частности, если $A=B$, то AxA будем обозначать A^2, и аналогично, если $A_i=A$, то $A_1xA_2.. \, xA_k=A^k$.

Замечание 1. Если R – множество действительных чисел, т.е. точек числовой прямой, то R^2 и R^3–это соответственно множества точек плоскости и пространства.

Замечание 2. Пусть E – множество, состоящие из двух элементов 0 и 1. Тогда E^n – множество последовательностей из n элементов, каждый из которых 0 либо 1.

Теорема. Пусть $A=\{a_1,..a_n\}$, $B=\{b_1,..\ b_m\}$, т.е. $|A|=n$ $|B|=m$. Тогда прямое произведение AxB содержит n$\times$m элементов.
$|AxB|=|A||B|$

Доказательство. Элементы множества AxB запишем в виде таблицы:

(a_1,b_1)	(a_1,b_2)	(a_1,b_m)
(a_2,b_1)	(a_2,b_2)	(a_2,b_m)
…….	……..	………
(a_n,b_1)	(a_n,b_2)	(a_n,b_m)

Откуда следует утверждение теоремы.

Следствие 1. $|A_1xA_2x..A_k|=|A_1|x|A_2|..|A_k|$

Следствие 2. $|E^n|=2^n$

Задачи.

В следующих задачах нужно доказать равенство множеств:

1. $A=\{y=x^2|\ x\in R,\ x\neq 0\}$ и R^+

Решение. *Пусть* $y\in A$, $y=x^2$, $x\neq 0$, т.е. $y\in R^+$

Обратно. Пусть $y\in R^+$, тогда $y=(\sqrt{y})^2=x^2$, *где* $x=\sqrt{y}$, $x\in R^+$, $x\neq 0$, *т.е.* $y\in A$.

2. $A=\{6n|\ n\in Z\},\ B=\{3m|\ m\in Z\},\ C=\{2k|\ k\in Z\};\ A=B\cap C$

<u>Решение.</u> Пусть $x\in A;\ x=6n,\ n\in Z$. Тогда $x=3m,\ m=2n$ и $x\in B$. Аналогично, $x=2k,\ k=3n$ и $x\in C$. Итак$A\leq B\cap C$. Обратно. Пусть $x\in B\cap C$. Тогда $x=3m=2k$. 3m делится на 2, и поскольку 3 и 2 взаимно просты, то $m=2n$. Значит $x=3m=3*2n=6n.\ x\in A$

3. $A=\{2x|\ x\in Q\}$ *и* Q
4. $A=\{2^x|\ x\in R\}$ *и* R^+
5. $A=\{lgx|\ x\in R^+\}$ *и* R
6. $A=\{30n|\ n\in Z\},\ B=\{5m|\ m\in Z\},\ C=\{3l|\ l\in Z\},\ D=\{2k|\ k\in Z\}$
   $A=B\cap C\cap D$

7 $(A\cap B\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)\cup\overline{B}\cup\overline{C}=\boldsymbol{U}$

<u>Решение.</u>

$(A\cap B\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)=(A\cup\overline{A})\cap(B\cap C)=\boldsymbol{U}\cap(B\cap C)=B\cap C$

$(B\cap C)\cup(\overline{B}\cup\overline{C})=(B\cap C)\cup(\overline{B\cap C})=\boldsymbol{U}$

8 $(A\cap B\cap X)\cup(A\cap B\cap C\cap X\cap Y)\cup(A\cap X\cap\overline{A})=A\cap B\cap X$

9 $(A\cap B\cap C\cap\overline{X})\cup(\overline{A}\cap C)\cup(\overline{B}\cap C)\cup(C\cap X)=C$

10 $[(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(\overline{A}\cap\overline{X}\cap Y)]\cap\overline{[(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap\overline{X}\cap\overline{Y})\cup(\overline{A}\cap B\cap Y)]}=$
$=(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{X}\cap Y)$

11 $\overline{A\cap\overline{B}}\cup B=\overline{A}\cup B$

В следующих задачах надо описать указанные множества.

В заданиях 12, 13, 14 универсальным является множествоZ.

12 Пусть A={2n| n∈Z}, B={2n-1| n∈Z}, C={x∈Z| x<5}

Описать множества $\overline{A}$, $\overline{A\cup B}$, $\overline{C}$, A\\$\overline{C}$, C\\(A∪B)

Решение A – множество четных, а B – нечетных целых чисел. A∪B=Z, значит $\overline{A}$=B, $\overline{A\cup B}$=∅, $\overline{C}$={x∈Z| x≥5}. Тогда A\\$\overline{C}$ – это множество четных чисел меньше 5: и т.к. A∪B=Z, то C\\(A∪B)=∅.

13 *A={x∈Z⁺| x=2y, y∈Z}, B={x∈Z⁺| x=2y+1, y∈Z}, C={3y| y∈Z⁺}*

Описать множества A∩B, B∩C, B\\C.

14 Описать множества $\overline{A\cap B}$, A∪$\overline{B}$, A∩B∩C из задачи 13.

15 Доказать каждое из следующих утверждений для произвольных множеств A, B, C:

a) Если A≤B и B≤C, то A≤C
b) Если A≤B и B<C, то A<C
c) Если A<B и B≤C, то A<C
d) Если A<B и B<C, то A<C

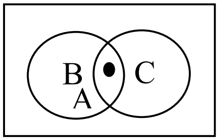
Решение. Докажем, например, b) Рассмотрим случай A=B. т.к. B<C, то существует x∈C и x∉B=A, т.е. A<C. Пусть теперь A<B, значит, существует x∈B и x∉A. Поскольку B<C, то x∈C, т.е. опять A<C.

16 Какие из следующих утверждений верны для всех множеств A, B, C?

a) Если A∉B и B∉C, то A∉C
Неверно. Например: A=1, B={0,2,3}, C={1,3,4}

b) Если $A \neq B$, $B \neq C$, то $A \neq C$. Неверно. Например, если $A = C \neq B$

c) Если $A \in B$ и неверно, что $B \leq C$, то $A \notin C$
Неверно утверждение как показывает следующий рисунок



A – элемент пересечения $B \cap C$

d) Если $A < C$ и $B \leq C$, то неверно, что $C \leq A$.
Верное утверждение. На основании 15с A– собственное подмножество C, т.е. существует $x \in C$ и $x \notin A$.

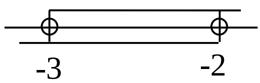
e) Если $A \leq B$ и $B \in C$, то $A \in C$. Неверное утверждение. Пусть $A=\{1\}$, $B=\{1,2\}$, $C=\{\{1,2\},3\}$

Тесты по теме «Множества».

Тест №1.

<u>Задание 1.</u>
Если $A=(-\infty, -2)$, $B=(-3,+\infty)$, то $A \cup B$:

a) $(-3,-2)$
b) $(-3,-2]$
c) $(-\infty,+\infty)$
d) $(-\infty,-3) \cup (-2,+\infty)$

Правильный ответ с): 

Задание 2.

Если A – множество четных чисел, B – множество чисел кратных 6, то $\overline{A}\cap B$ есть

a) Множество A
b) Множество B
c) $\varnothing$
d) Множество чисел кратных 12.

Правильный ответ c), поскольку $\overline{A}$ – множество нечетных чисел.

Задание 3.

$A\cap(\overline{A}\cup B)=$

a) $A\cup B$
b) $A\cap B$
c) $\varnothing$
d) $\overline{A}\cup B$

Правильный ответ b):

$A\cap(\overline{A}\cup B)=(A\cap\overline{A})\cup(A\cap B)=\varnothing\cup(A\cap B)=A\cap B$

Задание 4.

Если $A\leq B$, то (несколько ответов).

a) $A\cup B=B$
b) $A\cup B=A$

c) $A \cap B = A$
d) $\overline{A} \geq \overline{B}$

Правильный ответ a), c), d). Проверим d). Пусть $x \in \overline{B}$, $x \notin B$, значит, $x \notin A$, т.е. $x \in \overline{A}$

<u>Задание 5.</u>

Декартовым произведением $A x B$ множества $A=\{-1,1\}$ и $B=\{1,5\}$ является множество:

a) (-1,5)
b) (-1,1),(1,5)
c) (-1,1), (-1,5), (1,1), (1,5)
d) (1,-1), (5,-1), (1,1), (5,1)

Правильный ответ c)

Тест №2.

<u>Задание 1.</u>

Если $C=(-1,1)\cup(2,+\infty)$, то $\overline{C}$

a) (1,2)
b) $(-\infty,-1)\cup(1,2)$
c) $(-\infty,-1]\cup[1,2]$
d) $(-\infty,+\infty)$

Правильный ответ c).

<u>Задание 2.</u>

Если A – множество квадратов, B–множество ромбов, то $A \cap B$ есть:

a) Множество A
b) Множество B
c) $\varnothing$
d) Множество прямоугольников

Правильный ответ а)

<u>Задание 3.</u>

$(A \setminus B) \cup B =$

a) A
b) B
c) $A \cup B$
d) $A \cap B$

Правильный ответ с), т.к. $(A \setminus B) \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup B = (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B) = (A \cup B) \cap U = A \cup B$

<u>Задание 4.</u>

Если $A \cap B = \varnothing$, то (несколько ответов)

a) $A \leq \overline{B}$
b) $B \leq \overline{A}$
c) $A \cup B = U$
d) $B \cup (A \cap B) = B$

Правильные ответы: a),b),d)

Покажем для a). Пусть$x\in A$, т.к. $A\cap B=\varnothing$, то $x\notin B$, т.е. $x\in\overline{B}$

<u>Задание 5.</u>

$(A x B)\cap(C x D)=$

a) $(A\cap C)\ x\ (B\cap D)$
b) $(A x C)\cup(A x D)\cup(B x C)\cup(B x D)$
c) $(A x C)\cap(B x D)$
d) $(A x C)\cup(B x D)$

Правильный ответ a).

Пусть $(x, y)\in(A x B)\cap(C x D)$, т.е. $x\in A$ и $x\in C$; $y\in B$ и $y\in D$ т.е. $x\in A\cap C$, $y\in(B\cap D)$.И обратно, если $(x, y)\in(A\cap C)x(B\cap D)$, то $x\in A\cap C$, $y\in B\cap D$. Значит, $(x, y)\in(AxB)\cap(CxD)$

§4 Отношение. Определения.

В курсе аналитической геометрии линия на плоскости определялась как г.м.т. (геометрическое место точек), координаты которой удовлетворяют некоторому отношению. Это отношение между координатами точки могло выражаться как словесно, так и формулой. Например, окружность может быть определена как г.м.т, расстояние которых от фиксированной точки есть постоянная величина, либо г.м.т, координаты которых удовлетворят равенству $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Каждую точку плоскости (x,y) мы рассматривали как элемент прямого произведения $R x R$. Тогда линия – это некоторое подмножество $R x R$, задаваемое высказыванием (формулой $P(x, y)$)

Пусть теперь A и B–произвольные множества. Отношением из A в B (<u>бинарным отношением)</u> назовем подмножество прямого произведения $A x B$. Символически это обозначается так
$\rho=\{(x,y)\in A x B|P(x,y)\}$

Мы считаем, что выражение $(x,y)\in\rho$ и $x\rho y$ взаимозаменяемые. При этом для некоторых специальных отношений: равенства, неравенства, тождества, включения, приняты специальные обозначения: $x=y$, $x\leq y$, $x\equiv y$, $x\in y$. Естественным образом определение обобщается на случай n - арного отношения:

$\rho=\{(x_1,..,x_n)\in A_1 x ... x A_n| P(x_1,..x_n)\}$

Если множества A и B совпадают, то $\rho\in A x A$ называется <u>отношением, заданным на множестве элементов множества A.</u>

<u>Примеры:</u>

1. Пусть A – множество женщин, B–множество мужчин, ρ - отношение материнства, $(x,y)\in\rho$ означает *x* мать *y*.
2. Пусть A – множество студентов, ρ - отношение соседства, $x\rho y$ означает *x* живет в одном общежитии с *y*.
3. Пусть A=R, ρ -отношение сравнения, $x\rho y$ означает $x\geq y$.

§5Области определения и значений. График отношения.

<u>Областью определения ρ</u> (Dρ) называется множество всех первых координат, а областью значений (Rρ) –множество всех вторых координат

Если $\rho \in A x B$, то

$D\rho=\{x \in A|$ существуют $y \in B$, такой, что $(x,y) \in \rho\}$

$R\rho=\{y \in B|$ существуют $x \in A$, такой, что $(x,y) \in \rho\}$

Если $\rho \leq R x R$, то графиком отношения ρ называется совокупность всех точек (x,y) плоскости, для которых $(x,y) \in \rho$. В этом случае Dρ есть проекция графика на ось *ox*, а Rρ - проекция на ось *oy*.

§6 Основные свойства отношений.

Пусть ρ - отношение на множество элементов A. Отношение ρ называется:

1 Рефлексивным, если для всех $x \in A$ $(x,x) \in \rho$.

2 Антирефлексивным, если для всех $x \in A$ неверно, что $(x,x) \in \rho$.

3 Симметричным, если из того, что $(x,y) \in \rho$ вытекает, что $(y,x) \in \rho$.

4 Антисимметричным, если из того , что $(x,y) \in \rho$ и $(y,x) \in \rho$ следует, что $x=y$.

Антисимметричность можно определить так: если $(x,y) \in \rho$ и $x \neq y$, то $(y,x) \notin \rho$. Заметим, что единственным отношением, которое одновременно симметрично и антисимметрично будет отношение равенства.

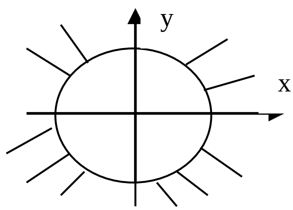
5 Транзитивность: если $(x,y)\in\rho$ и $(y,z)\in\rho$, то и $(x,z)\in\rho$.

Замечание.

Если ρ - отношение на множестве действительных чисел, то свойства отношения ρ можно интерпретировать геометрически. Рефлексивность означает, что вся биссектриса $x=y$ принадлежит графику, антирефлексивность – ни одна точка биссектрисы не принадлежит графику. Симметричность означает, что график симметричен относительно биссектрисы, антисимметричность означает, что если точка, принадлежащия графику, не лежит на биссектрисе, то симметричная относительно биссектрисы точка, не принадлежит графику.

Задачи.

1 Для отношения $\rho=\{(x,y)\in R x R|\ x^2+y^2\geq 1\}$ построить график, найти область определения и значений и выяснить, какими свойствами оно обладает.



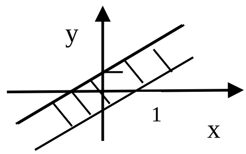
Графиком отношения ρ будет внешность круга радиуса 1, включая окружность. $D\rho=R\rho=R$. (проекции на оси охи *оу*) Отношение ρ не является ни рефлексивным, ни анти рефлексивным (есть точки, принадлежащие биссектрисе и не принадлежащие ей. $(1,1)\in\rho$, но $((0,0)\notin\rho)$. Отношение ρ является симметричным, поскольку если $x^2+y^2\geq 1$, то $y^2+x^2\geq 1$. Так как ρ не является отношением равенства, то оно не антисимметрично: $(1,2)\in\rho$ и $(2,1)\in\rho$, но $1\neq2$.

Отношение ρ не является транзитивным, как показывает пример:

$x=0=z$, $y=1$; $(0,1)\in\rho$ т.к. $0+1\geq1$, $(1,0)\in\rho$, т.к. $1+0\geq1$, но $(0,0)\notin\rho$, т.к. $0+0<1$.

2 $\rho=\{(x,y)\in R^2 \mid |x-y|\leq1\}$

$x-y|\leq1$ означает, что $-1\leq y-x\leq1$, т.е. $y\leq x+1$ и $y\geq x-1$. Графиком является полоса. $D\rho=R\rho=R$. Отношение ρ рефлексивно т.к. $|x-x|=0<1$, и симметрично, потому что $|x-y|=|y-x|$. Оно не транзитивно. Если $x=0$, $y=1$, $z=2$, то $|0-1|\leq1$, $|1-2|\leq1$, но $|0-2|>1$.

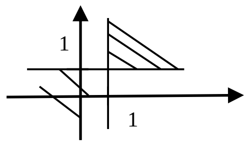


3 $\rho=\{(x, y)\in R^2 \mid (x-1)(y-1)\geq0\}$

График отношения дан на чертеже.

$D\rho=R\rho=R$

Отношение рефлексивно, симметрично, но не транзитивно.



Еслих=2, $y=1$, $z=0$, то $(2-1)(1-1)\geq0$, $(1-1)(0-1)\geq0$, но $(2-1)(0-1)=-1<0$.

4 $\rho=\{(x,y)\in R^2 \mid |x-y|=0\}$

Условие $|x-y|=0$ означает, что $x=y$. Отношение ρ является рефлексивным, симметричным и транзитивным. График – биссектриса.

5 $\rho=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2\geq2xy\}$

$x^2+y^2\geq2xy$ означает $(x-y)^2\geq0$. График – вся плоскость. Отношение ρ рефлексивно, симметрично и транзитивно.

§7 Отношение эквивалентности.

Отношение ρ заданное но множестве элементов из множества *A* называется отношением эквивалентности, если оно одновременно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Примеры:

1. Отношение равенства $x=y$
2. Отношение, заданное на множестве матриц $A\rho B \leftrightarrow$ ранг A= рангу B
3. Отношение, заданное на множестве матриц. $A\rho B \leftrightarrow \det A = \det B$
4. Отношение равносильности система линейных уравнений.
5. Отношение «соседства»: $x\rho y \leftrightarrow x$ и y живут в одном доме.
6. Отношение, заданное на множестве прямых на плоскости: $l_1\rho l_2 \leftrightarrow$ прямые l_1 и l_2 или совпадают или не пресекаются.
7. Отношение подобия треугольников.
8. Сравнение по модулю целого числа n. Обозначается $x\equiv y(\mathrm{mod}\, n) \leftrightarrow (x-y)$ делится нацело на n, где x и y–целые числа. Рефлексивность и симметричность очевидны. Докажем транзитивность. Пусть $x-y=nk_1$, $y-z=nk_2$. Тогда $(x-y)+(y-z)=n(k_1+k_2)$. Здесь k_1 и k_2 – целые числа.
9. ρ: $|Z_1|=|Z_2|$. Z_1и Z_2 – комплексные числа.
10. Пусть ρ -отношение, на множестве пар целых чисел (x,y), причем $y\neq 0$:
    $(x,y)\rho(u,v) \leftrightarrow xv=yu$
    Докажем транзитивнось. Пусть $(x,y)\rho(uv)$ и $(uv)\rho(ab)$. Покажем, что $(x,y)\rho(a,b)$. Поскольку $xv=yu$ и $ub=va$, то

перемножая, получим (xb) и $uv=ya(uv)$. Если $u\neq 0$, то поскольку $v\neq 0$, то $uv\neq 0$, и $xb=ya$.

Пусть u=0, тогда $xv=0$, но $v\neq 0$, значит, $x=0$ и $xb=0$. С другой стороны, $ub=0$, т.е. $va=0$, и значит,a=0, т.е. $ya=0$. Поэтому $xb=ya$, и опять $(x,y)\rho(a,b)$.

<u>Замечание</u>. Если ρ -отношение эквивалентности, то аналогично отношению сравнению по модулю n вместо $x\rho y$ будем обозначать $x\equiv y(\rho)$.

§8 Классы эквивалентности.

Пусть ρ - отношение эквивалентности на множестве A. Классом эквивалентности элемента $x\in A$ будем называть все те $y\in A$, для которых $y\equiv x(\rho)$ и обозначать [x].

<u>Теорема 1.</u> Классы эквивалентности или не пересекаются или совпадают.

<u>Доказательство.</u> Пусть $z\in[x]\cap[y]$. Тогда $x\equiv z(\rho)$ и $z\equiv y(\rho)$ следовательно$x\equiv y(\rho)$ и [x]=[y].

В примере 1 класс эквивалентности содержит 1элемент, в примере 5 – все люди, живущие в одном доме, в примере 8 – все числа, дающие при делении на n один и тот же остаток (всего n классов), в примере 9 геометрическим образом класса эквивалентности является окружность данного радиуса с центром в начале координат.

В примере 10 сопоставим элементу (x,y) рациональную дробь $\frac{x}{y}$. Тогда класс эквивалентности для (x,y) – это все рациональные дроби, равные $\frac{x}{y}$.

§9 Разбиения.

Пусть A – некоторое множество, и A_i, i=1,2… его подмножества, такие, что $\cup A_i=A$ и $A_i \cap A_j=\varnothing$ если $i\neq j$. Тогда подмножества A_i называют <u>разбиением множества A.</u>

<u>Теорема 2.</u> Отношение эквивалентности, заданное на множестве Aопределяет разбиение этого множества, и обратно, всякое разбиение определяет отношение эквивалентности.

В самом деле, отношение эквивалентности разбивает множество A на классы эквивалентности. Обратно, всякому разбиению можно сопоставить отношение эквивалентности: $x\rho y \leftrightarrow$когда x и y принадлежат одному и тому же подмножеству A_i.

<u>Замечание.</u> Разбиения часто используются при экономических и социологических исследованиях. Например, при анализе доходов население разбивается на несколько возрастных групп. Для более детального исследования рассматриваются и другие факторы: образование, место проживания и т.д. Чем больше факторов, там больше различных групп. Изучая одного или нескольких представителей одной группы, делаются выводы относительно всей группы. Самым подробным разбиение является такое, когда группа, т.е. класс эквивалентности состоит из одного элемента.

Задачи.

1 Пусть ρ - отношение эквивалентности на множестве комплексных чисел: ρ: $|Z_1|=|Z_2|$. Какие из следующих утверждений верно?

a) Каждый класс эквивалентности содержит бесконечное число элементов
b) Существуют классы с конечным числом элементов
c) $[1+i]=[\sqrt{2}]$
d) $[i]\cap[-1]=\varnothing$
e) $[i]\cap[1-i]=\varnothing$

Ответ: верно b), c), e).

2 Пусть ρ - отношение эквивалентности на множестве действительных чисел ρ:
$|x|=|y|$. Какие из следующих утверждений верны?

a) Каждый класс эквивалентности содержит 2 элемента.
b) Есть классы, содержащие меньше двух элементов.
c) $[2,5]\cap[-2,5]=\varnothing$
d) $[1]\cap[2]=\varnothing$

Ответ: верно b), d).

3 Пусть ρ - сравнение по модулю 7. Какие из следующих утверждений верны?

a) $[2]=[-2]$
b) $[2]=[5]$
c) $[2]=[-5]$

d) Каждый класс эквивалентности содержит бесконечное число элементов.

Ответ: верно c), d).

4 $\rho=\{(x,y)\in R^2 | \ x\text{-}y\in Z\}$

Доказать, что ρ отношение эквивалентности и описать классы эквивалентности.

Верно ли что:

a) $[\sqrt{2}]=[1{,}414]$
b) $[1{,}2]=[-1{,}2]$
c) $[0]=[1]$

Ответ: классы эквивалентности определяются числом, принадлежащим отрезку [0,1). Верно только c).

§10 Отношение порядка.

Порядком или частичным порядком называется отношение, которое рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

<u>Примеры.</u>

1. Сравнение действительных чисел $x\le y$.
2. Отношение включения $A\le B$.
3. Иерархия служащих некоторой фирмы $x\rho y\leftrightarrow y$ начальник x.
4. Отношение делимости на множестве натуральных чисел $x\rho y\leftrightarrow y$ делится x (нацело). Проверим антисимметричность. $y=xn$ и $x=ym$, где $m, n\in N$. Отсюда $y=ymn$. Т.к. $y\neq 0$, то $mn=1$. Значит, $m=n=1$, $x=y$.

Следуя традиции, отношения порядка символически обозначается $x \le y$. Если $x \le y$ и $x \ne y$, то будем писать $x < y$. Будем использовать запись $y \ge x$ и $y > x$ в качестве альтернативы $x \le y$ и $x < y$ соответственно. Частичный порядок ρ называем полным (линейным) порядком, если для любых x и y либо $x \le y$, либо $y \le x$. В приведенных примерах только в примере 1 отношение является линейным порядком.

§11 Наибольший и максимальный, наименьший и минимальный элементы.

Пусть $\le$ отношение порядка на множестве A. Элемент $y \in A$ называется наибольшим, если для всех $x \in A$, $x \le y$, аналогично y–наименьший, если для всех $x \in A$, $x \ge y$. Элемент y называется максимальным, если из того, что $x \ge y$ следует $x = y$. Аналогично y – минимальный если из того, что $x \le y$ следует $x = y$.

Справедливо следующее:

Теорема 3:

1. Наибольший элемент единственный, а максимальных может быть несколько.
2. Наибольший элемент является максимальным.
3. Для линейного порядка максимальный является наибольшим.

Доказательство. Пусть y_1 и y_2– наибольшие элементы. Тогда $y_1 \le y_2$ и $y_2 \le y_1$, т.е. $y_1 = y_2$.

Теорема 4.

1. Наименьший элемент единственный, а минимальных может быть несколько.
2. Наименьший элемент является минимальным.
3. Для линейного порядка минимальный является наименьшим. Эта теорема доказывается аналогично (доказать самим).

Задачи.

В задачах 1,2,3 доказать, что отношение ρ не является частичным порядком, т.к. не выполнена антисимметричность.

1. Отношение ρ на множестве комплексных чисел.
   $Z_1 \rho Z_2 \leftrightarrow |Z_1| \leq |Z_2|$
   Пример: $Z_1=1+i$
   $Z_2=1-i$
2. Отношение ρ на множестве комплексных чисел. $Z_1=x_1+iy_1$, $Z_2=x_2+iy_2$, $Z1 \rho Z_2 \leftrightarrow x_1 \leq x_2$.
   Пример: $Z_1=1+i$
   $Z_2=1+2i$
3. Отношение ρ на множестве действительных чисел $x_1 \rho x_2 \leftrightarrow |x_1| \leq |x_2|$.
   Пример: $x_1=1$, $x_2=-1$
4. Пусть M={a, b, c}, ρ - отношение включения на подмножествах {a}, {b},{c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}. Показать, что здесь нет наибольшего и наименьшего элементов, но есть 3 максимальных и 3 минимальных.

5 Показать, что добавив $\varnothing$, получим наименьший элемент, а если к тому же добавить подмножество {a, b, c}, то и наибольший элемент.

6 Показать, что отношение ρ в задании 4 не является линейным порядком, но если взять подмножества $\varnothing$, {a}, {a, b}, {a, b, c}, - то это будет линейны порядок с наибольшими и наименьшими элементами.

7 ρ - отношение делимости на множестве {1, 2, 4, 8}. Показать, что это линейный порядок с наибольшим и наименьшим элементами.

8 Показать, что если в задании 7 добавить число 5, что порядок престанет быть линейным. По-прежнему будет наименьший элемент, но не будет наибольшего. Есть ли максимальные элементы и сколько их?
Ответ: два- 5 и 8.

9 Отношение ρ на множестве A={-4, -5, -3, 2, 1}. ρ: $x\rho y \leftrightarrow |x|\leq|y|$. Доказать, что ρ - линейный порядок и указать наибольший и наименьший элементы.
Ответ: 1 – наименьший, -5 – наибольший.

§12 Граф и отношения.

Пусть ρ отношение, заданное на множестве элементов M={a_1, a_2,..,a_n}. Каждому такому соотношению сопоставить геометрическую фигуру, которую назовем графом, или ориентированным графом, по следующему правилу:

Каждому элементу a_i сопоставим точку, называемую вершиной. Если $a_i\rho a_j$, то вершины a_i и a_j соединим линией (не обязательно прямой), направленной от a_i к a_j, которую назовем ребром. Будем говорить, что данное ребро инцидентно вершинам a_i и a_j, а вершины инцидентны этому ребру. Если $a_i \rho a_i$, то возле вершин a_i рисуем петлю. Ясно, что существует взаимно однозначное соответствие между отношениями ρ и ориентированными графами.

§13 Матрица инцидентности вершин графа. Матрица отношения.

Пусть снова ρ - отношение на множестве $M=\{a_1, a_2,..,a_n\}$. Матрицей отношения ρ назовем матрицу размерности $n \times n$, у которой в клетке (i, j) стоит 1, если $(a_i, a_j) \in \rho$, и 0 (или пустая клетка), если $(a_i, a_j) \notin \rho$.

Эту же матрицу будем рассматривать как матрицу инцидентности (смежности) вершин графа.

Свойства отношения, свойства графа и свойства матрицы отношения.

Рефлексивность означает, что возле каждой вершины петля (соответственно на главной диагонали все 1). Антирефлексивность – нет ни одной петли (на главной диагонали все 0). Симметричность означает, что если вершины соединены ребром, то есть и противоположно ориентированное ребро. (матрица симметрична относительно главной диагонали).

Если ρ антисимметрично, и есть ребро (a_i, a_j), то ребра (a_j, a_i), нет. Соответственно, если в клетке (i, j), стоит 1, $i \neq j$, то в клетке (j, i) – 0. Транзитивность означает, что если есть ребро (a_i, a_j) и ребро (a_j, a_k), то должно быть ребро (a_i, a_k). Для матриц: если в клетках (i, j) и (j, k) стоит 1, то и в клетке (i, k) должна быть 1.

Замечание.

Пусть ρ - симметричное отношение. Два ребра (a_i, a_j) и (a_j, a_i) заменим одним неориентированным ребром. Полученный граф будем называть неориентированным.

§14 Мультиграфы и сети.

Начало теории графов было положено работой Эйлера о Кенигсбергских мостах. Графы, которые он изучал, были неориентированными, причем две вершины могли быть соединены несколькими ребрами. Разумеется, подобный граф уже не был геометрическим образом отношения. В матрице инцидентности вершин для него в клетке (i, j) и (j, i) стоит число k, где k – количество ребер, инцидентных вершинам a_i и a_j. Подобные графы принято называть мультиграфами. При этом мультиграфы могут быть и ориентированными, т.е. в клетках (i, j) и (j, i) стоят разные числа. Граф как ориентированный, так и неориентированный, в котором каждому ребру сопоставлено действительное число, называется сетью.

§15 Специальные графы отношение порядка.

Пусть ρ - отношение порядка. Сопоставим ему граф, более выпукло характеризующий это порядок.

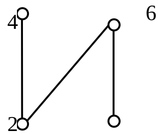
Ребра такого графа неориентированы, отсутствуют петли. Если x<y, и не существует такого Z, что x<Z<y, то вершина храсполагается ниже вершины y, и *x* и *y* соединены ребром. Такой граф называется <u>специальным графом отношения.</u>

Задачи.

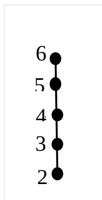
1 Пусть ρ - отношение делимости на множестве M={2, 3, 4, 5, 6}. Построить специальный граф этого отношения и указать максимальный и минимальный, наибольший и наименьший элементы.

Решение:

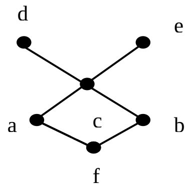
4и 6 – максимальные элементы, 2 и 3 – минимальные. Элемент 5 и максимальный (нет большего) и минимальный (нет меньшего). Наибольшего и наименьшего элементов нет.



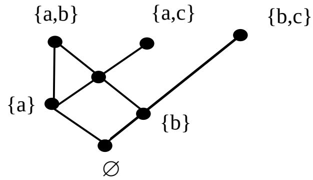
2 Решить задачу, аналогичную задаче 3, если ρ - отношение сравнения чисел того же 2ножества M. Решение. Это линейный порядок. 6 – наибольший, а 2 – наименьший элементы.



3 тношение порядка задается графом. Указать наибольший и наименьший, максимальный и минимальный элементы. Решение. Наибольшего нет. Максимальные d и e. Наименьший f.



4 M={ {a},{b},{a, b},{a, c}, {b, c}, $\varnothing$ }. ρ - отношения включения для подмножеств из M. Построить специальный граф. Указать наибольший, наименьший, максимальный, минимальный элементы.

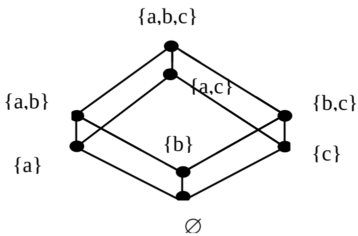


$\varnothing$ - наименьший элемент, наибольшего нет.

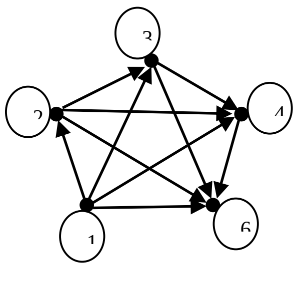
{a, b}, {a, c}, {b, c} – максимальные элементы.

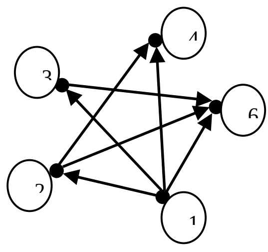
5 Какое подмножество нужно присоединить к M, чтобы появился наибольший элемент? Ответ: {a, b, c}.

6 A={a, b, c} M – множество всех подмножеств множества A. Построить специальный граф отношения включения. Решение.

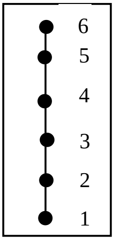


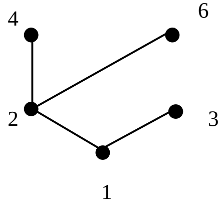
7 Пусть M={1, 2, 3, 4, 6}. Построить графы для отношения сравнения ρ_1 и отношения делимости ρ_2 на этом множестве.





8 Для этих же отношений задачи 7 построить специальные графы



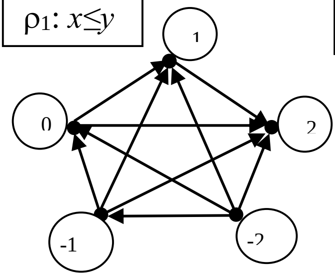


ρ_1: $x \le y$

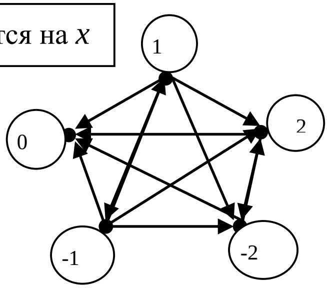
ρ_2: y делится на x

9 Пусть $M=\{x \in Z \mid |x| \le 2\}$. Построить графы для отношения сравнения и делимости на этом множестве.

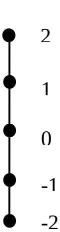
ρ_1: $x \le y$



ρ_2: y делится на x



10 Построить специальный граф отношения x≤y задачи 9. Является ли отношение ρ_2 задачи 9 отношением порядка?



ρ_1: $x \le y$

Отношение ρ_2 не является отношением порядка, т.к. 2 делится на -2 и -2 делится на 2, но $2 \neq -2$.

§16 Функции.

Понятие функции определим в терминах понятия отношения. Отношение $\rho \leq A x B$ назовем функцией из *A* в *B*, если того, что $(x, y) \in \rho$ и $(x, z) \in \rho$ следует, что $y=z$ т.е. функции не содержат различных пар с одинаковыми первыми координатами.

Примеры:

1. $\rho=\{ (1, 2), (1, 5), (2 ,5)\}$ не является функцией, т.к. различные элементы (1, 2) и (1, 5) имеют одинаковую первую координату.
2. $\rho=\{ (x, y) \in R^2 | y=x^2+1\}$ есть функция, т.к. если $x=a$, то $x^2+1=a^2+1$.
3. Отношение $\{ (x^2, x) | x \in R\}$ не является функцией, т.к. $(4,2) \in \rho$ и $(4, -2) \in \rho$.

Если f – функция, т.е. $(x, y) \in f$ или xfy, то хесть аргумент функции, а y называют значением функции f, образом элемента *x* при отображении *f*. Для обозначения *y* употребляют различные символы xf, $f(x)$, fx.

Поскольку функции являются множествами, к ним применимо обычное определение равенства множеств: две функции равны тогда и только тогда, когда они состоят из одних и тех же элементов. Другими словами $f=g$ тогда и только, тогда когда $D_f=D_g$ и $f(x)=g(x)$, $x \in D_f=D_g$.

Множество всех функций, определенных на *X* со значением на *Y* есть подмножество множества всех подмножеств $X\times Y$и обозначается оно Y^X.

Функция называется взаимно – однозначной, если она переводит различные элементы в различные, т.е. $x_1\neq x_2$ влечет $f(x_1)\neq f(x_2)$.

Пусть f(x) – взаимно – однозначная функция, $D_f=X$ и $R_f=Y$. Тогда функция f(x) есть множество упорядоченных пар (x, f(x)), где f(x) однозначно определенный элемент множества Y. Каждому $y\in Y$ однозначно сопоставляется $x\in X$ такой, что f(x)=y. Ввиду полной симметричности f называют взаимно однозначным соответствием множеств X и Y. Говорят так же, что множества X и Y имеют <u>одинаковую мощность.</u> Ясно, что если одно из них конечно u содержит n элементов, то другое также содержит n элементов.

Задачи.

1 Для данных отношений выяснить, будут ли они функциями, и если это функция, то является ли она взаимно однозначной?

$\rho_1=\{(x, 3x-1)|\ x\in R\}$,

$\rho_2=\{(x, x^2)|\ x\in R\}$,

$\rho_3=\{(x^2, x)|\ x\in R\}$,

$\rho_4=\{(x, x^3)|\ x\in R\}$,

$\rho_5=\{(x^3, x)|\ x\in R\}$,

$\rho_6=\{(x, \lg x)|\ x\in R^+\}$,

$\rho_7=\{(x, y)\in R\times R|\ x^2+y^2=1\}$.

Ответ: ρ_1, ρ_2, ρ_6, ρ_4, ρ_5 – функции, ρ_3 и ρ_7 – нет.

ρ_1, ρ_4, ρ_5, ρ_6, - взаимно однозначны.

2 Установив взаимно – однозначное соответствие, доказать, что следующие множества имеют одинаковую мощность:

a) Множество целых чисел
b) Множество четных чисел
c) Множество нечетных чисел

Ответ: $f(n)=2n$ и $f(n)=2n-1$

3 Установить взаимно – однозначное соответствие между:

a) Множеством действительных чисел и множеством положительных действительных чисел.

   Ответ: $x \leftrightarrow \lg x$.

b) Множеством Z^+ и множеством $Z^+ x Z^+$.

Указание. Множество элементов $Z^+ x Z^+$ записать в виде бесконечной матрицы и придумать правило перебора всех элементов $Z^+ x Z^+$.

4 Для следующих отношений указать область определения и область значений. Выяснить, какие из них функции и какие взаимно – однозначные функции:

$\rho_1=\{(1, 2), (1, 5), (5, 1), (5, 2)\}$,

$\rho_2=\{(1, 6), (6, 1), (2, 3), (3, 2)\}$,

$\rho_3=\{(1, 7), (2, 7), (7, 2), (3, 9)$,

$\rho_4=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

Ответ: ρ_2 и ρ_4 – взаимно – однозначные функции.

ρ_3 – функция, но не взаимно – однозначная, ρ_1 не функция.

Тесты по теме «Отношения и функции»

Тест №1

<u>Задание 1</u>

$A = \{-1,2\}$, $B = \{1,3\}$. Тогда $\rho = \{(-1,1),(-1,3),(2,3)\}$ (несколько ответов)

a) является функцией
b) функция, но не взаимно однозначная
c) не является функцией
d) $D\rho = A$, $R\rho = B$

Правильный ответ c), d)

<u>Задание 2</u>

ρ - отношение эквивалентности на множестве комплексных чисел. $\rho : z_1 \sim z_2 \leftrightarrow |z_1| = |z_2|$. Тогда (несколько ответов):

a) число классов эквивалентности бесконечно
b) число элементов в каждом классе бесконечно
c) $[i] \cap [1] = \varnothing$
d) $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2} \in [i]$

Правильные ответы a), d)

<u>Задание 3</u>

ρ - отношение неравенства на множестве всех неотрицательных чисел. Тогда (несколько ответов):

a) ρ - линейный порядок
b) есть наименьший элемент

c) есть наибольший элемент
d) есть минимальный, но не наименьший элемент

Правильные ответы a), b)

Задание 4
Пусть ρ - отношение делимости на множестве $M=\{1,2,3,4\}(x,y)\in\rho\leftrightarrow y$ делится (нацело) на x. Тогда (несколько ответов):
матрица этого отношения
a) симметрична
b) строка элемента 1 состоит из единиц
c) столбец элемента 1 состоит из единиц
d) на главной диагонали все единицы

Правильные ответы b), d)

Тест №2

Задание 1
$\rho=\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2\geq 1\}$. Тогда
a) ρ – функцией
b) ρ – функция, но не взаимно однозначная
c) $D\rho=\{x\in R \mid |x|\geq 1\}$
d) $R\rho=(-\infty,+\infty)$

Правильный ответ d)

Задание 2
ρ - отношение эквивалентности на множестве действительных чисел. $\rho: x_1 \sim x_2 \leftrightarrow |x_1|=|x_2|$. Тогда (несколько ответов):

a) число классов эквивалентности бесконечно
b) число элементов в каждом классе бесконечно
c) число элементов в каждом классе равно 2
d) существует класс, в котором число элементов меньше двух

Правильные ответы a), d)

<u>Задание 3</u>

ρ – отношение, заданное на множестве комплексных чисел. $\rho : |z_1| \le |z_2|$. Тогда отношение ρ:

a) частичный порядок
b) эквивалентности
c) рефлексивно, но не транзитивно
d) рефлексивно, транзитивно, но не антисимметрично

Правильные ответы d)

<u>Задание 4</u>

Пусть ρ - сравнение по модулю 3 на множестве $M = \{1,2,3,4\}$. Тогда (несколько ответов):
матрица этого отношения

a) симметрична
b) главная диагональ состоит из одних единиц
c) элемент (1,3) равен 1
d) элемент (1,3) равен 1, но элемент (3,1) равен 0

Правильные ответы a), b), c)

Вопросы к главе 1.

1. Сформулируйте принципы “абстракции” и “объемности” Кантора
2. Какая разница между понятием “включения” и ”принадлежности”?
3. Пусть A – произвольное множество. Что представляют собой следующие множества: $A\cap\varnothing$, $A\cup\varnothing$, $A\backslash\varnothing$, $A\backslash A$, $\varnothing/A$?
4. Опишите эти множества: $\{\varnothing\}\cap\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}/\varnothing$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}/\{\varnothing\}$.
5. Сколько элементов в множестве $A=\{1, \{1, 2\}, 2\}$?
6. Чему равна мощность конечного множества?

   Что такое степень – множество множества $\mathcal{U}$ и какова его мощность, если $\mathcal{U}$ конечно?
7. Установите взаимно однозначное соответствие между всеми подмножествами конечного множества и последовательностями из нулей и единиц.
8. Дайте определение прямого произведения множеств.
9. Какая связь между прямым произведением множеств и точками плоскости? Точками пространства?
10. Дайте определение бинарного, тернарного отношений, отношения любой арности, отношения на множестве элементов множества A.
11. Какая связь между бинарными отношениями и линиями на плоскости, тернарными отношениями и поверхностями в пространстве? Приведите примеры.
12. Дайте определение графика отношения, заданного на множестве действительных чисел.

13. Что такое области определения и значений бинарного отношения? Каков их геометрический смысл для отношений, заданных на множестве действительных чисел?
14. Дайте определение основных свойств отношений: рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность.
15. Как с помощью графика отношений выяснить его свойства?
16. Докажите, что для любых непустых множеств *A, B, C* из $(A\times B)\cup(B\times A)=C\times C$ следует $A=B=C$.
17. Дайте определение и приведите примеры отношения эквивалентности.
18. Что такое класс эквивалентности может ли один и тот же элемент принадлежать разным классам эквивалентности?
19. Сколько существует различных классов эквивалентности для сравнения по модулю числа n? Когда два целых числа определяют один и тот же класс эквивалентности?
20. Какая связь между разбиениями множества M и отношениями эквивалентности, заданном на множестве M?
21. Какая разница между частичным и линейным порядками?
22. Приведите пример частичного, но не линейного порядка.
23. Дайте определение максимального, минимального, наибольшего, наименьшего элементов.
24. Для какого порядка всякий минимальный элемент является наименьшим, а максимальный - наибольшим?
25. Как строится орграф, соответствующий отношению на конечном множестве?
26. Как связаны свойства отношения и орграф, ему соответствующий?

27. Матрица отношения и её связь со свойствами отношения. Матрица смежности вершин графа.
28. Как строится специальный граф отношения частичного порядка? Как по этому графу найти минимальный, максимальный, наименьший и наибольший элементы?
29. Дайте определение функции, взаимно однозначной функции.
30. Что значит, что множества A и B имеют одинаковую мощность? Может ли множество и его подмножество иметь одинаковую мощность?

Глава 2. Элементы математической логики.

§1.Основные понятия.

Наша речь состоит из высказываний. Высказывания могут быть простыми, как например: дважды два четыре, 6 делится на 3 и т.д.; или сложными, составными, такими, как 2x2=5 или 6 делится на 3.

Высказывание либо истинно, либо ложно, и не может быть истинным и ложным одновременно (закон исключения третьего), хотя в реальной жизни это возможно. Например, высказывание “*N* – хороший человек” может быть одновременно и истинным и ложным в зависимости от того, чье мнение выражает это высказывание.

Сложные, составные, высказывания строятся из простых с помощью логических, или сентенциональных, связок. Их всего 5. Это не, и, или, если…, то (или влечет), тогда и только тогда, когда.

Задача логики высказываний состоит в том, чтобы уметь конструировать сложные высказывания из простых, и устанавливать истинность сложных высказываний, зная истинное значение простых компонентов.

Первое систематическое рассмотрение этих вопросов можно найти уже в сочинениях Аристотеля, однако математические подходы впервые были указаны Джорджем Булем (1854 г.). Современные более тонкие методы выработаны уже в наше время усилиями специалистов по математической логике.

Мы будем использовать строчные латинские буквы *a, b, x, y, p, q* и т.д. в качестве символов неопределённых высказываний. Эти высказывания могут быть как простыми, так и составными. Эти переменные могут принимать 2 значения, которые мы будем обозначать как 1 (истинно) или 0 (ложно).

§2.Основные логические операции (связки) и их таблицы истинности.

1. Отрицание. Читается не a (неверно, что a). Обозначается $\bar{a}$ (иногда ¬a). Истинно тогда и только тогда, когда a ложно.
2. Логическое произведение (конъюнкция). Обозначается $a \wedge b$ (иногда просто ab), читается a “и” b. В обычной речи в качестве синонимов используют слова “а” , “но”. Истинно только в том случае, если истинны оба высказывания.
3. Логическая сумма (дизъюнкция). Обозначается $a \vee b$.Читается a “или” b. Высказывание ложно только в том случае, когда ложны оба высказывания. Отметим, что союз “или” употребляется не в разделительном смысле.
4. Импликация. Обозначается $a \rightarrow b$. Читается “если a, то b”; a – посылка, b – заключение. Ложно только в случае, если посылка a истинна, а заключение b ложно. Заметим, что здесь не предполагается причинно-следственная связь.
5. Эквиваленция(двойная импликация). Обозначается $a \leftrightarrow b$.Читается “a тогда и только тогда, когда b”. Истинно только когда a и b принимают одинаковые истинностные значения.

Таблица истинности основных логических операций

a	b	$a \vee b$	$a \wedge b$	$a \to b$	$a \leftrightarrow b$	$\bar{a}$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

Упражнения.

1. Запишите символически следующие сложные предложения, обозначив буквами простые компоненты (т.е. высказывания, не содержащие связок)
   a. Если завтра будет дождь, то я выйду из дома, взяв зонтик, или останусь дома.
   b. Если я устал или голоден, то не могу заниматься.
   c. Если утром я не просплю и успею к первой паре, то получу зачёт, а если просплю или не успею, то зачёт не получу.
   d. Если существует предел каждой функции, то существует предел их суммы и предел суммы равен сумме пределов, если же предел суммы не существует, то не существует предела хотя бы одного из слагаемых.

e. Число делится на 10 тогда и только тогда, когда оно делится на 5 и четно.

<u>Решение:</u>

a. p – завтра будет дождь, q – я выйду из дома, r – я возьму зонтик
$\mathbf{(p\to qr\lor \overline{q})}$
b. p – я устал, q – я голоден, r – могу заниматься
$\mathbf{(p\lor q\to \overline{r})}$
c. p – утром я просплю, q – успею к первой паре, r – сдам зачёт $\mathbf{((\overline{p}\land q\to r)\land(p\lor \overline{q}\to \overline{r}))}$
d. p – существует предел каждой функции, q – существует предел суммы, r – предел суммы равен сумме пределов, s – существует предел хотя бы одного слагаемого $\mathbf{((p\to q\land r)\land(\overline{p}\to \overline{s}))}$
e. p – число делится на 10, q –число делится на 5, r – число четно
$\mathbf{(p\leftrightarrow q\land r)}$

2. Пусть p – сегодня светит солнце, q – сегодня идёт дождь, r – сегодня идет снег, s – вчера был ветер.
Переведите на русский язык следующие формулы:
a. $(p\to(r\land s))$
b. $(s\leftrightarrow p\land \overline{q})$
c. $(p\leftrightarrow(r\land \overline{s})\lor \overline{q})$
d. $((p\leftrightarrow \overline{q})\land(\overline{r}\lor s))$

<u>Решение:</u>
a. Если сегодня светит солнце, то идёт снег и вчера был ветер

b. Тогда и только тогда сегодня светит солнце, и нет дождя, если вчера был ветер
c. Тогда и только тогда сегодня светит солнце, когда или нет дождя, или идёт снег, а вчера не было ветра
d. Тогда и только тогда светит солнце, когда нет дождя, и, либо вчера был ветер, либо сегодня не идёт снег

3. Пусть p – Маша любит Сашу, q – Саша любит Машу. Запишите символически следующие сложные предложения, обозначив буквами простые компоненты:
   a. Саша и Маша любят друг друга
   b. Неверно, что Саша и Маша любят друг друга
   c. Саша и Маша друг друга не любят
   d. Саша любит Машу, но та не отвечает ему взаимностью

Решение:

a. $(p \wedge q)$
b. $(\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q})$
c. $(\overline{p} \wedge \overline{q})$
d. $(q \wedge \overline{p})$

§3.Понятия формулы логики высказываний.

1. Символы простых высказываний являются формулами
2. Если F и G – формулы, то формулами будут $\overline{F}$, $F \wedge G$, $F \vee G$, $F \rightarrow G$, $F \leftrightarrow G$

3. Других формул нет. Это означает, что формулами могут быть только такие, которые либо 1) либо 2).
4. О простых формулах, входящих в составную, говорят, что они <u>содержатся</u> в ней, и называют их её <u>простыми компонентами</u>. Последовательность операций устанавливается скобками. Поскольку большое число скобок затрудняет чтение, то между операциями устанавливается иерархия: отрицание предшествует всем операциям, затем конъюнкция (символ$\wedge$ часто опускается), дизъюнкция, импликация, двойная импликация.

<u>Например:</u>

$(\bar{a}\wedge b\vee c)$ означает $(((\bar{a})\wedge b)\vee c)$

$(a\leftrightarrow b\wedge c)$ означает $(a\leftrightarrow(b\wedge c)$

$(a\leftrightarrow b\rightarrow c)$ означает $(a\leftrightarrow(b\rightarrow c))$

§4.Истинностные таблицы.

Выше были определены основные логические операции и приведены их истинностные таблицы, которые фактически являются определениями этих операций. С помощью этих таблиц можно составить таблицы истинности для любой формулы. Если формула F содержит n простых компонентов, каждый из которых принимает два значения: 0 и 1, то истинностная таблица формулы F содержит 2^n наборов. Для каждого из них формула F принимает значение или 0 или 1. Это и есть истинностная таблица формулы F.

Замечания

1. Хотя 2^n наборов значений простых компонент, входящих в формулу F, можно располагать в любом порядке в таблице истинности, мы, для определенности будем использовать двоичную запись порядкового номера набора. Например, для n=3 это будет следующий порядок: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.
2. Условимся опускать внешние скобки в формуле. Например, $F=ab\to b\vee c$ вместо $F=(ab\to \bar{b}\vee c)$.
3. Будем говорить, что простая компонента входит в формулу F несущественно (фиктивно), если истинностное значение формулы F не зависит от истинностного значения этой компоненты. Так, таблица истинности формулы $F=ab\vee a$ имеет вид:

a	**b**	**ab∨a**
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Сравнивая первую и вторую, а затем третью и четвёртую строки, замечаем, что F зависит только от значения, принимаемого компонентой ***a***, т.е. ***b*** – несущественная компонента.

4. Кроме основных 5 логических связок, иногда используются и другие. Например, $p\downarrow q$ переводится как “ни p,ни q”, и формула $p\downarrow q$ принимает значение 1 только тогда, когда p=q=0.

Упражнения.

1. Составить таблицы истинности для следующих формул:
   a. $p \to q \vee r$
   b. $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$
   c. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$
   d. $(p \to q) \leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$
   e. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$
   f. $(p \to q) \to r$

   Ответы:

   a. 11110111
   b. 1111
   c. 11111111
   d. 1111
   e. 11111111
   f. 01011101
2. Пусть значение $p \to q$ есть 0. Чему равно значение $\overline{p}q \leftrightarrow p \vee q$?

   Решение:

   Если значение $p \to q$ есть 0, то $p=1$, а $q=0$. Тогда $\overline{p}q=0$, а $p \vee q=1$. Значит, $\overline{p}q \leftrightarrow p \vee q$ равно 0.
3. Если значение $p \to q$ есть 1, то что можно сказать о значении $\overline{p}q \leftrightarrow p \vee q$?

Решение:

Если p=q=1, то $\bar{p}q$ равно 0, а $p\vee q$ равно 1. Значит $\bar{p}q\leftrightarrow p\vee q$ равно 0. Если же p=q=0, то $\bar{p}q\leftrightarrow p\vee q$ равно 1. Следовательно, возможны разные значения.

4. Для каждого из следующих высказываний определить, достаточно ли приведённых сведений, чтобы установить его численное значение. Если да, то указать это значение, если нет, то показать что возможны разные значения.
    a. $(p\to q)\to r$; $r=1$
    b. $p(q\to r)$; $q\to r$ равно 1
    c. $p\vee(q\to r)$; $q\to r$ равно 1
    d. $\overline{p\vee q}\leftrightarrow \bar{p}\ \bar{q}$; $\overline{p\vee q}$ равно 1
    e. $(p\to q)\to(\bar{q}\to \bar{p})$; $p\to q$ равно 1
    f. $pq\to p\vee s$; pq равно1 и $s=0$.

Ответы:

a. 1
b. Если p=1, то 1, если p=0, то 0
c. 1
d. 1
e. 1
f. 1

§5.Булевы функции. Равносильность. Тавтологии.

Булевой функцией (по имени английского математика и логика Джорджа Буля) называется логическая функция, аргументы которой, и она сама принимают два значения 0 и 1.

Если $f(x_1,\ldots,x_n)$ булева функция, зависящая от n аргументов, то она вполне определяется своими значениями для 2^n наборов значений аргументов. Кроме того, она вполне определяется подмножеством тех наборов, для которых она принимает значение 1. Поскольку число различных подмножеств равно 2^{2^n}, то

Теорема: Число различных булевых функций, зависящих от n аргументов равно 2^{2^n}.

Так, для n=2 число различных булевых функций равно 16. Очевидно, что всякая формула логики высказываний является булевой функцией. В дальнейшем будет показано, что и всякую булевую функцию можно интерпретировать как формулу логики высказываний.

Определение: Две формулы F и G называются равносильными, если они равны как булевы функции, т.е. принимают одинаковые значения при всех наборах значений простых компонент. Обозначается $F \equiv G$.

Замечание: Формулы F и G могут содержать разные компоненты. При составлении таблицы истинности в набор включаются все компоненты, входящие в хотя бы одну из этих функций, т.е. некоторые простые компоненты могут быть фиктивными.

Тождественно-истинной (тавтологией) называется формула, таблица истинности которой состоит из одних 1 и тождественно-ложной, если все её значения равны 0. Обозначаются они соответственно $F\equiv1$ и $F\equiv0$. Если формула может принимать как значения 1, так и 0, то она называется выполнимой.

Пример:

В задаче 1 формулы *b), c), d), e)* - тождественно-истинные, формулы *a) и f)* - выполнимые.
Примером тождественно-ложной формулы будет
$$((\mathbf{a}\vee\mathbf{b})\wedge(\bar{\mathbf{a}}\wedge\bar{\mathbf{b}})).$$
Отношение равносильности является отношением эквивалентности на множестве всех формул логики высказываний. Класс эквивалентности - это все формулы, соответствующие одной и той же булевой функции. Изучение булевых функций имеет большое значение как для алгебры и математической логики, так и для приложений в компьютерной математике и теории автоматов. Особую роль играют тавтологии. Проверить, является ли формула тавтологией или равносильны ли данные формулы, можно, составляя таблицы истинности. Процедура эта для большого числа аргументов утомительна или даже невозможна. Однако, существуют методы, позволяющие значительно упростить эту проверку.

Наша задача в дальнейшем состоит в установлении правил равносильного преобразования формул и приведение формулы к некоторому нормальному виду.
Булевой формулой называется формула, не содержащая импликации и эквиваленций.

Теорема: Всякая формула логики высказываний равносильна булевой формуле.

Доказательство этой теоремы опирается на следующие равносильности $\mathbf{a \to b \equiv \bar{a} \lor b}$ и $\mathbf{a \leftrightarrow b \equiv ab \lor \bar{a}\,\bar{b}}$
Они проверяются таблицей истинности:

a	**b**	$\mathbf{a \to b}$	$\mathbf{\bar{a} \lor b}$	$\mathbf{a \leftrightarrow b}$	$\mathbf{ab \lor \bar{a}\,\bar{b}}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Эти равносильности имеют логический смысл.
Формула $a \to b$ означает: если верно *a* то верно *b*.
А формула $\bar{a} \lor b$: или неверно *a* или верно *b*.
Это последнее высказывание и есть обоснование таблицы истинности для операции $a \to b$.
Формула $a \leftrightarrow b$ переводится так: a верно тогда и только тогда, когда верно b, а формула $ab \lor \bar{a}\,\bar{b}$ означает или a и b одновременно верны , или одновременно неверны.
Сформулируем также два правила подстановки:

1. Пусть F_A - формула, в которой фиксировано вхождение в неё формулы A (в этом случае говорят, что формула A является частью формулы F , и что формула F

длиннее формулы A) и пусть A≡B, тогда $F_A \equiv F_B$, где в формуле F формула A заменена на формулу B.
Например $\mathbf{F=(a\to b)\wedge c}$ и $\mathbf{A=a\to b}$. Тогда
$\mathbf{A=a\to b\equiv B=\bar{a}\vee b}$ и $\mathbf{(a\to b)\wedge c\equiv(\bar{a}\vee b)\wedge c}$.

2. Пусть $F_a \equiv G_a$, причём в формулах F и G фиксированы все вхождения простой компоненты a. Тогда $F_A \equiv G_A$, где A - произвольная формула, и в формулах F и G простая компонента a заменена всюду на формулу A.
Пример. $\mathbf{ab\vee\bar{a}\bar{b}\equiv a\leftrightarrow b}$. Пусть $\mathbf{A=c\to d}$. Тогда
$\mathbf{(c\to d)b\vee\overline{(c\to d)}\,\bar{b}\equiv(c\to d)\leftrightarrow b}$

Доказательство теоремы может быть проведено методом индукции по длине формулы с использованием указанных равносильностей, правил подстановки, а также таблицы основных равносильностей.

§ 6.Основные равносильности булевых формул.

1. $a\vee b\equiv b\vee a$	1′. $a\wedge b\equiv b\wedge a$
2. $a\vee(b\vee c)\equiv(a\vee b)\vee c$	2′. $a\wedge(b\wedge c)\equiv(a\wedge b)\wedge c$
3. $a\vee(b\wedge c)\equiv(a\vee b)\wedge(a\vee c)$	3′. $a\wedge(b\vee c)\equiv(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$
4. $a\vee(a\wedge b)\equiv a$	4′. $a\wedge(a\vee b)\equiv a$
5. $\overline{a\vee b}\equiv\bar{a}\wedge\bar{b}$	5′. $\overline{a\wedge b}\equiv\bar{a}\vee\bar{b}$
6. $a\vee a\equiv a$	6′. $a\wedge a\equiv a$
7. $a\vee\bar{a}\equiv 1$	7′. $a\wedge\bar{a}\equiv 0$
8. $a\vee 1\equiv 1$	8′. $a\wedge 0\equiv 0$
9. $a\vee 0\equiv a$	9′. $a\wedge 1\equiv a$
10. $\bar{\bar{a}}=a$	

Все эти равносильности могут быть доказаны с помощью таблицы истинности.

<u>Замечания:</u>

1. Нетрудно убедиться в том, что данные равносильности аналогичны таблице равенства множеств, в которой пересечение заменено конъюнкцией, а объединение - дизъюнкцией, пустое множество - тождественно ложным, а универсальное множество - тождественно истинным высказыванием. Сами эти равносильности называются так же, как и соответствующие равенства. Так 5 и 5′ называются законами де Моргана, а 10 - закон снятия двойного отрицания.
2. Можно заметить, что правый столбец получается из левого заменой конъюнкции на дизъюнкцию, дизъюнкции на конъюнкцию, 1 заменяется на 0, а 0 на 1.

Вернёмся к теореме. Не проводя доказательства, покажем на примере, как найти равносильную булеву формулу.

<u>Пример.</u>

$$F=(a\to(b\lor c))\to a\equiv(\bar{a}\lor(b\lor c))\to a\equiv\overline{(\bar{a}\lor(b\lor c))}\lor a\equiv$$
$$\bar{\bar{a}}\land\overline{(b\lor a)}\lor a\equiv(a\land(\bar{b}\land\bar{c})\lor a\equiv a\,\bar{b}\,\bar{c}\lor a$$

Приведённой булевой формулой называется булева формула, в которой символ отрицания относится только к символам простых компонент. Так, формула $\overline{(\bar{a}\lor(b\lor c))}\lor a$ является булевой, но не приведённой, а равносильная ей $a\,\bar{b}\,\bar{c}\lor a$ - приведённая.

Следствие. Всякая формула логики высказываний равносильна приведённой булевой формуле.

Это следует из правил подстановки, законов до Моргана и снятия двойного отрицания.

§ 7.Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формулы (ДНФ и КНФ).

Назовём элементарной дизъюнкцией (суммой) дизъюнкцию простых компонент и их отрицаний. Аналогично, элементарной конъюнкцией (произведением) назовём конъюнкцию простых компонент и их отрицаний. Дизъюнктивной нормальной формулой (формой) назовём дизъюнкцию элементарных конъюнкций (сумму элементарных произведений) и обозначим ДНФ. И аналогично КНФ – это конъюнкция элементарных дизъюнкций (произведение элементарных сумм).

Теорема. Для всякой формулы логики высказываний существуют равносильные ей ДНФ и КНФ.

Это следует из законов дистрибутивности и из предыдущих теорем.

Пример. Для формулы $F=\overline{(a\wedge b\to \bar{c}\vee \bar{d})}\to ae$ построить равносильные ей ДНФ и КНФ.

Сначала избавимся от импликаций

$F\equiv\overline{\overline{(\overline{(a\wedge b)}\vee\overline{c}\vee\overline{d})}}\vee ae\equiv((\overline{a\wedge b})\vee\overline{c}\vee\overline{d})\vee ae\equiv(\overline{a}\vee\overline{b})\vee\overline{c}\vee\overline{d}\vee ae\equiv\overline{a}\vee\overline{b}\vee\overline{c}\vee\overline{d}\vee ae$ – это и есть ДНФ. Теперь применив правило 3, получим $F\equiv(\overline{a}\vee\overline{b}\vee\overline{c}\vee\overline{d}\vee a)\wedge(\overline{a}\vee\overline{b}\vee\overline{c}\vee\overline{d}\vee e)\equiv\overline{a}\vee\overline{b}\vee\overline{c}\vee\overline{d}e$ - это одновременно и ДНФ и КНФ. Здесь $\overline{a}\vee\overline{b}\vee\overline{c}\vee\overline{d}\vee a\equiv 1$

Замечание. Данный пример показывает, что равносильные ДНФ и КНФ не единственны. Однако, существуют единственные (с точностью до порядка) ДНФ и КНФ, называемыми совершенными ДНФ и КНФ (СДНФ и СКНФ).

§8.Представление булевой функции СДНФ и СКНФ (проблема разрешимости).

Пусть булева функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ задана своей таблицей, и пусто f не является тождественным нулём. Каждому набору значений переменных, для которого f равна 1 составим элементарную конъюнкцию по следующему правилу: если в наборе $x_i=1$, то в конъюнкцию войдёт x_i, а если $x_i=0$, то $\overline{x}_i$. Дизъюнкция всех таких конъюнкций и будет ДНФ, равносильной данной функции. Она называется совершенной ДНФ (СДНФ). Число слагаемых в такой сумме равно числу наборов, для которых f равно 1, а сами слагаемые определяются единственным образом по этим наборам.

Аналогично строится совершенная КНФ. Если f не является тождественной 1, то каждому набору, для которого f равна 0, сопоставляется элементарная дизъюнкция: если $x_i=0$, то входит x_i, а если $x_i=1$, то входит $\overline{x}_i$. Конъюнкция всех таких дизъюнкций равносильна f.

Пример 1. Построить СДНФ и СКНФ, равносильные функции

x	y	f
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$f \equiv \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{x}y \vee xy \equiv \bar{x} \vee y$$

Пример 2. Построить СДНФ и СКНФ для функции, заданной столбцом своих значений (11001110).

Мы уже говорили, что для удобства наборы располагаются в порядке, соответствующем двоичной записи порядкового номера. Так, данная функция f принимает значение 1 для наборов с номерами 0,1,4,5,6, т.е. для наборов: 000, 001,100,101,110, а потому

$f \equiv \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z \vee x\bar{y}\,\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z}$

Поскольку f равна 0 для наборов 010,011 и 111, то

$f \equiv (x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$

Замечание 1. Если функция f задаётся 2^k своими значениями, то совершенные нормальные формулы для f содержит k переменных. Если число существенных переменных меньше k, то для f можно построить совершенные нормальные формы с меньшим числом переменных.

Замечание 2. Если СДНФ функции f содержит ρ слагаемых, то СКНФ содержит 2^k - ρ сомножителей, где k - число переменных функции f.

Дадим теперь аналитическое определение СДНФ и СКНФ.

Определение. Совершенной дизъюнктивной нормальной формулой (СДНФ) от переменных x_1, x_2,…, x_k называется ДНФ, обладающая следующими свойствами:

1. Нет одинаковых конъюнкций.
2. Каждая конъюнкция для каждого переменного x_i содержит либо x_i, либо $\overline{x}_i$, но не может содержать их одновременно.
3. Все сомножители в каждой конъюнкции различны.

Аналогично определяется совершенная конъюктивная нормальная формула (СКНФ) заменой слова "конъюнкция" на слово "дизъюнкция".

§9.Приведение формул к СДНФ(СКНФ) равносильными преобразованиями.

1. Сначала найдём ДНФ, равносильную данной формуле.
2. Если в элементарную конъюнкцию несколько раз входит переменная x_i, то оставим только одно вхождение.
3. Если в элементарную конъюнкцию одновременно входят x_i и $\overline{x}_i$, то она равносильна 0, а потому выбросим её.
4. Если какая-то элементарная конъюнкция A не содержит переменную x_i, то заменим A на $Ax_i \vee A\overline{x}_i$.
5. Если ДНФ содержит одинаковые, с точностью до порядка сомножителей, конъюнкции, то оставим только одну из них.

Алгоритм построения СКНФ аналогичен. Исходя из произвольной КНФ, проводим аналогичные преобразования, заменяя слово "конъюнкция" на слово "дизъюнкция". Дизъюнкцию, содержащую одновременно x_i и $\bar{x}_i$ заменяем на 1 и исключаем. Если какая-то дизъюнкция A не содержит переменную x_i, то заменяем её на $(A\vee x_i)(A\vee\bar{x}_i)$.

<u>Пример.</u> Найти СДНФ и СКНФ, равносильные формуле $F=(ab\to\bar{a}\vee c)\to a\vee\bar{b}$.

$$F\equiv\overline{\left(\overline{ab}\vee\bar{a}\vee c\right)}\vee a\vee\bar{b}\equiv\left(\overline{\overline{ab}}\wedge\bar{\bar{a}}\wedge\bar{c}\right)\vee a\vee\bar{b}\equiv aba\bar{c}\vee a\vee\bar{b}\equiv ab\bar{c}\vee a\vee\bar{b}\equiv a\vee\bar{b}$$

Формула $a\vee\bar{b}$ является одновременно и ДНФ и СКНФ. Построим СДНФ.

$a\equiv ab\vee a\bar{b}$, $\bar{b}\equiv a\bar{b}\vee\bar{a}\bar{b}$. Тогда $F\equiv ab\vee a\bar{b}\vee\bar{a}\bar{b}$

<u>Замечание.</u> Переменная *c* оказалась несущественной.

Построим СКНФ и СДНФ с тремя переменными:

$F\equiv a\vee\bar{b}\equiv(a\vee\bar{b}\vee c)(a\vee\bar{b}\vee\bar{c})$ - это СКНФ

Теперь $ab\equiv abc\vee ab\bar{c}$, $a\bar{b}\equiv a\bar{b}c\vee a\bar{b}\bar{c}$, $\bar{a}\bar{b}\equiv\bar{a}\bar{b}c\vee\bar{a}\bar{b}\bar{c}$
Тогда СДНФ для $F\equiv a\bar{b}c\vee a\bar{b}\bar{c}\vee\bar{a}\bar{b}c\vee\bar{a}\bar{b}\bar{c}\vee abc\vee ab\bar{c}$
Пусть теперь формулы F и G равносильны, т.е. равны как булевы функции. Всегда ли существует цепочка равносильных преобразований, переводящих F в G?

Теорема. Если формулы F и G равны как булевы функции, то существует последовательность равносильных преобразований, переводящих F в G.

В самом деле, формулы F и G имеют одинаковую СДНФ (СКНФ). Каждую из формул можно равносильными преобразованиями перевести в совершенную нормальную формулу.

Задача. Убедившись, что формулы $F=(x\vee y\to yz)\vee \bar{z}$ и $G=\bar{x}\vee y\vee \bar{z}$ равны как функции, построить цепочку преобразований, переводящих F в G.

x	y	z	G	F
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

$$F=(x\vee y\to yz)\vee \bar{z}\equiv(\overline{x\vee y}\vee yz)\vee \bar{z}\equiv \bar{x}\,\bar{y}\vee yz\vee \bar{z}$$
$$\equiv \bar{x}\,\bar{y}\vee(y\vee \bar{z})(z\vee \bar{z})\equiv \bar{x}\,\bar{y}\vee y\vee \bar{z}\equiv(\bar{x}\vee y)(\bar{y}\vee y)\vee \bar{z}\equiv \bar{x}\vee y\vee \bar{z}$$

§10.Необходимое и достаточное условия тождественной истинности (ложности) формул.

Чтобы выяснить равносильны ли формулы F и G, или, что-то тоже самое, будет ли формула F↔Gтождественно истинной, можно составить их таблицы истинности. Однако, при большом числе переменных задача весьма трудоёмка. Следующие теоремы позволяют её упростить.

<u>Теорема.</u> Булева формула тождественно истинна в том и только в том случае, если каждая элементарная дизъюнкция любой равносильной ей КНФ содержит пару переменных x и её отрицание $\bar{x}$ (т.е. равна 1).

<u>Теорема.</u> Булева формула тождественно ложна в том и только в том случает, если каждая элементарная конъюнкция любой равносильной ей ДНФ содержит пару: переменная x и её отрицание $\bar{x}$, т.е. $\bar{x}x$, равную 0.

Доказательство этих теорем основано на следующих леммах:

<u>Лемма 1.</u> Элементарная дизъюнкция является тождественно истинной в том и только в том случае, когда она содержит пару слагаемых: переменное и его отрицание.

<u>Лемма 2.</u> Элементарная дизъюнкция является тождественно ложной тогда и только тогда, когда она содержит пару сомножителей: переменное и его отрицание.

<u>Замечание.</u> Чтобы выяснить, является формула тождественно истинной, не обязательно приводить формулу к КНФ. Например, пусть $F=(\bar{x}\vee y)A$, где A - некоторая формула. Если $x=1$, а $y=0$, то $\bar{x}\vee y=0$ и $F=0$ и F не может быть тождественно истинной. Аналогично, если $F=\bar{x}y\vee A$, то при $x=0$ и $y=1$ $\bar{x}y=1$ и $F= 1$, а значит, F не может быть тождественно ложной.

§ 11.Принцип двойственности.

Список основных равносильностей алгебры высказываний состоит из двух столбцов, один из которых получается заменой дизъюнкции на конъюнкцию и наоборот в другом столбце (0 на 1 и 1 на 0). Это не случайно, а является следствием закона двойственности.

Определение. Пусть F булева формула, т.е. формула, не содержащая импликаций, двойственной F* формулой называется формула, полученная из F заменой дизъюнкции на конъюнкцию и наоборот, а также 0 заменяется на 1 и 1 - на 0. Ясно, что $(F^*)^* = F$.

Теорема 1. Пусть $F(x_1,...,x_k)$ - булева формула алгебры высказываний, зависящая от элементарных высказываний x_1, $x_2,...,x_k$. Тогда отрицание формулы равносильно двойственной формуле от отрицаний, т.е. $\overline{F(x_1, x_2, \ldots, x_k)} = F^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2,...,\bar{x}_k)$

Теорема 2. Две формулы равносильны $F \equiv G$ тогда и только тогда, когда равносильны двойственные им $F^* \equiv G^*$.

Доказательство этих теорем основывается на законах де Моргана, которые являются частным случаем теоремы 1. Заметим, что $F^*(x_1, x_2,...,x_k) \equiv F^*(\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2,...,\bar{\bar{x}}_k) = \overline{F(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \bar{x}_k)}$. Это позволяет проще строить двойственную функцию для функции F, заданной своими значениями.

Пример 1. Для функции F=(0,0,1,0) построить двойственную.

1 способ. Функция F принимает значение 1 только для набора с номером 2, т.е. (1, 0). Значит, $F=x\bar{y}$. Тогда $F^{*}=x\vee\bar{y}$. F^{*} принимает значение 1 для наборов (0, 0), (1, 0), (1, 1), т.е. $F^{*}=(1, 0, 1, 1)$.

2 способ. Если F зависит от k переменных, то набор их значений мы условились располагать, используя двоичную запись порядка набора, начиная с 0 до $2^{k}-1$. Для набора переменных ($\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$,..., $\bar{x}_k$) эта последовательность будет в обратном порядке. Так, для k=2 последовательность значений вектора (x_1, x_2) будет (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1). Для вектора ($\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$) ей будет соответствовать последовательность значений (1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0). Кроме того, если F=1, то $\bar{F}=0$ и наоборот. Отсюда такое правило: последовательности значений F сопоставим последовательность, для которой в обратном порядке 0 заменится на 1, а 1 - н а 0. Для данной функции F это будет (1, 0, 1, 1), и это функция F^{*}. Получаем тот же результат.

Пример 2. Для функции F=(0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1) построить двойственную.

Ответ: $F^{*}=(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1)$.

Замечание. Теоремы двойственности упрощают построение КНФ, если ДНФ, равносильная данной формуле, уже построена.

Итак, пусть $F \equiv F_1$, где F_1 - ДНФ. Тогда F_1^* - КНФ. Раскрыв скобки, приведём F_1^* к равносильной ей ДНФ. $F_1^* \equiv F_2$ и F_2 - ДНФ. Тогда $F_1=(F_1^*)^* \equiv F_2^*$. Значит $F \equiv F_1 \equiv F_2^*$ уже КНФ.

<u>Пример 3.</u> Найти ДНФ и КНФ, равносильные формуле
$F=(x\ \bar{y} \leftrightarrow z) \vee yz$.

<u>Решение.</u> Найдём сначала равносильную булеву формулу.

$F \equiv (x\ \bar{y}z \vee \overline{(x\bar{y})}\ \bar{z}) \vee yz \equiv (x\ \bar{y}z \vee (\ \bar{x} \vee \bar{\bar{y}})\ \bar{z}) \vee yz \equiv x\ \bar{y}z \vee\ \bar{x}\ \bar{z} \vee y\ \bar{z} \vee yz \equiv$
$x\ \bar{y}z \vee\ \bar{x}\ \bar{z} \vee y = F1$ это ДНФ.

Здесь $y\bar{z} \vee yz = y(\ \bar{z} \vee z) \equiv y \cdot 1 \equiv y$.

$F_1^*=(x \vee\ \bar{y} \vee z)(\ \bar{x} \vee\ \bar{z})y \equiv (x\ \bar{x} \vee x\ \bar{z} \vee\ \bar{y}\ \bar{x} \vee\ \bar{y}\ \bar{z} \vee z\ \bar{x} \vee z\ \bar{z})y \equiv x\ \bar{z}y \vee$
$\ \bar{y}\ \bar{x}y \vee\ \bar{y}\ \bar{z}y \vee z\ \bar{x}y \equiv xy\ \bar{z} \vee\ \bar{x}yz = F_2[\ \bar{x}x = z\ \bar{z} =\ \bar{y}\ \bar{x}y =\ \bar{y}\ \bar{z}y = 0]$.
Теперь $F_2^*=(x \vee y \vee\ \bar{z})(\ \bar{x} \vee y \vee z) \equiv (F_1^*)^* = F_1 \equiv F$

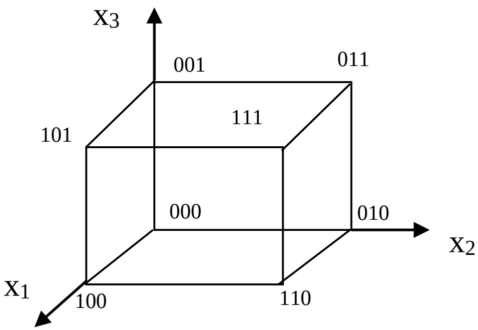
F_2^* - КНФ и СКНФ.

§ 12.Минимизация булевой функции. Алгоритм Квайна-МакКласки.

Весом ДНФ назовём количество вхождений переменной. Нашей задачей будет построение ДНФ наименьшего веса, равносильной данной функции. Существуют различные методы решения этой задачи. Мы остановимся на наглядном способе, использующем геометрическую интерпретацию булевой функции.

12.1. Представление булевой функции вершинами k-мерного куба.

Пусть $f(x_1,...,x_k)$ - булева функция, зависящая от k переменных. Она определяется своими значениями для 2^k различных наборов, т.е. векторов размерности k, состоящих из 0 и 1. Каждому такому набору сопоставим вершину k-мерного куба. Например, для k=3 это будет



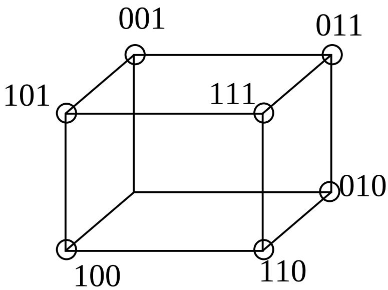
Пусть функция f не является тождественно ложной. Она вполне определена теми наборами (т.е. множеством вершин куба) для которых f принимает значение 1.

<u>Пример.</u> Представить функцию $f=x_1\ \bar{x}_2 \vee x_3$ вершинами куба.

<u>Решение.</u> Найдём СДНФ для функции f.

$f \equiv x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3.$

Следовательно, f принимает значения 1 для наборов 101, 100, 111, 011, 001. Отметим эти точки на кубе



12.2. Комплекс кубов булевой функции.

Опишем процедуру построения комплекса кубов данной функции f. Она соответствует операции построения всевозможных элементарных конъюнкций, которые могут входить в равносильную ей ДНФ.

Пусть функция f представлена вершинами k-мерного куба. Множество всех этих вершин, называемых 0-кубами, обозначим K^0. Для рассматриваемой в примере функции $K_{(f)}{}^0$={101, 100, 111, 011, 001}. Каждой такой вершине соответствует элементарная конъюнкция веса 3 и наоборот. Так, вершине 001 соответствует $\bar{x}_1\ \bar{x}_2 x_3$.

Будем говорить, что две вершины (0-кубы) образуют ребро (1-куб), если они отличаются только одной координатой, например, i-ой. Тогда ребро имеет те же самые общие координаты (они называются <u>связанными</u>) и <u>свободную</u> i-ую координату, которая может принимать 2 значения 0 и 1 и обозначается символом "*". При этом говорят, что ребро <u>покрывает</u> эти вершины. Например, вершины 011 и 001

образуют ребро 0∗1. Этой процедуре соответствует операция
$\bar{x}_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \equiv \bar{x}_1x_3$.

Множество всех рёбер обозначим $K_{(f)}^1$. В данном случае $K_{(f)}^1$={10∗, ∗01, 0∗1, ∗11, 1∗1} и ребро 0∗1 покрывает вершины 001 и 011. Любому ребру соответствует элементарная конъюнкция веса K-1 и наоборот.

Два ребра образуют грань (2-куб), если у них одинаковая свободная координата, а связанные отличаются только в одном месте. Например, Рёбра ∗01 и ∗11 образуют грань ∗∗1. Грань покрывает уже 4 вершины. Аналогично определяются кубы любой размерности. Так две грани ∗∗011 и ∗∗001 образуют 3-куб ∗∗0∗1, покрывающий уже 8 вершин и т.д.

Заметим, что если K=3 и f не тождественно истинна, то нет кубов размерности 3 и больше. Объединение всех таких кубов и составляет комплекс кубов функции f. Он обозначается K(f).

12.3. Покрытие. Минимальное покрытие.

Пусть f - булева функция, K(f) - её комплекс кубов и C≤K(f) - некоторое подмножество кубов. C называется покрытием комплекса K(f), если для любой вершины из K^0 существует куб $c \in C$, покрывающий эту вершину.

Из определения вытекает, что покрытию C комплекса K(f) соответствует ДНФ, равносильная данной функции f. Весом куба назовём число его связанных компонент, т.е. вес соответствующей ему конъюнкции, а весом покрытия - сумму весов всех входящих в него кубов. Следовательно, вес покрытия - это вес, соответствующей ему ДНФ. Минимальным покрытием называется покрытие минимального веса, и ему соответствует минимальная ДНФ. В данном примере можно построить 3 покрытия. C_1=(100, ∗∗1), C_2=(∗01, ∗11, 10∗) и C_3=(10∗, ∗∗1). Их веса $|C_1|=3+1=4$, $|C_2|=2+2+2=6$, $|C_3|=2+1=3$. Отметим, что покрытию C_1 соответствует ДНФ $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_3$ веса 4, покрытию C_2 - $\bar{x}_2x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2$ веса 6 и покрытию C_3 $x_1\bar{x}_2 \vee x_3$ веса 3, и все эти ДНФ равносильны данной функции. Мы увидим дальше, что C_3 - минимальное покрытие, а $x_1\bar{x}_2 \vee x_3$ - минимальное ДНФ.

12.4. Простые импликанты.

Пусть K(f) - комплекс кубов функции f. Куб $u \in K(f)$ называется простым импликантом, если K(f) не содержит куба, покрывающего куб *u*. Простые импликанты обозначаются Z(f). В данном примере Z(f)=(10∗, ∗∗1).

Теорема. Если C - минимальное покрытие, то C состоит только из простых импликантов, т.е. $C_{min} \leq Z(f)$.

Действительно, если $u \in C_{min}$ и не является простым импликантом, т.е. покрывается кубом $v \vee K(f)$, то заменив *u* на *v*, получим покрытие меньшего веса, что противоречит минимальности C.

12.5. Экстремали и отмеченные вершины.

Можно ли утверждать, что все простые импликанты входят в минимальное покрытие? Какие из них нужно включить в него обязательно? Ответ на этот вопрос даст следующая теорема.

Назовём вершину отмеченной, если она покрывается только одним простым импликантом, а сам этот импликант назовём экстремалью, и множество всех экстремалей обозначим E.

Теорема. Каждая экстремаль принадлежит минимальному покрытию $E \le C_{min} \le Z(f)$.

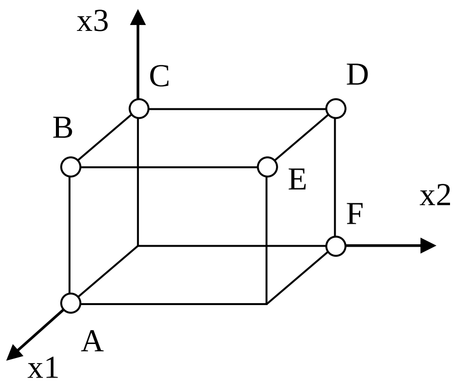
Если $E=Z(f)$, то $E= C_{min}$. Так будет в нашем примере. Вершина 100 является отмеченной для куба (10∗), а вершина 001(а также (011)и (111)) для куба (∗∗1). Поэтому $Z(f)=(10*, **1)=E=C_{min}$ и $f_{min}=x_1 \bar{x}_2 \vee x_3$.

Существуют алгоритмы, позволяющие строить множество простых импликантов и экстремалей для функции, зависящей от любого числа переменных. При этом не обязательно экстремали образуют покрытие. В этом случае используются специальные методы извлечения минимального покрытия из множества простых импликантов. Мы же ограничимся разбором различных ситуаций для функции, зависящей от трёх переменных, используя геометрическую интерпретацию.

Заметим, что если $f(x_1, x_2, x_3)$ не является тождественно истинной, то грань, принадлежащая комплексу $K(f)$, а также ребро комплекса, не покрываемое гранью из $K(f)$, является простыми импликантами. Функция f может задаваться как множеством вершин, так и ДНФ, ей равносильной. В последнем случае, используя геометрическую интерпретацию, можно построить комплекс кубов, не находя СДНФ.

Пример 1. Для функции $f=x_1\bar{x}_2\vee\bar{x}_1x_2\vee x_3$ найти минимальную ДНФ.

Решение. Слагаемому x_3 соответствует грань $**1$, уравнением которой является $x_3=1$. Конъюнкции $x_1\bar{x}_2$ соответствует ребро $(10*)$, являющееся пересечением граней $x_1=1$ и $x_2=0$. Аналогично конъюнкции $\bar{x}_1x_2$ - ребро, являющееся пересечением граней $x_1=0$ и $x_2=1$. Изобразим их на кубе размерности 3.

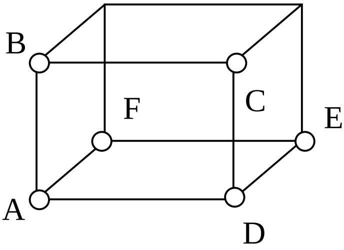


Комплекс кубов содержит простые импликанты -грань BCDE и рёбра AB и DF. Они же являются экстремалями. Для грани отмеченными вершинами будут C и E, для рёбер A и F соответственно, а потому данная ДНФ является минимальной.

Пример 2. Найти минимальную ДНФ, для функции заданной вершинами A, B, C, D, E, F.

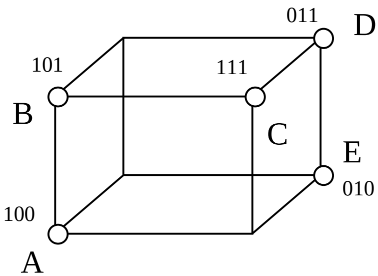
Решение. Здесь простыми импликантами будут две грани ABCD и AFED. Они же являются экстремалями для отмеченных вершин B и C для ABCD и F и E для AFED .

Уравнениями этих граней   будет $x_1=1$ и $x_3=0$. Им соответствует $f_{min}=x_1\vee\ \bar{x}_3$.



<u>Пример 3.</u> Для функции f=(00111101) построить минимальную ДНФ

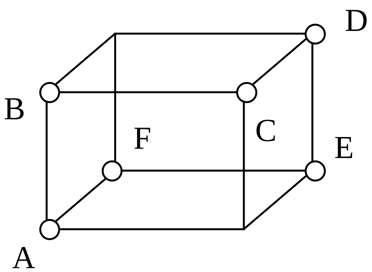
<u>Решение.</u> Функция f принимает значение 1 для наборов 010, 011, 100, 101, 111. Изобразим эти вершины на кубе размерности 3. Каждое из рёбер является простым импликантом, т.к. нет граней.



При этом рёбра AB и DE - экстремали для отмеченных вершин A и E соответственно, но они не образуют покрытия. Из оставшихся рёбер BC и CD можно взять любое. Они покрывают оставшуюся вершину C и имеют одинаковую цену. Значит, C_{min}=(AB, DC, DE). Им соответствует $f_{min}=$ $x_1\ \bar{x}_2\vee x_1x_3\ \bar{x}_1x_2$.

Пример 4. Найти минимальную ДНФ для функции, заданной вершинами.

Решение. Здесь все рёбра являются простыми импликантами, но нет экстремалей. Для решения задачи применяется метод "ветвления". Сначала строим минимальное покрытие, содержащее какое-нибудь ребро, например AB. Это будут рёбра AB, CD и FE и находим его цену. А затем ищем минимальное покрытие, не содержащее AB. Это будут рёбра BC, DE, AF. Оба эти покрытия имеют одинаковую цену, и можно взять любое. Тогда ребру BC соответствует (1∗1), ребру DE (01∗), и ребру AF - (∗00). $f_{min}=xz\vee \bar{x}y\vee \bar{y}\bar{z}$.



§13. Реализация булевых функций релейно-контактными схемами.

Каждой логической переменной *x* поставим в соответствие катушку, по обмотке которой идёт или не идёт ток в зависимости от того x=1 или x=0. С каждой катушкой может быть связано любое число контактов. Контакт называется замыкающим, если он проводит ток в том и только в том случае, когда в соответствующей катушке есть ток, и размыкающим, если он проводит ток только в том случае, когда в катушке нет тока.

Конъюнкции логических переменных соответствует последовательное соединение контактов, а дизъюнкцией - параллельное. Контакт будем изображать отрезком (не обязательно прямым), и называть двухполюсником, его концы - полюсами (вершинами). Двухполюснику приписывается символ x или $\bar{x}$ в зависимости от того, будет он замыкающим или размыкающим. Если в данный момент двухполюсник проводит ток, то мгновенно ток протекает по всем замкнутым двухполюсникам, имеющим с данным общую вершину.

Специально зафиксированы две вершины: "вход" и "выход". На "вход" всегда подаётся напряжение, а на другие вершины напряжение не подаётся никогда. Ток на "выходе" возникает тогда и только тогда, когда имеется хотя бы одна последовательная цепочка замкнутых двухполюсников, соединяющая "вход" и "выход". Данная схема (или граф) называется контактной.

Каждой контактной схеме можно сопоставить логическую (булеву) функцию, принимающую значение 1 для тех и только тех наборов значений переменных, приписанных двухполюсникам, которым соответствует проводимость в схеме (есть ток от "входа" к "выходу"). Эта функция называется *функцией проводимости схемы*. В качестве функции проводимости можно взять дизъюнкцию всех конъюнкций, соответствующих всем "существенным" цепям, т.е. таким цепям, соединяющим "вход" и "выход", которые ни через какую вершину не проходят дважды.

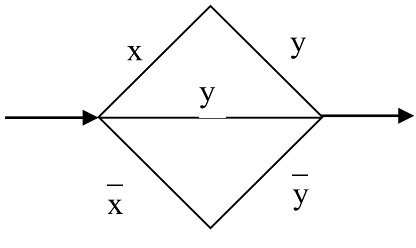
С другой стороны, для каждой формулы алгебры высказываний, используя равносильную ей ДНФ (или КНФ) можно построить указанным образом контактную схему, функция проводимости которой равносильна данной формуле. Говорят тогда, что данная контактная схема реализует эту формулу.

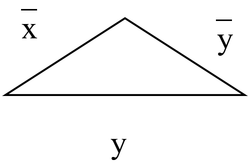
Схема называется минимальной, если она содержит минимальное число контактов среди всех схем, имеющих ту же функцию проводимости. В частности, минимальной ДНФ соответствует минимальная контактная схема среди всех схем, являющихся параллельным соединением последовательных цепочек.

Задачи.

Найти функции проводимости данных контактных схем, упростить их, пользуясь формулами алгебры высказываний:

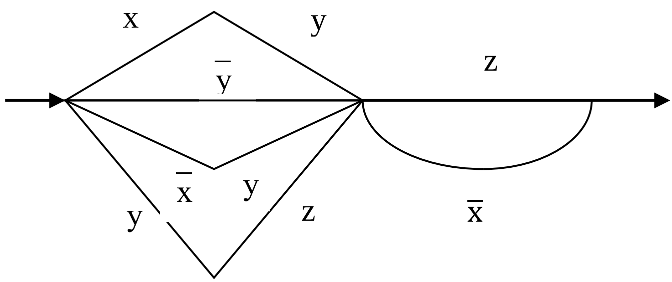
а)



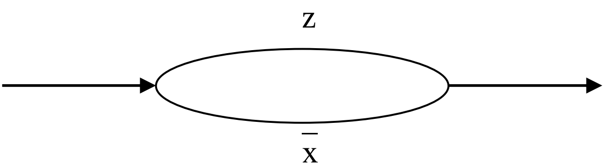


<u>Решение:</u> $f = xy \vee y \vee \bar{x}\,\bar{y} = y \vee \bar{x}\,\bar{y}$

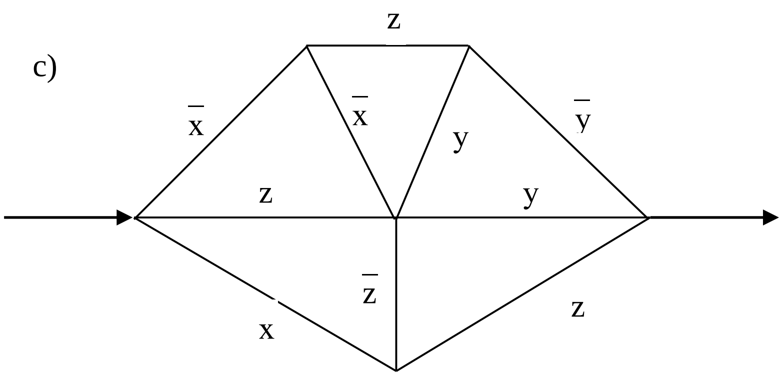
b)



<u>Решение:</u> $f = (xy \vee \bar{y} \vee \bar{x}y \vee yz)(z \vee \bar{x}) = \big((x \vee \bar{y})(y \vee \bar{y}) \vee \bar{x}y \vee yz\big)(z \vee \bar{x}) =$
$(x \vee \bar{y} \vee \bar{x}y \vee yz)(z \vee \bar{x}) = ((x \vee \bar{y} \vee \bar{x})(x \vee \bar{y} \vee y) \vee yz)(z \vee \bar{x}) =$
$(1 \vee yz)(z \vee \bar{x}) = z \vee \bar{x}$



c)



Решение:

$$f = \bar{x}z\bar{y} \vee \bar{x}zyy \vee \bar{x}zy\bar{z}z \vee \bar{x}\,\bar{x}y\bar{y} \vee \bar{x}\,\bar{x}y \vee x\bar{x}\,\bar{z}z \vee zy \vee z\bar{z}z \vee zy\bar{y} \vee$$

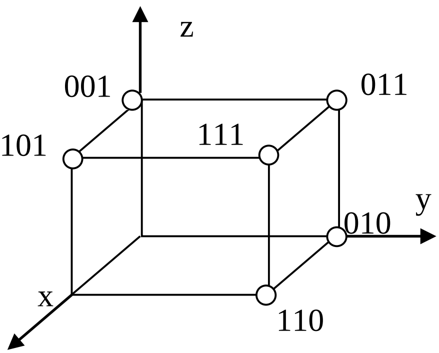
$$\vee z\bar{x}z\bar{y} \vee z\bar{x}zyy \vee xz \vee x\bar{z}y \vee x\bar{z}y\bar{y} \vee x\bar{z}\,\bar{x}z\bar{y} \vee x\bar{z}\,\bar{x}zyy \equiv$$

$$\equiv \bar{x}z\bar{y} \vee \bar{x}zy \vee \bar{x}y \vee zy \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee xz \vee xy\bar{z} \equiv$$

$$\equiv \bar{x}z \vee \bar{x}y \vee zy \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee xz \vee xy\bar{z} \equiv \bar{x}y \vee z \vee xy\bar{z}$$

Здесь перечёркнуты те конъюнкции, которые равны 0.

$\bar{x}z\bar{y} \vee \bar{x}zy \equiv \bar{x}z$; $\bar{x}z \vee xz \equiv z$ поглощаются все конъюнкции, содержащие z.



Поскольку $\bar{x}y \to 01*$, $z \to **1$, $xy\bar{z} \to 110$. Представим функцию f вершинами 3-мерного куба. Простыми импликантами и экстремалями будут грани z=1 и y=1. Тогда $f_{min} = y \vee z$

Вопросы к главе II.

1. В чём состоит закон "исключения третьего"?
2. Перечислите основные логические операции и укажите их таблицы истинности.
3. Дайте определение формулы логики высказываний.
4. Как устанавливается иерархия между операциями логики высказываний?
5. Дайте определение булевой функции. Сколько существует различных булевых функций, зависящих от n аргументов?
6. Какие формулы называются равносильными? тождественно истинными, ложными, выполнимыми?
7. Какая формула логики высказываний называется булевой формулой и какая приведенной булевой? Приведите примеры.
8. Для всякой ли формулы существует равносильная ей булева формула?
9. Какие булевы формулы равносильны формулам $a \to b$ и $a \leftrightarrow b$?
10. Сформулируйте два правила равносильного преобразования формул.
11. Приведите основные равносильности булевых формул: законы коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности, поглощения, идемпотентности, снятия двойного отрицания, законы де Моргана.
12. Дайте определение дизъюнктивной и конъюнктивной нормальных формул.
13. Для всякой ли формулы логики высказываний существуют равносильные ей ДНФ и КНФ?
14. Дайте определение совершенных ДНФ и КНФ.
15. Для всякой ли формулы существуют равносильные ей СДНФ и СКНФ?
16. Как построить СДНФ и СКНФ равносильные данной формуле?

17. В каком смысле можно говорить о единственности СДНФ и СКНФ для данной формулы?
18. Если формулы равносильны, всегда ли можно равносильными преобразованиями перейти от одной формулы к другой?
19. Для любой ли булевой функции существует равносильная ей формула?
20. Какие переменные в формуле называются фиктивными (несущественными)?
21. Сформулируйте необходимые и достаточные условия тождественной истинности (ложности) формулы. Что такое элементарная дизъюнкция (конъюнкция)?
22. Какие формулы называются двойственными?
23. Сформулируйте две основные теоремы двойственности.
24. В каком порядке принято записывать наборы значений простых компонент в таблице истинности формулы?
25. Сформулируйте правило, позволяющее строить вектор значений двойственности формулы по заданному вектору значений данной формулы. Как это правило связано с законами двойственности?
26. Сформулируйте правило построения КНФ, равносильной данной формуле, если равносильная ДНФ построена.
27. Что такое вес ДНФ? Какая ДНФ называется минимальной?
28. Какая связь между булевой функцией и вершинами n-мерного куба?
29. Дайте определение n-куба. Что такое свободные и связанные координаты? Дайте определение комплекса кубов для данной функции.
30. Что такое покрытие, цена покрытия, минимальное покрытие комплексов кубов? Как связано покрытие комплекса кубов функции с равносильной ей ДНФ?
31. Дайте определение простых импликантов, экстремалей, отмеченных вершин.

32. Почему минимальное покрытие может состоять только из простых импликантов?
33. Почему каждая экстремаль принадлежит минимальному покрытию?
34. Всегда ли минимальное покрытие состоит только из экстремалей? Приведите пример.
35. Может ли комплекс кубов не содержать экстремалей? Приведите пример.
36. Расскажите о реализации булевых функций релейно-контактными схемами. Что такое двухполюсник? Дайте определение функции проводимости релейно-контактной схемы.

Литература.

1. Новиков П.С. Элементы математической логики. «Наука», Москва, 1973
2. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.И. Дискретная математика для инженеров. Москва, Энергия, 1980
3. Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики. Издательство МАИ, Москва, 1992
4. Романовский И.В. Дискретный анализ. Физматлит, Санкт-Петербург, Москва, 2000
5. Тюленева М.В. Дискретная математика. Часть I. Множества. Сборник тестовых заданий. МГУПС, Москва, 2011
6. Тюленева М.В., Хаханян В.Х. Дискретная математика. Часть II.Сборник тестовых заданий. МГУПС, Москва, 2012
7. Липкина З.С., Милевский А.С. Дискретный анализ. Типовые расчеты для студентов I курса всех факультетов. МГУПС, Москва, 1997
8. Липкина З.С., Милевский А.С. Дискретная математика. Учебное пособие для экономических специальностей. МГУПС, Москва, 2004

Оглавление

Учебно-методическое издание
Липкина Зоя Семёновна

Дискретная математика Часть

Учебное пособие

Подписано в печать	Формат 60 X 84 / 16
Заказ №	Усл. - печ. л. -
Тираж -150 экз.	Изд. №

150048, г.Ярославль, Московский пр-т, д.151.
Типография Ярославского филиала МИИТ.