МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра "Прикладная математика - 2"

З.С.Липкина, А.С.Милевский

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Методические указания

Часть 2

Москва - 2003

МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра "Прикладная математика - 2"

З.С.Липкина, А.С.Милевский

УТВЕРЖДЕНО
редакционно-издательским
советом университета

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Методические указания для студентов специальности "Прикладная информатика"

Часть 2

Москва - 2003

УДК 519.6
Л 61

Липкина З.С., Милевский А.С. Численные методы. Методические указания. Часть 2. – М.:МИИТ, 2003. – 33 с.

Методические указания предназначены для студентов специальностей, в учебных планах которых предусмотрена дисциплина “Численные методы”. Рассмотрены вычислительные методы, наиболее часто используемые в практике инженерных расчетов. Приведены варианты расчётных заданий и примеры их решения

5. Численное решение уравнений

5.1 Основные понятия

Часто приходится решать нелинейные уравнения вида

$$f(x) = 0 \qquad (5.1)$$

с непрерывной функцией $f(x)$. Пусть X^* – корень этого уравнения. Найти X^* точно далеко не всегда возможно. Поэтому задача состоит в нахождении приближённого значения с заданной предельной погрешностью. Решение задачи включает следующие этапы.

✓ При любом методе решения сначала следует произвести *отделение корней*, т.е. найти отрезок (или отрезки) [a,b], содержащий ровно один корень. Для этого можно, например, вычислять значение функции с некоторым шагом. По известной теореме математического анализа отрезок, *в концах которого функция имеет разные знаки*, содержит, по крайней мере, один корень. Часто оказывается полезным даже грубое построение графика функции $f(x)$.

✓ Далее выбирается начальное приближение X_0 к корню. Чем ближе X_0 к X^*, тем лучше. Затем поочерёдно вычисляются последующие приближения X_1, X_2,… Процесс заканчивается, когда можно сделать вывод, что погрешность

$$\Delta_i = |X^* - x_i|$$

не превосходит заданной величины. Часто для упрощения (хотя это может оказаться и ошибочным) процесс заканчивают, когда перестаёт изменяться заданное количество знаков после запятой.

Различные методы отличаются трудоёмкостью и *скоростью сходимости*. Если погрешности на соседних шагах связаны между собой соотношением вида

$$\Delta_{i+1} \le C\,(\Delta_i)^m,$$

то говорят, что сходимость метода имеет порядок m.

5.2 Метод половинного деления (дихотомия)

Начнём с отрезка $[a,b]$, для которого $f(a)$ и $f(b)$ имеют *противоположные знаки*. В качестве X_0 возьмём середину отрезка $\frac{a+b}{2}$. Будем постепенно сужать отрезок, сохраняя условие знаков, пока его длина не станет достаточно малой. В этот момент середина отрезка окажется достаточно точным приближением к корню. На каждом шаге мы выбираем середину предыдущего отрезка в качестве точки деления и находим знак функции в этой точке. Возможны три случая:

1) Середина отрезка является корнем уравнения. В этом случае корень найден.
2) Функция в середине отрезка и в его начале имеет противоположные знаки. Тогда в качестве нового отрезка возьмём его первую половину, так как она содержит корень.
3) Функция в середине отрезка и в его конце имеет противоположные знаки. Тогда в качестве нового отрезка возьмём его вторую половину.

На каждом шаге длина отрезка сокращается вдвое – следовательно, точность приближения возрастает вдвое. Таким образом, начиная с отрезка длины 1, через 3 шага найдём корень с точностью $\frac{1}{16}$, через 10 шагов – с точностью примерно 0.0005. Сходимость имеет первый порядок.

Этот метод прост и очень надёжен, от функции $f(x)$ требуется только непрерывность. Но скорость сходимости невелика. Дихотомия применяется тогда, когда требуется высокая надёжность счёта, а скорость малосущественна.

5.3 Метод простой итерации (метод неподвижной точки)

Для применения всевозможных итерационных методов исходное уравнение $f(x)=0$ преобразуется к эквивалентному виду $x=\varphi(x)$ с подходящим образом подобранной функцией $\varphi(x)$. Затем выбирается начальное приближение X_0 и вычисляется последовательность $X_1, X_2, \ldots$ по формуле

$$x_{i+1}=\varphi(x_i),\ i=0,1,2,\ldots \quad (5.2)$$

Ясно, что если последовательность сходится, то ее предел равен (какому-нибудь) корню исходного уравнения. Скорость сходимости зависит от выбора функции и в самом общем случае имеет первый порядок.

Пример. Рассмотрим уравнение $x^3 + x = 3$. Попробуем найти какой-нибудь корень описанным методом.

a) Преобразуем сначала уравнение так: $x = 3 - x^3$. Возьмём $X_0=1$. Получим $X_1=2$, $X_2=-1$, $X_3=2$, $X_4=-1\ldots$ Дальше продолжать бесполезно – сходимости нет. Возьмём другое X_0, например, $X_0=0$. Получим $X_1=3$, $X_2=-6$, $X_3=-33$, $X_4=-1086\ldots$ Ещё хуже.

b) Преобразуем уравнение по-другому: $x = \sqrt[3]{3-x}$. Возьмём $X_0=1$. Получим $X_1=1.2599$, $X_2=1.202$, $X_3=1.215$, $X_4=1.212$, $X_5=1.213\ldots$ Сходимость, очевидно, есть. Возьмём $X_0=0$. Получим $X_1=1.44$, $X_2=1.16$, $X_3=1.23$, $X_4=1.21$, $X_5=1.214\ldots$ Тоже есть сходимость.

Таким образом, успех метода решающим образом зависит от того, насколько удачно выбрано уравнение (5.2).

Теорема. *Пусть функция* $\varphi(x)$ *и её производная* $\varphi'(x)$ *непрерывны в некоторой окрестности корня* x^* *уравнения* $x=\varphi(x)$. Пусть в этой окрестности $|\varphi'(x)|<C<1$ *с некоторой константой* C. Тогда если начальное приближение X_0 *выбрано достаточно близко к* x^*, *то приближения метода простой итерации (5.2) сходится к этому корню.*

Погрешность приближения на каждом шаге умножается примерно на C. Чем меньше C, тем быстрее сходимость.

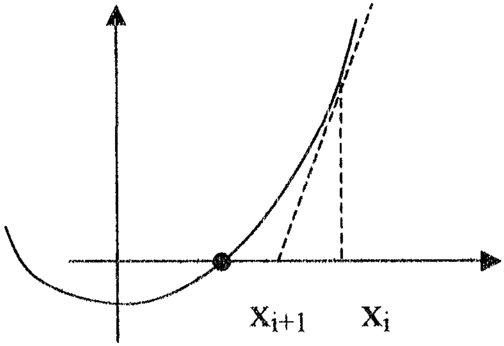
На практике преобразование уравнения (5.1) к виду (5.2) можно производить, например, следующим образом. Положим $\varphi(x)= x - \dfrac{f'(x)}{k}$. Выберем число k из условий:

1) знак k совпадает со знаком $f'(x)$ в окрестности корня;
2) в этой окрестности $|k| > \max |f'(x)| / 2$.

Тогда, очевидно, условия теоремы выполнены для уравнения $x=\varphi(x)$.

5.4 Метод касательных (метод Ньютона–Рафсона)

Если $f(x), f'(x), f''(x)$ непрерывны в некоторой окрестности корня уравнения, эту информацию можно использовать для построения алгоритмов, сходящихся гораздо быстрее, чем метод половинного деления или обычный метод простой итерации. Метод касательных является одним из самых известных и полезных методов. Он основан на итерационной формуле



$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}} \qquad (5.3)$$

Графически следующее приближение получается при помощи касательной к графику функции:

Теорема. Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную на отрезке, содержащем корень x^* и $f'(x^*) \neq 0$. Тогда, если начальное приближение x_0 выбрано достаточно близко к x^*, то последовательность $\{x_i\}$, $i=0,1,2,$ сходится к корню x^*.

Скорость сходимости метода касательных очень высока. Порядок сходимости равен 2, так что на каждой итерации количество верных знаков корни почти удваивается! Вы сами в этом убедитесь, выполняя задание.

Пример. Построим формулу для нахождения квадратного корня из числа A. Нам нужно решить уравнение $x^2 = A$, то есть $x^2 - A = 0$. По методу касательных итерационный процесс имеет вид:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{x_i^2 - A}{2 \cdot x_i} = \frac{x_i^2 + A}{2 \cdot x_i}$$

Вычислим, например, этим способом $\sqrt{30}$ с точностью до 0.00001. Возьмём начальное приближение $x_0=5$. Тогда $x_1=5.5$, $x_2=5.47727$,

$x_3=5.477225575$, $x_4=5.477225575$. Уже на третьем шаге достигнута необходимая точность.

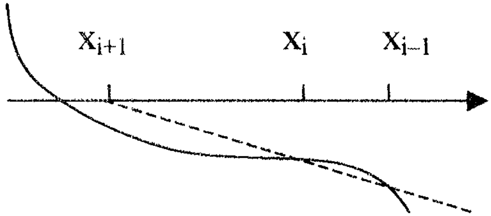
Упражнение. Постройте аналогичную формулу для вычисления корня третьей степени и найдите по ней $\sqrt[3]{100}$ с точностью до 0.0001. Сколько понадобилось шагов?

5.5 Метод секущих

В методе касательных Ньютона-Рафсона на каждой итерации требуется вычислить две функции $f(x), f'(x)$. Проблема может возникнуть с вычислением производной. Многие функции имеют непростую форму (интегралы, суммы и т.д.), и желательно иметь метод, сходящийся почти так же быстро, как метод касательных, и включающий вычисление только значения функции, а не значения её производной. Идея состоит в том, чтобы вместо производной в знаменателе формулы метода касательных вместо производной подставить отношение приращения функции к приращению аргумента. Тогда получается формула метода секущих

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{(f(x_i) - f(x_{i-1}))}} \qquad (5.4)$$

Чтобы метод мог начать работу, здесь, в отличие от предыдущих методов, нужно выбрать две точки, X_0 и X_1. На рисунке показана геометрическая интерпретация метода секущих.



Сходимость имеет порядок примерно 1,62, что уступает методу касательных, но всё же существенно быстрее обычного метода простой итерации. Условия сходимости аналогичны условиям сходимости метода касательных.

6. Численное дифференцирование

6.1 Постановка задачи и основные формулы

Формулы для численного дифференцирования важны в разработке алгоритмов приближённого решения дифференциальных уравнений. Основным принципом здесь является дифференцирование интерполяционного многочлена. Как правило, значения функции задаются на сетке с равномерным шагом, так что в качестве приближённого значения производной используется производная от интерполяционного многочлена в форме Ньютона, записанного через конечные разности. Вот вариант такой формулы:

$$\boxed{\begin{aligned} y'_{i+1} \approx \frac{1}{h}(\Delta y_i + \frac{2t-1}{2}\Delta^2 y_i + \frac{3t^2-6t+2}{6}\Delta^3 y_i + \\ + \frac{2t^3-9t^2+11t}{12}\Delta^4 y_i + \ldots) \end{aligned}} \tag{6.5}$$

$$\boxed{y''_{i+1} \approx \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_i + (t-1)\Delta^3 y_i + \frac{6t^2-18t+11}{12}\Delta^4 y_i + \ldots)} \tag{6.1}$$

Последующие члены также легко вычисляются дифференцированием.

7. Численное интегрирование

7.1 Постановка задачи

Пусть требуется найти определённый интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Выразить интеграл через элементарные функции удаётся редко, поэтому необходимо найти удобные способы для приближённого вычисления интеграла. Обычно $f(x)$ заменяют такой аппроксимирующей функцией, чтобы интеграл от неё легко вычислялся. Чаще всего интеграл от $f(x)$ выражают через значения функции в некоторых точках отрезка $[a,b]$, получая формулу вида

$$\int_a^b f(x)dx = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \ldots + c_n f(x_n) + R_n,$$

где величины x_i называют *узлами*, c_i – *весами*, R_n – *погрешностью* или *остаточным членом* формулы.

7.2 Формула прямоугольников

Заменим функцию $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ константой (интерполяционным многочленом нулевой степени). Это соответствует заменой площади под графиком функции на площадь прямоугольника. В качестве константы естественно выбрать значение функции в середине отрезка, откуда для интеграла получается простейшая формула прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx (a-b) f\left(\frac{a+b}{2}\right). \qquad (7.1)$$

Оценим погрешность этой формулы. Для этого разложим $f(x)$ по формуле Тейлора, выбирая середину отрезка $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$ за центр разложения и предполагая наличие у функции всех необходимых производных. Получим

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + (x-x_0)^2 f''(x_0)/2 + \ldots$$

Погрешность есть разность точного и приближённого значений интеграла. Подставляя разложение в интеграл, получим главный член погрешности в виде

$$R \approx \int_a^b (x-x_0)^2 dx \; f''(x_0)/2 = \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(x_0)$$

Если длина $b-a$ отрезка $[a,b]$ не мала, погрешность будет значительной. Поэтому для повышения точности вычислений отрезок разбивают на N равных частей и на каждой применяют формулу (7.1), получается *формула прямоугольников*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx h(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{N-1}) + f(x_N))}, \qquad (7.2)$$

где $h=(b-a)/n$ – длина отрезка разбиения, $x_i=a+(i-1)h+h/2$ – середина i-го отрезка разбиения.
Погрешность этой формулы примерно равна

$$R_N \approx \frac{(b-a)^3}{24n^2}\max|f''(x)| \qquad (7.3)$$

7.3 Формула трапеций

Заменим функцию $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ линейной (интерполяционным многочленом первой степени). Это соответствует заменой площади под графиком функции на площадь трапеции. Повторив рассуждения, аналогичные проведённым в предыдущем пункте, получим *формулу трапеций*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{1}{2}f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_N)+\frac{1}{2}f(x_{n+1})\right)}, \qquad (7.4)$$

где $h=(b-a)/n$ – длина отрезка разбиения, $x_i=a+(i-1)h$.
Погрешность этой формулы примерно равна

$$R_N \approx \frac{(b-a)^3}{12n^2}\max|f''(x)| \qquad (7.5)$$

Замечание. Важность оценки погрешности видна из следующего примера.

Точное значение интеграла $\int_{0,01}^{1}\frac{dx}{x}$ равно, очевидно, $-\ln(0{,}01)\approx 4{,}605$. Вычисляя же по формуле трапеций с разбиением на 10 частей, получаем 7,684. Функция $f''(x)$ слишком велика на отрезке [0,01;1].

7.4 Формула Симпсона

Формула Симпсона получается, если для функции использовать интерполяционный многочлен второй степени, построенный по трём последовательным точкам разбиения отрезка. Эта формула применима, только если количество отрезков разбиения чётно.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f(x_1)+4f(x_2)+2f(x_3)+\ldots+2f(x_{N-1})+4f(x_N)+f(x_{N+1}))}, \qquad (7.6)$$

где $h=(b-a)/n$ – длина отрезка разбиения, $x_i=a+(i-1)h$.
Погрешность этой формулы примерно равна

$$R_N \approx = \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max |f^{IV}(x)| \qquad (7.7)$$

причём для многочленов до третьей степени включительно формула даёт *точный* ответ.

Замечание. Вычисляя интеграл из предыдущего примера по формуле Симпсона с разбиением на 10 частей, получаем 3,12. Несколько лучше, но всё равно погрешность велика – как и $f^{IV}(x)$.

7.5 Формула Эйлера

Выразим приближённо остаточный член формулы (7.5) трапеций через значения первой производной на концах отрезка:

$$\frac{(b-a)^2}{12n^2}(f'(a)-f'(b)) = \frac{h^2}{12}(f'(a)-f'(b))$$

Прибавив эту величину к правой части формулы трапеций (7.4), получим формулу Эйлера (или Эйлера-Маклорена)

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{f(x_1)}{2} + f(x_2) + \ldots + f(x_N) + \frac{f(x_{N+1})}{2}\right) + \frac{h^2}{12}(f'(a)-f'(b))} \qquad (7.8)$$

Погрешность этой формулы примерно равна

$$R_N \approx = \frac{(b-a)^5}{720n^4} \max |f^{IV}(x)| \qquad (7.9)$$

Таким образом, небольшая добавка к формуле трапеций сильно увеличивает точность, формула Эйлера примерно в 4 раза точнее формулы Симпсона.

7.6 Оценка погрешности

В конкретной задаче оценить погрешность любой из приведённых формул достаточно сложно – поиск максимума модуля производной сам по себе является трудной задачей.

Часто можно использовать *правило Рунге*. Проведём вычисления, сначала разбив отрезок на n частей, а затем на $2n$ частей. Предположим, что метод имеет, например, порядок 4 (то есть в знаменателе формулы для погрешности стоит n^4, как в формулах Симпсона или Эйлера). Тогда во втором случае ошибка должна быть примерно в $2^4=16$ раз меньше. Следовательно, погрешность второго (более точного) вычисления примерно в $\frac{16}{15}$ больше модуля разности двух приближённых вычислений интеграла.

7.7 Формулы Гаусса-Лежандра

Пусть требуется получить "наилучшую" формулу вида

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)} \qquad (7.10)$$

"В нашей власти" выбор четырёх параметров – c_1, x_1, c_2, x_2. Поскольку полином третьей степени имеет как раз четыре коэффициента, специальным выбором параметров можно добиться того, чтобы формула (7.8) давала *точный ответ для полиномов степени не выше 3.* Подставив в эту формулу поочерёдно $f(x)=1, x, x^2, x^3$, получим систему из четырёх уравнений для c_1, x_1, c_2, x_2., из которой находим

$$\boxed{x_1=\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}\frac{1}{\sqrt{3}},\ x_2=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\frac{1}{\sqrt{3}},} \qquad (7.11)$$

$$\boxed{c_1=c_2=(b-a).}$$

Тем самым мы построили *двухточечную формулу Гаусса-Лежандраю*

Аналогично строится *трёхточечная* формула

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)}, \quad (7.12)$$

$$\boxed{\begin{gathered} x_1=\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}\sqrt{3/5},\ x_2=\frac{a+b}{2},\ x_3=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\sqrt{3/5} \\ c_1=c_3=\frac{5(b-a)}{18},\ c_2=\frac{4(b-a)}{9}, \end{gathered}}$$

четырёхточечная

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3) + c_4 f(x_4)}, \qquad (7.13)$$

$$x_1=\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}0{,}861136,\ x_2=\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}0{,}339981,$$
$$x_3=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}0{,}339981,\ x_4=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}0{,}861136$$
$$c_1=c_4=0{,}173927(b-a),\ c_2=c_3=0{,}326072(b-a),$$

и прочие.

Формулы Гаусса-Лежандра чрезвычайно точны, но требуют предварительного вычисления весов C_i и узлов X_i.

8. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

8.1 Основные понятия

Здесь мы рассмотрим задачу для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с начальным условием – задачу Коши:

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (8.1)$$

Точное, аналитическое решение такой задачи удаётся получить только для некоторых конкретных типов дифференциальных уравнений. Таковы линейные уравнения, уравнения с разделяющимися переменными, и т.п. В то же время необходимость в численном решении произвольных задач Коши возникает достаточно часто.

Замечание. На практике, конечно, встречаются и дифференциальные уравнения более высокого порядка, например второго. Такое уравнение обычно сводится к *системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка*. Их можно решать схожими методами.

Полезно привести геометрическую интерпретацию задачи (8.1). График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой*. Дифференциальное уравнение задаёт *направление касательной* к интегральной кривой в каждой точке (x,y), если, конечно, график пройдёт через эту точку. Например, если $f(x_1,y_1)=1$, то тангенс угла наклона касательной равен 1, так что касательная (и сама кривая) проходит в точке (x_1,y_1) под углом 45^0. Таким образом, нам нужно из заданной точки

(x_0, y_0) провести гладкую кривую, касательная к которой в каждой точке определена уравнением (8.1).

Общая схема решения для методов, приведённых ниже, такова. Пусть требуется найти численное решение задачи (8.1) на отрезке $[a,b]$, $a=x_0$. Вместо нахождения функции y(x) мы лишь составим таблицу её приближённых значений на отрезке с некоторым шагом h. Для этого разобьём отрезок на некоторое количество равных частей (чем их больше, тем меньше шаг h и точнее метод). Значение функции в начальной точке $y(x_0)$ задано начальным условием $y(x_0)= y_0$. В последующих точках $x_1=x_0+h, x_2=x_1+h= x_0+2h, \ldots x_n= x_0+nh$ значения вычисляются по формулам, специфичным для соответствующего метода. В результате заполняется таблица

$x_0=a$	x_1	x_2	x_3	…	$x_n=b$
y_0	y_1	y_2	y_3	…	y_n

Для оценки погрешности метода на одном шаге точное решение раскладывается по формуле Тейлора.

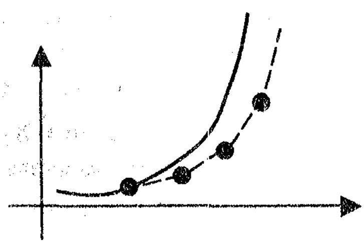
$$y_{i+1} = y(x_i + h) = y_i + hy_i' + \frac{h^2}{2} y_i'' + \ldots =$$

$$= y_i + hf(x_i, y_i) + \ldots$$

Если расчётные формулы численного метода согласуются с разложением по формуле Тейлора до членов порядка h^p включительно, то говорят, что *метод имеет порядок* p.

8.2 Метод ломаных Эйлера

Это простейший из способов численного решения задачи Коши, основанный непосредственно на геометрической интерпретации. Из начальной точки проводится отрезок касательной вплоть до точки x1. Затем из полученной точки – новая касательная и т.д. Если шаг достаточно маленький, то полученная ломаная будет приближать график искомой функции.



Формулы для расчёта следующие:

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0,1,..} \quad (8.2)$$

Ясно, что этот метод имеет первый порядок, на каждом шаге погрешность пропорциональна h^2. В конце отрезка (за n шагов) погрешность накопится. Метод ломаных не имеет практического значения, так как в нём быстро возрастает погрешность приближения с ростом i, что приводит к необходимости выбирать очень маленький шаг h. Но он является хорошей иллюстрацией идей, применяемых и в более сложных методах численного решения задачи Коши.

8.3 Усовершенствованные методы ломаных

Основная причина погрешности в методе Эйлера состоит в том, что мы перемещаемся по касательной – с постоянным углом наклона, в то время как угол наклона изменяется непрерывно. Несколько улучшить положение возможно, если выбрать «уточнённый» угол наклона. Это можно сделать многими различными способами, простейшие из которых следующие.

Можно взять производную в «средней» точке:

$$\boxed{\begin{aligned} y_{i+1/2} &= y_i + hf(x_i, y_i)/2, \\ y_{i+1} &= y_i + hf\left(x_i + \tfrac{h}{2}, y_{i+1/2}\right) \end{aligned}} \quad (8.3)$$

Это – *«исправленный метод ломаных»*.

А можно взять «полусумму производных». Этот метод называется *методом Гюна*. В нём, по сути, происходит сначала «пристрелка», а затем уже окончательное проведение «касательной»:

$$\boxed{\begin{aligned} y_{i+1}^0 &= y_i + hf(x_i, y_i), \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}\left(f(x_i, y_i) + f(x_i, y_{i+1}^0)\right) \end{aligned}} \quad (8.4)$$

Эти методы имеют второй порядок точности.

8.4 Метод Рунге-Кутта

В практических расчётах наиболее популярен *метод Рунге-Кутта четвёртого порядка*, имеющий достаточно высокую точность и приемлемую трудоёмкость. Порядок метода, по самому названию, равен 4. В методе Рунге-Кутта «пристрелка» производится целых четыре раза:

$$\boxed{\begin{aligned} &k_1 = hf(x_i, y_i) \\ &k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1) \\ &k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2) \\ &k_4 = hf(x_i + h, y_i + hk_3) \\ &y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}} \qquad (8.5)$$

8.5 Оценка погрешности

В конкретной задаче оценить погрешность метода достаточно сложно. Часто можно использовать *правило Рунге*. Проведём вычисления сначала с шагом h, затем с шагом $\frac{h}{2}$. Предположим, что метод имеет, например, порядок 4 (как метод Рунге–Кутта). Тогда во втором случае ошибка должна быть примерно в $2^4=16$ раз меньше. Следовательно, погрешность второго (с шагом $\frac{h}{2}$) вычисления примерно в $\frac{16}{15}$ больше модуля разности этих двух расчётов.

9. Типовые расчёты

9.1 Типовой расчёт №1. Элементы теории погрешностей.

9.1.1 Задание 1

В арифметическом выражении А все числа даны с верными знаками в узком смысле. Вычислить значение А, оценить абсолютную и относительную погрешность А, найти число верных знаков. Результат округлить, оставив кроме верных цифр одну лишнюю.

Вариант	Выражение А	Вариант	Выражение А
1	$\frac{14{,}18^2-\sqrt{21{,}2}}{35{,}3}$	15	$\frac{78{,}14+357{,}14}{18{,}5^2}-\frac{1}{\sqrt{5{,}1}}$
2	$0{,}253-\frac{\sqrt{81{,}12}}{2{,}5^2}$	16	$\frac{78{,}14+357{,}14}{18{,}5^2}-\frac{1}{\sqrt{5{,}1}}$
3	$12{,}256^2+\frac{3{,}8}{\sqrt[3]{5{,}18}}$	17	$\frac{427{,}12\cdot 25{,}3\cdot 48{,}14}{5{,}7+\sqrt{3{,}81}}$
4	$\frac{0{,}015+35{,}128}{\sqrt{2{,}52}}$	18	$\sqrt[3]{16{,}351}+\frac{17{,}4}{57{,}5^2}$
5	$\sqrt[4]{12{,}41}+\frac{151{,}8}{25{,}12^2}$	19	$\frac{375{,}18+2{,}7^2}{5{,}3-1{,}25^2}$
6	$141{,}12\cdot 15{,}25-18{,}13\cdot 16{,}11$	20	$719{,}2\cdot 181{,}5^2-\frac{3{,}7}{\sqrt{5{,}3}}$
7	$181{,}25^2-\frac{17{,}75}{\sqrt{18{,}2}}$	21	$\frac{573{,}12^2\cdot 18{,}141}{13{,}7}+21{,}2$
8	$\frac{\sqrt{15{,}831}+12{,}5\cdot 18{,}7}{3{,}41}$	22	$819{,}17\cdot 35{,}6-\frac{7{,}8}{3{,}5^2}$
9	$85{,}13^5+\frac{18{,}7}{\sqrt{52{,}3}}$	23	$345{,}12^3-\frac{18{,}7}{5{,}3\cdot 6{,}71}$
10	$\frac{19{,}57}{13{,}72}+\sqrt[3]{95{,}121}$	24	$\frac{257{,}89\cdot 12{,}17}{13{,}15^2}-\sqrt[4]{18{,}2}$
11	$\frac{151{,}14\cdot 25{,}19}{\sqrt{42{,}15}}-2{,}7^2$	25	$13{,}12^2+\frac{18{,}75\cdot 14{,}3}{\sqrt{75{,}14}}$

12	$357{,}21^2 \cdot 12{,}56 - 18{,}2^{-1}$	26	$\dfrac{415{,}2}{78{,}15 - \sqrt{78{,}45}}$
13	$987{,}15 - 18{,}25^2 \cdot \sqrt{13{,}5}$	27	$\dfrac{18{,}219}{32{,}6} \cdot 15{,}3^2 - 75{,}3^{-1}$
14	$\dfrac{3{,}573^2 \cdot 18{,}14}{\sqrt{21{,}15}} - 125{,}7^2$	28	$218{,}4 \cdot 53{,}5^2 + {}^{7{,}1}\!/\!_{\sqrt{7{,}5}}$
15	$3{,}44 \cdot 2{,}301 + \sqrt[3]{17{,}753}$	29	$35{,}12^3 + \frac{19{,}5 \cdot \sqrt{3{,}6}}{7{,}8}$
16	$\dfrac{78{,}14 + 357{,}14}{18{,}5^2} - \dfrac{1}{\sqrt{5{,}1}}$	30	$\dfrac{44{,}18 \cdot 16{,}7^3}{19{,}6} - \frac{13{,}11}{25{,}7}$

9.1.2 Задание 2.

Вычислить значение функции f(x,y) и оценить абсолютную и относительную погрешности. Абсолютные погрешности x и y равны, соответственно, $\Delta x=0{,}01$, $\Delta y=0{,}1$.

Вариант	Функция	x	y	Вариант	Функция	x	y
1	$\dfrac{x^2+y^2}{x+3y}$	2	1	16	$\dfrac{x^2+2y}{x+y}$	3	2
2	$\dfrac{x+y^2}{xy}$	2	3	17	$\dfrac{x^2+2xy}{x-y}$	4	1
3	$\dfrac{y^2}{x^2+3y}$	1	3	18	$\dfrac{x+3y}{2x-y}$	4	2
4	$\dfrac{xy}{x-y}$	1	5	19	$\dfrac{x+y^2}{x^2+xy}$	3	4
5	$\dfrac{3x+y}{x+y}$	1	5	20	$\dfrac{x^2+y+1}{2x+y}$	–3	–2
6	$\dfrac{x-y}{x^2+xy}$	1	3	21	$\dfrac{x+y+2}{x-y+1}$	5	2
7	$\dfrac{x}{x^2+y^2}$	–1	2	22	$\dfrac{x^2+y+1}{x+y}$	3	1

8	$\frac{x+y}{x^2+4}$	2	1	23	$\frac{x+y^2}{x^2+y}$	1	2
9	$\frac{x-4y}{2x+3y}$	4	3	24	$\frac{x^2-y}{x+2y}$	1	4
10	$\frac{3x+4y}{2x+2y+1}$	1	2	25	$\frac{3x+y}{x^2+y^2}$	2	1
11	$\frac{2x^2+y}{x+y+1}$	4	1	26	$\frac{2x+y^2}{y}$	4	8
12	$\frac{x+x^2y}{y}$	4	2	27	$\frac{2x+y}{(x+y)^2}$	1	2
13	$\frac{x+y}{x^2y}$	1	2	28	$\frac{3x+y}{x^2+1}$	4	–2
14	$\frac{x^2+y^2}{x+y}$	1	–3	29	$\frac{x+y}{3x^2+y+1}$	2	3
15	$\frac{x+2y}{2x+y}$	8	–3	30	$\frac{x-y}{3x+y+1}$	1	6

9.1.3 Задание 3.

Найти абсолютные погрешности аргументов функции, для которых абсолютная погрешность функции Δf не превосходит заданной величины.

Вариант	Функция	x_0	y_0	Δf
1	$\sin^2(x+y)$	$\pi/8$	$\pi/8$	0,1
2	$x^2 \sin y$	1	1,51	0,01
3	$\mathrm{tg}^3(xy)$	$\pi/4$	1	0,01
4	$2^{x/y}$	2	1	0,1
5	$\mathrm{tg}(x)\sin^2(y)$	$\pi/4$	$\pi/2$	0,01
6	$\frac{\mathrm{arctg}\, x}{\mathrm{arctg}\, y}$	1	0,5	0,01
7	$\sin^3(x+y)$	0	0	0,01
8	$\sin(x^2+y^2)$	1	0	0,1
9	$\mathrm{arctg}x\cdot\mathrm{arctg}y$	–1	0,5	0,01

10	$x^3+\sin^2y$	2	π/2	0,1
11	$\ln^3(x+y)$	1	1	0,1
12	$y\,2^x$	1	2	0,01
13	$\ln x\cdot\sin y$	10	π/6	0,1
14	$\arcsin(x+2y)$	0	0,25	0,01
15	$\cos^3(2x-y)$	π/3	π/6	0,01
16	$\arcsin(x/y)$	1	2	0,01
17	$\lg(x/y)$	1	1	0,01
18	$\sin x/\sin y$	45°	60°	0,01
19	$\sin x\cdot\cos y$	0	0	0,01
20	$\cos(x/y)$	1	1	0,1
21	$\sin^2(x+y)\cos x$	0	0	0,01
22	$\mathrm{arctg}(\frac{x^2y}{x+y})$	1	1	0,01
23	$\mathrm{tg}^3(x+y)$	20°	40°	0,1
24	$\ln^2(x+2y)$	1	2	0,01
25	$\mathrm{arctg}^3(x+y)$	0.5	0.5	0,1
26	$\mathrm{tg}^3(x^2y)$	1	45°	0,01
27	$\sin(xy)$	1	90°	0,1
28	$\sin(3x+y)$	90°	30°	0,1
29	$\sin^3(x)\cos(y)$	0°	30°	0,1
30	$\mathrm{arctg}(\frac{2x}{x+y})$	1	1	0,01

9.1.4 Пример решения

Задание 1. $A = \frac{0,118^2+\sqrt[5]{2,12}}{5,81}$. Обозначим a=0.118, b=2.12, c=5,81. Тогда $A = \dfrac{a^2+\sqrt[5]{b}}{c}$.

Поскольку значения даны со всеми верными знаками, $\Delta(a)=0.0005$, $\Delta(b)=0.005$, $\Delta(c)=0.005$.
Следовательно,

$$\Delta(A) = A\,\delta(A);\ \delta(A) = \delta(a^2+\sqrt[5]{b}) + \delta(c);$$

$$\delta(a^2+\sqrt[5]{b}) = \Delta(a^2+\sqrt[5]{b})/(a^2+\sqrt[5]{b});$$

$$\delta(c) = \frac{\Delta(c)}{c} = \frac{0,005}{5,81} = 0,00086;$$

$$\Delta(a^2+\sqrt[5]{b}) = 2\,\Delta(a) + \frac{1}{5}\,\Delta(b) = 0,002;\ \delta(a^2+\sqrt[5]{b}) = 0,00067;$$

$$\delta(A) = 0,0014;\ \Delta(A) = 0,00028;\ A = 0,2024096.$$

Верными являются три цифры после запятой. Оставляя еще одну цифру и округляя, получаем $A = 0,2024$.

Задание 2. Дана функция $Z = \dfrac{x^2+y}{2x-y}$, $x=2 \pm 0,01$, $y=3 \pm 0,1$.

Значение функции равно 7. Найдем теперь её частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2(x^2-xy-y)}{(2x-y)^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x+x^2}{(2x-y)^2}$$

Оценим эти производные. Имеем:

$1,99 \le x \le 2,01$, $2,99 \le x+1 \le 3,001$, $1,99^2 \approx 3,96 \le x^2 \le 2,01^2 \approx 4,04$,

$2,9 \le y \le 3,1$, $8,67 \le y(x+1) \le 9,33$, $-9,33 \le -y(x+1) \le -8,67$,

$3,96-9,33 \approx -5,37 \le x^2-y(x+1) \le 4,04-8,67 \approx -4,63$

$2\cdot 1,99-3,1 \approx 0,88 \le 2x-y \le 2\cdot 2,01-2,9 \approx 1,12$

$0,88^2 \approx 0,744 \le (2x-y)^2 \le 1,12^2 \approx 1,254$

Отсюда

$$B_1 = \max \frac{2\left|x^2 - xy - y\right|}{(2x - y)^2} = 2\,\frac{5,37}{0,744} \approx 13,87,$$

$$B_2 = \max \frac{\left|2x + x^2\right|}{(2x - y)^2} = \frac{2\cdot 2,01 + 2,01^2}{0,744} \approx 15,625.$$

Поэтому $\Delta Z = B_1 \cdot 0{,}01 + B_2 \cdot 0{,}1 \approx 1{,}7$, $Z = 7 \pm 1{,}7$.

Задание 3. Находим $\Delta x = \Delta Z / 2B_1$, $\Delta e = \Delta Z / 2B_2$

9.2 Типовой расчет №2. Интерполяция

9.2.1 Задание 1

Ниже дана таблица значений функции $f(x) = \arcsin(\sqrt{x})$ (значения округлены до двух знаков после запятой):

N	1	2	3	4	5	6	7	8
X	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
f(x)	0,32	0,46	0,58	0,68	0,79	0,89	0,99	1,1

1) Выбрав четыре точки, которые указаны в вашем варианте, написать интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона.
2) , 3) Вычислить значение функции в указанной промежуточной точке при помощи многочленов Ньютона и схемы Эйткена. Сравнить с табличным значением функции.

Вариант	1	2	3	4	5	6
Номера точек	1,3,6,7	2,4,5,8	1,2,4,7	1,2,4,8	1,2,5,7	1,2,5,8
x^*	0,15	0,75	0,85	0,18	0,16	0,78
Вариант	7	8	8	10	11	12
Номера точек	1,2,6,7	1,2,6,8	1,2,7,8	1,4,6,8	2,3,7,8	2,3,5,7
x^*	0,25	0,35	0,75	0,75	0,95	0,35
Вариант	13	14	15	16	17	18
Номера точек	2,3,5,8	2,3,6,7	2,3,6,8	2,4,5,7	2,4,5,8	2,5,6,7

x^*	0,35	0,45	0,38	0,85	0,95	0,75
Вариант	19	20	21	22	23	24
Номера точек	2,5,6,8	3,4,5,7	3,5,6,8	3,4,6,7	3,4,6,8	3,4,7,8
x^*	1,05	0,95	0.97	0,85	0,55	0.65
Вариант	25	26	27	28	29	30
Номера точек	4,5,6,8	1,3,4,7	1,3,4,8	1,4,5,7	1,4,5,8	2,4,5,7
x^*	0,55	0,45	0,85	1,05	0,65	0,75

9.2.2 Задание 2

Вычислить значение интерполяционного многочлена в заданной точке x*, используя формулу с конечными разностями (2.6).

Вариант	x_0 y_0	x_1 y_1	x_2 y_2	x_3 y_3	x*	Вариант	x_0 y_0	x_1 y_1	x_2 y_2	x_3 y_3	x*
1	1 −1	3 3	5 −4	7 9	2	16	3 1	6 −4	9 3	12 1	1
2	1 5	4 4	7 2	10 7	3	17	5 3	10 5	15 2	20 4	2
3	1 −2	5 5	9 3	13 8	4	18	1 2	5 −6	9 4	13 3	2
4	−1 3	1 6	3 −5	5 3	2	19	3 4	5 8	7 3	9 5	1
5	−2 4	0 7	2 4	4 4	3	20	−5 5	0 7	5 −4	10 2	2
6	3 −5	5 8	7 −4	9 2	4	21	−1 5	1 8	3 5	5 −4	2
7	3 1	6 2	9 3	12 4		22	10 −1	20 3	30 2	40 4	2
8	−2 3	1 2	4 0	7 −2	2	23	1 2	3 −3	5 3	7 2	2
9	5 2	10 3	15 8	20 8	3	24	1 −4	5 4	9 1	13 5	3
10	10 4	20 4	30 9	40 −3	3	25	1 5	4 −1	7 2	10 7	3
11	−1 5	1 −1	3 7	5 7	2	26	−2 6	1 5	4 4	7 8	2

12	5	10	15	20	4	27	–1	1	3	5	4
	6	2	8	4			8	7	7	–2	
13	–5	0	5	10	4	28	–2	0	2	4	1
	2	3	3	7			7	8	3	3	
14	3	6	9	12	1	29	5	10	15	20	2
	3	–2	4	4			2	9	–4	5	
15	1	4	7	10	3	30	1	3	5	7	2
	4	3	5	–3			3	2	9	–3	

9.2.3 Пример решения

Задание 1. Пусть заданы точки 1,2,5,6 и $x^* = 0,18$.

1) Выпишем интерполяционный многочлен в форме Лагранжа:

$$L_3(x) =$$

$$0,32\frac{(x-0,2)(x-0,5)(x-0,6)}{(0,1-0,2)(0,1-0,5)(0,1-0,6)} + 0,46\frac{(x-0,1)(x-0,5)(x-0,6)}{(0,2-0,1)(0,2-0,5)(0,2-0,6}$$

$$+0,79\frac{(x-0,1)(x-0,2)(x-0,6)}{(0,5-0,1)(0,5-0,2)(0,5-0,6)} + 0,89\frac{(x-0,1)(x-0,2)(x-0,5}{(0,6-0,1)(0,6-0,2)(0,6-(}$$

$$= x^3 - 1,55x^2 + 1,795x + 0,155.$$

2) Для составления интерполяционного многочлена в форме Ньютона заполним таблицу разделенных разностей

x_i	y_i	$[x_i, x_{i+1}]$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0,1	0,32	1,4	–0,75	1
0,2	0,46	1,1	–0,25	
0,5	0,79	1		
0,6	0,89			

Интерполяционный многочлен имеет вид:

$$L_3(x) = 0,32 + 1,4(x-0,1) - 0,75(x-0,1)(x-0,2) +$$

$$+(x-0,1)(x-0,2) = x^3 - 1,55x^2 + 1,795x + 0,155.$$

Окончательная формула такая же, как для многочлена Лагранжа.

3) Табличное значение $\arcsin(\sqrt{x})$ для x=0,18 равно 0,438149. Применим схему Эйткена

x_i	y_i	x^*-x_i	$L_{i,i+1}(x^*)$	$L_{i,i+1,i+2}(x^*)$	$L_{0123}(0,2)$
0,1	0,32	0,08	0,432	0,4332	0,433712
0,2	0,46	–0,02	0,438	0,4364	
0,5	0,79	–0,32	0,47		
0,6	0,89	–0,42			

Получаем значение 0,433712. Отличие от табличного – в третьем знаке после запятой, что не удивительно, так как исходные данные округлены до второго знака.

9.3 Типовой расчёт №3. Системы линейных уравнений

9.3.1 Задание

Ниже приведены расширенные матрицы шести систем, состоящих из пяти уравнений с четырьмя неизвестными.

1	2,8	3,1	−5,6	3,2	3,5	4	2,8	2,3	−2,7	3,8	−6,0
	7,1	2,3	−4,5	2,6	7,5		8,1	3,1	4,2	7,1	2,1
	5,2	3,6	−2,7	3,8	9,9		4,2	3,4	5,7	6,2	0,3
	−4,1	5,8	1,5	2,6	5,8		3,4	−1,8	0,7	0,8	5,1
	1,8	2,5	3,1	−8,2	−0,8		1,5	4,1	4,3	6,5	−4,8
2	2,3	2,7	−3,8	5,7	13,0	5	3,2	8,1	0,8	5,3	14,2
	1,5	3,7	4,1	−5,1	1,6		1,6	3,2	1,7	6,4	8,7
	−2,1	3,1	0,8	1,2	0,1		0,8	7,1	1,9	−2,5	3,1
	7,1	0,9	3,5	−4,2	10,9		−0,4	2,5	2,5	3,9	3,7
	0,7	−0,5	−0,6	5,7	6,6		2,6	2,7	3,6	2,6	3,0
3	3,4	0,8	1,5	1,7	3,6	6	7,2	3,6	−3,5	6,1	5,4
	2,5	−0,4	2,3	4,1	6,2		8,4	6,2	2,4	3,2	7,3
	8,1	3,2	5,3	5,7	12,6		−5,6	7,2	5,6	3,9	0,8
	5,6	6,4	6,2	1,5	10,9		−6,2	5,2	6,1	0,8	−0,5
	4,2	2,2	3,4	7,3	11,8		2,8	3,4	0,5	1,7	3,1

Выбрать систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными согласно таблице

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Номер системы	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
Номер выбрасываемого уравнения	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Вариант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Номер системы	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
Номер выбрасываемого уравнения	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Вариант	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Номер системы	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6
Номер выбрасываемого уравнения	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5

1) Решить систему методами главных элементов и Жордана. Расчет вести с тремя знаками после запятой.
2) Найти матрицу, обратную к матрице коэффициентов системы и сделать проверку

9.4 Типовой расчёт №4. Метод наименьших квадратов

9.4.1 Задание

Используя табличные данные типового расчёта №2 (9.2.2), найти наилучшее приближение функцией заданного вида методом наименьших квадратов.

Варианты	Функция	Варианты	Функция
1,5,9,13, 17,21,25,29	$y=\beta_0+\beta_1 e^x$	2,6,10,14, 18,22,26,30	$y=\beta_0+\beta_1\sqrt{x}$
3,7,11,15, 19,23,27	$y=\beta_0+\beta_1\sin x$	4,8,12,16, 20,24,28	$y=\beta_0 x+\beta_1 x^2$

9.5 Типовой расчёт №5. Численное решение уравнений

9.5.1 Задание

1) Найти какой-либо корень уравнения с точностью до 0.05 методом половинного деления.
2) Найти какой-либо корень уравнения с точностью до 0.001
   a. Методом простой итерации.
   b. Методом касательных Ньютона-Рафсона.
   c. Методом секущих.

Вариант	Уравнение	Вариант	Уравнение
1	$2x^3-3x^2-12x-5=0$	2	$x^3-3x^2-24x=3$
3	$x^3-3x^2+3=0$	4	$x^3-12x+6=0$
5	$x^3+3x^2-24x=10$	6	$2x^3-3x^2-12x+10=0$
7	$2x^3+9x^2-21=0$	8	$x^3+x=5$
9	$x^3+3x^2=2$	10	$x^3-3x^2+12x-9=0$
11	$x^3+3x^2-24x+10=0$	12	$x^3+3x^2-3,5=0$
13	$2x^3+9x^2=10$	14	$x^3-3x^2-24x-8=0$
15	$x^3-3x^2+9x+2=0$	16	$x^3-12x+10=0$
17	$x^3-3x^2-24x-5=0$	18	$2x^3-3x^2-12x+1=0$
19	$2x^3-12x-5=0$	20	$x^3-4x^2+2=0$
21	$2x^3-3x^2-12x+12=0$	22	$x^3+3x^2-24x+1=0$
23	$x^3+3x^2+12x+3=0$	24	$2x^3+9x^2=6$
25	$x^3+3x^2-24x=3$	26	$x^3-3x^2-24x+10=0$
27	$2x^3+9x^2=4$	28	$x^3-12x=10$
29	$x^3+4x=6$	30	$x^3-3x^2+9x=8$

9.5.2 Пример решения.

$$x^3-0,2x^2+0,5x+1,4=0.$$

Найдём отрезок, содержащий корень функции. Для этого составим таблицу знаков функции с шагом 1 и найдём место, где функция изменяет знак. При $x=-3$ знак отрицательный, при $x=5$ – положительный. Поэтому можно начинать с $x=-3$.

x	–3	–2	–1	0	…
f(x)	–28,9	–8,4	–0,3	1,4	…

Корень – на отрезке [–1;0].

✓ Метод половинного деления.

Заполним таблицу

Шаг	Отрезок	Длина отрезка	Середина отрезка	f(x)
1	[–1;0]	1	–0,5	0,975
2	[–1;–0,5]	0,5	–0,75	0,4906
3	[–1;–0,75]	0,25	–0,875	0,139
4	[–1; –0,875]	0,125	–0,9375	–0,068
5	[–0,9375; –0,875]	0,0625	–0,90625	0,0383

Длина последнего отрезка меньше 2*0.05, следовательно, с требуемой точностью корень уравнения равен середине этого отрезка:

$x^* \approx -0,90625$

✓ 2a. Метод простой итерации.

Составим итерационную схему. Для этого составим таблицу значений производной функции $f(x)=x^3-0,2x^2+0,5x+1,4$ на отрезке [–1;0], разбив его, скажем, на 5 частей.

x	–1	–0,8	–0,6	–0,4	–0,2	0
f′(x)	3,9	2,74	1,82	1,14	0,7	0,5

Отсюда видно, что максимум модуля производной на отрезке [–1; 0] примерно равен 3,9, а знак производной – *положительный*. Поэтому число k можно выбрать положительным, равным 3 >3,9/2. Таким образом, получаем следующую схему:

$$x_{i+1}=x_i-(x^3-0,2x^2+0,5x+1,4)/3.$$

Заполняем таблицу

I	0	1	2	3	4
x_i	–0,5	–0,825	–0,92162	–0,91712	–0,91773

Произошло совпадение последовательных значений с требуемой точностью 0,001 – следовательно, принимаем $x^* \approx -0,91773$.

✓ 2b. Метод касательных.

Составим итерационную схему. Имеем следующую схему:

$$x_{i+1}=x_i-\frac{x^3-0,2x^2+0,5x+1,4}{3x^2-0,4x+0,5}.$$

В качестве начального приближения возьмём, например, левую границу отрезка $[-1,0]$, содержащего корень уравнения. Получаем таблицу

i	0	1	2	3
x_i	–1	–0,923	–0,91768	–0,91766

Произошло совпадение последовательных значений с требуемой точностью 0,001 – следовательно, принимаем $x^* \approx -0,91766$.

✓ 2c. Метод секущих.

Составим итерационную схему.

$$y_i = x_i^3 - 0,2x_i^2 + 0,5x_i + 1.4,\ x_{i+1} = x_i - y_i \frac{(x_i - x_{i-1})}{y_i - y_{i-1}}.$$

В качестве x_0 и x_1 возьмём левую границу $x_0 = -1$ и середину $x_1 = -0.5$ отрезка $[-1,0]$, содержащего корень уравнения. Получаем таблицу

I	0	1	2	3	4	5
x_i	–1	–0,5	–0,88235	–0,934	–0,91715	–0,91765
	–0,3	0,975	0,1161	-0,056	0,0017	0,00002

Произошло совпадение последовательных значений с требуемой точностью 0,001 – следовательно, принимаем $x^* \approx -0,91765$.

9.6 Типовой расчёт №6. Численное дифференцирование

9.6.1 Задание

Используя табличные данные задания 2 типового расчёта №2 (раздел 9.2.2), вычислить приближенно значение первой и второй производной функции в заданной точке.

9.7 Типовой расчёт №7. Численное интегрирование

9.7.1 Задание

1) Вычислить интеграл, разбивая отрезок на 4 и 8 частей; оценить точность сравнением результатов.
   a) По формуле трапеций.
   b) По формуле Симпсона.
   c) По формуле Эйлера.
2) Вычислить интеграл по трёхточечной формуле Гаусса–Лежандра.

Вари-ант	Интеграл	Вари-ант	Интеграл	Вари-ант	Интеграл
1	$\int_{1,8}^{2,8}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+0,7}}$	2	$\int_{1,2}^{2}\frac{\lg(x+2)}{x}dx$	3	$\int_{1,2}^{2,7}\frac{dx}{\sqrt{x^2+3,2}}$
4	$\int_{1,6}^{2,4}(x+1)\sin x dx$	5	$\int_{0,2}^{1,7}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+1,1}}$	6	$\int_{0,2}^{1}\frac{\lg(x^2)}{x^2+1}dx$
7	$\int_{-1}^{0,6}\frac{dx}{\sqrt{x^3+2}}$	8	$\int_{0,4}^{1,2}\sqrt{x}\cos(x^2)dx$	9	$\int_{0,4}^{2,6}\frac{dx}{\sqrt[3]{3x^2+2}}$
10	$\int_{0,8}^{1,6}\frac{\lg(x^2+1)}{x}dx$	11	$\int_{1,6}^{2,4}\frac{dx}{\sqrt[4]{x^2+x}}$	12	$\int_{0,8}^{1,2}\frac{\sin 2x dx}{x^2}dx$
13	$\int_{1,8}^{2,6}\frac{xdx}{\sqrt{2x^3+1}}$	14	$\int_{0,4}^{1,2}(2x+0,5)\sin x dx$	15	$\int_{0,1}^{0,9}\frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$
16	$\int_{0,4}^{0,8}\frac{\lg(x^2+0,5)}{2x^2+1}dx$	17	$\int_{-0,8}^{1,6}\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$	18	$\int_{0,18}^{0,98}\frac{\sin x dx}{x+1}$

19	$\int\limits_{1,4}^{1,6}\frac{dx}{\sqrt{2x^3+0,7x}}$	20	$\int\limits_{0,2}^{1,8}\sqrt{x+1}\cos(x^3)dx$	21	$\int\limits_{2,1}^{3,6}\frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$
22	$\int\limits_{1,4}^{3}x^2\lg x\,dx$	23	$\int\limits_{1,3}^{2,5}\frac{dx}{\sqrt{0,2x^2+1}}$	24	$\int\limits_{1,4}^{2,2}\frac{\lg^2(x)dx}{x+1}$
25	$\int\limits_{0,8}^{1,6}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$	26	$\int\limits_{0,1}^{0,5}\frac{\sin x dx}{x+\cos x}$	27	$\int\limits_{0,2}^{1,6}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+0,5x}}$
28	$\int\limits_{0,2}^{1}\frac{\sin(x^2-1)dx}{x}$	29	$\int\limits_{1,8}^{3,6}\frac{dx}{\sqrt{x^2+0,9x}}$	30	$\int\limits_{1,4}^{2,2}\frac{\cos^2(x)dx}{x^2+1}$

9.8 Типовой расчёт №8. Численное решение дифференциальных уравнений

9.8.1 Задание

Найти приближенное решение задачи Коши на отрезке с шагом h=0.2.

1. Методом ломаных Эйлера.
2. Исправленным методом ломаных по схеме (8.3).
3. Методом Гюна (8.4).
4. Методом Рунге-Кутта.

Вариант	Уравнение	Начальное условие	Отрезок
1	$y'=x+y^2$	$y(0)=-1$	$x\in[0;1]$
2	$y'=2x+y^2$	$y(1)=-0,5$	$x\in[1;2]$
3	$y'=0,2x+y^2$	$y(-1)=0,2$	$x\in[-1;0]$
4	$y'=x^2+2y$	$y(0)=-1$	$x\in[0;1]$

5	$y'=x^2+y^2$	$y(1)=0,2$	$x\in[1;2]$
6	$y'=0,3x+y^2$	$y(-1)=-1$	$x\in[-1;0]$
7	$y'=x+0,3y^2$	$y(0)=-0,5$	$x\in[0;1]$
8	$y'=0,1x^2+2xy$	$y(1)=0,2$	$x\in[1;2]$
9	$y'=3x^2+0,1xy$	$y(0,5)=-1$	$x\in[0,5;1,5]$
10	$y'=x^2+0,1y^2$	$y(1)=0,3$	$x\in[1;2]$
11	$y'=2x+0,1y^2$	$y(0)=-0,5$	$x\in[0;1]$
12	$y'=x^2+xy$	$y(0,5)=-1$	$x\in[0,5;1,5]$
13	$y'=x^2+y$	$y(-0,5)=-1$	$x\in[-0,5;0,5]$
14	$y'=xy+y^2$	$y(0)=0,3$	$x\in[0;1]$
15	$y'=x^2+0,2y^2$	$y(0,5)=-1$	$x\in[0,5;1,5]$
16	$y'=2x^2+xy$	$y(0,2)=0,2$	$x\in[0,2;1,2]$
17	$y'=x^2+0,2xy$	$y(0,4)=-1$	$x\in[0,4;1,4]$
18	$y'=x^2+3xy$	$y(-0,2)=-1$	$x\in[-0,2;0,8]$
19	$y'=2x^2+3y^2$	$y(0)=-0,5$	$x\in[0;1]$
20	$y'=0,3x^2+0,1y^2$	$y(1)=-1$	$x\in[1;2]$
21	$y'=0,2x^2+y^2$	$y(-0,5)=0,2$	$x\in[-0,5;0,5]$
22	$y'=0,1x+0,2y$	$y(0)=-1$	$x\in[0;1]$
23	$y'=xy+0,1y^2$	$y(1)=-0,5$	$x\in[1;2]$
24	$y'=0,1xy+0,3y^2$	$y(2)=-1$	$x\in[2;3]$
25	$y'=3x+0,1y^2$	$y(1)=0,3$	$x\in[1;2]$
26	$y'=0,2xy+y^2$	$y(-1)=0,2$	$x\in[-1;0]$
27	$y'=0,3xy+y^2$	$y(0)=-1$	$x\in[0;1]$
28	$y'=0,1x^2+2y^2$	$y(0,2)=-1$	$x\in[0,2;1,2]$
29	$y'=0,2x+3y^2$	$y(-1)=-0,5$	$x\in[-1;0]$
30	$y'=xy+0,2y^2$	$y(0,4)=-1$	$x\in[0,4;1,4]$

9.8.2 Пример решения.

$y'=xy+y$; $y(1)=2$; $[1;2]$.

Метод ломаных Эйлера. Поочерёдно вычисляем $f(x_0,y_0)= f(1,2)=4$; $y_1=y_0+h$; $f(x_0,y_0)=2+0,8=2,8$ по формулам (8.2), заполняя таблицу

x_i	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y_i	2	2,8	4,032	5,967	9,070	14,150
$f(x_i,y_i)$	4	6,16	9,6768	15,515	25,397	42,449

Исправленный метод ломаных по схеме (8.3). Поочерёдно вычисляем по формулам (8.3), заполняя таблицу

x_i	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y_i	2	2,8	4,032	5,967	9,070	14,15
$f(x_i,y_i)$	4	5,508	7,696	10,92	15,76	
$x_{i+1/2}$	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	
$y_{i+1/2}$	3,05	3,976	5,292	7,206	10,03	
$f(x_{i+1/2}y_{i+1/2})$	5,4	7,026	9,940	14,29	20,89	

Пункты 3,4 задания выполняются аналогично. Объём расчётов в методе Рунге-Кутта примерно в четыре раза больше (на каждом шаге нужно найти коэффициенты k_1, k_2, k_3, k_4, и только затем y_i – см. формулы (8.5)).

Учебно-методическое издание

Липкина Зоя Семеновна
Милевский Александр Станиславович

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ.
Методические указания
Часть 2

Подписано в печать - 15.10.03.	Формат 60x84 / 16
Заказ № 1145.	Усл. печ. л. - 2,25.
Изд. № 478-03.	Тираж - 100.
	Цена - 13руб. 50коп.

127994, Москва, ул. Образцова, 15
Типография МИИТа

Цена – 13 руб. 50 коп.
(по себестоимости)