МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра “Прикладная математика–2”

А.С.МИЛЕВСКИЙ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ЧАСТЬ 1.
АЛГЕБРА, АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Конспект лекций

МОСКВА – 2008

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра “Прикладная математика–2”

А.С.МИЛЕВСКИЙ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ЧАСТЬ 1.
АЛГЕБРА, АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Конспект лекций

Рекомендовано редакционно-издательским советом университета в качестве конспектов лекций для студентов ИЭФ и ИУИТ

МОСКВА – 2008

УДК-517
М-60
Милевский А.С. Высшая математика. Ч.1.
Алгебра, аналитическая геометрия и дифференциальное исчисление: Конспект лекций. – М.: МИИТ, 2008. – 103 с.

Конспект лекций предназначен для студентов, изучающих курс математического анализа в институтах ИЭФ и ИУИТ. Включает материал по линейной и векторной алгебре, аналитической геометрии, дифференциальному исчислению функций одной и нескольких переменных и комплексным числам.

Рецензенты:
Фролов Е.Б., д.т.н., профессор МГТУ Станкин,
Деснянский В.Н., к.ф.-м.н., заведующий кафедрой “Вычислительная математика” МИИТ.

Св. план 2008 г.; поз.

Милевский Александр Станиславович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. Ч.1. АЛГЕБРА, АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.
Конспект лекций

Подписано в печать	Формат 60x84 / 16
Заказ №	Усл. печ. л. –
Тираж –	

127994, Москва, ул. Образцова, 15
Типография МИИТа

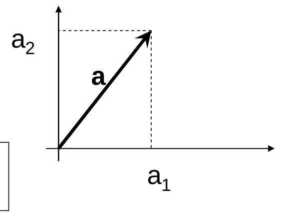
1. Линейная алгебра

1.1. n-мерные векторы

Пример. **Двумерный вектор**

a = $(a_1;a_2)$

Координаты вектора



Пример. **Трёхмерный вектор** **a =** $(a_1;a_2;a_3)$

Пример. **n-мерный вектор**

a = $(a_1;a_2;\ldots;a_n)$

Замечание. Нередко n-мерный вектор записывается в столбик. Вот так:

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}$$

1.2. Линейные операции над векторами

1.2.1 Умножение вектора на число

Пример Если **a =** (–1;4;0;2), то (–3)·**a =** (3; –12;0; –6)

1.2.2 Сложение векторов одинаковой размерности

Пример Если **a =** (–1;4;0;1;2), **b =** (2;1;3;1;1), то **a+b =** (1;5;3;2;3)

Замечание. Аналогично определяется **вычитание векторов**

1.3. Матрицы

Матрица- это прямоугольная таблица из чисел

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Пример. Матрица размера 4×2 (4 строки, 2 столбца):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \\ -2 & \pi \end{pmatrix}$$

Обозначение. a_{ij} **–** это число, стоящее в ***i*-й** строке и ***j*-м** столбце

Если число строк равно числу столбцов, то матрица называется **квадратной**

- Матрица, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом.
- Матрица, все элементы которой равны нулю, называются **нулевой матрицей** и обозначается через 0.

- Элементы матрицы с одинаковыми индексами называют элементами **главной диагонали**.
- Квадратные матрицы, у которых отличны от нуля лишь элементы главной диагонали, называются **диагональными матрицами** и записываются так:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Если все элементы a_{ii} диагональной матрицы равны 1 , то она называется единичной и обозначается Е

Примеры единичных матриц различного размера:

$$E = (1),\quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.4. Линейные операции над матрицами

1.4.1 Умножение матрицы на число

Пример $$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow 5 \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ -15 & 25 & -5 \end{pmatrix}$$

1.4.2 Сложение матриц одинакового размера

Пример $$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 \\ -4 & 11 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача. Решить матричное уравнение $$4X + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 23 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1.5. Транспонирование матрицы

Пример. $$\underbrace{A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}}_{2\times 3} \Rightarrow \underbrace{A^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{3\times 2}$$

Свойство: $$\left(A^T\right)^T = A$$

1.6. Умножение матриц

Произведение А·В матриц А и В определено, только если количество столбцов в матрице А равно количеству строк в матрице В

Пример. Если $$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

то можно умножить А (3 столбца) на В (3 строки),

и нельзя умножить В на А

Пример. Если матрица А состоит из одной строки (размер 1×n), а матрица В – из одного столбца (размер n×1), то А·В – размера 1×1, т,е. число:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}}_{A}\cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}}_{B} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + (-3)\cdot 1 + 2\cdot 4 + 5\cdot 7 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 42 \end{pmatrix}}_{A\cdot B}$$

Определение произведения.
Пусть матрица А имеет размер m×k, матрица В – размер k×n, С=А·В. Тогда матрица С имеет размер m×n. Элемент C_{ij} равен произведению *i*-й строки А на *j*-й столбец В

Пример. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}. \quad A\cdot B = ?$

А:1×3, В:3×2 → С=А·В:1×2;

Далее,

$$C_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 1\cdot 1 + 4\cdot 2 + 2\cdot 6 = 21; \quad C_{12} = \ldots$$

Итак,

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 9 \end{pmatrix}$$

Задача. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}. \quad A\cdot B = ?\ B\cdot A = ?$

Ответ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 9 & 21 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 12 \\ -3 & 6 & 16 \\ -3 & 9 & 20 \end{pmatrix}$$

Замечание. Из последнего примера видно, что матрицы А·В и В·А могут не совпадать, даже если обе существуют.

Ещё пример. В таблице указано количество единиц продукции, отгружаемой ежедневно на молокозаводах Зав1 и Зав2 в магазины М1, М2 и М3, причем доставка единицы продукции с каждого молокозавода в магазин М1 стоит 40 ед., в магазин М2 - 70, а в М3 - 100 ед.

.

	М1	М2	М3
Зав1	20	30	40
Зав2	30	10	10

Решение. Обозначим через А матрицу, данную нам в условии, а через
В - матрицу, описывающую стоимость доставки единицы продукции в магазины,

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 40 \\ 30 & 10 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 40 & 70 & 100 \end{pmatrix}$$

Тогда матрица затрат на перевозки будет иметь вид:

$$C = A \cdot B^T = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 40 \\ 30 & 10 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 70 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6900 \\ 2900 \end{pmatrix}$$

1.7. Свойства умножения матриц

1. A·E=E·A=A
2. (αA)·B= α(A·B), α–любое число
3. (A·B)·C=A·(B·C)
4. (A+B)·C =A·C+B·C
5. A·(B+C)=A·B+A·C
6. (A·B)^T=B^T·A^T

Замечание. Из первого свойства видно, что единичные матрицы при умножении ведут себя как число “1”.

1.8. Определитель квадратной матрицы

Каждой квадратной матрице А сопоставляется число detA, называемое её определителем.

Другое обозначение определителя:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Для матриц 1×1: |a|=a

Для матриц 2×2: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Для матриц n×n (разложение по 1 строке):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{13} \dots$$

Пример. Определитель матрицы 3×3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot 13 - 2\cdot(-16) + 4\cdot(-7) = 13 + 32 - 28 = 17$$

Свойства определителя.

1. Определитель не меняется при транспонировании матрицы.
2. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак.
3. Если все элементы некоторой строки (столбца) умножить на одно и то же число, определитель умножится на то же число.
4. Определитель не меняется, если к элементам одной из его строк прибавить элементы другой строки, умноженные на одно и то же число. То же для столбцов.
5. Определитель произведения квадратных матриц равен произведению их определителей.

1.9. Обратная матрица

Говорят, что квадратная матрица В является обратной к квадратной матрице А, если
А · В = В · А = Е
Обратная матрица обозначается A^{-1}

Замечание. У всякой ли матрицы есть обратная? Из свойства 5 следует, что

$$\det(A)\cdot\det(A^{-1})=\det E$$

Так как detE=1, то $\det(A^{-1})=1/\det(A)$.

Поэтому для существования обратной матрицы необходимо, чтобы detA≠0.

Теорема. Матрица A^{-1} существует в том, и только в том случае, если det(A) ≠ 0. При этом

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

где A_{ij} равно произведению $(-1)^{i+j}$ на определитель матрицы, получающейся вычёркиванием из матрицы А i-й строки и j-го столбца.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Задача. Существует ли обратная матрица для данной матрицы? Если да, то найти её.

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

Решение. Сначала вычислим определитель:

$$\det A=-2\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 5\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=-2\cdot5-1\cdot(-11)+2\cdot(-3)=-5\neq0$$

Следовательно, A^{-1} **существует**. Теперь найдём “алгебраические дополнения”:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 5\end{vmatrix}=5,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix}=-11,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-3,\quad A_{21}=\dots,\quad A_{22}=\dots,\quad \dots\quad,\quad A_{33}=\dots$$

Итак,

$$A^{-1}=\frac{-1}{5}\cdot\begin{pmatrix}5 & 11 & -3\\ -5 & -16 & 3\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}^T=\frac{-1}{5}\cdot\begin{pmatrix}5 & -5 & 0\\ 11 & -16 & 2\\ -3 & 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -2{,}2 & 3{,}2 & -0{,}4\\ 0{,}6 & -0{,}6 & 0{,}2\end{pmatrix}$$

Проверка.

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -2{,}2 & 3{,}2 & -0{,}4\\ 0{,}6 & -0{,}6 & 0{,}2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Замечание. Для вычисления обратной матрицы более эффективен метод элементарных преобразований. Рассмотрим его несколько позже.

1.10. Системы линейных уравнений, основные понятия

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+ & \dots & +a_{1n}x_n & = & b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+ & \dots & +a_{2n}x_n & = & b_2\\ \dots\quad\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+ & \dots & +a_{mn}x_n & = & b_m\end{cases}$$

Здесь m линейных уравнений и n неизвестных, a_{ij} и b_i – заданные, а x_j – неизвестные числа.

Система называется совместной, если она имеет по крайней мере одно решение.
Система называется несовместной, если она не имеет решений.

Если ввести обозначения

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \dots\\ b_m\end{pmatrix},$$

то система запишется в матричной форме:

A·X=B

Матрица A называется матрицей системы, а матрица B – матрицей свободных членов системы.

1.11. Решение системы при помощи обратной матрицы

Пусть существует A^{-1} (то есть det(A)≠0), тогда

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

Таким образом, в этом случае “квадратную” (m=n) систему можно решить, используя обратную матрицу.

Но вычисление A^{-1} – довольно громоздкая процедура. Этот метод решения хорош, если требуется решить много систем, отличающихся только различными правыми частями B.

1.12. Формулы Крамера для решения системы уравнений

Как в предыдущем пункте, будем считать, что существует A^{-1} (то есть det(A)≠0), так что $X=A^{-1}B$. Если использовать формулу для A^{-1} (через определители), то получаются формулы Крамера:

$$\boxed{x_j = \frac{\det A_j}{\det A}}$$

где A_j – матрица, полученная из A заменой j-го столбца на столбец свободных членов B.

Этот метод решения хорош, если m=n=2, или m=n=3. Для квадратных систем большего размера вычисления определителей занимает слишком много времени.

Пример. Найти x_2 и x_3 из системы уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 6 \end{cases}$$

Решение.

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 9 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \ldots, \quad x_3 = \frac{|\ldots|}{|\ldots|} = \ldots$$

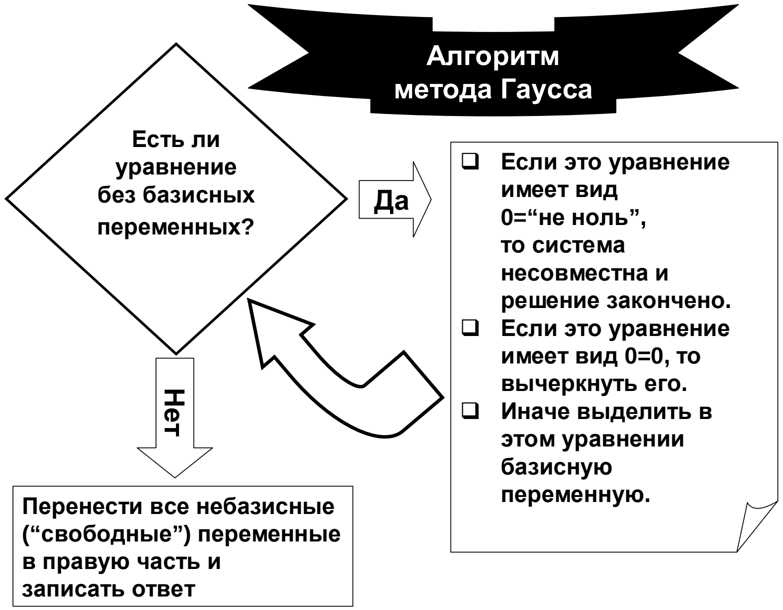
Ответ. $x_2 = 27/20$, $x_3 = 11/20$

1.13. Метод Гаусса для решения систем линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Метод Гаусса позволяет решать **любые** системы линейных уравнений.

Будем говорить, что переменная x_j является базисной в i-м уравнении, если
1. В этом уравнении коэффициент при x_j равен 1.
2. В остальных уравнениях этой переменной нет.



Пример.
Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Решен

«Генеральный элемент»

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-2,\ 3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 7 & -1 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & -1 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{1/2,\ 1/4,\ 1/4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4,5 & 0 & 5,5 \\ 0 & 0 & 1,25 & 1 & 1,25 \\ 0 & 1 & 8,25 & 0 & 10,25 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4,5 & 0 & 5,5 \\ 0 & 0 & 1,25 & 1 & 1,25 \\ 0 & 1 & 8,25 & 0 & 10,25 \end{array}\right)$$

Переменные x_1, x_4, x_2 – базисные, x_2 – свободная.

$$\begin{cases} x_1 = 5,5 - 4,5x_3 \\ x_4 = 1,25 - 1,25x_3 \\ x_2 = 10,25 - 8,25x_3 \\ x_3 - \text{любое} \end{cases}$$

Общее решение

Если вместо свободных переменных подставить любые числа, получится частное решение
Например, $x_3=1, x_1=1, x_4=0, x_2=2$.

1.14. Классификация систем уравнений

Из вида общего решения в методе Гаусса понятно, что возможны только следующие три случая:

- Система **несовместна**.
- Система имеет **ровно одно** решение (нет свободных переменных).
- Система имеет **бесконечное множество** решений (есть свободные переменные).

Вопрос. Пусть есть система 4 линейных уравнений с 6 неизвестными. Все ли три случая могут иметь место?

Вопрос. Тот же вопрос для системы 6 линейных уравнений с 5 неизвестными.

1.15. Вычисление обратной матрицы при помощи элементарных преобразований.

Элементарными преобразованиями над строками матрицы называются:

1. Перестановка строк.
2. Умножение строки на число, не равное 0.
3. Прибавление к одной строке другой, умноженной на число.

Аналогично определяются **элементарные преобразования над столбцами**

$$\left(A\middle|E\right) \xrightarrow{\text{Элементарные преобразования над строками}} \left(E\middle|A^{-1}\right)$$

Пример.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

-2

-3

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -7 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

3/7

-1

-1/7

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -13/7 & 1 & 0 & 2/7 & 0 & 3/7 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -9/7 & 0 & 1 & 3/7 & 0 & -1/7 \end{array}\right)$$

-13/7

-1

9/7

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 11/7 & 13/7 & -10/7 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6/7 & -9/7 & 8/7 \end{array}\right)$$

Перестановка строк

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 11/7 & 13/7 & -10/7 \\ 0 & 0 & 1 & -6/7 & -9/7 & 8/7 \end{array}\right)$$

Ответ. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 11/7 & 13/7 & -10/7 \\ -6/7 & -9/7 & 8/7 \end{pmatrix}$

1.16. Вычисление определителя при помощи элементарных преобразований

Пример.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Запомнить $(-1)^{1+2}\cdot 1$

$$\to \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & -7 \\ 9 & 0 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\to \begin{vmatrix} 8 & -7 \\ 9 & -7 \end{vmatrix}$$

Запомнить $(-1)^{2+2}\cdot(-7)$

$$\to \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -9/7 & 1 \end{vmatrix}$$

Запомнить $(-1)^{1+1}\cdot(-1)$

Ответ. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}\cdot 1\cdot(-1)^{2+2}\cdot(-7)\cdot(-1)^{1+1}(-1) = -7$

1.17. Линейная зависимость векторов.

Определение. Множество n-мерных векторов {a,b,c,…} называется **линейно зависимым**,
если существуют такие числа x_1, x_2, x_3,…, не все равные нулю, что

$$\mathbf{x_1a + x_2b + x_3c + \ldots = 0.}$$

Эквивалентное определение.
Множество n-мерных векторов {a,b,c,…} называется **линейно зависимым**,
если один из этих векторов можно представить в виде суммы остальных с некоторыми коэффициентами.

Пример (как проверять зависимость). Является ли линейно зависимым множество векторов m=(2,1,1,1,3), n=(1,3,2,2,0), p=(4,1,1,3,2), q=(-1,-1,0,1,5)?

Решение. Составим систему уравнений

$$\mathbf{x_1m + x_2n + x_3p + x_4q = 0,}$$

то есть

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 0x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

У этой системы есть нулевое решение. <u>Если другого решения нет, то множество векторов независимо</u>. Поэтому достаточно решить эту систему уравнений методом Гаусса и если нет свободных переменных, то векторы независимы, иначе зависимы.

1.18. Базис в множестве векторов.

Определение. Пусть L – некоторое множество n-мерных векторов.
Говорят, что **набор векторов {e^1,e^2,…,e^k} образует базис в L**, если
1. Векторы e^1,e^2,…,e^k линейно независимы.
2. Любой вектор из L является линейной комбинацией этих векторов, т.е. может быть представлен в виде суммы этих векторов с некоторыми коэффициентами.

Пример. Векторы a=(2;5), b=(1;8) образуют базис во множестве двумерных векторов:
1. Они линейно независимы (если x·a+y·b=0, то x=y=0 – проверьте!)
2. Любой вектор (m_1,m_2) можно представить в виде (m_1,m_2)=x_1·(2;5)+x_2·(1;8) с подходящими x_1, x_2

Задача. Разложить вектор m=(1;9) по векторам a=(2;5), b=(1;8).

Решение. (1;9)=x_1·(2;5)+x_2·(1;8)

$$\begin{cases} 1 = 2x_1 + x_2 \\ 9 = 5x_1 + 8x_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \ldots \\ x_2 = \ldots \end{cases}$$

Теорема. Пусть для множества L есть два различных базиса. Тогда количество векторов в этих базисах одинаковое.
(Это число называют размерностью или рангом L).

Ранг множества L равен максимальному количеству линейно независимых векторов в L

Если ранг меньше количества векторов, то векторы зависимы

1.19. Ранг матрицы

Всякую матрицу можно рассматривать как множество вектор-столбцов, так и множество вектор-строк.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Соответственно, возникает ранг матрицы по столбцам (количество линейно независимых столбцов) и по строкам (количество линейно независимых строк).

Теорема. Ранг матрицы по столбцам совпадает с рангом по строкам.
(Это число называют рангом матрицы).

Пример (как вычислить ранг матрицы). Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 0 & 7 & 6 \\ 4 & 7 & 2 & 17 & 20 \end{pmatrix}$$

Решение. Ранг матрицы равен количеству базисных переменных в системе

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 7 & 6 & 0 \\ 4 & 7 & 2 & 17 & 20 & 0 \end{array}\right)$$

Решив систему методом Гаусса, найдём ранг.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 7 & 6 & 0 \\ 4 & 7 & 2 & 17 & 20 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 7 & 6 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 9 & 18 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -11 & 1 & -10 & -11 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -4 & -8 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 7 & 6 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 9 & 18 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Базисные переменные x_1, x_2, x_3. Ранг матрицы равен 3.

1.20. Связь между рангом и определителем

Теорема. Пусть A – квадратная матрица размера n×n. Тогда её определитель равен нулю в том и в только в том случае, если столбцы (строки) линейно зависимы, т.е. ранг A < n.

Пример. Первая строка этой матрицы равна сумме второй и удвоенной третьей, поэтому ранг меньше 4 и определитель заведомо равен нулю:

$$\begin{pmatrix} -1 & 9 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 7 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1.21. Классификация систем и ранг матрицы

Рассмотрим систему m уравнений с n неизвестными:

AX=B

Обозначим через $A^{/}$ расширенную матрицу системы размера m×(n+1), т.е. матрицу A, к которой приписан столбец B.

Теорема (Кронекера-Капелли).
1. Если ранг A<ранг $A^{/}$, то система несовместна.
2. Если ранг A=ранг $A^{/}$ и ранг A=n, то система имеет ровно одно решение.
3. Если ранг A=ранг $A^{/}$ и ранг A<n, то система имеет бесконечное множество решений.

2. Векторная алгебра

2.1. Скалярное произведение векторов

a = (a_1;a_2;…;a_n)
b = (b_1;b_2;…;b_n)

a·b = ($a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$)

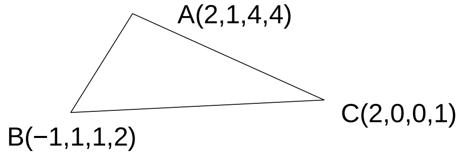
Скалярное произведение

Длина вектора: $\boxed{|a| = \sqrt{a\cdot a} = \sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2+\ldots+(a_n)^2}}$

Угол между векторами: $\boxed{\cos\varphi = \dfrac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}}$

1. a·b=0 ↔ векторы перпендикулярны
2. a·b>0 ↔ угол острый
3. a·b<0 ↔ угол тупой

Задача. Верно ли, что треугольник ABC тупоугольный?



Решение.

$$1)\quad \cos\hat{A} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|},\quad \begin{matrix}\overline{AB} = (-3,0,-3,-2)\\ \overline{AC} = (0,-1,-4,-3)\end{matrix}$$

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC} = 0+0+12+6>0 \Rightarrow \text{угол острый}$$

2) ...

3) ...

Задача. Дано: |**a**|=3, |**b**|=5, угол между векторами **a** и **b** равен 30^0. Найти длину вектора **m=2a−3b**

Решение. $|\mathrm{m}| = \sqrt{m \cdot m}$

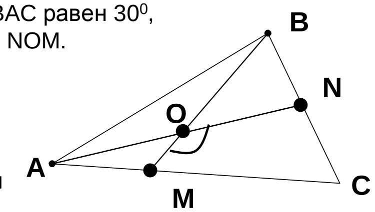
$$m \cdot m = (2a-3b)\cdot(2a-3b) = \ldots$$

$$m \cdot m = \underbrace{4a\cdot a}_{=4\cdot 3\cdot 3} - \underbrace{12a\cdot b}_{=12\cdot 3\cdot 5\cdot\cos(30^0)} + \underbrace{9b\cdot b}_{=9\cdot 5\cdot 5}$$

Ответ. $|\mathrm{m}| = \sqrt{m \cdot m} = \sqrt{\ldots}$

Задача. Дано: |AB|=2, |AC|=3, угол BAC равен 30^0, |AM|=|AC|/3, |BN|=|BC|/2. Найти угол NOM.

Решение. Нужно найти угол между векторами AN и BM.
Обозначим векторы AB=a, AC=b и выразим через них векторы m=BM и n=AN.



$$m = \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -a + \frac{\overrightarrow{AC}}{3} = -a + \frac{b}{3}$$

$$n = \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = a + \frac{\overrightarrow{BC}}{2} = a + \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$$

$$\cos\varphi = \frac{m \cdot n}{|m|\cdot|n|}; \quad m \cdot n = \left(-a + \frac{b}{3}\right)\cdot\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) = \ldots$$

$$|m|^2 = \left(-a + \frac{b}{3}\right)\cdot\left(-a + \frac{b}{3}\right) = \ldots, \quad |n|^2 = (\ldots)\cdot(\ldots) = \ldots$$

2.2. Векторное произведение <u>трёхмерных</u> векторов

a = (a_1;a_2;a_3)
b = (b_1;b_2;b_3)

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Векторное произведение

Пример. a=(1,2,5), b=(−1,3,2), a×b=?

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -11i - 7j + 5k = (-11,-7,5)$$

Ответ. a×b=(−11, −7,7)

Свойства векторного произведения

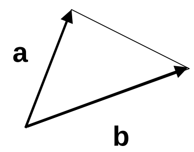
1) Вектор **a×b** перпендикулярен векторам **a** и **b**

2) Длина вектора a×b равна площади параллелограмма, построенного на a и b:

|a×b| = **|a|** · **|b|** · sinφ

Следствие: площадь треугольника:

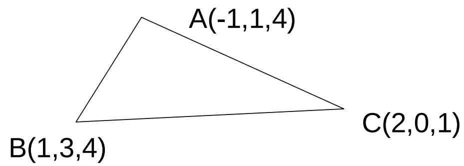
$$S_\Delta = \frac{1}{2}|a \times b|$$



3) **a×b**= − **b×a**

Следствие: **a×a**=**0**

Задача. Найти площадь треугольника ABC



Решение. 1) $\overline{AB} = (2{,}2{,}0),\ \overline{AC} = (3,-1,-3)$

$$2)\quad \overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = (-6{,}6{,}-8)$$

$$3)\quad S = \frac{\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|}{2} = \frac{\sqrt{36+36+64}}{2} = \sqrt{34}$$

Задача. Дано: |**a**|=3, |**b**|=6, угол между векторами **a** и **b** равен 30^0. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах **m=2a−3b** и **n=a+b**

Решение.

$$1)\ m\times n = (2a-3b)\times(a+b) = \ldots$$

$$= 2a\times a - 3b\times a + 2a\times b - 3b\times b = 5a\times b$$

$$2)S = |m\times n| = 5|a\times b| = 5|a|\cdot|b|\cdot\sin\varphi$$

$$= 5\cdot 3\cdot 6\cdot\frac{1}{2} = 45$$

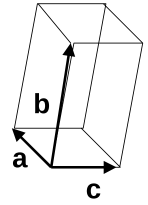
2.3. Смешанное произведение

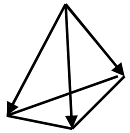
a = (a_1;a_2;a_3)
b = (b_1;b_2;b_3)
c = (c_1;c_2;c_3)

$$\boxed{(a\times b)\cdot c = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Смешанное произведение

$$\boxed{V = |(a\times b)\cdot c|}$$





$$\boxed{V = \frac{1}{6}|(a\times b)\cdot c|}$$

Задача. Лежат ли точки A(1,1,4), B(2,1,5), C(-1,-1,3), D(0,5,6) в одной плоскости?

Решение. Точки лежат в одной плоскости, если объём пирамиды ABCD равен нулю (и наоборот). Поэтому достаточно вычислить смешанное произведение (AB×AC)·AD

3. Аналитическая геометрия

3.1. Прямая на плоскости

3.1.1. Общее уравнение прямой

$$\boxed{Ax+By+C=0,\ \text{где } A\neq 0 \text{ или } B\neq 0}$$

Свойство. Вектор n=(A,B) является нормальным вектором к прямой, т.е. перпендикулярен ей.

Доказательство. Пусть $M(x_1,y_1)$ и $N(x_2,y_2)$ – две различные точки прямой, так что

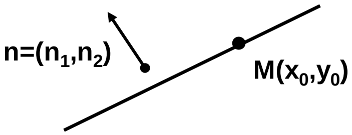
$$Ax_1+By_1+C=0 \text{ и } Ax_2+By_2+C=0$$

Вычитая, получим $A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)=0$,

т.е. $n\cdot MN=0$, $n \perp MN$.

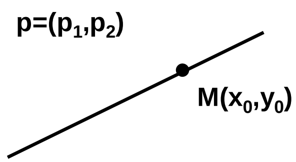
3.1.2. Уравнение прямой по точке и нормали

$$\boxed{n_1(x-x_0)+n_2(y-y_0)=0}$$



3.1.3. Уравнение прямой по точке и направляющему вектору

$$\boxed{\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}}$$



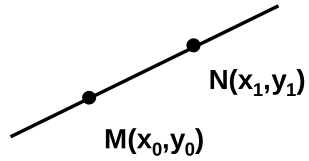
Замечание. Если, например, $p_1=0$, то это надо понимать как $x\equiv x_0$.

3.1.4. Параметрическое уравнение прямой

$$\boxed{\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}=t \Rightarrow \begin{cases} x=x_0+p_1t \\ y=y_0+p_2t \end{cases}}$$

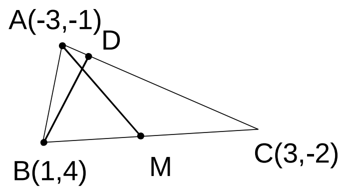
3.1.5. Уравнение прямой по двум точкам

$$\boxed{\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}}$$



Замечание. Если, например, $x_1=x_0$, то это надо понимать как $x \equiv x_0$.

Задача. В треугольнике ABC найти точку пересечения медианы AM и высоты BD



Решение. 1) Точка M имеет координаты: $M\left(\frac{1+3}{2};\frac{4-2}{2}\right)=M(2;1)$

2) Уравнение прямой AM по двум точкам: $\frac{x+3}{2+3}=\frac{y+1}{1+1}$

3) Для прямой BD известна нормаль – вектор AC=(6,–1)⇒уравнение прямой BD: $6(x-1)-(y-4)=0$

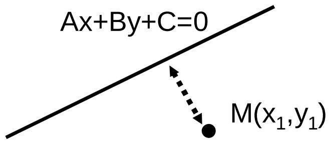
4)Точка пересечения прямых находится решением системы уравнений: $\begin{cases} \frac{x+3}{5}=\frac{y+1}{2} \\ 6(x-1)-(y-4)=0 \end{cases}$

3.1.6. Угол между прямыми

Угол между прямыми не может быть тупым, и он совпадает либо с углом между нормалями, либо дополняет его до 180^0. Поэтому

$$\cos\varphi = \left|\frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| \cdot |n_2|}\right|, \quad \text{где } n_i \text{ - нормаль к i - й прямой}$$

3.1.7. Расстояние от точки до прямой



$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

3.2. Плоскость в пространстве

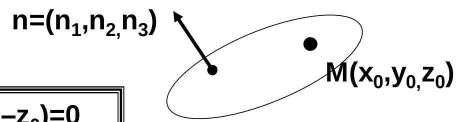
3.2.1. Общее уравнение плоскости

$Ax+By+Cz+D=0$, где $A \neq 0$ или $B \neq 0$ или $C \neq 0$

Свойство. Вектор $n=(A,B,C)$ является **нормальным вектором** к плоскости, т.е. перпендикулярен ей.

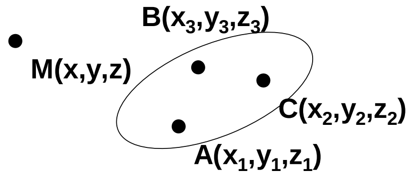
Доказательство. Такое же, как для прямой.

3.2.2. Уравнение плоскости по точке и нормали



$$n_1(x-x_0)+n_2(y-y_0)+n_3(z-z_0)=0$$

3.2.3. Уравнение плоскости по трём точкам



Точка M лежит в плоскости ABC ↔ объём тетраэдра MABC равен нулю ↔ смешанное произведение равно нулю:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

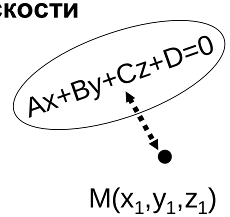
3.2.4. Угол между плоскостями

Угол между плоскостями не может быть тупым, и он совпадает либо с углом между нормалями, либо дополняет его до 180^0. Поэтому

$$\cos\varphi = \left|\frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| \cdot |n_2|}\right|, \quad \text{где } n_i \text{ - нормаль к i - й плоскости}$$

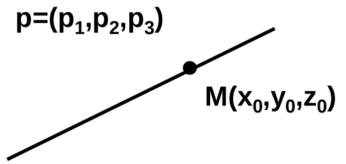
3.2.5. Расстояние от точки до плоскости

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



3.3. Прямая в пространстве

3.3.1. Каноническое уравнение прямой (уравнение по точке и направляющему вектору)



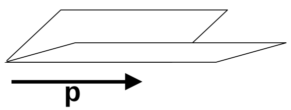
$$\boxed{\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}=\frac{z-z_0}{p_3}}$$

Замечание. Если, например, $p_1=0$, то это надо понимать как $x \equiv x_0$.

Задача. Написать каноническое уравнение прямой, являющейся пересечением плоскостей
$2x + y – z = –5$ и $4x + y – 8z = 2$

Решение. Нам нужно найти какую-нибудь точку $M(x_0,y_0,z_0)$ на прямой и её направляющий вектор **p**.

1) Чтобы подобрать точку, выберем какое-нибудь x, например, $x_0=0$, и найдём y_0 и z_0:…



2) Направляющий вектор к прямой перпендикулярен нормалям $\mathbf{n_1}$ и $\mathbf{n_2}$, поэтому в качестве него можно выбрать векторное произведение $\mathbf{n_1}$ и $\mathbf{n_2}$: …

$$M\,(0,-6,-1)$$

$$p=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{vmatrix}=(-7,12,-2)$$

Ответ.

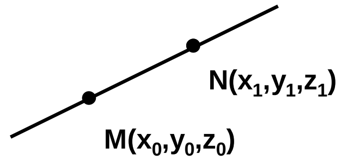
$$\frac{x-0}{-7}=\frac{y+6}{12}=\frac{z+1}{-2}$$

3.3.2. Параметрическое уравнение прямой

$$\boxed{\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}=\frac{z-z_0}{p_3}=t \Rightarrow \begin{cases} x=x_0+p_1t \\ y=y_0+p_2t \\ z=z_0+p_3t \end{cases}}$$

3.3.3. Уравнение прямой по двум точкам

$$\boxed{\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}}$$



Замечание. Если, например, $x_1=x_0$, то это надо понимать как $x \equiv x_0$.

Задача. Найти точку пересечения прямой (AB) и плоскости 2x + 4y + 3z = 6, где A(1,2,5), B(–2,2,1).

Решение. 1)Напишем уравнение прямой по двум точкам.

$$\frac{x-1}{-2-1}=\frac{y-2}{2-2}=\frac{z-5}{1-5}$$

2)Перепишем его в параметрической форме.

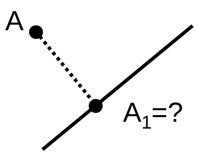
$$\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-5}{-4}=t\Rightarrow\begin{cases}x=1-3t\\ y=2+0t\\ z=5-4t\end{cases}$$

3)Подставим в уравнение плоскости и найдём t:

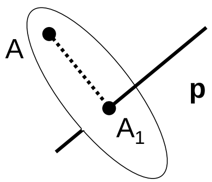
$$2\cdot(1-3t)+4\cdot(2)+3\cdot(5-4t)=6\Rightarrow t=\ldots$$

4) По этому t найдём x,y,z.

Задача. Найти проекцию точки A(3,0,5) на прямую x–2=3y=z+1.



Решение. 1)Проведём плоскость через точку A перпендикулярно прямой. Для этой плоскости нормалью является направляющий вектор **p** к прямой.



$$\frac{x-2}{1}=\frac{y}{1/3}=\frac{z+1}{1}\Rightarrow n=p=(1;1/3;1)$$

$$\Rightarrow(x-3)+\frac{1}{3}y+(z-5)=0$$

Плоскость

2)Точка A_1 находится как точка пересечения этой плоскости и данной прямой:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y}{1/3}=\frac{z+1}{1}=t\Rightarrow\begin{cases}x=2+t\\ y=t/3\\ z=-1+t\end{cases}\Rightarrow(2+t-3)+\frac{1}{9}t+(-1+t-5)=0\Rightarrow\ldots$$

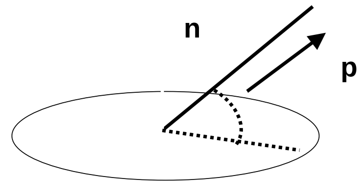
3.3.4. Угол между прямыми

Угол между прямыми не может быть тупым, и он совпадает либо с углом между направляющими векторами, либо дополняет его до 180^0. Поэтому

$$\boxed{\cos\varphi=\left|\frac{p_1\cdot p_2}{|p_1|\cdot|p_2|}\right|,\quad \text{где } p_i \text{ - направляющие векторы}}$$

3.3.5. Угол между прямой и плоскостью

$$\boxed{\sin\varphi=\left|\frac{p\cdot n}{|p|\cdot|n|}\right|}$$



3.4. Кривые второго порядка

3.4.1. Общее уравнение кривой второго порядка

$$\boxed{Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0}$$

где A ≠0 или B≠0 или C≠0

Тип кривой второго порядка можно определить следующим образом.

Теорема. Обозначим

$$\Delta=\begin{vmatrix}A & B/2\\ B/2 & C\end{vmatrix},\quad \delta=\begin{vmatrix}A & B/2 & D/2\\ B/2 & C & E/2\\ D/2 & E/2 & F\end{vmatrix}$$

Тогда возможны только следующие случаи:

Δ>0	δ>0	Пусто	$x^2+y^2+1=0$
	δ<0	Эллипс	$x^2+y^2-1=0$
	δ=0	Точка	$x^2+y^2=0$

Δ<0	δ≠0	Гипербола	$xy-5=0$
	δ=0	Пара пересекающихся прямых	$xy=0$

Δ=0	δ≠0	Парабола	$x^2+y=0$
	δ=0	Пара параллельных прямых или одна прямая или пусто	$x^2-1=0$ $x^2=0$ $x^2+1=0$

Задача. Какую кривую задаёт уравнение

$$x^2-2xy+3y^2-4y=8\ ?$$

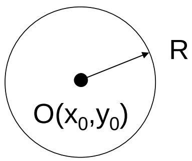
3.4.2. Окружность

Эллипс в случае A=C и B=0:

$$Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0$$

Каноническое уравнение:

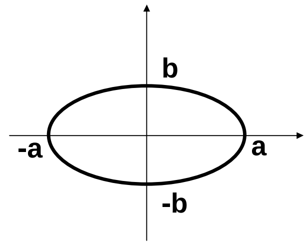
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$



3.4.3. Эллипс

3.4.3.1.Каноническое уравнение.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

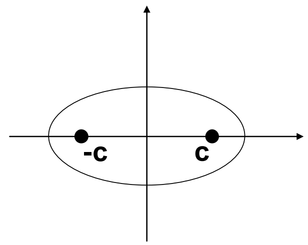


Числа a и b – полуоси эллипса

Рассмотрим случай a>b (как на рисунке). Обозначим

$$c=\sqrt{a^2-b^2}$$

Точки с координатами (c;0) и (–c;0) называются фокусами эллипса

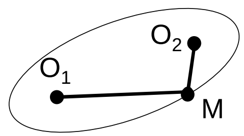


Если b>a, то фокусы расположены на оси OY

3.4.3.2. Основное свойство эллипса.

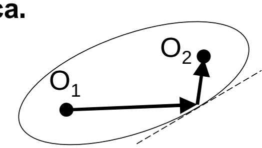
Сумма расстояний от любой точки эллипса M до его фокусов есть величина постоянная:

$|O_1M|+|O_2M|=const$

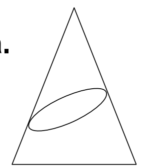


3.4.3.3. Оптическое свойство эллипса.

Луч света, выпущенный из одного фокуса эллипса, после отражения пройдёт через второй фокус



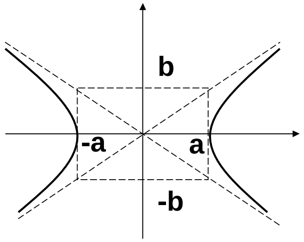
3.4.3.4. Эллипс как сечение конуса.



3.4.4. Гипербола

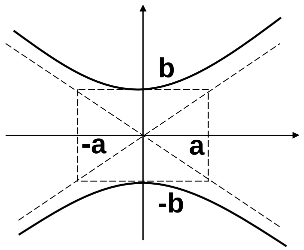
3.4.4.1.Каноническое уравнение.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Замечание Это тоже гипербола:

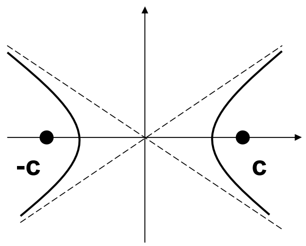
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$



Наклонные прямые на рисунках – асимптоты гиперболы

Точки с координатами (c;0) и (–c;0) (для второй гиперболы, соответственно, (0;c) и (0;–c)), называются фокусами гиперболы

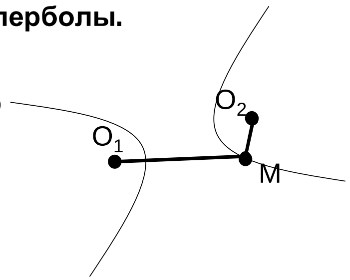
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$



3.4.4.2. Основное свойство гиперболы.

Модуль разности расстояний от любой точки гиперболы M до её фокусов есть величина постоянная:

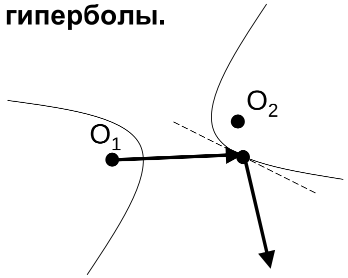
$||O_1M|-|O_2M||=const$

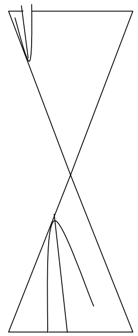


22 22

3.4.4.3. Оптическое свойство гиперболы.

Луч света, выпущенный из одного фокуса гиперболы, после отражения пойдёт, как будто он выпущен из второго фокуса



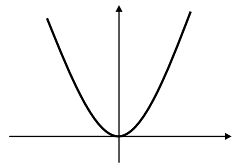


3.4.3.4. Гипербола как сечение конуса.

3.4.5. Парабола

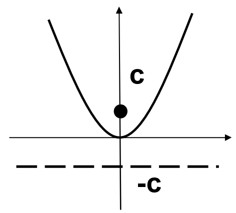
3.4.5.1.Каноническое уравнение.

$$y = \frac{x^2}{4c}$$



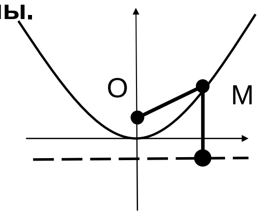
Точка (0;c) – фокус параболы

Прямая y=–c – директриса параболы



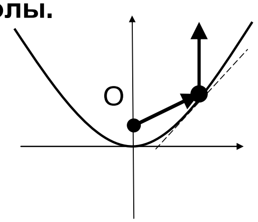
3.4.5.2. Основное свойство параболы.

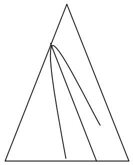
Расстояние от любой точки параболы М до её фокуса равно расстоянию до директрисы



3.4.5.3. Оптическое свойство параболы.

Луч света, выпущенный из фокуса параболы, после отражения пойдёт параллельно её оси





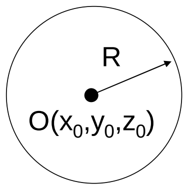
3.4.3.4. Парабола как сечение конуса.

3.5. Некоторые поверхности второго порядка

3.5.1. Сфера

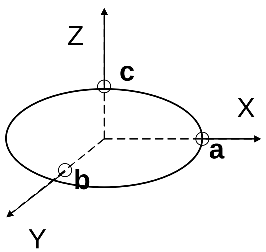
Каноническое уравнение:

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2}$$



3.5.2. Эллипсоид

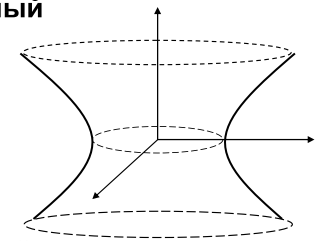
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$$



Числа a, b, c – полуоси эллипсоида

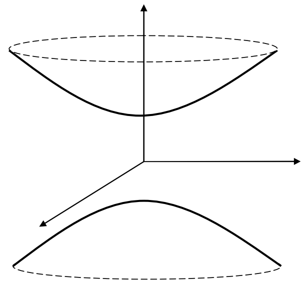
3.5.3. Гиперболоид однополостный

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



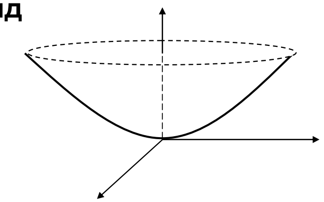
3.5.4. Гиперболоид двуполостный

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



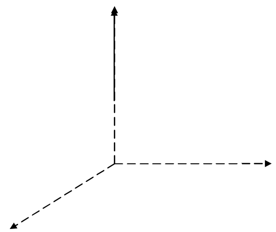
3.5.5. Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=z$$



3.5.6. Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=z$$



4. Пределы и непрерывность

4.1. Числовые множества.

N={1,2,3,…} – множество натуральных чисел

Z={0,±1,±2,…} – множество целых чисел

Z_+={0,1,2,…} – множество неотрицательных целых чисел

Q – множество рациональных чисел

R – множество действительных чисел (“числовая ось”)

C – множество комплексных чисел (будет позже)

[a;b]={x∈R: a≤x≤b} – отрезок

(a;b)={x∈R: a<x<b} – интервал

Окрестностью **точки x на числовой прямой называется любой интервал, содержащий эту точку.**

Проколотой окрестностью **точки x на числовой прямой называется окрестность точки x, из которой удалили саму точку x.**

4.2. Логические символы

A⇒B означает **“из A следует B”**

В этом случае
A – достаточное условие для B,
B – необходимое условие для A

A⇔B означает **“A эквивалентно B”**

A∧B означает **“A и B”** **A∨B** означает **“A или B”**

Ā означает **“не A”**

∀ означает **“любой, для любого”** и т.п.

∃ означает **“существует”**

4.3. Верхняя и нижняя грань множества

Множество A ⊂ R называется *ограниченным сверху*, если ∃M, такое что ∀x∈A: x≤M

Множество A ⊂ R называется *ограниченным снизу*, если …

Множество A ⊂ R называется *ограниченным*, если оно ограничено и сверху, и снизу, т.е. ∃M, такое что ∀x∈A: … (допишите сами)

Число M называется ***точной верхней гранью*** множества **A**, если
1. $\forall x \in A: x \le M$
2. $\forall M_1 < M\ \exists x \in A: x > M_1$

Точная верхняя грань множества A обозначается **sup A**

Число M называется ***точной нижней гранью*** множества ***A,*** *если*
1. …
2. …

Точная нижняя грань множества A обозначается **inf A**

4.4. Числовые последовательности

Если каждому натуральному n числу сопоставлено действительное число a_n, то говорят, что задана ***числовая последовательность***

Примеры.

$$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\} = 1; \frac{1}{4}; \frac{1}{9}; \frac{1}{16}, \ \ldots$$

$$\{b_n\} = \{(-2)^n\} = -2; 4; -8; 16; \ \ldots$$

$$\{c_n\} = 3; 1; 4; 1; 5; 9; 2; 6; \ \ldots$$

Последовательность a_n называется ***возрастающей***, если $\forall n: a_n < a_{n+1}$

Последовательность a_n называется ***убывающей***, если …

Последовательность a_n называется ***невозрастающей***, если $\forall n: a_{n+1} \le a_n$

Последовательность a_n называется ***неубывающей,*** если …

Последовательность a_n называется ***монотонной***, если она неубывающая или невозрастающая

Последовательность a_n называется ***ограниченной***, если множество $\{a_n\}$ ограничено

4.5. Предел последовательности

Число A называется ***пределом последовательности*** a_n , если
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N$, такое что: $|a_n - A| < \varepsilon$ при $n > N$

Обозначение: $$\lim_{n \to +\infty} a_n = A$$

Говорят, что пределом последовательности a_n является **+∞**, если
$\forall M\ \exists N$, такое что: $a_n > M$ при $n > N$

Говорят, что пределом последовательности a_n является $-\infty$, если…

Говорят, что пределом последовательности a_n является ∞, если $|a_n|$ имеет пределом $+\infty$

Если последовательность имеет конечный предел, она называется ***сходящейся***, иначе ***расходящейся***

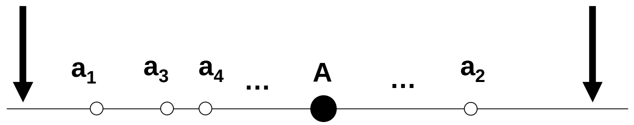
Примеры.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}=0;\quad \lim_{n\to+\infty}3^n=+\infty;$$

$$\lim_{n\to+\infty}\cos n \text{ не существует};\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{n+3}=?$$

4.5. Свойства предела

Теорема. Если последовательность сходится к конечному пределу, то она ограничена.



Теорема. Если последовательность монотонна и ограничена, то она имеет конечный предел.

➢Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, то

$\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$,

$\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$;

➢Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, $b_n\neq0$ и $\lim b_n\neq0$, то

$\lim(a_n / b_n) = \lim a_n / \lim b_n$;

➢Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, $b_n\neq0$ и $\lim b_n=0$, то

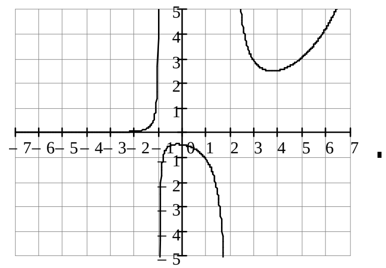
$\lim(a_n / b_n) = \infty$;

➢Если последовательность $\{a_n\}$ сходится, $b_n\neq0$ и $\lim b_n= \infty$, то

$\lim(a_n / b_n) = 0$.

4.6. Предел функции

Пример.



$\lim_{x\to5} f(x)=?$ $\quad\boxed{\lim_{x\to5} f(x)=3}$

$\lim_{x\to4} f(x)=?$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=?$ $\quad\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=?$

$\lim_{x\to2} f(x)=\infty$

Односторонние пределы:

“предел в точке 2 справа”

$\lim_{x\to2+0} f(x)=+\infty$

“предел в точке 2 слева”

$\lim_{x\to2-0} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to-1+0} f(x)=?$ $\quad \lim_{x\to-1-0} f(x)=?$

Определения

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ — ∀ε>0 ∃δ>0, такое что |f(x)–b|< ε при 0<|x–a|<δ

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ — ∀M ∃δ>0, такое что f(x)>M при 0<|x–a|<δ

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=b$ — ∀ε>0 ∃N, такое что |f(x)–b|< ε при x<N

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\infty$ — ∀M ∃N, такое что |f(x)|>M при x>N

$\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b$ — ∀ε>0 ∃δ>0, такое что |f(x)–b|< ε при a–δ<x<a

$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=-\infty$ — ∀M ∃δ>0, такое что f(x)<M при a<x<a+δ

Свойства предела функции аналогичны свойствам ***предела последовательности***.
Например

- Если функции f(x) и g(x) имеют конечный предел при x→a, то

  lim(f(x) ± g(x)) = lim f(x) ± lim g(x),

  lim(f(x) · g(x)) = lim f(x) · lim g(x);

- Если функции f(x) и g(x) имеют конечный предел при x→a и lim g(x)≠0, то

  lim(f(x) / g(x)) = lim f(x) / lim g(x);

и т.п.

4.7. Вычисление пределов функций и последовательностей

$\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x)=?}$

Подставить x=a в функцию f(x)

Число,

$\frac{5}{+0}=+\infty$

$2^{-\infty}=\frac{1}{2^{+\infty}}=+0,$

$\frac{5}{\infty}=0,$

и т. п.

Неопределённость

$\frac{\infty}{\infty},$

$\frac{0}{0}$

$\infty-\infty$

$0\cdot\infty$

$1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{\infty}$

Раскрыть неопределённость

4.8. Неопределённость ∞/∞

В каждой сумме оставить только старшие члены

или

Применить правило Лопиталя

Пример.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4+\sqrt{x^8+4x}}{\left(5x^2+x-2\right)^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4+\sqrt{x^8}}{\left(5x^2\right)^2}=\frac{4}{25}$$

Пример.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^{3x}+\ln\left(x^2\right)}{x+\cos x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(x^2\right)}{x}=0$$

Старше, чем ln

4.9. Неопределённость 0/0

Применить правило Лопиталя

или

Применить формулы эквивалент-ности

Теорема (правило Лопиталя). Если предел является неопределённостью вида 0/0 или ∞/∞, то

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Пример.

$$\lim_{x\to 3} \frac{2^x - x - 5}{\sin(\pi \cdot x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 3} \frac{2^x \ln 2 - 1}{\pi \cos(\pi x)} = \frac{8\ln 2 - 1}{-\pi}$$

4.10. Неопределённость ∞ – ∞

Представить разность в виде дроби 0/0 или ∞/∞

Пример.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+5} - \sqrt{n} = [\infty - \infty] = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{n+5} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+5} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{5}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n}} = \left[\frac{5}{\infty}\right] = 0$$

4.11. Неопределённость 0 · ∞

Представить частное в виде дроби 0/0 или ∞/∞

Пример.

$$\lim_{x\to 0} x \cdot ctg(x) = \left[0 \cdot \frac{1}{0} = 0 \cdot \infty\right] = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \cos x}{\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x \cdot \cos x)'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x \sin x}{\cos x} = 1$$

4.12. Неопределённости 1^∞, 0^0, ∞^∞,…

$$\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim g(x)\cdot\ln(f(x))}$$

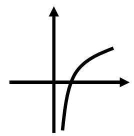
или

Только для 1^∞:

$$\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim g(x)\cdot(f(x)-1)}$$

Пример.

$$\lim_{x\to+0} x^x = \left[0^0\right] = e^Z$$



$$Z = \lim_{x\to+0} x \cdot \ln(x) = [0 \cdot \ln 0 = 0 \cdot (-\infty)] = \lim_{x\to+0} \frac{\ln(x)}{x^{-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$= \lim_{x\to+0} \frac{1/x}{-x^{-2}} = -\lim_{x\to+0} x = 0$$

Ответ.

$$\lim_{x\to+0} x^x = e^0 = 1$$

Пример. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{x} = \left[\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)^{\infty} = ?\right]$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{2x+3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{x}=\left[1^{\infty}\right]=e^{Z}$$

$$Z=\lim_{x\to\infty}x\cdot\left(\frac{2x-1}{2x+3}-1\right)=\lim_{x\to\infty}x\cdot\left(\frac{-4}{2x+3}\right)=\left[\infty\cdot 0\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x}{2x+3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x}{2x}=-2$$

Ответ. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{x}=e^{-2}$

4.13. Формулы эквивалентности

Говорят, что ***функции f(x) и g(x) эквивалентны при x→a***, если

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

Обозначение ***f(x)~g(x) (x→a)***

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1}=1 \Rightarrow \sin x \sim x \ (x\to 0)$

$$\sin x \sim x \quad (x\to 0)$$
$$tgx \sim x \quad (x\to 0)$$
$$\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2} \quad (x\to 0)$$
$$\arcsin x \sim x \quad (x\to 0)$$
$$\ln(1+x)\sim x \quad (x\to 0)$$
$$a^x - 1 \sim x\ln a \quad (x\to 0)$$
$$arctgx \sim x \quad (x\to 0)$$
$$(1+x)^a - 1 \sim ax \quad (x\to 0)$$

Если предел представляет собой произведение или частное двух функций, то при его вычислении можно эти функции заменить на эквивалентные

Пример. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^6}{\ln^5(x-1)\cdot(x-2)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

Чтобы применить формулы эквивалентности, сделаем ***замену переменной*** x = 2 + z, тогда z→0.

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+z}-1\right)^6}{\ln^5(1+z)\cdot z}=\lim_{z\to 0}\frac{(z/2)^6}{z^5\cdot z}=\frac{1}{64}$$

4.14. Непрерывность функции в точке

Говорят, что функция ***f(x) непрерывна в точке x=a***, если

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

Можно дать более развёрнутое определение непрерывности:

Говорят, что функция f(x) непрерывна в точке x=a, если

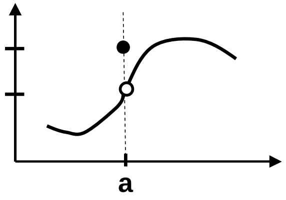
1. Существует конечный $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$
2. Существует конечный $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$
3. Они оба равны f(a): $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=f(a)$

4.15. Классификация точек разрыва

Выделяют следующие нарушения непрерывности:

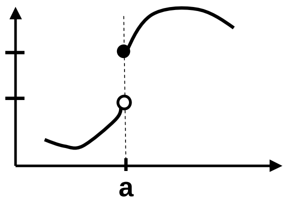
Устранимый разрыв

$$\boxed{\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = \textit{число} \neq f(a)}$$



Разрыв 1 рода

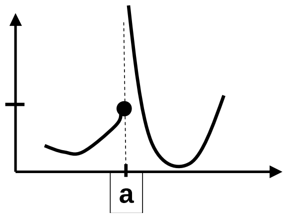
$\lim_{x\to a-0} f(x)$ и $\lim_{x\to a+0} f(x)$ конечны, но не равны друг другу



$$\lim_{x\to a-0} f(x) \neq \lim_{x\to a+0} f(x)$$

Разрыв 2 рода

$\lim_{x\to a-0} f(x)$ или $\lim_{x\to a+0} f(x)$ бесконечен или не существует



$$\lim_{x\to a+0} f(x) = +\infty$$

4.16. Непрерывность элементарных функций

Элементарными функциями называют:
1. Степенную, показательную, логарифмическую, тригонометрические и обратные к ним.
2. Функции, которые можно получить при помощи конечного числа арифметических операций, а также взятия композиции.

Пример. $f(x) = \sin\left(\sqrt[3]{\dfrac{3\ln x}{x-1}}\right)$

Теорема. Элементарная функция непрерывна в любой точке, где она определена.

Вопрос. При каких x непрерывна функция из предыдущего примера?

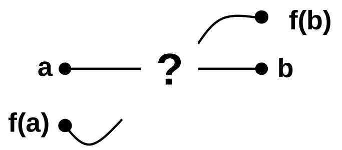
4.17. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Говорят, что **функция f(x) *непрерывна на отрезке* [a;b]**, если
1. Она непрерывна в каждой точке из интервала (a;b);
2. $\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a)$;
3. $\lim_{x\to b-0} f(x) = f(b)$.

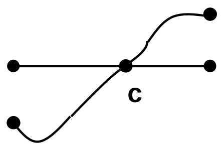
Вопрос. Непрерывна ли функция *tgx* на отрезке [0;1]?

4.17.1. Теорема Больцано-Коши

Теорема. Пусть функция f(x) непрерывна на отрезке [a;b]. Пусть f(a)<0 и f(b)>0, либо f(a)>0 и f(b)<0. Тогда



существует точка с из интервала (a;b), такая, что f(c)=0.



4.17.2. Метод половинного деления

Это – один из способов решать уравнение f(x)=0 с любой степенью точности для непрерывной функции f(x)

Задача. Найти какой-нибудь корень уравнения $3^x - x = 4$ с точностью 0,01.

Решение. Обозначим $f(x)= 3^x – x – 4$.

1) Найдём какой-нибудь отрезок, на котором функция меняет знак.

f(–2)<0, f(–1)<0, f(0)<0, f(1)<0, f(2)>0. Корень – на отрезке [1;2].

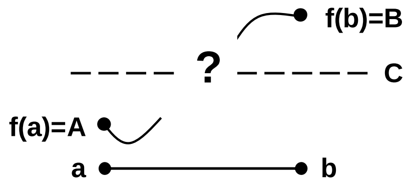
2) x_1=середина отрезка [1;2]=(1+2)/2=1,5. Вычислим $f(x_1)\approx –0,3<0$. Где корень? Корень – на отрезке [1,5;2].

3) x_2=середина отрезка [1,5;2]=(1,5+2)/2=1,75…

и т.д., пока длина отрезка не станет меньше 0,01. Это произойдёт на 7 шаге. $x_7 \approx 1,555$

4.17.3. Теорема Коши

Теорема. Пусть функция f(x) непрерывна на отрезке [a;b]. Пусть f(a)=A и f(b)=B. Тогда каким бы ни было число C, заключённое между A и B,



существует точка с из интервала (a;b), такая, что f(c)=C.

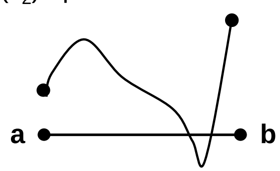
4.17.4. Первая теорема Вейерштрасса

Теорема. Пусть функция f(x) непрерывна на отрезке [a;b]. Тогда f(x) ***ограничена*** на этом отрезке, т.е. существует такое число M, что |f(x)|<M при a ≤ x ≤ b.

4.17.5. Вторая теорема Вейерштрасса

Теорема. Пусть функция f(x) непрерывна на отрезке [a;b]. Тогда f(x) достигает на этом отрезке своих точной верхней и нижней граней,

т.е. существуют такие точки c_1 и c_2 на отрезке [a;b], что $f(c_1) \le f(x) \le f(c_2)$ при a ≤ x ≤ b.



Где здесь точки c_1 и c_2?

5. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

5.0. Символ Ландау

Пусть функции f(x) и g(x) определены в некоторой окрестности точки a. Говорят, что функция f есть ***o-малое*** от g при x→a, если

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

Обозначение: $\boxed{f=o(g)\quad (x\to a)}$

Пример.

$$x^3=o\left(x^2\right)\quad (x\to 0),\quad \text{так как}\ \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2}=0$$

$$x^2=o\left(x^3\right)\quad (x\to \infty),\quad \text{так как}\ \lim_{x\to \infty}\frac{x^2}{x^3}=0$$

5.1. Дифференцируемость функции. Производная

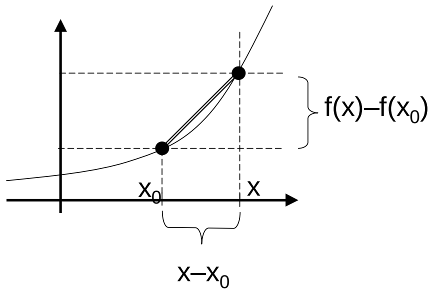
Пусть функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0.

Если существует такое число A, что
$f(x) = f(x_0) + A(x–x_0) + o(x–x_0)$ при $x\to x_0$,
то говорят, что функция f(x) дифференцируема в точке x_0.
Число A называется производной функции в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Замечание. Из определения видно, что

$$\boxed{f'(x_0)=A=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

5.2. Геометрический смысл производной

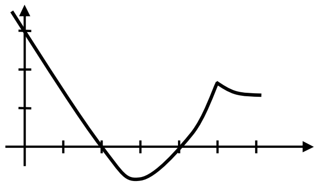


$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=tg\varphi$$

Если x устремить к x_0, то секущая превратится в касательную

$f'(x_0)$ равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции f(x) в точке x_0

Задача. По графику функции найти приближённо производные при x=0, x=1, x=2, x=3, x=4, x=5.

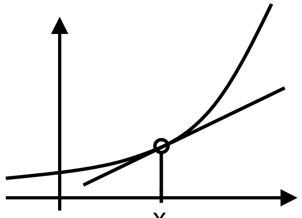


Ответ. $f'(0) \approx -\dfrac{3}{2},\quad f'(1) \approx -\dfrac{3}{2},\ f'(2) \approx -\dfrac{3}{2}$

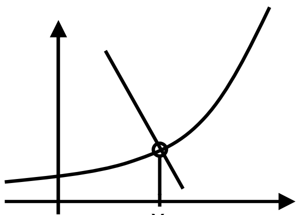
$f'(3) = 0,\quad f'(4) \approx 1,\quad \boxed{f'(5)\ \textit{не существует}}$

На графике излом!

5.3. Уравнение касательной и нормальной прямой к графику функции



$$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$



$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0)$$

5.4. Таблица производных основных элементарных функций

$(const)' = 0;$

$(x^a)' = ax^{a-1};$

$(a^x)' = a^x \ln a;\quad (e^x)' = e^x;$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a};\quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x};$

$(\sin x)' = \cos x;$

$(\cos x)' = -\sin x;$

$(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x};$

$(ctgx)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x};$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};\ (\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}};$

$(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2};\quad (arcctgx)' = \dfrac{-1}{1+x^2};$

5.5. Правила дифференцирования

$(f \pm g)' = f' \pm g'$

$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$

$\left(f(g)\right)' = f'(g)\cdot g'$

Задача. $f(x) = tg\left(3^{\sqrt[5]{x\cdot\ln x}}\right);\quad f' = ?$

Решение. $\mathrm{tg}(\ \ ) \to 3^{(\dots)} \to (\dots)^{1/5} \to (x\ln x)$

Ответ.

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2\left(3^{\sqrt[5]{x\cdot\ln x}}\right)}\cdot 3^{\sqrt[5]{x\cdot\ln x}}\ln 3\cdot\frac{1}{5}(x\cdot\ln x)^{-\frac{4}{5}}\cdot\left(\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right)$$

5.6. “Логарифмическая производная”

$$(\ln f)' = \frac{1}{f} f' \quad \Rightarrow \quad \boxed{f' = f \cdot (\ln f)'}$$

Эта формула очень удобна при дифференцировании “длинных” произведений или частных.

Задача. $f(x) = \dfrac{\sin(3x)\cdot 2^x}{x \cdot arctgx}; \quad f' = ?$

Решение. $\ln f = \ln\sin(3x) + \ln 2^x - \ln x - \ln arctgx =$

$= \ln\sin(3x) + x\ln 2 - \ln x - \ln arctgx$

$$(\ln f)' = \frac{3\cos 3x}{\sin 3x} + \ln 2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{arctgx}\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

Ответ. $f' = f\cdot(\ln f)' = \dfrac{\sin(3x)\cdot 2^x}{x\cdot arctgx}\cdot(\ldots)$

Ещё один случай , когда используется логарифмическая производная: $u(x)^{v(x)}$

Задача. $f(x) = (\cos x)^{\sqrt{x}}; \quad f' = ?$

Решение. $\ln f = \ldots = \sqrt{x}\ln(\cos x)$

$$(\ln f)' = \ldots = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(\cos x) - \sqrt{x}\frac{\sin x}{\cos x}$$

Ответ. $f' = f\cdot(\ln f)' = (\cos x)^{\sqrt{x}}\cdot(\ldots)$

5.7. Производная неявной функции

Нередко функция задаётся некоторым уравнением, из которого её затруднительно выразить в явном виде. Тем не менее производные её всё равно можно вычислить

Пример. $y = y(x); \quad y^3 + \sin(xy) = 4x; \quad y' = ?, y'' = ?$

Решение. Продифференцируем обе части равенства, считая y=y(x):

$$3y^2y' + \cos(xy)(y + xy') = 4 \Rightarrow y' = \ldots = \frac{4 - \cos(xy)\cdot y}{3y^2 + \cos(xy)\cdot x}$$

Чтобы найти вторую производную, продифференцируем ещё раз:

$$6y\cdot y'\cdot y' + 3y^2y'' - \sin(xy)(y+xy')^2 + \cos(xy)(y' + y' + xy'') = 0 \Rightarrow$$

$y'' = \ldots$

Задача. Написать уравнение касательной к кривой $y^3+xy=x^2-1$ в точке M(2,1).

Решение. Уравнение касательной: $\boxed{y = y_0 + y'(x_0)\cdot(x - x_0)}$

Точка M(2,1) $\Rightarrow$ $x_0=2$, $y_0=1$.

Осталось найти y' как производную от неявной функции.

$$3y^2y' + y + xy' = 2x \Rightarrow y' = \ldots = \frac{2x - y}{3y^2 + x} = \ldots = \frac{3}{5}$$

Ответ. $y = 1 + \dfrac{3}{5}\cdot(x-2)$

5.8. Производная функции, заданной параметрически

$$\boxed{\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = f(t) \\ y' = \dfrac{g'(t)}{f'(t)} \end{cases}}$$

Задача. $\begin{cases} x = \sin t \\ y = t^3 \end{cases}, \quad y' = ?,\ y'' = ?,\ y''' = ?$

Решение. $\begin{cases} x = \sin t \\ y' = \dfrac{3t^2}{\cos t} \end{cases}$

y''' – самостоятельно

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y'' = \dfrac{\left(\dfrac{3t^2}{\cos t}\right)'}{\cos t} = \dfrac{\dfrac{6t\cos t + 3t^2 \sin t}{\cos^2 t}}{\cos t} = \dfrac{6t\cos t + 3t^2 \sin t}{\cos^3 t} \end{cases}$$

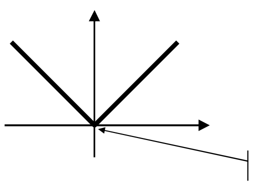
5.9. Дифференцируемость и непрерывность

Теорема. Пусть функция f(x) дифференцируема в точке x_0. Тогда она непрерывна в этой точке.

Доказательство.

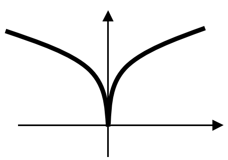
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left(f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0) \right) = f(x_0)$$

Замечание. Обратное неверно. Например, функция |x| всюду непрерывна, но не дифференцируема при x=0:



Излом

Другой пример: $y = \sqrt[3]{x^2}$



5.10. Дифференциал

$\boxed{df = f' \cdot dx}$ Это – удобное обозначение

Пример. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{\ln x}\right); \quad df = ?$

Ответ.

$$df = \frac{1}{\left(\cancel{\dfrac{x}{\ln x}}\right)} \cdot \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \dfrac{1}{x}}{\ln^2 x} \cdot dx = \frac{\ln x - 1}{x \ln x} \cdot dx$$

5.11. Дифференциал и погрешность вычислений

Пусть требуется вычислить значение функции f(x), а число x известно не точно, а с некоторой погрешностью Δx. Как найти погрешность f(x)?

Если погрешность Δx мала, то обычно используется формула $\boxed{\Delta f \approx |df| = |f'| \cdot \Delta x}$

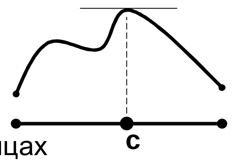
Пример. Имеется шар радиуса примерно 30 см. С какой точностью следует измерить этот радиус, чтобы вычислить объём с точностью 1%?

Решение. x – радиус, $x \approx 30, \quad f(x) = \dfrac{4}{3}\pi \cdot x^3 \approx 113097{,}3$

$$\Delta f = (1\% \text{ от } f) \approx 1130{,}973$$

$$\Delta x \approx \frac{\Delta f}{|f'|} = \frac{1130{,}973}{|4\pi \cdot x^2|} \approx 0{,}1 = 1 \text{ мм}$$

5.12. Теоремы о среднем



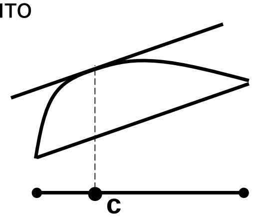
Теорема Ролля. Пусть функция f(x)
1) непрерывна на отрезке [a;b];
2) дифференцируема на интервале (a;b);
3) принимает одинаковые значения на концах отрезка: f(a)=f(b).
Тогда существует точка $c\in(a;b)$, в которой $f'(c)=0$.

Доказательство. Так как функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b], то по теореме Вейерштрасса она принимает свои наибольшее (M) и наименьшее (m) значения в каких-то точках отрезка.

Если M=m, то f(x)=const и $f'=0$ везде.
Если M>m, то либо значение M, либо значение m достигается внутри отрезка, и производная в этой точке равна 0.

Теорема Лагранжа. Пусть функция f(x)
1) непрерывна на отрезке [a;b];
2) дифференцируема на интервале (a;b).
Тогда существует точка $c\in(a;b)$, такая что

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Доказательство. Сводится к теореме Ролля для функции

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$$

Пример. Пользуясь теоремой Лагранжа, доказать неравенство $|\mathrm{arctg}\, x_1-\mathrm{arctg}\, x_2|\le|x_1-x_2|$

Доказательство. По теореме Лагранжа для f(x)=arctg x существует точка c, лежащая между x_1 и x_2, такая, что

$$\boxed{f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

$$arctg(x_1)-arctg(x_2)=arctg'(c)\cdot(x_1-x_2)$$

$$\Downarrow$$

$$arctg(x_1)-arctg(x_2)=\underbrace{\frac{1}{1+c^2}}_{\le 1}\cdot(x_1-x_2)$$

Теорема Коши. Пусть функции f(x) и g(x)
1) непрерывны на отрезке [a;b];
2) дифференцируемы на интервале (a;b);
3) $g'(x)\neq0$ на (a;b).
Тогда существует точка $c\in(a;b)$, такая что

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

5.13. Признаки возрастания и убывания функций

Функция f(x) называется ***неубывающей на отрезке [a;b]***, если для любых точек $x_1<x_2$ этого отрезка выполнено неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$.

Аналогично определяются ***невозрастающие*** функции.

Если изменить знак неравенства между $f(x_1)$ и $f(x_2)$ на строгий, получатся определения ***возрастающей*** и ***убывающей*** функций.

Теорема. Пусть функция f(x)
1) непрерывна на отрезке [a;b];
2) дифференцируема на интервале (a;b);
Тогда f(x) является неубывающей в том и только в том случае, если $f'(x) \ge 0$ на (a;b).

Теорема. В тех же предположениях f(x) является невозрастающей в том и только в том случае, если $f'(x) \le 0$ на (a;b).

Теорема. 1) Если $f'(x) > 0$ на (a;b), то функция f(x) возрастает на [a;b].
2) Если $f'(x) < 0$ на (a;b), то функция f(x) убывает на [a;b].

Теорема. Пусть функция f/(x) непрерывна в окрестности точки c. Тогда
1) Если $f'(c) > 0$ и $f'(x)$ непрерывна, то функция f(x) возрастает в некоторой окрестности точки c.
2) Если $f'(c) < 0$ $f'(x)$ непрерывна, то функция f(x) убывает в некоторой окрестности точки c.

5.14. Экстремум функции

Точка x_0 называется точкой локального максимума функции f(x), если в некоторой её окрестности для всех x выполнено неравенство $f(x) \le f(x_0)$.

Точка x_0 называется точкой строгого локального максимума функции f(x), если в некоторой её окрестности для всех $x \neq x_0$ выполнено неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Аналогично определяются локальные минимумы

5.15. Необходимое условие экстремума

Теорема. Если функция f(x) имеет локальный максимум или минимум в точке c, то её производная в точке c либо равна 0, либо не существует.

Доказательство. Если функция f(x) не имеет производной в точке c, то доказывать нечего. Пусть производная существует и не равна 0, например $f'(c)=A>0$. По определению производной

$$f(x) - f(c) = A\cdot(x-c) + o(x-c) \quad \text{при } x \to c,$$

Если *x близко к c*, то левая часть этого равенства имеет один и тот же знак при x>c и x<c (так как в точке c *максимум* или *минимум*), а правая часть меняет знак при переходе через c. Получилось противоречие.

5.16. Достаточные условия экстремума

Теорема (первое достаточное условие). Пусть функция f(x) непрерывна в точке c. Тогда

1) если в некоторой окрестности точки c

$f^{/}(x)<0$ при $x<c$ и $f^{/}(x)>0$ при $x>c$,

то в точке c строгий минимум;

2) если в некоторой окрестности точки c

$f^{/}(x)>0$ при $x<c$ и $f^{/}(x)<0$ при $x>c$,

то в точке c строгий максимум.

Теорема (второе достаточное условие). Пусть функция f(x) имеет вторую производную в точке c. Пусть $f^{/}(x)=0$. Тогда

1) если $f^{//}(c)>0$, то в точке c строгий минимум;

2) если $f^{//}(c)<0$, то в точке c строгий максимум

5.17. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

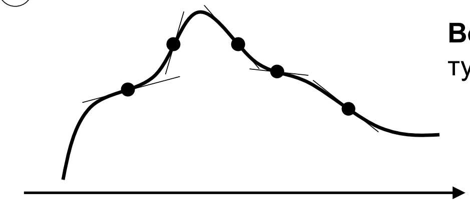
Чтобы найти наибольшее значение функции на отрезке, нужно выбрать наибольшее значение среди 1) всех локальных максимумов и 2) значений на концах отрезка.

Аналогично с наименьшим значением

5.18. Выпуклость и точки перегиба

Если функция f(x) дифференцируема в точке c и в некоторой окрестности точки c точки графика f(x) лежат выше точек касательной в c, то говорят, что в точке c функция **выпукла вниз**.

Аналогично определяется **выпуклость вверх**.



Вопрос. Сколько тут точек перегиба?

Теорема. Пусть функция f(x) имеет вторую производную на интервале (a;b). Тогда

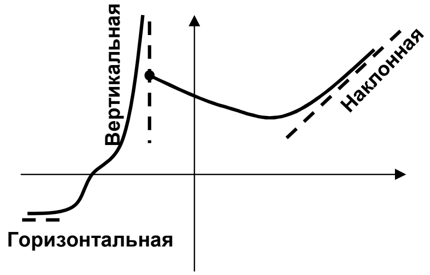
1) если на этом интервале $f^{//}(x)<0$, то на нём функция выпукла вверх;

2) если на этом интервале $f^{//}(x)>0$, то на нём функция выпукла вниз.

Теорема (достаточное условие перегиба). Пусть функция f(x) имеет вторую производную в некоторой окрестности точки c. Тогда если вторая производная меняет знак при переходе через точку c, то в точке c – перегиб.

5.19. Асимптоты графика функции

Асимптотой бесконечной ветви графика называется такая прямая, расстояние до которой от удаляющейся точки, движущейся по этой ветви, стремится к 0.



Вертикальная асимптота: x=a, если хотя бы один из двух пределов $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ бесконечен

Горизонтальная асимптота: y=b, если хотя бы один из двух пределов $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ равен b

Наклонная асимптота: y=kx+b при x→–∞, если конечны пределы

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x},\ b = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - kx\right)$$

Наклонная асимптота: y=kx+b при x→+∞, если конечны пределы

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x},\ b = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - kx\right)$$

5.20. Схема построения графика функции

1. Область определения функции
2. Точки пересечения с осями координат
3. Пределы на краях области определения и в особых точках
4. Первая производная. Интервалы возрастания и убывания. Экстремумы.
5. Вторая производная. Промежутки выпуклости. Точки перегиба.
6. Асимптоты.

Пример. Построить график функции $y = \dfrac{x^3+1}{x}$

Решение.

1) Область определения x≠0

2) Точки пересечения с осями. OX: y=0,x= –1

OY: x=0 нет

3) Пределы

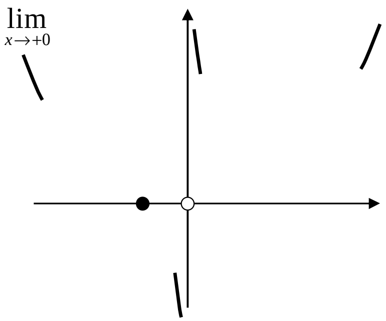
$\lim\limits_{x\to-\infty}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}$, $\lim\limits_{x\to-0}$, $\lim\limits_{x\to+0}$

$$\lim_{x\to-\infty} \ldots = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ldots = +\infty$$

$$\lim_{x\to-0} \ldots = -\infty$$

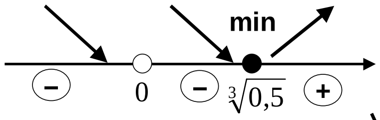
$$\lim_{x\to+0} \ldots = +\infty$$

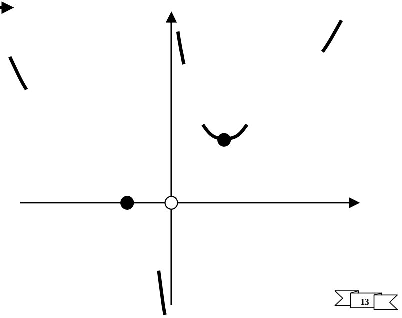


4) Производная $y' = \dfrac{2x^3 - 1}{x^2}$

Нули производной: $y' = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{0{,}5}$

Знаки производной:





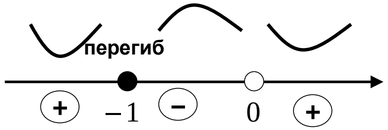
$x_{\min} = \sqrt[3]{0{,}5} \approx 0{,}79 \Rightarrow$

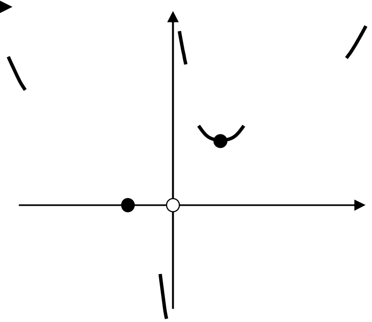
$y_{\min} = \dfrac{x^3 + 1}{x} \approx 1{,}89$

5) Вторая производная $y'' = \dfrac{2(x^3 + 1)}{x^3}$

Нули второй производной: $y'' = 0 \Rightarrow x = -1$

Знаки второй производной:





$x_{пер} = -1 \Rightarrow$

$y_{пер} = 0$

6) Асимптоты

Вертикальные: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+0} \ldots = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-0} \ldots = -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow$ **x=0**

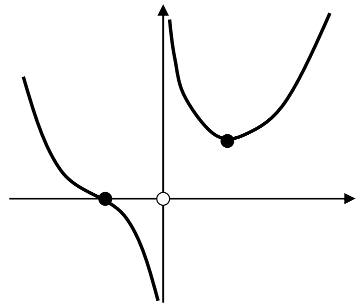
Горизонтальные: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} \ldots = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ldots = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow$ **нет**

Наклонные (y=kx+b):

$k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3 + 1}{x^2} = \pm\infty$

$\Rightarrow$ **нет**



Пример. Построить график функции $y = \sqrt[3]{x \cdot (x-1)^2}$

Решение.

1) Область определения: x любое

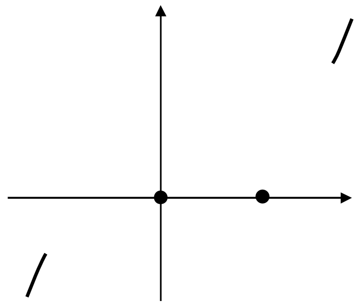
2) Точки пересечения с осями. OX: y=0, x=0 или 1
OY: x=0 y=0

3) Пределы

$\lim\limits_{x\to-\infty}, \lim\limits_{x\to+\infty}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \ldots = +\infty$

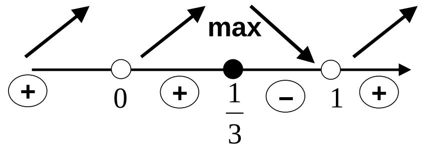
$\lim\limits_{x\to+\infty} \ldots = -\infty$

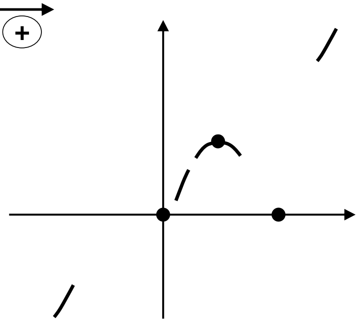


4) Производная $y' = \left(x^{1/3}(x-1)^{2/3}\right)' = \ldots = \dfrac{x-1/3}{\left(x^2(x-1)\right)^{1/3}}$

Нули производной: $y' = 0 \Rightarrow x = 1/3$

Знаки производной:





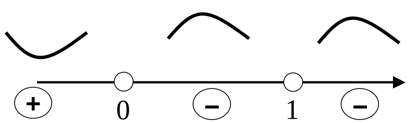
$x_{\max} = 1/3 \Rightarrow$

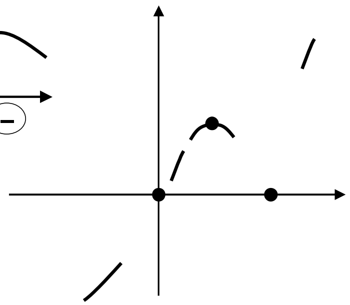
$y_{\max} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{3}-1\right)^2} \approx 0{,}529$

5) Вторая производная $y'' = \left(\dfrac{x-1/3}{\left(x^2(x-1)\right)^{1/3}}\right)' = \ldots = -\dfrac{2}{9\left(x^5(x-1)^4\right)^{1/3}}$

Нули второй производной: нет

Знаки второй производной:





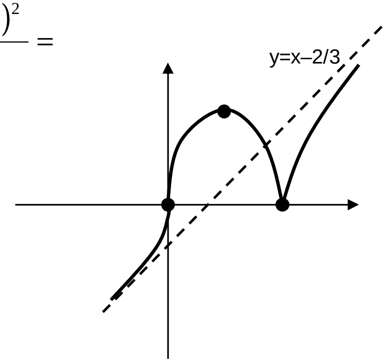
6) Асимптоты Вертикальные: нет

Горизонтальные: $\lim\limits_{x\to-\infty} \ldots = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ldots = -\infty$ $\Rightarrow$ **нет**

Наклонные (y=kx+b):

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{x(x-1)^2}}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3}}{x^2} = 1$$



$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{x(x-1)^2} - x =$$

$$= [\infty - \infty] = \ldots = -2/3$$

5.21. Формула Тейлора

Задача. Найти многочлен третьей степени, у которого значение в точке x_0= 1, а также первая, вторая и третья производные совпадают с соответствующими значениями функции y=lnx и её производных.

Решение. Будем искать многочлен в виде

$$P(x) = A + B(x-1) + C(x-1)^2 + D(x-1)^3$$

Тогда $\ln 1 = P(1) = A \Rightarrow A = \ln 1 = 0$

$\ln'(1) = P'(1) = B \Rightarrow B = \ln'(1) = 1$

$\ln''(1) = P''(1) = 2C \Rightarrow C = \ln''(1)/2 = -1/2$

$\ln'''(1) = P'''(1) = 6D \Rightarrow D = \ln'''(1)/6 = 1/3$

Ответ. $P(x) = \ln 1 + \ln'(1)(x-1) + \dfrac{\ln''(1)}{2}(x-1)^2 + \dfrac{\ln'''(1)}{6}(x-1)^3$

$$= (x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{18}(x-1)^3$$

Обобщение предыдущей задачи приводит к **формуле Тейлора**

Это – одна из <u>основных</u> формул математического анализа

Теорема. Пусть функция f(x) в некоторой окрестности точки x_0 имеет производные до порядка n+1 включительно. Тогда

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1},$$

где

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},\ \xi \text{ лежит между } x \text{ и } x_0$$

Замечание. Пусть $P_m(x)$ – многочлен степени m. Тогда все производные порядка больше m, очевидно, равны нулю. Поэтому остаточный член $R_{m+1}=0$:

$$P_m(x) = P_m(x_0) + \frac{P_m^{/}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{P_m^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m$$

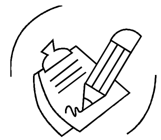
Замечание. Иногда остаточный член R_{n+1} записывают просто в виде

$$R_{n+1} = o\left((x - x_0)^n\right), \quad x \to x_0$$

Пример. Написать формулу Тейлора третьего порядка для функции $f(x)=x^5$ в точке x= –1

Решение. Здесь x_0= –1. Вычислим в этой точке производные до 3 порядка включительно.

$$f(x) = x^5, \quad f(-1) = -1$$
$$f'(x) = 5x^4, \quad f'(-1) = 5$$
$$f''(x) = 20x^3, \quad f''(-1) = -20$$
$$f'''(x) = 60x^2, \quad f'''(-1) = 60$$



Ответ.

$$x^5 = -1 + \frac{5}{1}(x+1) - \frac{20}{2}(x+1)^2 + \frac{60}{6}(x+1)^3 + o\left((x+1)^3\right), \quad x \to -1$$

5.22. Некоторые стандартные разложения по формуле Тейлора в точке $x_0=0$

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right), \quad x\to 0$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right), \quad x\to 0$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right), \quad x\to 0$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right), \quad x\to 0$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots+o\left(x^n\right), \quad x\to 0$$

5.23. Применение формулы Тейлора к приближённым вычислениям

Задача. Оценить погрешность приближённой формулы

$$\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2, \quad |x|<0{,}3$$

Решение. Правая часть является формулой Тейлора порядка 2 для левой в точке $x_0=0$. Погрешность равенства равна $|R_3|$. Найдём оценку для R_3.

$$f(x)=\sqrt[3]{1+x}, \quad R_3=\frac{f'''(\xi)}{3!}\cdot x^3=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{-5}{3}\right)(1+\xi)^{-\frac{8}{3}}\cdot x^3$$

$$|R_3|=\frac{10|x|^3}{6\cdot 27|1+\xi|^{8/3}}<\frac{10\cdot 0{,}3^3}{6\cdot 27|1-0{,}3|^{8/3}}\approx 0{,}0005$$

14

6. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

6.0. Некоторые определения и обозначения

R^n – n-мерное пространство

$x=(x_1;x_2;\ldots;x_n)$ – точка n-мерного пространства с координатами $(x_1;x_2;\ldots;x_n)$

Расстояние между точками $A(a_1;a_2;\ldots;a_n)$ и $B(b_1;b_2;\ldots;b_n)$:

$$\rho(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(a_1-b_1)^2+\ldots+(a_n-b_n)^2}$$

Шаровая окрестность точки A: $O_\varepsilon(A)=\{M:\rho(A,M)<\varepsilon\}$

Окрестность точки A: любое множество, содержащее какую-нибудь шаровую окрестность точки A.

Функция нескольких переменных обозначается $f(x)$, $x \in R^n$, или $f(x_1,\dots,x_n)$.

Пример. $$g(x,y,z)=\frac{xy}{y+z^2}$$ Функция трёх переменных

6.1. Предел функции нескольких переменных

$$\lim_{x\to a} f(x)=b,\ \text{где}\ x=(x_1,\dots,x_n),\ a=(a_1,\dots,a_n)$$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$, такое что $|f(x)-b|<\varepsilon$ при $0<\rho(x,a)<\delta$

6.2. Непрерывность функции нескольких переменных

Говорят, что функция $f(x_1,\dots,x_n)$ непрерывна в точке $a=(a_1,\dots,a_n)$, если
$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

6.3. Частные производные

Частной производной функции $f(x_1,\dots,x_n)$ по переменной x_j в точке $a=(a_1,\dots,a_n)$ называется производная функции одной переменной $g(x)=f(a_1,\dots,x_j,\dots,a_n)$ в точке a_j.

Обозначение $$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_j}\ \text{или}\ f'_{x_j}}$$

Задача. Найти все частные производные первого порядка функции $h(u,v,w)=(u+v^2)^w$

Ответ. $h'_u=w(u+v^2)^{w-1}$, $h'_v=w(u+v^2)^{w-1}\cdot 2v$,

$h'_w=(u+v^2)^w\cdot\ln(u+v^2)$

Задача. Найти все частные производные второго порядка функции $f(x,y)=\sin(xy^2)$

Решение. Сначала найдём частные производные первого порядка, а затем второго

$$f'_x=\cos(xy^2)\cdot y^2,\ f'_y=\cos(xy^2)\cdot 2xy$$

$$f''_{xx}=\left(\cos(xy^2)\cdot y^2\right)'_x=-\sin(xy^2)\cdot y^4$$

$$f''_{xy}=\left(\cos(xy^2)\cdot y^2\right)'_y=\dots,\ f''_{yx}=\dots,\ f''_{yy}=\dots$$

Теорема о равенстве смешанных производных. Если в некоторой окрестности точки (x_0,y_0) существуют производные f''_{xy}, f''_{yx} и эти производные непрерывны в точке (x_0,y_0), то
$$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$$

Задача. Сколько различных частных производных второго порядка может быть у функции от четырёх переменных $f(x,y,z,t)$? А третьего порядка?

Задача. Найти все частные производные третьего порядка функции $g(a,b)=a^3+ab^2$

6.4. Дифференциал

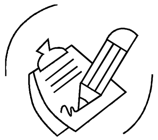
$$\boxed{df = f'_{x_1} \cdot dx_1 + f'_{x_2} \cdot dx_2 + \ldots + f'_{x_n} \cdot dx_n}$$

Это – удобное обозначение

Пример. $f(x,y) = \dfrac{x}{x+2y}; \quad df = ?$

Решение. $f'_x = \dfrac{1\cdot(x+2y) - x\cdot 1}{(x+2y)^2} = \dfrac{2y}{(x+2y)^2}$

$$f'_y = \frac{0\cdot(x+2y) - x\cdot 2}{(x+2y)^2} = -\frac{2x}{(x+2y)^2}$$



Ответ. $df = \dfrac{2y}{(x+2y)^2}dx - \dfrac{2x}{(x+2y)^2}dy$

6.5. Погрешность вычислений

Если требуется вычислить значение функции $f(x_1,\ldots,x_n)$, а числа x_i известны не точно, а с некоторыми погрешностями Δx_i, то как найти погрешность f ?

Если погрешности Δx_i малы, то обычно используется формула

$$\boxed{\Delta f \approx \left|f'_{x_1}\right|\Delta x_1 + \left|f'_{x_2}\right|\Delta x_2 + \ldots + \left|f'_{x_n}\right|\Delta x_n}$$

Пример. Имеется пружинный маятник массой m=2 ± 0,1 кг, жёсткость пружины k=100 ± 2 кг/с^2. Найти период колебаний этого маятника.

Решение. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \approx 1{,}4\ сек, \quad \Delta T \approx \left|T'_m\right|\Delta m + \left|T'_k\right|\Delta k =$

$$= \left|\frac{\pi}{\sqrt{mk}}\right|\Delta m + \left|-\frac{\pi\sqrt{m}}{\sqrt{k^3}}\right|\Delta k \approx 0{,}14\cdot 0{,}1 + 0{,}007\cdot 2 \approx 0{,}02\ сек$$

Ответ. $T = 1{,}4 \pm 0{,}02\ сек$

6.6. Градиент

Градиент – это вектор $\boxed{grad(f) = (f'_{x_1}, f'_{x_2}, \ldots, f'_{x_n})}$

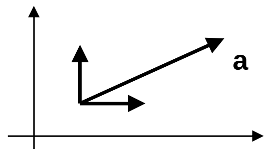
Пример. f(x,y,z)=x^2–yz^3. Найти grad(f) в точке M(1,2,3).

Решение.

$$f'_x = 2x = 2$$
$$f'_y = -z^3 = -27$$
$$f'_z = -3yz^2 = -54$$

Ответ. $grad(f) = (2;-27;-54)$

6.7. Производная по направлению.



Частная производная – это производная в направлении одной из осей координат. А как найти производную в направлении произвольного вектора?

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \overline{a}} = \frac{grad(f)\cdot\overline{a}}{|\overline{a}|}}$$

Производная по направлению вектора a

Пример. Возрастает или убывает функция f(x,y)=xy^2–y^3 в точке M(1,–2) в направлении на точку N(2,–4)?

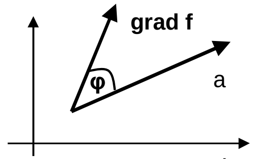
Решение. $a = MN = (\ldots), \quad grad(f) = (\ldots), \quad \dfrac{\partial f}{\partial a} = \ldots$

Ответ…

6.8. Зависимость производной от направления.

Формулу для производной по направлению можно преобразовать:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{a}} = \frac{grad(f)\cdot\bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{|grad(f)|\cdot|\bar{a}|\cdot\cos\varphi}{|\bar{a}|} \Rightarrow$$



Теорема.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \bar{a}} = |grad(f)|\cdot\cos\varphi}$$

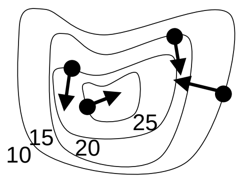
1. Производная максимальна в направлении градиента (φ=0).
2. Производная положительна в направлении, образующем острый угол с градиентом.
3. Производная равна 0 в направлении, перпендикулярном градиенту.
4. Производная отрицательна в направлении, образующем тупой угол с градиентом.
5. Производная минимальна в направлении, обратном градиенту.

Из пунктов 1 и 3 теоремы вытекает

Следствие.

1. Градиент функции в точке показывает направление наискорейшего возрастания функции в этой точке.
2. Градиент функции в любой точке перпендикулярен линии уровня, проходящей через эту точку.

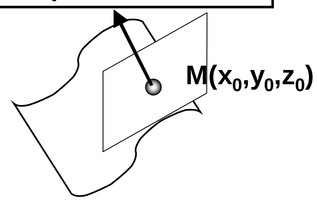
Задача. Даны линии уровня некоторой функции от двух переменных. Как направлен градиент в отмеченных точках?



6.9. Касательная плоскость к поверхности.

Пусть поверхность в пространстве задана уравнением

$$\boxed{f(x,y,z)=0}$$



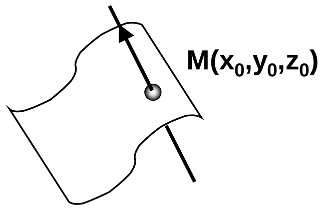
Тогда, как в предыдущем следствии, градиент функции *f(x,y,z)* в точке M будет перпендикулярен поверхности, т.е. будет являться нормалью к касательной плоскости. Поэтому уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$\boxed{\begin{gathered} n_1(x-x_0)+n_2(y-y_0)+n_3(z-z_0)=0, \\ \text{где } (n_1,n_2,n_3)=grad(f) \end{gathered}}$$

6.10. Нормальная прямая к поверхности.

Пусть поверхность в пространстве задана уравнением

$$\boxed{f(x,y,z)=0}$$



Так как градиент функции *f(x,y,z)* в точке M перпендикулярен поверхности, то уравнение нормальной прямой имеет вид:

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{(x-x_0)}{n_1}=\frac{(y-y_0)}{n_2}=\frac{(z-z_0)}{n_3}, \\ \text{где } (n_1,n_2,n_3)=grad(f) \end{gathered}}$$

Задача. Написать уравнения касательной плоскости и нормальной прямой к параболоиду $z=3x^2+2y^2$ в точке A(1,2,11).

Решение. Сначала запишем уравнение в виде f(x,y,z)=0…

$$z-3x^2-2y^2=0$$

Затем найдём grad f в точке A:…

$$f=z-3x^2-2y^2,$$
$$f'_x=-6x=-6,\quad f'_y=...,\quad f'_z=...$$

Теперь напишем уравнение касательной плоскости и нормальной прямой:

$$-6(x-1)-8(y-2)+(z-11)=0,$$
$$\frac{x-1}{-6}=\frac{y-2}{-8}=\frac{z-11}{1}$$

6.11. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума

Точка x_0 называется точкой локального максимума функции $f(x)=f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$, если в некоторой окрестности точки x_0 для всех x выполнено неравенство $f(x) \le f(x_0)$.

Точка x_0 называется точкой строгого локального максимума функции $f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, если в некоторой окрестности точки x_0 для всех $x \neq x_0$ выполнено неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Аналогично определяются локальные минимумы

Ясно, что если функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ имеет экстремум (например, максимум) в точке x_0, то она имеет его и по каждой переменной в отдельности. Поэтому необходимым условием экстремума является его наличие по каждой переменной в отдельности.

Теорема. Если в точке $x_0=(x_1^0,\ldots,x_n^0)$ функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ имеет экстремум, то в этой точке каждая из частных производных функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ либо равна 0, либо не существует.

Задача. Найти экстремумы функции $f(x,y)=x^2-y^4$.

Решение. Необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} f'_x=0 \\ f'_y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ 4y^3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Есть ли в точке M(0;0) экстремум?

6.12. Достаточное условие экстремума функции двух переменных.

В этом пункте мы будем рассматривать функцию двух переменных f(x,y).

Пусть в точке $M(x_0,y_0)$ выполнено условие $\begin{cases} f'_x=0 \\ f'_y=0 \end{cases}$

Обозначим $\Delta=\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}$

Теорема (достаточное условие экстремума).
При указанных условиях:

- в точке M минимум, если в этой точке $\Delta>0$ и $f''_{xx}>0$;
- в точке M максимум, если в этой точке $\Delta>0$ и $f''_{xx}<0$;
- в точке M нет экстремума, если в этой точке $\Delta<0$.

Задача. Найти экстремумы функции
f(u,v) = 3u² – u³ + 3v² + 4v

Решение. 1) Необходимое условие экстремума: $\begin{cases} f'_u = 0 \\ f'_v = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} 6u - 3u^2 = 0 \\ 6v + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} 3u \cdot (2-u) = 0 \\ v = -2/3 \end{cases} \Rightarrow$$

Две точки-кандидата: A(0, –2/3) и B(2; –2/3)

2) Достаточное условие экстремума:

$$\Delta = \begin{vmatrix} f''_{uu} & f''_{uv} \\ f''_{uv} & f''_{vv} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6-6u & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$$

В точке A(0; –2/3): Δ=36 → есть экстремум,
f''_{uu}=6>0 → минимум

В точке B(2, –2/3): Δ=…→…, f''_{uu}… → …

Задача. Найти экстремумы функции
f(x,y) = 2x³ –xy² + 5x² + y²

Решение. 1) Необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \ldots$$

2) Достаточное условие экстремума:

$$\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \ldots$$

Ответ. В точке (0;0) минимум. Больше экстремумов нет

6.13. Условный экстремум.

Часто встречается задача найти экстремум функции, когда на переменные наложены некоторые ограничения. Например:

Найти максимальное значение произведения xy, если x+2y=10

В общем случае задача выглядит так:

Целевая функция

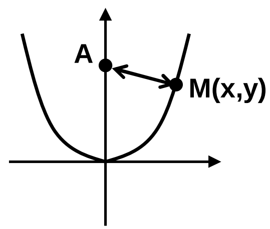
$$\begin{cases} f(x) \to \max \quad (\text{или } \min) \\ g_1(x) = 0 \\ \ldots \\ g_m(x) = 0 \end{cases}$$

Ограничения

Теорема (необходимое условие условного экстремума). Пусть в некоторой окрестности точки x_0 целевая функция f(x) и ограничения $g_i(x)$ дифференцируемы. Тогда для того, чтобы в точке x_0 был *условный экстремум, необходимо,* чтобы в этой точке grad(f) разлагался по grad(g_1), …, grad(g_n).

Задача. Найти расстояние от точки A(0;2) до параболы y=x².

Решение.



$$\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 \to \min \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$f = x^2 + (y-2)^2, \; grad(f) = (2x;\, 2y-4)$$

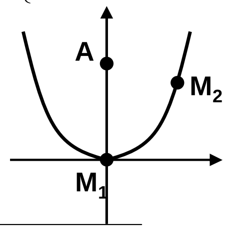
$$g_1 = y - x^2, \;\; grad(g_1) = (-2x;\, 1)$$

В этом случае *всего одно ограничение*, поэтому необходимое условие экстремума примет вид:

$$\boxed{\begin{cases} grad(f) = \lambda \cdot grad(g_1) \\ g_1(x) = 0 \end{cases}}$$

$$\begin{cases} (2x;\ 2y-4) = \lambda(-2x;\ 1) \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = -2\lambda x \\ 2y - 4 = \lambda \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \ \text{либо}\ \lambda = -1 \\ \ldots \\ \ldots \end{cases}$$

$x = 0,\ y = 0$ либо $y = 1{,}5,\ x = \sqrt{1{,}5}$



Две точки, M_1 и M_2:

В точке M_1 локальный максимум расстояния, в точке M_2 – минимум

Ответ: Расстояние равно $|AM_2| = \sqrt{\left(\sqrt{1{,}5}\right)^2 + (1{,}5-2)^2} = \sqrt{1{,}75}$

16

7. Комплексные числа

7.1. Определение.

Комплексным числом называется выражение вида

a + ib,

где a и b – действительные числа,
i – так называемая мнимая единица.
Она удовлетворяет условию

$i^2 = -1$.

Множество комплексных чисел обозначается **C**.

Пусть дано комплексное число z = a + ib. Тогда число a называют ***вещественной частью*** z и обозначают a=Re z, число b называют ***мнимой частью*** z и обозначают b=Imz.

7.2. Операции над комплексными числами.

7.2.1. Сложение и вычитание.

Пример. (5+2i) – (8+7i) = –3–5i

7.2.2. Умножение.

Пример. (4–3i) · (2+5i) = 4·2+ 4·5i +…=… =23+14i

7.2.3. Деление.

Пример.

$$\frac{2-5i}{4+3i} = \frac{(2-5i)\cdot(4-3i)}{(4+3i)\cdot(4-3i)} = \ldots = \frac{-7-26i}{4^2+3^2} = 0{,}28 - 1{,}16i$$

Задача. Решить уравнение az=b, где a=1-2i, b=3+i.

Пример. Решить квадратное уравнение $i\cdot z^2+(1+2i)\cdot z+1=0$.

Решение. $z_{1,2}=\dfrac{-(1+2i)\pm\sqrt{D}}{2i}$, $\sqrt{D}=\sqrt{(1+2i)^2-4i}=\sqrt{-3}=i\sqrt{3}$

$$z_1=\frac{-(1+2i)+i\sqrt{3}}{2i}=\frac{\left(-1-2i+i\sqrt{3}\right)\cdot(-2i)}{(2i)\cdot(-2i)}=\frac{2\sqrt{3}-4+2i}{4},$$

$$z_2=\frac{-(1+2i)-i\sqrt{3}}{2i}=\ldots=\frac{-2\sqrt{3}-4+2i}{4},$$

7.2.3. Комплексное сопряжение.

Пусть z = a+ib, тогда

$$\overline{z}=a-ib$$

Легко проверить, что

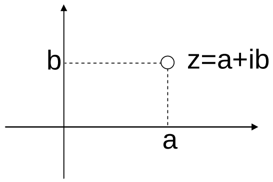
$$\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$$

$$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$$

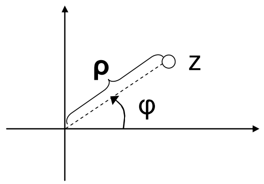
$$z\cdot\overline{z}=a^2+b^2$$

7.3. Тригонометрическая форма записи.

Комплексное число z=a+ib обычно изображают точкой на плоскости. Числа a и b являются ***декартовыми координатами*** этой точки



a=Re z, b=Imz



Наряду с декартовыми на плоскости иногда удобно использовать ***полярные координаты*** точки – числа ρ и φ

Число **ρ=|z|** называется ***модулем*** комплексного числа z

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

Число **φ=Argz** называется **аргументом** комплексного числа z. Аргумент комплексного числа z≠0 определён с точностью до слагаемого, кратного 2π:

Arg z=argz+2πk (k=0,±1,±2,…)

Здесь argz∈(–π, π] – ***главное значение аргумента***

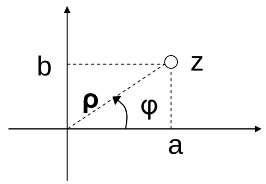
Ясно, что

$$\arg z=\begin{cases} arctg\,\dfrac{b}{a} & \text{при } a>0\\ \pi+arctg\,\dfrac{b}{a} & \text{при } a<0,\ b\ge 0\\ -\pi+arctg\,\dfrac{b}{a} & \text{при } a<0,\ b<0\\ \dfrac{\pi}{2} & \text{при } a=0,\ b>0\\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{при } a=0,\ b<0\end{cases}$$

Аргумент числа z=0 ***не определён***

Ясно, что

$$a=\rho\cos\varphi=|z|\cos\varphi,$$
$$b=\rho\sin\varphi=|z|\sin\varphi$$



Отсюда получается ***тригонометрическая форма записи*** комплексного числа:

z=|z|·(cosφ + i·sinφ)

7.4. Формула Эйлера.

$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi$

В частности,

$$e^{i\pi}=-1$$

$$e^{i\frac{3\pi}{2}}=\ldots$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}}=\ldots$$

$$e^{i2\pi}=\ldots$$

7.5. Показательная форма записи комплексного числа.

Из формулы Эйлера получаем показательную форму записи комплексного числа:

$$z=|z|\cdot e^{i\varphi}$$

Она удобна для выполнения умножения и деления чисел. Действительно,

$$\left.\begin{matrix} z_1=\rho_1 e^{i\varphi_1} \\ z_2=\rho_2 e^{i\varphi_2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow z_1\cdot z_2=(\rho_1\cdot\rho_2)e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \qquad \frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

✓ При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются
✓ При делении модули делятся, а аргументы вычитаются

В частности, $z^n=|z|^n\cdot(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$$

Формула Муавра

Пример. Вычислить z^{20}, если $z=2-i$

Решение. Возводить в 20-ю степень долго, проще воспользоваться показательной формой записи

$$|z|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}, \quad \arg z=arctg\left(-\frac{1}{2}\right)\approx-0{,}463648$$

$$\left|z^{20}\right|=\left(\sqrt{5}\right)^{20}=9765625, \quad Arg\left(z^{20}\right)=20\cdot\arg(z)\approx-9{,}272952$$

$$z^{20}\approx 9765625\cdot[\cos(-9{,}272952)+i\sin(-9{,}272952)]=$$
$$=-9653287-1476984\,i$$

7.6. Корни из комплексных чисел

Для любого $z\neq0$ и любого натурального n существует ровно n корней n-й степени из z.

Вот они:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\cdot e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)}, k=0,1,\ldots,n-1$$

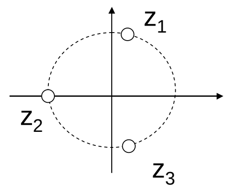
Пример. Найти все кубические корни из $z=-8$

Решение. $|z|=8$, $\arg z=\pi$

$$z_1=\sqrt[3]{8}\cdot e^{i\left(\pi/3\right)}=2\left(\cos\left(\pi/3\right)+i\sin\left(\pi/3\right)\right)=\sqrt{3}+i$$

$$z_2=\sqrt[3]{8}\cdot e^{i\left(\pi/3+2\pi/3\right)}=-2$$

$$z_3=\sqrt[3]{8}\cdot e^{i\left(\pi/3+4\pi/3\right)}=\sqrt{3}-i$$



7.7. Комплексные корни многочленов

Теорема. Любой многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет ровно n комплексных корней с учётом их кратности.

Пример. Многочлен $Z^{15}+2\cdot Z^3+1$ имеет ровно 15 комплексных корней, только один из которых вещественный

Список литературы

1. Шипачёв В.С. Высшая математика. – М.: «Высш. школа», 1996.

2. Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И., Шикин Е.В., Заляпин В.И. Вся высшая математика – М.: Эдиториал УРСС, 2000-2002.

3. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М.: «Наука», 1987.

4. Болгов В.А., Демидович Б.П., Ефимов А.В. и др. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. – М.: «Наука», 1993.

Оглавление