МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра “Прикладная математика–2”

А.С.МИЛЕВСКИЙ

# ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

## ЧАСТЬ 2.
## ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

*Конспект лекций*

МОСКВА – 2008

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра “Прикладная математика–2”

А.С.МИЛЕВСКИЙ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
ЧАСТЬ 2.
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

*Конспект лекций*

Рекомендовано редакционно-
издательским советом
университета в качестве
конспектов лекций для
студентов ИЭФ и ИУИТ

МОСКВА – 2008

УДК-517
М-60
Милевский А.С. Высшая математика. Ч.2.
Интегральное исчисление: Конспект лекций. –
М.: МИИТ, 2008. – 108 с.

Методические указания предназначены для студентов, изучающих курс математического анализа в институтах ИЭФ и ИУИТ. Включает в себя материал по интегральному исчислению, двойным интегралам, криволинейным интегралам и рядам.

Рецензенты:
Фролов Е.Б., д.т.н., профессор МГТУ Станкин,
Деснянский В.Н., к.ф.-м.н., заведующий кафедрой “Вычислительная математика” МИИТ.

# 1. Неопределённый интеграл

**1.0. Первообразная**

***Определение.*** **Функция** $F(x)$ **называется первообразной функции** $f(x)$, **если** $F^{/}(x) = f(x)$

**Примеры:**

$$1.\ f(x) = x, \quad F(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$2.\ f(x) = \cos x, \quad F(x) = \sin x$$

Теорема. **Если** F(x) **– первообразная функции** f(x), **то** F(x)+C **– также первообразная функции** f(x). **Любая первообразная функции** f(x) **имеет вид** Φ(x)=F(x)+C.

**Действительно,** $(F(x)+C)^{/} = F^{/}(x) + C^{/} = f(x).$

**Пусть** $\Phi(x)$ **– другая первообразная** $f(x)$. **Тогда**

$F^{/}(x) – \Phi^{/}(x) = 0, \quad (F(x) – \Phi(x))^{/} = 0 \Rightarrow$

$F(x) – \Phi(x) = C.$



**1.1. Неопределённый интеграл**

**Неопределённым интегралом от функции f(x) называется совокупность всех её первообразных**

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C.}$$

$\int f(x)dx = \int g(x)dx$ **понимается с точностью до константы**

**1.2. Свойства неопределенного интеграла:**

1) $d\int f(x)dx = (\int f(x)dx)'dx = f(x)dx,$

2) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,$

$$\boxed{3)\quad \int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.}$$

**Замечание. Вообще говоря,**

$$\int (f(x) \cdot g(x))dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx\ !$$

$$\boxed{4)\quad \int f(ax+b)dx = \tfrac{1}{a}F(ax+b) + C.}$$

**1.3. “Табличные” интегралы**

1) $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1} \Rightarrow (\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1})' = x^{\alpha}$

$$\boxed{\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \text{при} \quad \alpha \neq -1.}$$

2) $(\ln x)' = \frac{1}{x}, \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad \textit{при} \quad x > 0.$

$(\ln(-x))' = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C \quad \textit{при} \quad x < 0$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.}$$

3) $(a^x)' = a^x \ln a \Rightarrow (\frac{a^x}{\ln a})' = a^x.$

$$\boxed{\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.}$$

$$\boxed{\text{3a)} \quad \int e^x dx = e^x + C.}$$

$$\boxed{\text{4)} \ (\sin x)' = \cos x \Rightarrow \int \cos x dx = \sin x + C.}$$

$$\boxed{\text{5)} \ (\cos x)' = -\sin x \Rightarrow \int \sin x dx = -\cos x + C.}$$

$$\boxed{\text{6)} \ (\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C.}$$

$$\boxed{\text{7)} \ (\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C.}$$



8) $\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}).$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int (\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a})dx.$$

$$\int \frac{dx}{x \pm a} = \ln|x \pm a| + C \Rightarrow$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.}$$

$$\boxed{\text{9)} \ (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.}$$

$$\boxed{9a) \ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d(\frac{x}{a})}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.}$$

$$\boxed{\text{10)} \ (\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg} x + C.}$$

$$\boxed{10a) \ \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\frac{x}{a}}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C.}$$

$$\boxed{\text{11)} \ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln|x + \sqrt{x^2+k}| + C}$$

**1.4. "Исправление дифференциала"**

**Используется свойство :** $\boxed{\varphi'(x)dx = d\varphi}$

$$x^\alpha dx = \tfrac{1}{\alpha+1} d(x^{\alpha+1}), \quad \alpha \neq -1,$$

$$\tfrac{1}{x} dx = d\ln x, \qquad e^x dx = de^x,$$

$$\cos x dx = d\sin x, \qquad \sin x dx = -d\cos x,$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} dx = d\mathrm{tg} x, \qquad \frac{1}{\sin^2 x} dx = -d\mathrm{ctg} x,$$

$$\frac{1}{1+x^2} dx = d\mathrm{arctg} x, \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = d\arcsin x.$$

**Примеры:**

$$1) \int \cos x \cdot \sin^5 x dx = \int \sin^5 x d(\sin x) = ?$$

$$\left(= \int z^5 dz\right) = \frac{\sin^6 x}{6} + C$$

$$2) \int 2^{5x+3} dx = \frac{1}{5}\int 2^{5x+3} d(5x+3) = \frac{1}{5}\int 2^z dz =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{2^{5x+3}}{\ln 2} + C$$

$$3) \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx = \int \sqrt{\ln x} d\ln x \left(= \int \sqrt{z} dz\right) = \frac{\ln^{3/2} x}{3/2} + C$$



**Примеры:**

$$4) \int \frac{x^2 dx}{4+x^6} = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(x^3\right)}{4+(x^3)^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \mathrm{arctg} \frac{x^3}{2} + C.$$

$$5) \int \mathrm{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

$$6) \int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx = \int \sqrt{\arcsin x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \int \sqrt{\arcsin x} d(\arcsin x) = \frac{\arcsin^{3/2} x}{3/2} + C.$$

**1.5. Замена переменной в неопределенном интеграле**

**Пусть** $\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad x = \varphi(t).$

**Тогда** $dx = \varphi'(t)dt$ **и**

$$\boxed{\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C.}$$

**Примеры:**

**1.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$. **Положим** $\sqrt{x} = t$

**Тогда**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{array} \right\} = \int \frac{2tdt}{t+1} = \ldots$$

$$= 2\int \frac{t+1-1}{t+1} dt = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t+1} =$$

$$= 2t - 2\ln|t+1| + C = 2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1) + C.$$

**2.**

$$\int \frac{e^x}{4-2e^x} dx = \left\{ \begin{array}{c} e^x = t \\ x = \ln t \\ dx = \dfrac{dt}{t} \end{array} \right\} = \ldots$$

$$= \int \frac{tdt}{(4-2t)\cdot t} = \int \frac{dt}{4-2t} = \ldots = -\frac{1}{2}\ln\left|4-2e^x\right| + C$$

**3.**

$$\int \frac{x^2}{2x+5} dx = \left\{ \begin{array}{c} 2x+5 = t \\ x = \dfrac{t-5}{2} \\ dx = \dfrac{1}{2} dt \end{array} \right\} = \ldots$$



**2.** $\int \frac{dx}{\sin x}$. **Положим** $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t.$

**Тогда** $x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{(1+t^2)}{2t} \frac{2dt}{(1+t^2)} = \int \frac{dt}{t} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

**3.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}$. **Положим** $x + \sqrt{x^2+k} = t$

**Тогда** $x = \frac{t^2-k}{2t}, \quad \sqrt{x^2+k} = \frac{t^2+k}{2t}, \quad dx = \frac{t^2+k}{2t^2} dt.$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln(x + \sqrt{x^2+k}) + C.$$

## 1.6. Интегрирование по частям

$$d(uv) = udv + vdu \;\Rightarrow\; udv = d(uv) - vdu,$$

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

**Пример:**

$$\int x\cdot\cos 2xdx = \left[ \begin{array}{c|c} u = x & du = dx \\ dv = \cos 2xdx & v = \int \cos 2xdx = \dfrac{\sin 2x}{2} \end{array} \right] = \ldots$$

$$= x\cdot\frac{\sin 2x}{2} - \int \frac{\sin 2x}{2} dx = x\cdot\frac{\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C$$

**Случай А.**

$$\int x^n \left\langle \begin{matrix} e^{ax} \\ \sin ax \\ \cos ax \end{matrix} \right\rangle dx, \qquad u = x^n$$

**Пример:**

$$\int xe^{-x}dx = \left[ \begin{array}{c|c} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^{-x} \end{array} \right] =$$

$$= -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$$

**Задача:**

$$\int (x+2)\sin 3xdx = \left[ \begin{array}{c|c} u = (x+2) & du = \ldots \\ dv = \sin 3xdx & v = \ldots \end{array} \right] = \ldots$$

**Случай Б.**

$$\int x^n \left\langle \begin{matrix} \ln x \\ \arcsin x \\ \mathrm{arctg} x \end{matrix} \right\rangle dx, \qquad u = \left\langle \begin{matrix} \ln x \\ \arcsin x \\ \mathrm{arctg} x \end{matrix} \right\rangle .$$

**Пример:**

$$\int x\ln xdx = \left[ \begin{array}{c|c} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = xdx & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$



**Случай В.**

$$\int e^{ax} \left\langle \begin{matrix} \sin bx \\ \cos bx \end{matrix} \right\rangle dx. \quad \mathrm{u} = e^{ax},\ 2\,раза$$

**Пример:**

$$I = \int e^x \cos 2xdx = \left\{ \left| \begin{array}{c|c} u = e^x & du = e^x dx \\ dv = \cos 2xdx & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| \right\} =$$

$$= \frac{e^x}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int e^x \sin 2xdx =$$

$$= \left\{ \left| \begin{array}{c|c} u = e^x & du = e^x dx \\ dw = \sin 2xdx & w = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{array} \right| \right\} =$$

$$= \frac{e^x}{2}\sin 2x + \frac{e^x}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\int e^x \cos 2xdx.$$

$$\frac{5}{4}I = \frac{e^x}{4}(2\sin 2x + \cos 2x) \quad \Rightarrow$$

$$\int e^x \cos 2xdx = \frac{e^x}{5}(2\sin 2x + \cos 2x) + C.$$

**Ещё пример.**

$$\int \frac{t^2dt}{(4-t^2)^2} = \left\{ \begin{array}{ll} u = t & du = dt \\ dv = \frac{tdt}{(4-t^2)^2} & \begin{array}{l} v = \frac{1}{2}\int \frac{dt^2}{(t^2-4)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2-4\right)}{(t^2-4)^2} = \\ = -\frac{1}{2(t^2-4)} = \frac{1}{2(4-t^2)} \end{array} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{t}{2(4-t^2)} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{4-t^2} = \frac{t}{2(4-t^2)} - \frac{1}{8}\ln\left|\frac{t+2}{t-2}\right| + C.$$

## 1.7. Интегралы, содержащие квадратный трехчлен

**1.7.1.** $$\int \frac{dx}{x^2+px+q} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

**Правило: выделить полный квадрат.**

**Примеры:**

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+8} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2} + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{4-(x+1)^2}} = \arcsin\frac{x+1}{2} + C.$$

**1.7.2.** $$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx \qquad \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

**Правило: выделить полный квадрат и сделать замену переменной**

**Пример**

$$\int \frac{x-1}{x^2+6x+5}dx = \left\{ \begin{aligned} & x^2+6x+5=(x+3)^2-4, \\ & x+3=t,\ \ x=t-3,\ \ dx=dt \end{aligned} \right\} =$$

$$= \int \frac{t-3-1}{t^2-4}dt = \int \frac{tdt}{t^2-4} - 4\int \frac{dt}{t^2-4} =$$

$$\left[ \begin{aligned} & \int \frac{tdt}{t^2-4} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2-4)}{t^2-4} = \frac{1}{2}\ln|t^2-4|, \\ & \int \frac{dt}{t^2-4} = \frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| \end{aligned} \right]$$



$$= \frac{1}{2}\ln|t^2-4| - \ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+6x+5| - \ln\left|\frac{x+1}{x+5}\right| + C.$$

**Пример**

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx = \left\{ \begin{gathered} x^2-4x+8=(x-2)^2+4 \\ x-2=t \\ x=t+2 \\ dx=dt \end{gathered} \right\} =$$

$$= \int \frac{t+3}{\sqrt{t^2+4}}dt = \int \frac{tdt}{\sqrt{t^2+4}} + 3\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} =$$

$$\left\langle \int \frac{tdt}{\sqrt{t^2+4}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+4)}{\sqrt{t^2+4}} = \frac{1}{2}\frac{(t^2+4)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{t^2+4} \right\rangle$$

$$= \sqrt{t^2+4} + 3\ln|t+\sqrt{t^2+4}| + C =$$

$$= \sqrt{x^2-4x+8} + 3\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+8}\right| + C$$

## 1.8. Интегрирование рациональных дробей

$$R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)},$$

$$Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m,$$

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n.$$

**<u>1 шаг</u>. Если** $m<n$**, то дробь <u>правильная</u>,**

**если** $m\geq n$**, то сначала выделить целую часть**

**<u>Пример</u>**

**<u>(деление с остатком)</u>**

$$\boxed{\frac{3x^4-2x+5}{x^2+x-2}=?}$$

$$\begin{array}{r|l} 3x^4-2x+5 & x^2+x-2 \\ \cline{2-2} \underline{3x^4+3x^3-6x^2} & 3x^2-3x+9 \\ -3x^3+6x^2-2x+5 & \\ \underline{-3x^3-3x^2+6x} & \\ 9x^2-8x+5 & \\ \underline{9x^2+9x-18} & \\ -17x+23 & \end{array}$$

$$=3x^2-3x+9+\frac{-17x+23}{x^2+x-2}$$



**<u>Теорема.</u>** ***Всякий многочлен $n$-ой степени с вещественными коэффициентами может быть представлен в виде произведения нескольких многочленов первой и второй степени с вещественными коэффициентами.***

$$P_n(x)=(x-b_1)^{k_1}\ldots(x-b_r)^{k_r}\times$$

$$\times(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s},$$

$$k_1+\ldots+k_r+2(l_1+\ldots+l_s)=n.$$

**Пример:**

$$x^5-4x^3-8x^2+32=$$

$$=x^3(x^2-4)-8(x^2-4)=$$

$$=(x^2-4)(x^3-8)=$$

$$=(x-2)(x+2)(x-2)(x^2+2x+4)=$$

$$=(x+2)(x-2)^2(x^2+2x+4).$$

**Теорема.** ***Если знаменатель правильной дроби раскладывается на множители***

$$P_n(x) = (x-b_1)^{k_1}...(x-b_r)^{k_r} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}...(x^2 + p_sx + q_s)^{l_s}$$

***то дробь можно представить в виде суммы "простейших дробей", т.е. дробей вида***

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A_1^1}{x-b_1} + ... + \frac{A_1^{k_1}}{(x-b_1)^{k_1}} + ... + \frac{A_r^1}{x-b_r} + ... + \frac{A_r^{k_r}}{(x-b_r)^{k_r}} +$$

$$+ \frac{M_1^1x+N_1^1}{x^2+p_1x+q_1} + ... + \frac{M_1^{l_1}x+N_1^{l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + ...$$

$$... + \frac{M_s^1x+N_s^1}{x^2+p_sx+q_s} + ... + \frac{M_s^{l_s}x+N_s^{l_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}}.$$

**Порядок интегрирования рациональных дробей**

**1. У неправильной дроби выделить целую часть.**

**2. Найти все корни знаменателя и разложить его на множители.**

**3. Представить правильную дробь в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами.**

**4. Найти все неопределенные коэффициенты.**

**5. Представить интеграл от рациональной дроби в виде суммы интегралов от целой части и от простейших дробей с найденными коэффициентами.**

**6. Вычислить все интегралы.**



**Пример.**

**1.** $\int \frac{(x+1)dx}{x^3-3x^2+2x}.$

1) *Дробь правильная*

2) $x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2).$

3) $\frac{x+1}{x(x-1)(x-2)} = ?$

$$\frac{x+1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x-2}.$$

$$x+1 = A_1(x-1)(x-2) + A_2x(x-2) + A_3x(x-1).$$

$$4)\ x = 0 \quad x \Rightarrow \quad 1 = 2A_1, \quad A_1 = \tfrac{1}{2}.$$

$$x = 1 \Rightarrow 2 = -A_2, \quad A_2 = -2.$$

$$x = 2 \Rightarrow 3 = 2A_3, \quad A_3 = \tfrac{3}{2}.$$

$$\int \frac{(x+1)dx}{x^3-3x^2+2x} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x} - 2\int\frac{dx}{x-1} + \frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-2} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln|x| - 2\ln|x-1| + \tfrac{3}{2}\ln|x-2| + C.$$

**Пример.** $\int \frac{dx}{(x-1)^3(x^2+x+1)}.$

1) *Дробь правильная*

2) *Знаменатель уже разложен на множители*

3) $\frac{1}{(x-1)^3(x^2+x+1)} = ?$

$$\frac{1}{(x-1)^3(x^2+x+1)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{(x-1)^3}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1},$$

$$1=A_1(x-1)^2(x^2+x+1)+$$

$$+A_2(x-1)(x^2+x+1)+A_3(x^2+x+1)+$$

$$+(Mx+N)(x-1)^3,$$

Осталось найти $A_1$, $A_2$, $A_3$, M, N. Можно подставить 5 различных *X*. Например, если взять *X*=1, то получится… (что?)

Есть ещё и другой способ нахождения констант. Раскроем скобки:

$$1=A_1(x-1)^2(x^2+x+1)+$$

$$+A_2(x-1)(x^2+x+1)+A_3(x^2+x+1)+$$

$$+(Mx+N)(x-1)^3=$$

$$=A_1(x^4-x^3-x+1)+A_2(x^3-1)+A_3(x^2+x+1)+$$

$$+M(x^4-3x^3+3x^2-x)+N(x^3-3x^2+3x-1)$$

Теперь приравняем **коэффициенты при одинаковых степенях x** в левой и правой части уравнения:



$$\begin{array}{r}x^4:\\x^3:\\x^2:\\x^1:\\1\end{array}\begin{cases}A_1 & & & +M & & =0\\-A_1 & +A_2 & & -3M & +N & =0\\ & & A_3 & +3M & -3N & =0\\-A_1 & & +A_3 & -M & +3N & =0\\A_1 & -A_2 & +A_3 & & -N & =1\end{cases}$$

$$A_1=\tfrac{2}{9},\ A_2=-\tfrac{1}{3},\ A_3=\tfrac{1}{3},\ M=-\tfrac{2}{9},\ \ N=-\tfrac{1}{9}.$$

$$\int\frac{dx}{(x-1)^3(x^2+x+1)}=$$

$$=\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x-1)^3}-\frac{1}{9}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=$$

$$=\frac{2}{9}\ln|x-1|+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{1}{6(x-1)^2}-\frac{1}{9}\ln(x^2+x+1)+C.$$

## 1.9. Интегрирование тригонометрических функций

**1.9.1.**

$$\boxed{\begin{aligned}&\int\sin(ax+b)\cos(cx+d)dx,\\&\int\sin(ax+b)\sin(cx+d)dx,\\&\int\cos(ax+b)\cos(cx+d)dx\end{aligned}}$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\tfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)].$$

**Пример:**

$$\int \sin(3x+1)\cos 5x dx = \tfrac{1}{2}\int [\sin(8x+1)-\sin(2x+1)]dx =$$
$$= -\tfrac{1}{16}\cos(8x+1)+\tfrac{1}{4}\cos(2x+1)+C.$$

**Пример:**

$$\int \sin 3x\cdot\cos 5x\cdot\sin x dx = \int (\sin 3x\cdot\cos 5x)\cdot\sin x dx = \ldots$$

**1.9.2.** $\boxed{\int \sin^n x\cos^m x dx}$

**1.9.2.1.** $n$ **или** $m$ **нечетно - один из множителей нечетной степени занести под знак** “$d$”.

**Пример:**

$$\int \sin^2 x\cdot\cos^3 x dx = \int \sin^2 x\cdot\cos^2 x d(\sin x) =$$
$$= \int \sin^2 x\cdot(1-\sin^2 x)d(\sin x) = \int \sin^2 x d(\sin x) -$$
$$-\int \sin^4 x d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$



**1.9.2.2.** $n$ **и** $m$ **оба четные (или оба нечетные) - понизить степень**

$$\boxed{\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},\ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},\ \sin x\cos x = \frac{\sin 2x}{2}.}$$

**Пример**

$$\int \sin^2 x\cdot\cos^4 x dx = \int (\sin^2 x\cdot\cos^2)\cdot\cos^2 x dx =$$
$$= \int \frac{\sin^2 2x}{4}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cdot\cos 2x dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d(\sin 2x) =$$
$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{128}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

**1.9.3.** $\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x}dx,\quad \int \frac{\cos^m x}{\sin^n x}dx,\quad \int \frac{dx}{\sin^m x\cos^n x}.$

**1.9.3.1.** $n$ **и** $m$ **разной четности - один из множителей нечетной степени занести под знак** *“d”.*

**Пример:**

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}dx =$$
$$= -\int \frac{d\cos x}{1-\cos^2 x} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| + C.$$

**1.9.3.2** *n* **и** *m* **одинаковой четности – замена:**

$$\mathrm{tg}x = t, \quad x = \mathrm{arctg}t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

**Пример:**

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)t^4} \frac{dt}{1+t^2} = \int t^{-4} dt = -\frac{1}{3t^3} + C =$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{3\sin^3 x} + C = -\frac{1}{3}\mathrm{ctg}^3 x + C.$$

**1.9.4.**

$$\boxed{\int R(\sin x, \cos x) dx}$$

**- замена переменной (“универсальная тригонометрическая подстановка”)**

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t, \quad x = 2\mathrm{arctg}t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$





**Пример:**

$$\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3} = \int \frac{1+t^2}{1-t^2+4t+3(1+t^2)} \frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2\,2t+2} = \int \frac{dt}{(t+1)^2+1} = \mathrm{arctg}(t+1) + C =$$

$$= \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\frac{x}{2} + 1) + C.$$

**1.10. Интегрирование некоторых иррациональных выражений**

**1.10.1.**

$$\boxed{\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad : \text{замена} \qquad x - \alpha = \frac{1}{t},\ x = \frac{1}{t} + \alpha, \qquad dx = -\frac{dt}{t^2}.}$$

**Пример:** $\displaystyle \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{3-2x-x^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{3t^2-2t+2t^2-1+2t-t^2}} =$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{4t^2-1}} = -\frac{1}{2}\ln|\,2t + \sqrt{4t^2-1}\,| + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|\,\frac{2}{x+1} + \sqrt{\frac{4}{(x+1)^2} - 1}\,| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\,x+1\,| - \frac{1}{2}\ln|\,2 + \sqrt{3 - 2x - x^2}\,| + C.$$

**1.10.2.**

$$\int R\left(x, \sqrt[k_1]{\tfrac{ax+b}{cx+d}}, \ldots, \sqrt[k_n]{\tfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$$

Замена $\frac{ax+b}{cx+c} = t^k$, *где* $K =$ н.о.к. $\{k_1, \ldots, k_n\}$.

**Пример:**

$$\int \frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt[3]{x-1}+1}dx = \left\{x-1 = t^6,\ x = t^6+1,\ dx = 6t^5dt\right\} =$$

$$= 6\int \frac{t^8+2t^5}{t^2+1}dt = 6\int \left(t^6 - t^4 + 2t^3 + t^2 - 2t - 1 + \frac{2t+1}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= 6\left[\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{2} + \frac{t^3}{3} - t^2 - t + \ln(t^2+1) + \operatorname{arctg} t\right] + C =$$

$$= 6\left[\frac{(x-1)^{\frac{7}{6}}}{7} - \frac{(x-1)^{\frac{5}{6}}}{5} + \frac{(x-1)^{\frac{4}{6}}}{2} - \frac{(x-1)^{\frac{3}{6}}}{3} - \ldots\right] + C.$$

**1.10.3.**

$$\boxed{\begin{array}{lcl}
\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx & : & x = a\sin t,\ dx = a\cos t dt, \\
\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx & : & x = \frac{a}{\cos t},\ dx = \frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt, \\
\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2})dx & : & x = a\operatorname{tg} t,\ dx = \frac{a}{\cos^2 t}dt.
\end{array}}$$

**Примеры:**

**1.**

$$\int x^2\sqrt{4 - x^2}dx = \left\{x = 2\sin t, \quad dx = 2\cos t dt\right\} =$$

$$= 16\int \sin^2 t\cos^2 t dt = 4\int \sin^2 2t dt =$$

$$= 2\int (1 - \cos 4t)dt = 2t - \tfrac{1}{2}\sin 4t + C =$$



$$= 2\arcsin\tfrac{x}{2} + \tfrac{x}{2}(2 - x^2)\sqrt{4 - x^2} + C.$$

**2.**

$$\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^2}dx = \left\{x = 2\operatorname{tg} t, \quad dx = \frac{2dt}{\cos^2 t}\right\} =$$

$$= \int \frac{dt}{\cos t\sin^2 t} = \int \frac{d\sin t}{\cos^2 t\cdot\sin^2 t} = \int \frac{d\sin t}{(1-\sin^2 t)\sin^2 t} =$$

$$= \int \frac{dz}{(1-z^2)z^2} = \left\langle \frac{1}{(1-z^2)z^2} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{1-z^2} \right\rangle =$$

$$= \int \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} - \int \frac{d(\sin t)}{1-\sin^2 t} =$$

$$= -\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{4+x^2}}{x} - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{4+x^2}+x}{\sqrt{4+x^2}-x} + C.$$

**1.10.4.**

$$\boxed{\begin{array}{l}\int R(a^x)dx \quad : \text{ замена } a^x = t, \\ \int R(tgx)dx \quad : \text{ замена } tgx = t,\end{array}}$$

**Примеры:**
**1.**

$$\int \frac{1}{3+2e^x}dx = \left\{ e^x = t, x = \ln t, dx = \frac{dt}{t} \right\} =$$

$$= \int \frac{dt}{(3+2t)\cdot t} = \left\langle \frac{1}{(3+2t)\cdot t} = \frac{A_1}{(3+2t)} + \frac{A_2}{t} \right\rangle = \ldots$$

**1.10.5. “Дифференциальный бином”**

$$\boxed{\int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx, \quad p = \frac{k}{s}}$$

**Теорема.** ***“Дифференциальный бином” можно вычислить в элементарных функциях <u>только (!)</u> в следующих трёх случаях:***

1. $s = 1, \ \textit{разложением} \ \left(a + bx^m\right)^k = \ldots;$
2. $\dfrac{m+1}{n} - \textit{целое} : \textit{замена} \ a + bx^m = t^s;$
3. $\dfrac{m+1}{n} + p - \textit{целое} : \textit{замена} \ ax^{-m} + b = t^s;$



**Пример.** *Можно ли вычислить в элементарных функциях интеграл*

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3-4x^2}}dx?$$

**Решение.** Здесь m = 1/3, n = 2, p= –1/2, a = 3, b= – 4.
1. s <u>не равно</u> 1;
2. (m+1)/n=(1/3 + 1)/2 <u>не целое</u>;
3. (1/3 + 1)/2 –1/2 <u>не целое</u>.

**Ответ.** Этот интеграл не берётся в элементарных функциях

**Пример.** *Вычислить, если это возможно, в элементарных функциях интеграл*

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}$$

**Решение.** Здесь m=…, n=…, p=…
Имеет ли место какой-нибудь из трёх случаев?

Здесь m= –1, n = 3, p= –1/2.
(m+1)/n=(–1 + 1)/3 целое → интеграл берётся заменой $1 - x^3 = t^2$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}} = \left\{ \begin{array}{c} 1-x^3 = t^2 \\ x = \left(1-t^2\right)^{1/3} \\ dx = \frac{1}{3}\left(1-t^2\right)^{-2/3} \cdot (-2t)dt \end{array} \right\} = \ldots$$

$$= \int \frac{1}{\left(1-t^2\right)^{1/3}\sqrt{t^2}} \cdot \frac{(-2t)dt}{3\left(1-t^2\right)^{2/3}} =$$

$$= -\frac{2}{3}\int \frac{dt}{\left(1-t^2\right)} = -\frac{1}{3}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C = \langle \text{через } x\ldots \rangle$$

**1.11. Другие примеры “не берущихся” интегралов**

$$\int \frac{dx}{\ln x},$$

$$\int \frac{\sin x}{x} dx,$$

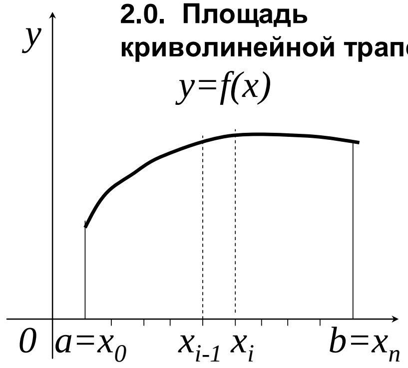
$$\int e^{-x^2} dx,$$

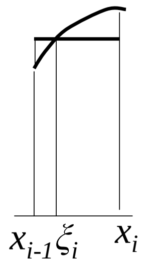
$$\int \sqrt[3]{1+x^2}\, dx \ (\text{какие здесь } m, n, p\,?)$$



# 2. Определённый интеграл

**2.0. Площадь криволинейной трапеции**




$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

$$S_{крив.трап.} = \sum_{i=1}^{n} S_{i,крив.трап.} \approx \sum_{i=1}^{n} S_{i,прямоуг.} = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$S_{крив.трап.} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

**если, конечно, этот предел существует.**

**Существование же предела зависит от свойств функции f(x).**

## 2.1. Определение определённого интеграла “по Риману”

**Определение.** ***Пусть функция f(x) определена на отрезке [a,b]. Пусть существует предел***

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

***и этот предел не зависит от выбора разбиений отрезка [a,b] и выбора точек $\xi_i$. Тогда этот предел называется <u>определённым интегралом от функции f(x) по отрезку [a,b]</u> и обозначается***

$$\int_a^b f(x)dx.$$

## 2.2. Свойства интегрируемых функций

1. *Если f(x)* ***кусочно-непрерывна на*** *(a,b), то f(x)* ***интегрируема на*** *(a,b).*

2. Если f(x) **интегрируема на** (a,b) , то f(x) **интегрируема на любом меньшем интервале** (c,d) $\subset$ (a,b)

3. Если f(x) **интегрируема на** (a,b) , то f(x) **ограничена на** (a,b)



## 2.3. Свойства определенного интеграла

**2.3.1.** $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

**2.3.2.** $$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

**2.3.3.** $$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

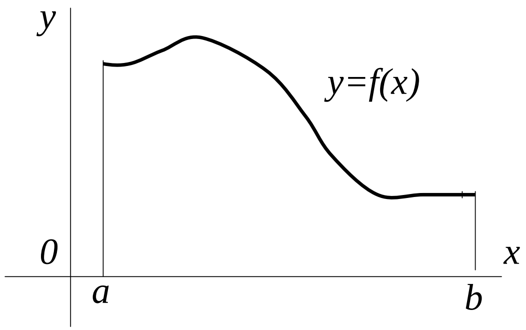
**2.3.4.** $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

**2.3.5.** $$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

**2.3.6.** $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

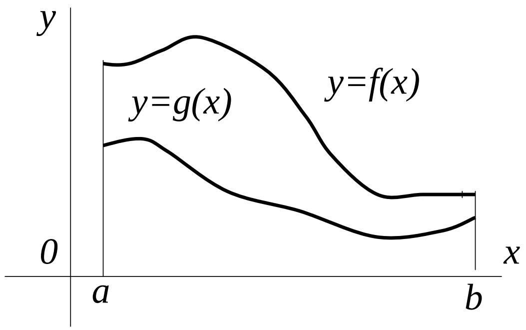
**2.3.7.**

$$\boxed{f(x)\ge 0 \quad \text{на} \quad (a,b) \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)dx \ge 0,}$$




**2.3.8.**

$$\boxed{f(x)\ge g(x) \;\; \text{на} \;\; (a,b) \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx.}$$

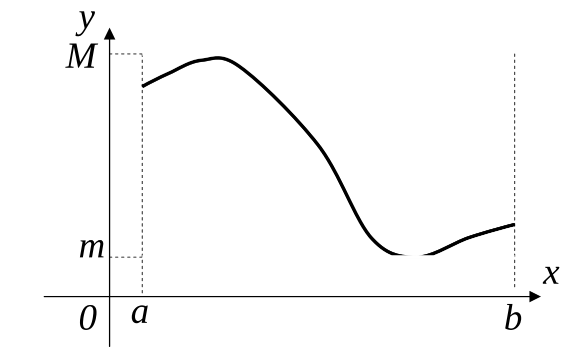



**2.3.9. Теорема об оценке определённого интеграла.**

Пусть *f(x)* интегрируема на отрезке $[a,b]$. Тогда

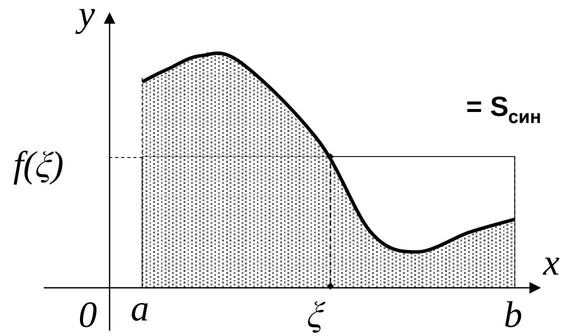
$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a),$$

где $m=\min\limits_{[a,b]} f(x),\; M=\max\limits_{[a,b]} f(x)$




**2.3.10.** **<u>Теорема о среднем</u>.** *Если f(x) непрерывна на* $[a,b]$, *то существует точка* $\xi$ *на (a,b), такая что:*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$



**2.3.11. Если $f(x)$ непрерывна на $(a,b)$, то функция**

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

**является первообразной для $f(x)$ на $(a,b)$, то есть**

$$\boxed{F'(x)=f(x)}$$

*Доказательство*

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x};$$

$$\Delta F=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(\xi)\Delta x,\ \xi\in(x,x+\Delta x)$$

$$\Rightarrow F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi)=f(x).$$

**Пример:** $$\left(\int_a^x e^{-t^2}dt\right)'=e^{-x^2}.$$

## 2.4. Формула Ньютона-Лейбница

**Теорема.** *Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$. Тогда*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).}$$

**Доказательство.**

$$\int_a^x f(t)dt - \textit{первообразная} \Rightarrow \int_a^x f(t)dt=F(x)+C$$

При $x=b$: $\int_a^b f(t)dt=F(b)+C,$

при $x=a$: $\int_a^a f(t)dt=F(a)+C=0\Rightarrow C=-F(a).$



**Пример.**

$$\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}=\int_e^{e^2}\frac{d\ln x}{\ln x}=\ln|\ln x|\Big|_e^{e^2}=\ln\ln e^2-\ln\ln e=$$

$$=\ln 2-\ln 1=\ln 2.$$

## 2.5. Замена переменной в определенном интеграле

Пусть $x=\varphi(t),\ \ a=\varphi(c),\ \ b=\varphi(d).$

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx=\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

**Пример** $$\int_0^4\frac{dx}{\sqrt{x}+1}=\left\langle\begin{matrix}x=t^2,\ dx=2tdt,\\ x=0\Rightarrow t=0,\ x=4\Rightarrow t=2\end{matrix}\right\rangle=$$

$$=2\int_0^2\frac{tdt}{t+1}=2\int_0^2\frac{t+1-1}{t+1}dt=2(t-\ln|t+1|)\Big|_0^2=$$

$$=2(2-\ln 3).$$

## 2.6. Интегрирование по частям

$$\boxed{\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.}$$

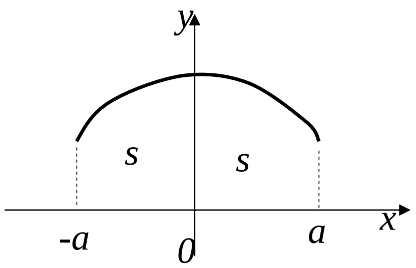
**Пример.**

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = \left\{ \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x, & du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx, & v = x \end{matrix} \right\} =$$

$$= x \operatorname{arctg} x \,\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\,\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

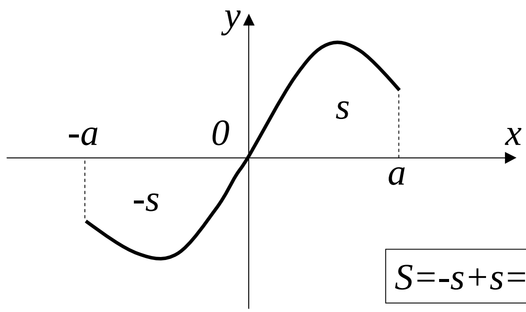
## 2.7. Интегралы от четных и нечетных функций

**Если** $f(x)$ **четная, то** $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$




$S=s+s=2s$

**Если** $f(x)$ **нечетная, то** $\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0}$




$S=-s+s=0.$

**Примеры:** **1.**

$$\int_{-1}^{1} \ln(x^2+1)dx = 2\int_0^1 \ln(x^2+1)dx = \ldots(\textit{по частям})\ldots$$

**2.**

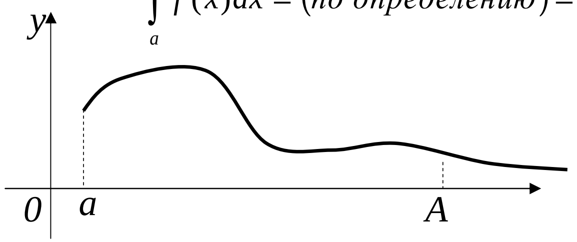
$$\int_{-2}^{2} xe^{-x^4}dx = 0.$$

# 2.8. Несобственные интегралы

## 2.8.1. Несобственные интегралы 1 рода

**– это интегралы вида:** $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx,\quad \int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx,\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = (\textit{по определению}) = \lim_{A\to\infty}\int\limits_a^{A} f(x)dx$$




**Пример:** **Пусть** $p \neq 1.$

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{A\to\infty}\int\limits_1^{A}\frac{dx}{x^p} = \lim_{A\to\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^A = \frac{1}{1-p}\lim_{A\to\infty}(A^{1-p}-1) =$$

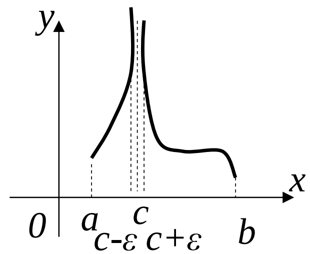
$$= \begin{cases} \infty & \text{при} \quad p<1 \\ \frac{1}{p-1} & \text{при} \quad p>1 \end{cases}$$

**При** $p = 1$

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{A\to\infty}\int\limits_1^{A}\frac{dx}{x} = \lim_{A\to\infty}\ln x\,\Big|_1^A = \lim_{A\to\infty}\ln A = \infty.$$



## 2.8.2. Несобственные интегралы 2-го рода




$$\int\limits_a^{b} f(x)dx = (\textit{по определению}) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right)$$

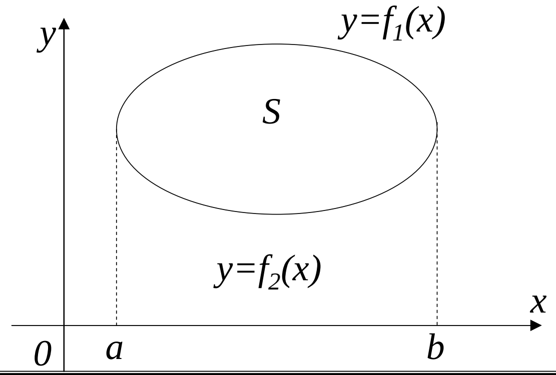
**<u>Пример:</u>** **Пусть** $p \neq 1$

$$\int\limits_0^{1}\frac{dx}{x^p} = \lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x^p} = \lim_{\varepsilon\to0}\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_{\varepsilon}^{1} = \lim_{\varepsilon\to0}\frac{1-\varepsilon^{1-p}}{1-p} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-p} & \text{при} \quad p<1 \\ \infty & \text{при} \quad p>1 \end{cases}$$

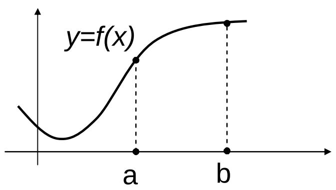
# 3. Приложения определённого интеграла

## 3.1. Площадь криволинейной трапеции




$$S=\int_a^b f_1(x)dx-\int_a^b f_2(x)dx=\int_a^b[f_1(x)-f_2(x)]dx$$

## 3.2. Длина дуги кривой




$$l=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

**Пример.**

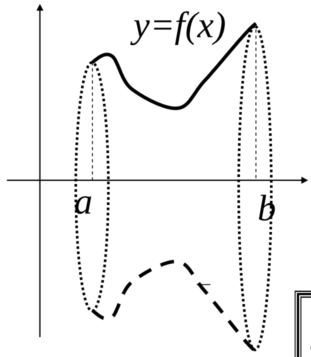
Длина дуги кубической параболы y=x$^3$ от точки x=–2 до точки x=4 вычисляется как интеграл…

$$l=\int_{-2}^{4}\sqrt{1+\left(3x^2\right)^2}\,dx=\int_{-2}^{4}\sqrt{1+9x^4}\,dx$$



## 3.3. Объемы и площади поверхностей тел вращения

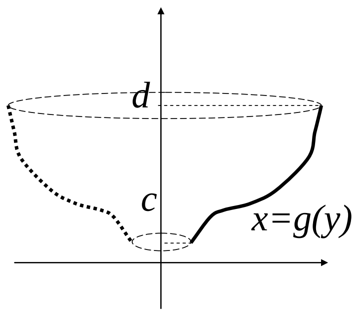
### 3.3.1. Вращение относительно оси $0x$




$$V_{OX}=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

$$S_{OX}=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

### 3.3.2. Вращение относительно оси $Oy$

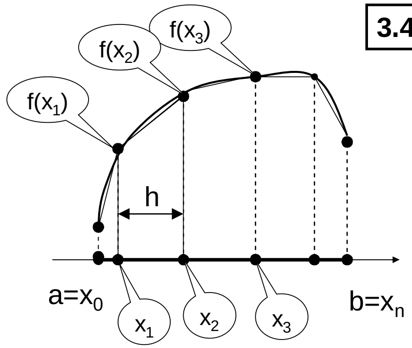



$$V_{OY}=\pi\int_c^d g^2(y)dy$$

$S_{OY}$ *аналогично*

## 3.4. Приближённое вычисление определённого интеграла

### 3.4.1 Формула трапеций




$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum S_{\text{трап}} =$$

$$= \sum h \cdot \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left( f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + f(x_n) \right)$$

$$h = (b-a)/n; \quad x_i = x_0 + ih$$

### 3.4.2 Формула Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left( f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots \right.$$

$$\left. + 4f(x_{n-1}) + f(x_n) \right)$$

$$h = \frac{(b-a)}{n}; \quad x_i = a + ih$$

Это - более точная формула

**Пример:** Найти приближённо по формуле Симпсона интеграл, разбив отрезок на 6 частей. Результат сравнить с точным значением интеграла.

$$\int_1^4 \sqrt[3]{x}dx$$



**Решение:** $h = \dfrac{4-1}{6} = 0,5;$

$x_0 = 1;\ x_1 = x_0 + h = 1,5;\ x_2 = x_1 + h = 2;\ldots$

$f(x) = \sqrt[3]{x}$

| x | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 1 | 1,1447 | 1,2599 | 1,3572 | 1,4422 | 1,5182 | 1,5874 |

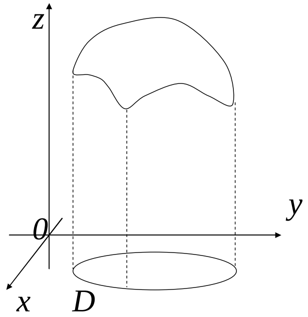
$$\int_1^4 \sqrt[3]{x}dx \approx \frac{0,5}{3}\left(1 + 4\cdot 1,1447 + 2\cdot 1,2599 + 4\cdot 1,3572 + 2\cdot 1,4422 + \ldots\right) =$$

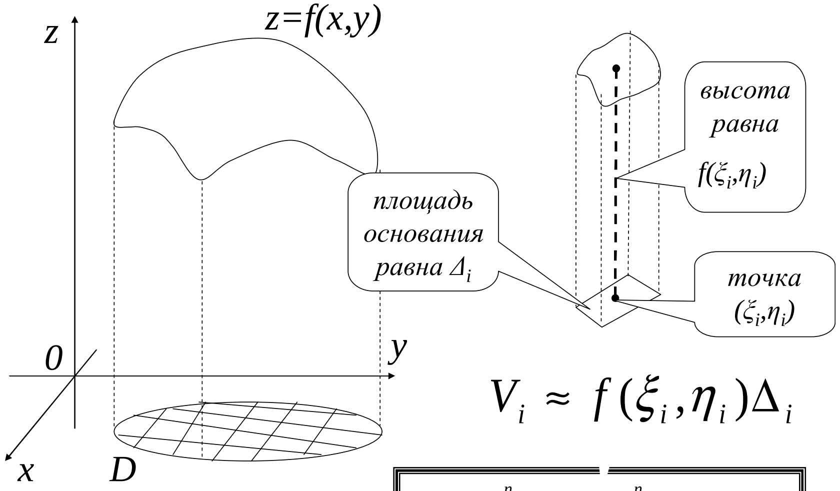
$$= 4,0121$$

$$\textit{Точное значение}: \int_1^4 \sqrt[3]{x}dx = \left.\frac{x^{4/3}}{4/3}\right|_1^4 = \frac{3}{4}\left(4^{4/3} - 1\right) \approx 4,012203$$

# 4. Двойной интеграл

**4.0. Задача об определении объема цилиндрического тела**




$$V_i \approx f(\xi_i, \eta_i)\Delta_i$$

$$\boxed{V_{ц.т.} = \sum_{i=1}^{n} V_{iц.т.} \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta_i}$$



**4.1. Определение двойного интеграла**

**Определение.** *Пусть функция $f(x,y)$ определена в замкнутой ограниченной области D на плоскости. Пусть существует предел*

$$\lim_{\max \Delta_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta_i$$

*и этот предел не зависит от выбора разбиений области и выбора точек $(\xi_i \eta_i)$. Тогда этот предел называется* <u>*двойным интегралом от функции $f(x,y)$ по области D*</u> *и обозначается*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

**4.2. Свойства двойного интеграла**

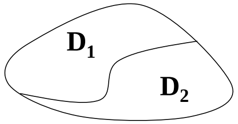
**4.2.1.**

$$\boxed{\iint\limits_D kf(x,y)dxdy = k\iint\limits_D f(x,y)dxdy.}$$

**4.2.2.**

$$\boxed{\begin{gathered}\iint\limits_D [f(x,y) + g(x,y)]dxdy = \\ \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \iint\limits_D g(x,y)dxdy.\end{gathered}}$$

**4.2.3.**




$$\boxed{\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.}$$

**4.2.4.**

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x,y) \ge 0 \quad \text{в области D} \Rightarrow \\ \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy \ge 0 \end{array}}$$

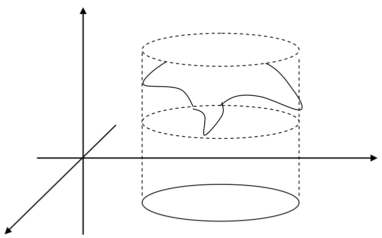
**4.2.5. Теорема об оценке двойного интеграла.**

Пусть *f(x,y)* интегрируема в области D. Тогда

$$mS_D \le \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy \le MS_D,$$

где $m = \min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y), M = \max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y),$

$S_D$ - площадь области $D$



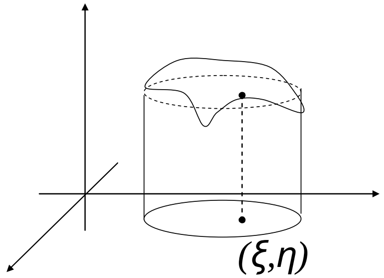


**4.2.6. Теорема о среднем для двойного интеграла.**

Пусть *f(x,y)* непрерывна в области D.

Тогда существует $(\xi,\eta) \in$ D :

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)S_D$$

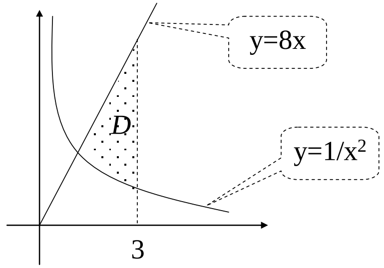



**4.3. Вычисление двойного интеграла сведением к повторному.**

**Пример.**

Вычислить

$$\iint\limits_{D} (x + y^2)dxdy$$



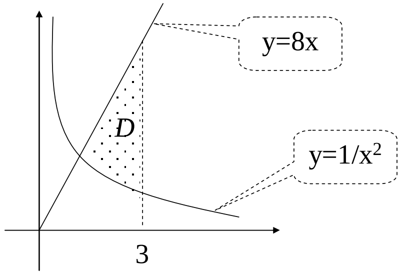

**Решение.**

<u>1 способ.</u>

$$\boxed{\iint\limits_{D} (f(x,y)dxdy = \int\limits_{...}^{...} dx \int\limits_{...}^{...} dy \{f(x,y)\}}$$

<u>2 способ.</u>

$$\boxed{\iint\limits_{D} (f(x,y)dxdy = \int\limits_{...}^{...} dy \int\limits_{...}^{...} dx \{f(x,y)\}}$$



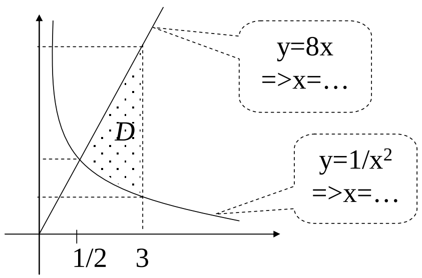

1 способ.

$$\iint_D (x+y^2)dxdy =$$

$$= \int_{1/2}^{3} dx \int_{\dots}^{\dots} dy \left(x+y^2\right) = \dots$$

$$= \int_{1/2}^{3} dx \int_{1/x^2}^{8x} dy \left(x+y^2\right) = \int_{1/2}^{3} dx \int_{1/x^2}^{8x} \left(x+y^2\right) dy = \dots$$

$$= \int_{1/2}^{3} dx \left( xy + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{1/x^2}^{8x} = \int_{1/2}^{3}\left(\left(x\cdot 8x + \frac{(8x)^3}{3}\right) - \left(\frac{x}{x^2} + \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^3}{3}\right)\right)dx = \dots$$




2 способ.

$$\iint_D (x+y^2)dxdy =$$

$$= \int_{1/9}^{4} dy \int_{\dots}^{\dots} dx + \int_{4}^{24} dy \int_{\dots}^{\dots} dx = \dots$$

$$= \int_{1/9}^{4} dy \int_{1/\sqrt{y}}^{3} dx \left(x+y^2\right) + \int_{4}^{24} dy \int_{y/8}^{3} dx \left(x+y^2\right) = \dots$$

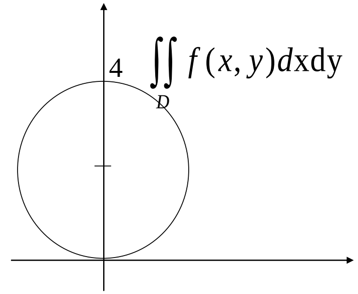
$$= \int_{1/9}^{4} dy \left(\left(\frac{x^2}{2}+xy^2\right)\Bigg|_{1/\sqrt{y}}^{3}\right) + \int_{4}^{24} dy \left(\left(\frac{x^2}{2}+xy^2\right)\Bigg|_{y/8}^{3}\right) = \dots$$



**Пример.**

Свести двойной интеграл к повторному двумя способами

("расставить пределы интегрирования")




$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

**Решение.**

Уравнение окружности

$x^2+(y-2)^2=4$

Отсюда x=…

y=…

**Ответ.**

$$= \int_{-2}^{2} dx \int_{2-\sqrt{4-x^2}}^{2+\sqrt{4-x^2}} dy \left(f(x,y)\right)$$

$$= \int_{0}^{4} dy \int_{-\sqrt{4-(y-2)^2}}^{+\sqrt{4-(y-2)^2}} dx \left(f(x,y)\right).$$

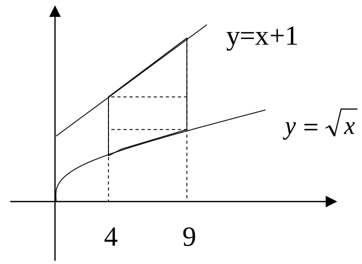
**Пример.**

Изменить порядок интегрирования

$$\int_4^9 dx \int_{\sqrt{x}}^{x+1} dy \left(f(x,y)\right)$$

**Решение.**

1)Сначала нарисуем область интегрирования:

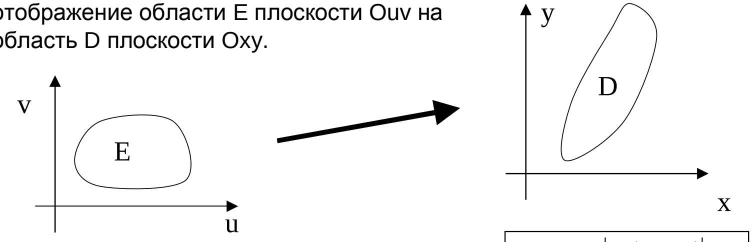



2)Теперь запишем пределы интегрирования:

$$\int_4^9 dx \int_{\sqrt{x}}^{x+1} dy (f) = \int_2^3 dy \int_4^{y^2} dx (f) + \int_3^5 dy \int_4^9 dx (f) + \int_5^{10} dy \int_{y-1}^{9} dx (f)$$

## 4.4. Замена переменной в двойном интеграле

Пусть функции x=φ(u,v),y=ψ(u,v) осуществляют взаимно-однозначное непрерывно дифференцируемое отображение области E плоскости Ouv на область D плоскости Oxy.




Пусть в области E отличен от нуля “якобиан”:

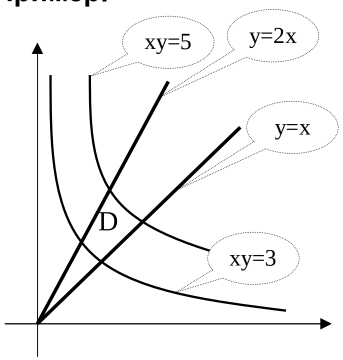
$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\varphi'_u & \varphi'_v\\ \psi'_u & \psi'_v\end{vmatrix}\neq 0$$

Тогда

$$\boxed{\iint\limits_D \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})\mathrm{dxdy}=\iint\limits_E \mathrm{f}\left(\varphi(\mathrm{u},\mathrm{v}),\psi(\mathrm{u},\mathrm{v})\right)\cdot\left|\mathrm{J}(\mathrm{u},\mathrm{v})\right|\mathrm{dudv}}$$

**Пример.**

$$\iint\limits_D \mathrm{x}^2 dxdy=?$$




**Решение.** Сделаем замену переменных

xy=u, y/x=v,
Тогда исходная область D превращается в прямоугольник E={3<u<5, 1<v<2} (почему?)

Выразим

x=φ(u,v)=(u/v)$^{1/2}$=u$^{1/2}$ v$^{-1/2}$,

y=ψ(u,v)=(uv)$^{1/2}$=u$^{1/2}$v$^{1/2}$.

$$\textit{Далее,}\ \ J(u,v)=\begin{vmatrix}\varphi'_u & \varphi'_v\\ \psi'_u & \psi'_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}u^{-1/2}v^{-1/2} & -\frac{1}{2}u^{1/2}v^{-3/2}\\ \frac{1}{2}u^{-1/2}v^{1/2} & \frac{1}{2}u^{1/2}v^{-1/2}\end{vmatrix}=\frac{1}{4v}+\frac{1}{4v}=\frac{1}{2v}$$



$$\iint\limits_D \mathrm{x}^2 dxdy=\iint\limits_E\left(\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{v}}\right)^2\frac{1}{2v}dxdy=\frac{1}{2}\int\limits_3^5 du\int\limits_1^2 dv\left(\frac{u^2}{v^3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_3^5 du\left(-\frac{u^2}{2v^2}\right)\Bigg|_1^2=\frac{1}{2}\int\limits_3^5 du\left(-\frac{u^2}{8}+\frac{u^2}{2}\right)=\frac{1}{2}\int\limits_3^5 du\left(\frac{3u^2}{8}\right)=$$

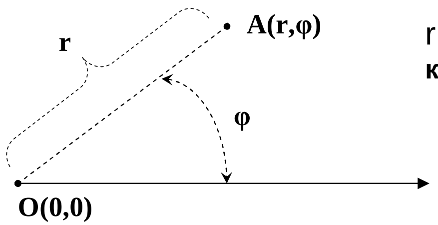
$$=\frac{1}{2}\frac{u^3}{24}\Bigg|_3^5=\frac{1}{48}(125-27)=\frac{49}{24}$$

# 4.5. Приложения двойного интеграла.

## 4.5.1. Площадь плоской области

$$\boxed{S_D=\iint\limits_D 1\,dxdy}$$

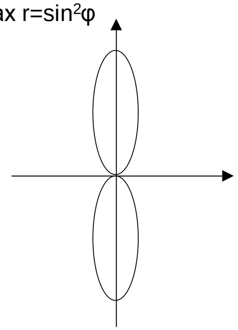
## 4.5.2. Площадь плоской области в полярных координатах




$r, \varphi$ – **полярные координаты точки А**

$$\boxed{S_D = \iint\limits_D r\,drd\varphi}$$

**Пример.** Найти площадь области, ограниченной кривой с уравнением в полярных координатах $r=\sin^2\varphi$



**Решение.** Изобразите кривую (примерно)

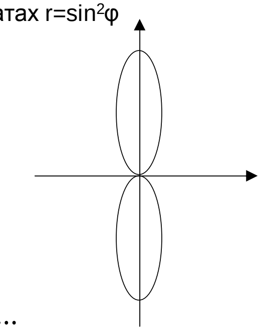
Фигура состоит из двух одинаковых лепестков, достаточно найти площадь одного и умножить на 2

$$S = 2S_{D_1} = 2\iint\limits_{D_1} rdrd\varphi = 2\int\limits_{...}^{...} d\varphi \int\limits_{...}^{...} dr(r) = ...$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sin^2\varphi} dr(r) = 2\int\limits_0^{\pi} d\varphi \left( \left.\frac{r^2}{2}\right|_0^{\sin^2\varphi} \right) = \int\limits_0^{\pi} \sin^4\varphi d\varphi = ... = \frac{3\pi}{8}$$



**Пример.** Найти площадь области, ограниченной кривой с уравнением в полярных координатах $r=\sin^2\varphi$



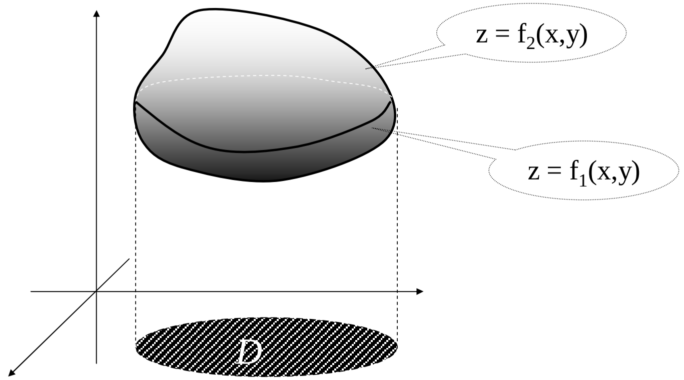
**Решение.** Изобразите кривую (примерно)

Фигура состоит из двух одинаковых лепестков, достаточно найти площадь одного и умножить на 2

$$S = 2S_{D_1} = 2\iint\limits_{D_1} rdrd\varphi = 2\int\limits_{...}^{...} d\varphi \int\limits_{...}^{...} dr(r) = ...$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sin^2\varphi} dr(r) = 2\int\limits_0^{\pi} d\varphi \left( \left.\frac{r^2}{2}\right|_0^{\sin^2\varphi} \right) = \int\limits_0^{\pi} \sin^4\varphi d\varphi = ... = \frac{3\pi}{8}$$

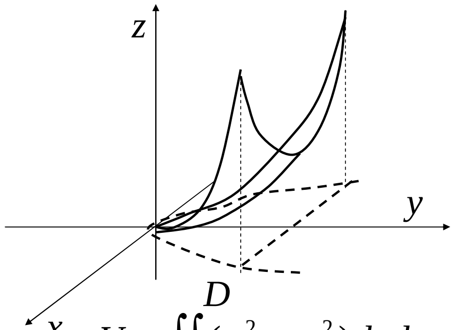
## 4.5.3. Объём тела

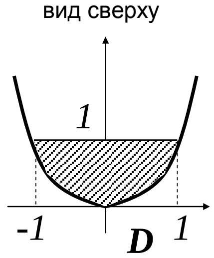



$$\boxed{V = \iint\limits_D [\,f_2(x,y) - f_1(x,y)]dxdy}$$

**Пример. Найти объем тела, ограниченного поверхностями**

$$z = x^2 + y^2, \quad y = x^2, \quad y = 1, \quad z = 0.$$




$$V = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} (x^2 + y^2)dy =$$

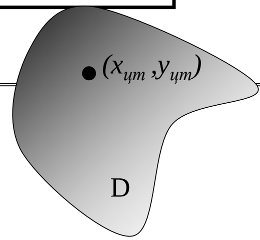
$$= 2\int_0^1 dx(x^2 y + \tfrac{1}{3} y^3)\Big|_{x^2}^{1} = 2\int_0^1 (x^2 + \tfrac{1}{3} - x^4 - \tfrac{1}{3} x^6)dx =$$

$$= 2(\tfrac{1}{3} x^3 + \tfrac{1}{3} x - \tfrac{1}{5} x^5 - \tfrac{1}{21} x^7)\Big|_0^1 = \tfrac{44}{105}.$$

29 29



**4.5.4. Масса и координаты центра тяжести неоднородной пластинки**



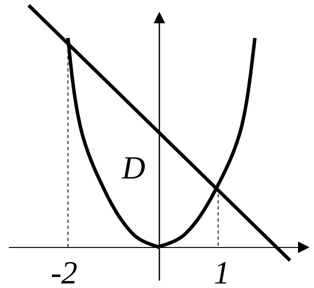

$$m(масса) = \iint_D \rho(x, y)dxdy$$

$$x_{цт} = \frac{M_X}{m}, \quad y_{цт} = \frac{M_Y}{m},$$

*где*

$$M_X = \iint_D x\rho(x, y)dxdy, \qquad M_Y = \iint_D y\rho(x, y)dxdy$$

**Пример. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$ и $x+y=2$**




$$m = \iint_D dxdy =$$

$$= \int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{2-x} dy =$$

$$= \int_{-2}^{1} dx\left(y\right)\Big|_{x^2}^{2-x} = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)dx = ... = \frac{9}{2}$$

$$M_Y = \iint\limits_D y\,dxdy = \int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{2-x} y\,dy = \int\limits_{-2}^{1} dx \left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{2-x} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{1}(4-4x+x^2-x^4)dx = \ldots = \frac{36}{5}$$

$$M_X = \iint\limits_D x\,dxdy = \int\limits_{-2}^{1} x\,dx \int\limits_{x^2}^{2-x} dy = \int\limits_{-2}^{1} x\,dx\left(2-x-x^2\right) =$$

$$= \int\limits_{-2}^{1}(2x-x^2-x^3)dx = \ldots = -\frac{9}{4}$$

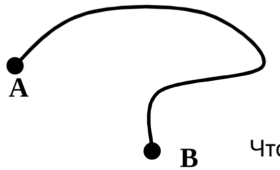
$$x_{цт} = \frac{M_X}{m} = \frac{-9/4}{9/2} = -\frac{1}{2},$$

$$y_{цт} = \frac{M_Y}{m} = \frac{36/5}{9/2} = \frac{8}{5}$$

# 5. Криволинейные интегралы



## 5.1. Криволинейный интеграл 1 рода




$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds$$

Чтобы вычислить криволинейный интеграл первого рода, нужно <u>все переменные выразить через какую-то одну и подставить</u>

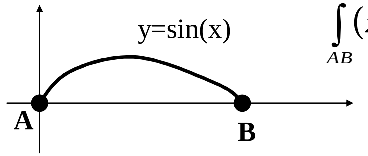
$$\boxed{ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}$$

Например, если всё выразить <u>через</u> t, то

$$\begin{cases} x = x(t);\ y = y(t) \\ A: t = t_1;\ B: t = t_2 \end{cases}$$

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\left(x(t), y(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt$$

**Пример.**

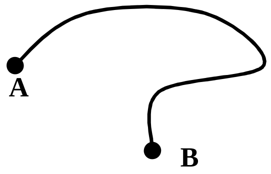



$$\int\limits_{AB} (x+2y)ds = ?$$

$$\begin{cases} x = t;\ y = \sin t; \\ A: t = 0; B: t = \pi. \end{cases}$$

$$\int\limits_{AB} (x+2y)ds = \int\limits_{0}^{\pi} (t + 2\sin t)\sqrt{1 + (\cos t)^2}\,dt = \ldots$$

## 5.2. Криволинейный интеграл 2 рода



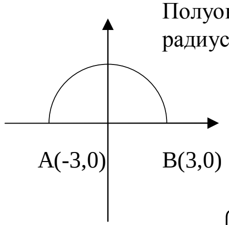

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

**Чтобы вычислить криволинейный интеграл второго рода, нужно все переменные <u>выразить через какую-то одну</u>.**

**Пример.**

Полуокружность радиуса 3

$$\int\limits_{AB} xydx - x^2dy = ?$$




**Решение.**

**1 способ (выразить всё <u>через x</u>)**

$$\begin{cases} y = \sqrt{9-x^2};\ dy = -\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx \\ A: x = -3;\ B: x = 3 \end{cases}$$

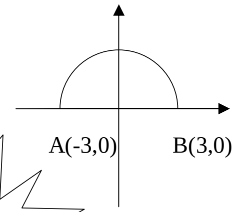
$$\int\limits_{AB} \ldots = \int\limits_{-3}^{3} x\sqrt{9-x^2}dx - x^2 d\left(\sqrt{9-x^2}\right) =$$

$$= \int\limits_{-3}^{3}\left( x\sqrt{9-x^2} + x^2\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\right)dx = 0$$



**Решение.**
**2 способ**
**(<u>через t</u>)**

$$\int\limits_{AB} xydx - x^2dy = ?$$




$$\begin{cases} x = 3\cos t;\ dx = -3\sin tdt \\ y = 3\sin t;\ dy = 3\cos tdt \\ A: t = \pi;\ B: t = 0 \end{cases}$$

**Вопрос**
**Почему не**
**A: t = – π?**

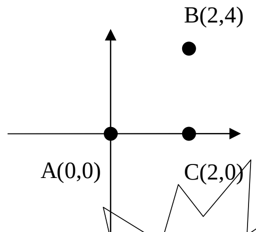
$$\int\limits_{AB} \ldots = \int\limits_{\pi}^{0} 3\cos t \cdot 3\sin t \cdot (-3\sin t)dt - (3\cos t)^2 3\cos tdt =$$

$$= -27\int\limits_{\pi}^{0}\left(\cos t \cdot \sin^2 t + \cos^3 t\right)dt = -27\int\limits_{\pi}^{0}\cos tdt = 0$$

**Пример.**

Вычислить интеграл от точки A до точки B
a) по отрезку AB
b) по ломаной ACB

$$\int ydx + e^{x+y}dy$$




**Вопрос.**
**Ответы получатся**
**<u>одинаковые</u>**
**или <u>разные</u>?**

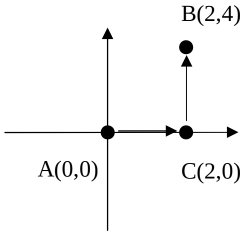
**Решение.**

a) <u>По отрезку AB</u> Уравнение прямой (AB): **y = 2x**. Выразим интеграл **<u>через x</u>** и вычислим:

$$\begin{cases} y = 2x;\ dy = 2dx \\ A: x = 0;\ B: x = 2 \end{cases}$$

$$\int\limits_{AB} \ldots = \int\limits_{0}^{2} 2xdx + e^{3x}\cdot 2dx = \left(x^2 + \frac{2}{3}e^{3x}\right)\Bigg|_0^2 = 3\frac{2}{3} + \frac{2e^6}{3}$$

b) <u>По ломаной ACB</u>




$$\int\limits_{ACB} ydx + e^{x+y}dy = \int\limits_{AC}\ldots + \int\limits_{CB}\ldots$$

(AC): Уравнение **y = 0**. Выразим интеграл **<u>через x</u>** и вычислим:

$$\begin{cases} y = 0;\ dy = 0 \\ A: x = 0;\ B: x = 2 \end{cases}$$

$$\int\limits_{AC} = \int\limits_0^2 0dx + e^x \cdot 0dx = 0$$

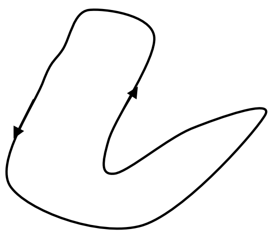
(CB): Уравнение **x = 2**. Выразим интеграл **<u>через y</u>** и вычислим:

$$\begin{cases} x = 2;\ dx = 0 \\ A: y = 0;\ B: y = 4 \end{cases}$$

$$\int\limits_{BC}\ldots = \int\limits_0^4 y \cdot 0dx + e^{2+y}dy = $$
$$= e^6 - e^2$$

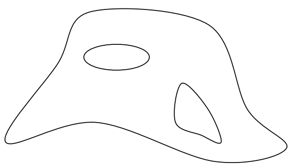
Таким образом, $\int\limits_{ACB} ydx + e^{x+y}dy = \int\limits_{AC} + \int\limits_{CB} = 0 + e^6 - e^2$

### 5.3. Связь между двойным интегралом по области и интегралом 2 рода по её границе (формула Грина)



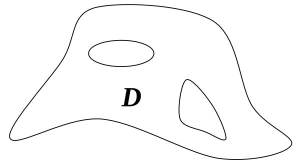
**5.3.1. Каноническая ориентация границы области**

Каноническим направлением обхода границы области называется направление, при котором область остаётся слева по направлению движения

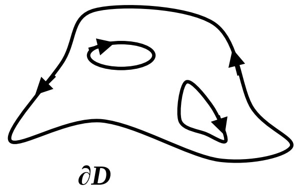


**Задача.** Укажите каноническую ориентацию границы этой области






Пусть **D** – некоторая область с кусочно-гладкой границей. Через **∂D** обозначается замкнутый контур, образованный границей этой области с канонической ориентацией

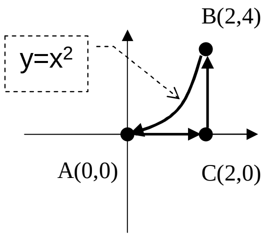



**5.3.2. Формула Грина**

**Теорема. Пусть D – плоская область с кусочно-гладкой границей. Пусть функции P(x,y), Q(x,y) непрерывны в области D. Тогда**

$$\boxed{\oint\limits_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(Q'_x - P'_y\right)dxdy}$$

**Пример.** Проверим формулу Грина для $\oint\limits_{ACBA} \sin x dx + xy dy$



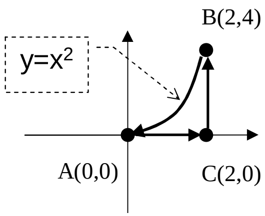

**Решение.** P(x,y)=sinx, Q(x,y)=xy

$P_y(x,y)=0$, $Q_x(x,y)=y$

$$\oint\limits_{ACBA} \sin x dx + xy dy = \iint\limits_{D} y dx dy$$

a). Вычислим правую часть

$$\iint\limits_{D} y dx dy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x^2} y dy = \int\limits_0^2 dx \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{x^2} = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 x^4 dx = \left.\frac{x^5}{10}\right|_0^2 = 3{,}2$$




b). Вычислим левую часть

$$\int\limits_{AC} \sin x dx + xy dy = \{y = 0; \text{по } x\} = \int\limits_0^2 \sin x dx + 0 d0 = 1 - \cos 2$$

$$\int\limits_{CB} \sin x dx + xy dy = \{x = 2; \text{по } y\} = \int\limits_0^4 \sin 2 d2 + 2y dy = \left. y^2 \right|_0^4 = 16$$

$$\int\limits_{BA} \sin x dx + xy dy = \{y = x^2; \text{по } x\} = \int\limits_2^0 \sin x dx + x^3 dx^2 = \cos 2 - 1 + 2\left.\frac{x^5}{5}\right|_2^0 =$$

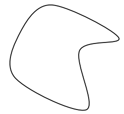
$$= \cos 2 - 1 - \frac{64}{5}$$

$$\oint\limits_{ACBA} = \int\limits_{AC} + \int\limits_{CB} + \int\limits_{BA} = 1 - \cos 2 + 16 + \cos 2 - 1 - \frac{64}{5} = 16 - 12{,}8 = 3{,}2$$

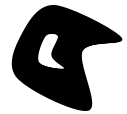


## 5.3.3. Следствия из формулы Грина

### *5.3.3.1. Зависимость интеграла 2 рода от пути интегрирования*



**Определение. Область D называется <u>односвязной</u>, если любой замкнутый контур в ней можно стянуть в точку.**



**Следствие 1. Пусть D – односвязная плоская область с кусочно-гладкой границей. Тогда следующие утверждения эквивалентны**

a) $Q'_x = P'_y$ *в области* D;

b) $\oint\limits_C Pdx + Qdy = 0$ *для любого замкнутого контура* $C \subset D$;

c) $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ *не зависит от кривой, соединяющей точки* A и B

**Пример.** Проверить, что интеграл не зависит от пути между точками A(1,3) и B(2,1). Вычислить, выбрав путь самостоятельно $\oint\limits_{AB} (x^2 + y)dx + (e^y + x)dy$

**Решение.** Сначала проверим условие

$$P'_y = \left(x^2 + y\right)'_y = 1; \quad Q'_x = \left(e^y + x\right)'_x = 1$$

Функции P и Q определены на всей плоскости, плоскость, очевидно, односвязна.

Далее, выберем A(0,0), в качестве кривой возьмём отрезок AB.

$$AB: \frac{x-1}{2-1} = \frac{y-3}{1-3} = t \Rightarrow \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t + 3 \end{cases}$$

$$\int\limits_{AB} = \begin{Bmatrix} A: t = 0 \\ B: t = 1 \end{Bmatrix} = \int\limits_0^1 \left[(t+1)^2 + (-2t+3)\right]dt + \left[e^{(-2t+3)} + (-2t+3)\right]d(-2t+3) =$$

$$= \int\limits_0^1 \left[(t+1)^2 + (-2t+3)\right]dt - 2\int\limits_0^1 \left[e^{(-2t+3)} + (-2t+3)\right]dt = \ldots$$

5.3.3.2. *Нахождение функции по её частным производным*

**Следствие 2. Система дифференциальных уравнений** $\begin{cases} F'_x = P; \\ F'_y = Q \end{cases}$

**в некоторой односвязной области D имеет решение в том и только в том случае, если в этой области** $\boxed{P'_y = Q'_x}$

**При этом условии функцию F можно найти по формуле** $\boxed{F(x,y) = \int\limits_{AB} Pdx + Qdy + const}$

**где A – любая фиксированная точка, а точка B имеет координаты (x,y). Интеграл берётся по произвольной кривой от A до B.**

**Задача.** Существует ли функция F(x,y), такая что

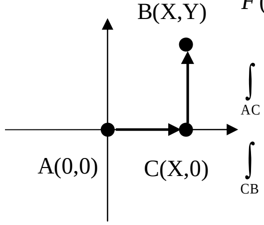
$$\begin{cases} F'_x = x^3 - 2xy^2 \\ F'_y = \cos y - 2x^2 y \end{cases} ?$$

Если да, то найти её.

**Решение.** Сначала проверим условие существования $\boxed{P'_y = Q'_x}$

$$P'_y = \left(x^3 - 2xy^2\right)'_y = -4xy; \;\; Q'_x = \left(\cos y - 2x^2 y\right)'_x = -4xy$$

Далее, в качестве кривой возьмём ломаную ACB.




$$F(X,Y) = \int\limits_{AC} Pdx + Qdy + \int\limits_{CB} Pdx + Qdy$$

$$\int\limits_{AC} = \begin{Bmatrix} x = t,\, dx = dt,\, A: t = 0 \\ y = 0,\, dy = 0,\, C: t = X \end{Bmatrix} = \int\limits_0^X t^3 dt = X^4/4;$$

$$\int\limits_{CB} = \begin{Bmatrix} x = X,\, dx = 0 \\ y = t,\, dy = dt \end{Bmatrix} = \int\limits_0^Y \left(\cos t - 2X^2 t\right) dt = \sin Y - X^2 Y^2;$$

$$\textit{Ответ}: F(X,Y) = \frac{X^4}{4} + \sin Y - X^2 Y^2$$



# 5.4. Приложения криволинейного интеграла.

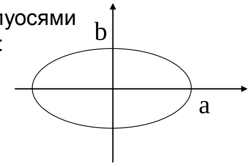
## 5.4.1. Площадь плоской области

$$S_D = \iint\limits_D 1\,dxdy = \oint\limits_{\partial D} Pdx + Qdy,$$

*если только* $Q'_x - P'_y = 1$. *Например,*

$$\boxed{S_D = -\oint\limits_{\partial D} ydx = \oint\limits_{\partial D} xdy = \frac{1}{2}\oint\limits_{\partial D} xdy - ydx.}$$

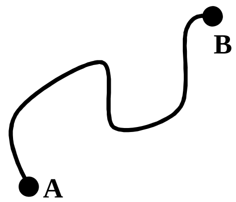
**Пример.** Площадь эллипса с полуосями a,b:




$$S = \oint xdy = \begin{Bmatrix} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{Bmatrix} =$$

$$= ab\int\limits_0^{2\pi} \cos t\, d(\sin t) = ab\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \ldots = \pi ab$$

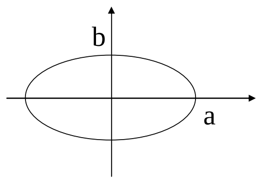
## 5.4.2. Масса неоднородной кривой




$$m = \int\limits_{AB} \rho(x,y)ds$$

**Если ρ=1, то получаем длину кривой:** $l = \int\limits_{AB} ds$

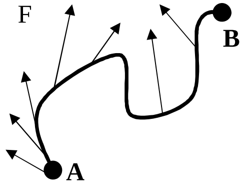
**Пример.** Длина эллипса с полуосями a,b:




$$l = \oint ds = \begin{Bmatrix} x = a\cos t \\ y = b\sin t \\ ds = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt \end{Bmatrix} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt$$

**5.4.3. Работа силы вдоль пути**




$$\overrightarrow{F(x,y)} = (P(x,y), Q(x,y))$$

$$A = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

# 6. Дифференциальные уравнения

**6.1. Определение**

$$\boxed{F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0}$$

**n – <u>порядок уравнения</u>**

**Примеры дифференциальных уравнений (какой у них порядок?)**

$$a)\, y''' + 3y'x^4 = \cos\left(x^{10}\right);$$

$$b)\, \ln\left(x + y''\right) = y - 1$$



**Пример.** $y''' = 2x - 1$

**Решение.**

$$y'' = \int (2x-1)dx = x^2 - x + C_1$$

$$y' = \int \left(x^2 - x + C_1\right)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

$$y = \int \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2\right)dx = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

Общее решение

**Замечание. Общее решение дифференциального уравнения n-го порядка содержит n произвольных констант.**

**Замечание.** Иногда при решении дифференциального уравнения получается равенство, уже не содержащее производных, но из которого не удаётся выразить y через x.

Например:

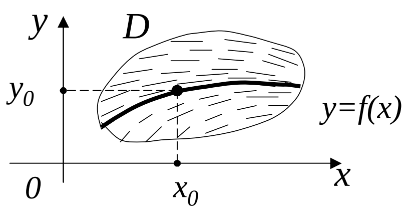
$$y' \cos y = y + xy' \Rightarrow \sin y = xy + C \Rightarrow y = ?$$

Тогда само это равенство (siny=xy+C) считается ответом (оно называется “интеграл дифференциального уравнения”)

## 6.2. Задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

**Теорема.** Если функции f(x,y) и $f'_y$(x,y) непрерывны в области D, то для любой точки ($x_0$,$y_0$)$\in$D в некоторой её окрестности существует и единственно решение задачи Коши




## 6.3. Уравнения с разделяющимися переменными

$$y' = f_1(x) f_2(y)$$

**Метод решения:**

1) *Подставить* $\quad y' = \dfrac{dy}{dx}$

2) *Разделить переменные*:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y) \Rightarrow \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$

3) *Вычислить интегралы*:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx$$



**Пример:** $\boxed{xy\cdot y' = \sqrt{y^2+1}}$

**Решение:** $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{y^2+1}}{xy}$,

$$\frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} = \frac{dx}{x},$$

Переменные разделились

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} = \int \frac{dx}{x},$$

Часто вместо “+C” удобнее писать “+lnC”

$$\sqrt{y^2+1} = \ln|x| + \ln C = \ln(C_1 x),$$

$$y^2 + 1 = \ln^2 C_1 x,$$

$$y = \pm\sqrt{\ln^2 C_1 x - 1}.$$

C|x|= ± Cx = $C_1$x

**Пример (задача Коши):** $\boxed{\begin{cases} (x^2-1)y' + 2xy^2 = 0, \\ y(0) = 1 \end{cases}}$

**Решение:**

$$y' = -y^2\frac{2x}{x^2-1}, \qquad \frac{\text{dy}}{\text{dx}} = -y^2\frac{2x}{x^2-1}$$

$$\frac{\text{dy}}{\text{y}^2} = -\frac{2xdx}{x^2-1}, \qquad \int\frac{\text{dy}}{\text{y}^2} = -\int\frac{2xdx}{x^2-1},$$

$$-\frac{1}{\text{y}} = -\ln|x^2-1| - \ln C = -\ln C_1\left(x^2-1\right),$$

$$y = \frac{1}{\ln C_1\left(x^2-1\right)}$$

Общее решение уравнения

$$1 = \frac{1}{\ln(-C_1)} \Rightarrow C_1 = -e; \quad y = \frac{1}{\ln[e(1-x^2)]}.$$

Решение задачи Коши

## 6.4. Однородные уравнения первого порядка

$$\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$$

**Метод решения:**

1) Выразить $y'$

2) Подставить $y = t\cdot x$ в правую часть.

Если справа все x исчезнут, то уравнение однородное

3) *Подставить* $y = t\cdot x$, *где* $t = t(x)$ в левую часть

$y' = t'\cdot x + t = f(t)$,

$t'\cdot x + t = f(t)$ − уравнение с разделяющимися переменными

**Пример.** $\boxed{(x^2 + y^2)y' = 2xy}$

y=t·x

$$y' = \frac{2xy}{x^2+y^2}; \quad \frac{2x\cdot tx}{x^2+t^2x^2} = \frac{2t}{1+t^2} = t'x + t,$$

**Решение**

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\left(\frac{2t}{1+t^2} - t\right) = \frac{1}{x}\frac{t(1-t^2)}{1+t^2};$$

$$\frac{(1+t^2)dt}{t(1-t^2)} = \frac{dx}{x} \text{ или } t(1-t^2) = 0, \int\frac{(1+t^2)dt}{t(1-t)(1+t)} = \int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|t| - \ln|1-t| - \ln|1+t| = \ln|x| + \ln C \quad \{= \ln(C_1x)\},$$

$$\frac{t}{1-t^2} = C_1x \textit{ или } t = 0 \textit{ или } t = 1 \textit{ или } t = -1$$

$$\frac{y/x}{1-(y/x)^2} = C_1x \textit{ или } y = 0 \textit{ или } y = x \textit{ или } y = -x$$

“интеграл уравнения”





**Пример.** $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$

**Решение**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}(y + \sqrt{xy}) = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y}{x}}$$

y=t·x

$$t'x + t = t + \sqrt{t}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sqrt{t}}{x} \Rightarrow \quad t = 0 \quad \text{либо} \quad \int\frac{dt}{\sqrt{t}} = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$y \equiv 0 \quad \text{либо} \quad 2\sqrt{t} = \ln|x| + \ln C = \ln C_1x,$$

$$2\sqrt{\frac{y}{x}} = \ln C_1x \Rightarrow \frac{y}{x} = \left(\frac{\ln C_1x}{2}\right)^2 \Rightarrow y = \frac{x\cdot\ln^2(C_1x)}{4}$$

**Ответ.** $y \equiv 0 \quad \text{либо} \quad y = \frac{x\cdot\ln^2(C_1x)}{4}$

## 6.5. Линейные уравнения первого порядка

$$\boxed{y' + a(x)y = b(x)}$$

**Метод решения (“метод вариации постоянной”):**

1 шаг. $y' + a(x)y = 0.$ $\frac{dy}{dx} = -a(x)y$ …

… $\Rightarrow$ $y = Cz(x)$; C - константа

2 шаг. Подставляем в исходное уравнение,

считая, что C = C(x) - уже не константа.

$(Cz)' + a(x)Cz = b(x)$

$C'z + Cz' + a(x)Cz = b(x)$

и т. д.

**Пример:** $\boxed{xy' - 2y = 2x^4}$

**Решение** $y' - 2y/\mathrm{x} = 2x^3$

$$\underline{1\ шаг.}\quad y' - 2y/\mathrm{x} = 0; \qquad \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{y}} = 2\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}}$$

$$\ln y = 2\ln|x| + \ln C = \ln\left(Cx^2\right)$$

$$y = Cx^2$$

$$\underline{2\ шаг.}\quad \left(Cx^2\right)' - 2\left(Cx^2\right)/x = 2x^3$$

$$C'x^2 + \underline{C \cdot 2x - 2Cx} = 2x^3,$$

$$C' = 2x; \quad C = \int 2x\,dx = x^2 + C_1$$

$$Ответ: \mathrm{y} = \left(x^2 + C_1\right)x^2$$

**6.6. Уравнение Бернулли**

$$\boxed{y' + a(x)y = b(x)\,y^n}$$

**Решается <u>тоже</u> методом вариации постоянной**

**Пример:** $\boxed{x^2 y' = y^2 + xy}$

$$Ответ: \quad \mathrm{y} = \mathrm{Cx} = \frac{-x}{\ln(C_1 x)}$$

**Решение:**

$$y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}; \quad y' - \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2}$$

$$1)\ y' - \frac{y}{x} = 0; \ \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}; \int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x}; \ldots\ \underline{y = Cx}$$

$$2)\ x^2(Cx)' = C^2x^2 + Cx^2; \quad x^3C' + x^2C = x^2C^2 + x^2C$$

$$dC/dx = C^2/x; \ \int\frac{dC}{C^2} = \int\frac{dx}{x}; \ -C^{-1} = \ln(C_1x);\ C = \frac{-1}{\ln(C_1x)}$$

10



**6.7. Понижение порядка уравнения**

**6.7.1. Уравнение, не содержащее y в явном виде**

**Пример:** $\boxed{x^3 y'' + x^2 y' = 1}$

**Решение:** Замена $y'(\mathrm{x}) = \mathrm{z(x)} \Rightarrow y''(x) = z'(x)$

$$x^3z' + x^2z = 1 \Rightarrow z' + \frac{1}{x}z = \frac{1}{x^3} \Rightarrow \text{линейное уравнение…}$$

$$\Rightarrow \mathrm{z} = \ldots \Rightarrow \mathrm{y} = \int \mathrm{z} = \ldots$$

**Ответ:** $y = \dfrac{1}{x} + C_1 \ln x + C_2$

**6.7.2. Уравнение, не содержащее x в явном виде**

Замена $y'(x)=z(y)$
$\Rightarrow y''(x)=z'(y)\cdot z(y)$

**Пример:** $\boxed{y^2 y'' = y'}$

**Решение:** Замена $y'(\mathrm{x}) = \mathrm{z(y)} \Rightarrow y'' = z' \cdot y' = z' \cdot z$

$$y^2 \cdot z'z = z \Rightarrow z = 0 \text{ или } z' = \frac{1}{\mathrm{y}^2} \Rightarrow$$

$$z = 0 \text{ или } z = -\frac{1}{y} + C \Rightarrow \{y' = z(y)\} \Rightarrow$$

$y = C_1$ или

$$y' = -\frac{1}{y} + C = \frac{Cy - 1}{y} \Rightarrow \int\frac{y}{Cy - 1}dy = \int dx = x + C_2 \Rightarrow \ldots$$

## 6.8. Линейные дифференциальные уравнения произвольного порядка

$$\boxed{y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_n(x)y=f(x)}$$

**Теорема:** Общее решение линейного дифференциального уравнения может быть представлено в виде суммы $y=y_{00}+y_{част}$, где $y_{00}$ – общее решение "однородного линейного уравнения":

$$\boxed{y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_n(x)y=0}$$

$y_{част}$ – какое-то ("частное") решение исходного уравнения

## 6.8.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

$$\boxed{y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_ny=0}$$

1) Составить характеристическое уравнение

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_n=0$$

2) Найти его корни
3) Выписать ответ по правилу:
a) Каждому вещественному корню $\lambda=a$ кратности **m** соответствует **m** слагаемых $e^{ax}$, $xe^{ax}$,…,$x^{m-1}e^{ax}$;
b) Каждой паре комплексных корней $\lambda=a\pm ib$ кратности **m** соответствует **m** слагаемых

$$e^{ax}\cos bx,\ xe^{ax}\cos bx,\ldots\ x^{m-1}e^{ax}\cos bx,$$
$$e^{ax}\sin bx,\ xe^{ax}\sin bx,\ldots\ x^{m-1}e^{ax}\sin bx.$$



**Пример:** $\boxed{y'''-5y''+4y'=0}$

Характеристическое уравнение $\lambda^3-5\lambda^2+4\lambda=0;$

$\lambda_1=0;\ \lambda_2=1;\ \lambda_3=4$

Ответ $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{4x}$

**Пример:** $\boxed{y''-4y'+4y=0}$

Характеристическое уравнение $\lambda^2-4\lambda+4=0;$

$\lambda_1=2;\ \lambda_2=2.$

Ответ $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$

**Пример:** $\boxed{y''-2y'+4y=0}$

Характеристическое уравнение $\lambda^2-2\lambda+4=0;$

$\lambda_1=1+i\sqrt{3};\ \lambda_2=1-i\sqrt{3}$

Ответ $y=C_1e^x\cos\sqrt{3}x+C_2e^x\sin\sqrt{3}x$

**Пример:**

$$\lambda_1=\lambda_2=-3;\ \lambda_3=0;\ \lambda_4=2+5i;\ \lambda_5=2-5i$$

Ответ

$$y=C_1e^{-3x}+C_2xe^{-3x}+C_3+C_4e^{2x}\cos 5x+C_5e^{2x}\sin 5x$$

**6.8.2. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и специальной правой частью**

$$\boxed{y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_ny=f(x)}$$

$$f(x)=e^{ax}(P_n(x)\cos bx+Q_n(x)\sin bx),$$

$P_n(x),\ Q_n(x)$ - многочлены n-ой степени.

$y_{част}=e^{ax}(\widetilde{P}_n(x)\cos bx+\widetilde{Q}_n(x)\sin bx)x^r,$

где $\widetilde{P}_n(x),\ \widetilde{Q}_n(x)$ – многочлены n-ой степени с неопределенными коэффициентами,

$r$ - кратность корня $a+ib$.

**Пример:** $\boxed{y''-5y'+4y=e^{2x}}$

1) Найдём $y_{00}$: $y''-5y'+4y=0,$

$\lambda^2-5\lambda+4=0,\ \lambda_1=1,\ \ \lambda_2=4,$

$y_{00}=C_1e^{x}+C_2e^{4x}$

2) Найдём $y_{част}$:

$f(x)=e^{2x}=\left(\text{многочлен степени}=0\right)\cdot e^{2x}$

$n=0,\ a=2,\ \ b=0,\ \ a+ib=2,\ \ r=0,$

$y_{част}=Ae^{2x},\ y_{част}'=2Ae^{2x},\ y_{част}''=4Ae^{2x}$

$4Ae^{2x}-10Ae^{2x}+4Ae^{2x}=e^{2x},\ A=-\frac{1}{2}$

Ответ:

$$y=C_1e^{x}+C_2e^{4x}-\tfrac{1}{2}e^{2x}$$



**Пример:** $\boxed{y''-4y'+4y=xe^{2x}}$

1) Найдём $y_{00}$: $y''-4y'+4y=0,\ \lambda^2-4\lambda+4=0,$

$\lambda_1=\lambda_2=2,\quad y_{00}=C_1e^{2x}+C_2e^{2x}$

2) Найдём $y_{част}$:

$f(x)=xe^{2x}=\left(\text{многочлен степени}=1\right)\cdot e^{2x}$

$n=1,\ a=2,\ b=0,\ \ a+ib=2,\ \ r=2,$

$y_{част}=(A_1x+A_2)x^2e^{2x}=(A_1x^3+A_2x^2)e^{2x},$

$y_{част}'=(2A_1x^3+(3A_1+2A_2)x^2+2A_2x)e^{2x},$

$y_{част}''=(4A_1x^3+(12A_1+4A_2)x^2+(6A_1+8A_2)x+2A_2)e^{2x}.$

$$y_{част}''-4y_{част}'+4y_{част}=(16A_1x+2A_2)e^{2x}$$

Подставим в исходное уравнение: $\boxed{y''-4y'+4y=xe^{2x}}$

$$y_{част}''-4y_{част}'+4y_{част}=(16A_1x+2A_2)e^{2x}=xe^{2x}$$

$$(16A_1x+2A_2)e^{2x}=xe^{2x},\quad A_1=\frac{1}{16},\quad A_2=0$$

$$y_{част}=\left(A_1x^3+A_2x^2\right)\cdot e^{2x}=\frac{1}{16}x^3e^{2x}$$

Ответ: $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+\frac{1}{16}x^3e^{2x}.$

**Пример:** $\boxed{\begin{array}{l}\lambda_1=\lambda_2=3,\ \lambda_3=3+7i,\ \lambda_4=3-7i,\\ f(x)=4x^2e^{5x}\cos 2x \qquad y_{част}=?\end{array}}$

1) $$\boxed{y_{част}=e^{ax}(\tilde{P}_n(x)\cos bx+\tilde{Q}_n(x)\sin bx)x^r}$$

$$f(x)=\left(\text{многочлен степени } 2\right)\cdot e^{5x}\cdot\left(\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\,2x\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{част}=e^{5x}\cdot\left((\mathrm{A}_1x^2+\mathrm{A}_2x+\mathrm{A}_3)\cos 2x+(\mathrm{A}_4x^2+\mathrm{A}_5x+\mathrm{A}_6)\sin 2x\right)\cdot x^r$$

2) Чему равно r? a=5 b=2 **a+ib=5+2i** $\Rightarrow$ *r = 0*

$$\boxed{\begin{aligned}y_{част}&=e^{5x}\cdot\left(\mathrm{A}_1x^2+\mathrm{A}_2x+\mathrm{A}_3\right)\cdot\cos 2x+\\&+e^{5x}\cdot\left(\mathrm{A}_4x^2+\mathrm{A}_5x+\mathrm{A}_6\right)\cdot\sin 2x\end{aligned}}$$

**Пример:** $\boxed{\begin{array}{l}\lambda_1=\lambda_2=0,\ \lambda_3=5+2i,\ \lambda_4=5+2i,\\ f(x)=4x^3-x+6. \qquad y_{част}=?\end{array}}$

1) $$\boxed{y_{част}=e^{ax}(\tilde{P}_n(x)\cos bx+\tilde{Q}_n(x)\sin bx)x^r}$$

$$f(x)=\left(\text{многочлен степени } 3\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{част}=(\mathrm{A}_1x^3+\mathrm{A}_2x^2+\mathrm{A}_3x+\mathrm{A}_4)\cdot x^r$$

2) Чему равно r? a=0 b=0 **a+ib=0** $\Rightarrow$ *r = 2*

$$\boxed{\begin{aligned}y_{част}&=(\mathrm{A}_1x^3+\mathrm{A}_2x^2+\mathrm{A}_3x+\mathrm{A}_4)\cdot x^2=\\&=\mathrm{A}_1x^5+\mathrm{A}_2x^4+\mathrm{A}_3x^3+\mathrm{A}_4x^2\end{aligned}}$$



**Пример:** $\boxed{y'''-4y''=4x+1+3\sin x}$

1) Найдём $y_{00}$:

$$y'''-4y''=0;$$
$$\lambda^3-4\lambda^2=0;\cdot \quad \lambda^2\cdot(\lambda-4)=0$$
$$\lambda_1=0,\ \lambda_2=0,\ \lambda_3=4$$
$$y_{oo}=C_1+C_2x+C_3e^{4x}$$

2) Найдём $y_{част}$:

***f(x) = Многочлен + синус***

Здесь правая часть состоит
из двух разнородных слагаемых,
многочлена и синуса
поэтому частное решение
будет искаться тоже
в виде суммы двух слагаемых

$$f(x)=4x+1+3\sin x \qquad \boxed{y'''-4y''=4x+1+3\sin x}$$
$$f_1(x)=4x+1\Rightarrow y_{част1}=\dots$$
$$f_2(x)=3\sin x\Rightarrow y_{част2}=\dots$$
$$y_{част1}=\left(A_1x+A_2\right)\cdot \mathrm{x}^2=A_1x^3+A_2x^2$$
$$y_{част2}=A_3\sin x+A_4\cos x$$
$$y_{част}=A_1x^3+A_2x^2+A_3\sin x+A_4\cos x$$

*Подставить*

$$y'''-4y''=6A_1-A_3\cos x+A_4\sin x-$$
$$-4\cdot\left(6A_1x+2A_2-A_3\sin x-A_4\cos x\right)=4x+1+3\sin$$

$$\begin{array}{r}\cos x:\\ \sin x:\\ x:\\ x^0:\end{array}\begin{cases}-A_3+4A_4=0\\ A_4+4A_3=3\\ -24A_1=4\\ 6A_1-8A_2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1=\\ A_2=\\ A_3=\\ A_4=\end{cases}$$

Ответ: y = $y_{00}+y_{част}=\dots$

# 7. Ряды

## 7.1. Числовые ряды

### 7.1.1. Основные понятия

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_N = S_N$$

Частичная сумма ряда

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots = R_N$$

Остаточный член ряда

**Определение:** Если существует конечный предел

$$\lim_{N\to\infty} S_N = S$$

то говорят, что ряд сходится, а число S называется его суммой.
В противном случае говорят, что ряд расходится



**Примеры:**

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2^{N+1}} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{N+1}}\right),$$

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{N+1}}\right) = 2 \Rightarrow \text{Ряд сходится, сумма} = 2$$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots$

$$S_N = 1 + 2 + \ldots + N = \frac{N \cdot (N+1)}{2},$$

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \frac{N \cdot (N+1)}{2} = \infty \Rightarrow \text{Ряд расходится}$$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots$

$$S_N = \begin{cases} 0 \ \text{при} \ N \ \text{четном} \\ 1 \ \text{при} \ N \ \text{нечетном}, \end{cases}$$

$$\lim_{N\to\infty} S_N \quad \text{не существует} \Rightarrow \text{Ряд расходится.}$$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$

$$Т.к. \quad x > \ln(1+x), \quad S_N = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \tfrac{1}{N} >$$

$$> \ln(1+1) + \ln(1+\tfrac{1}{2}) + \ln(1+\tfrac{1}{3}) + \ldots + \ln(1+\tfrac{1}{N}) =$$

$$= \ln(2 \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \tfrac{N+1}{N}) = \ln(N+1), \quad \lim_{N\to\infty} \ln(N+1) = \infty$$

$$\Rightarrow \text{Ряд расходится.}$$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$

$$S_N = 1 + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 3} + \ldots < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots =$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots = 2 \Rightarrow \text{Ряд сходится}$$

$$S_1 = 1,\ S_2 = 1 + \frac{1}{4} = 1{,}25,\ S_3 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \approx 1{,}361,$$

$$S_{10} \approx 1{,}55;\ S_{20} \approx 1{,}596;\ S_{30} \approx 1{,}61;\ S_{50} \approx 1{,}625;\ldots$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449$$

Доказать это нелегко!

**Задача.** Найти сумму ряда $\frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{4\cdot 6} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots$

**Решение.** $a_1 = \frac{1}{2\cdot 4},\ a_2 = \frac{1}{3\cdot 5}, \ldots, a_n = ?$ $\boxed{a_n = \frac{1}{(n+1)\cdot(n+3)}}$

$$\frac{1}{(n+1)\cdot(n+3)} = \frac{A_1}{n+1} + \frac{A_2}{n+3} \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_1 = \ldots, A_2 = \ldots$$

$$\frac{1}{(n+1)\cdot(n+3)} = \frac{1/2}{n+1} - \frac{1/2}{n+3}$$

$$\frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{4\cdot 6} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots = \frac{1/2}{2} - \frac{1/2}{4} + \frac{1/2}{3} - \frac{1/2}{5} + \frac{1/2}{4} - \frac{1/2}{6} + \ldots$$

**Ответ.**

$$\frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{4\cdot 6} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots = \frac{1/2}{2} + \frac{1/2}{3} = \frac{5}{12}$$



**Как узнать, сходится или расходится данный ряд?**

**Признаки сходимости рядов**

**Теорема 1. (Необходимое условие сходимости):**

**1) Если ряд сходится, то** $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

**2) Если** $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$**, то ряд расходится.**

**Доказательство:** $a_n = S_n - S_{n-1}$

Если ряд сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} =$$

$$= S - S = 0$$

**7.1.2. Знакоположительные ряды. Признаки сходимости**

**Теорема 2. (Признак сравнения).**

Пусть есть два ряда : $(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

Пусть $0 \le a_n \le b_n$ при больших n.

Тогда :

$(b)$ сходится $\Rightarrow (a)$ сходится,

$(a)$ расходится $\Rightarrow (b)$ расходится.

**Примеры:** $\boxed{1)\ \sum_{1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{\sqrt{n+1}}}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2+\sin n}{\sqrt{n+1}} > \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} > \dfrac{1}{\mathrm{n}} \quad \text{при } n > 2 \\ \text{Ряд } \sum_{1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \text{ расходится} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{\sqrt{n+1}} \text{ расходится.}$$

$\boxed{2)\ \sum_{1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\ln n}{n^3} < \dfrac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}^3} = \dfrac{1}{\mathrm{n}^2} \quad \text{при } n > 2 \\ \text{Ряд } \sum_{1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} \text{ сходится} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} \text{ сходится.}$$



**Теорема 3. (Предельный признак сходимости).**

Пусть есть два ряда с неотрицательными членами :

$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \textit{число} > 0$

Тогда :

(a) сходится $\Leftrightarrow (b)$ сходится.

**Задача.** Исследовать на сходимость ряд $\boxed{\sum_{0}^{\infty} \frac{n^2+2n}{2n^3-5}}$

**Решение.**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ряд } \sum_{1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \text{ расходится} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2n}{2n^3-5} : \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+2n^2}{2n^3-5} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{0}^{\infty} \frac{n^2+2n}{2n^3-5} \text{ расходится.}$$

**Теорема 4. (Признак Даламбера).**

Пусть есть ряд с неотрицательными членами $\sum_{0}^{\infty} a_n$

Пусть существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Тогда
1) если q<1, то ряд сходится
2) если q>1, то ряд расходится

**Примеры:** $1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots$

Решение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд сходится

$$2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2+1}$$

Решение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \dots$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}\cdot\left(n^2+1\right)}{\left((n+1)^2+1\right)\cdot 3^n} = \dots = 3 > 1 \Rightarrow \text{ расх.}$$



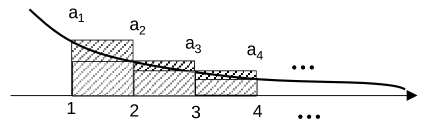
Пусть есть ряд с неотрицательными членами $\sum_{0}^{\infty} a_n$

Пусть $a_n$=f(n), где функция f(x) удовлетворяет условию:
(*) f(x) невозрастающая функция при больших x.
Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится } \Leftrightarrow \int_1^{\infty} \text{f(x)dx сходится}$$

**Доказательство:**

$$a_2 + a_3 + a_4 + \dots \le \int_1^{\infty} \text{f(x)dx} \le a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$




**См. рисунок!**

**Задача.** Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

**Решение:**

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{1}{x\cdot \ln x}; \\ f(x) \text{ убывает;} \\ \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\cdot\ln x}\,dx = \ln\left|\ln x\right|\Big\|_2^{+\infty} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\ln n} \text{ расходится.}$$

**Теорема:** Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ сходится при a>1, и расходится при $a\le 1$.

**Доказательство:**

$$\text{При } a<0: \lim_{n\to\infty} a_n = \infty \ne 0 \Rightarrow \text{ряд расходится}$$

$$\text{При } a=0: \lim_{n\to\infty} a_n = 1 \ne 0 \Rightarrow \text{ряд расходится}$$

$$\text{При } a>0 \ f(x)=\frac{1}{x^a} \text{ убывает} \Rightarrow \text{интегральный признак}$$

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^a}=\begin{cases}\left.\dfrac{x^{1-a}}{1-a}\right|_1^{\infty}=\begin{cases}\infty & при\ a<1\\ \dfrac{1}{1-a} & при\ a>1\end{cases}\\ \ln x\Big|_1^{\infty}=\infty \quad при\ a=1\end{cases}$$

## 7.1.3. Ряды с членами произвольного знака.

### Теорема 6. Абсолютная сходимость

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ тоже сходится

**Определение:** 1) Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится, то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится абсолютно.

2) Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится условно.



**Задача.** Исследовать на сходимость ряд $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^3}}$

**Решение:**

$$\left.\begin{array}{l}\left|\dfrac{\sin n}{n^3}\right|\le\dfrac{1}{n^3}\\ \sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}\ \text{сходится}\end{array}\right\}\Rightarrow\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^3}\ \underline{\text{сходится абсолютно}}$$

**Замечание.** Выяснить *этим методом*, сходится ли такой ряд не получится (так как Σ(1/n) расходится). На самом деле он *сходится условно*. $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}}$

## 7.1.4. Перестановка членов ряда

**Теорема.** 1) <u>Абсолютно сходящийся</u> ряд остаётся сходящимся и сохраняет величину суммы при любой перестановке членов ряда.

2) Изменяя порядок членов в <u>условно сходящемся</u> ряде, можно сделать его сумму равной любому числу.

**Пример.** Обозначим 1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\ldots=s$

Тогда

2) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\ldots=$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\ldots=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots=\frac{s}{2}$$

А ведь ряд 2) получен перестановкой членов ряда 1)!

### 7.1.5. Знакочередующиеся ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n, \qquad a_n \ge 0.$$

**Теорема 7. (Признак Лейбница).**

Если $a_n \ge a_{n+1} \ge 0$ при больших $n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ , то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ сходится.

**<u>Свойство.</u> Для сходящегося знакочередующегося ряда остаточный член $R_n$ не превосходит по модулю первого отброшенного слагаемого $a_{n+1}$**

**Примеры:**

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\text{n}} = -1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}-\ldots$ сходится условно

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^3}$ сходится абсолютно

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ - ?

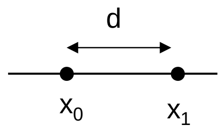
13



# 7.2. Степенные ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n.$$

### 7.2.1. Область сходимости.




**Теорема Абеля.** Пусть $x_1 \ne x_0$, $|x_1 - x_0| = d$:

1) Если степенной ряд сходится при $x=x_1$, то он абсолютно сходится при $|x-x_0|<d$

2) Если степенной ряд расходится при $x=x_1$, то он расходится при $|x-x_0|>d$

**Следствие.** Область сходимости степенного ряда представляет собой одно из множеств:

1) Одна точка $x_0$.

2) Интервал с центром в $x_0$, возможно, включающий в себя одну или обе граничные точки

3) Вся числовая прямая

В первом случае говорят, что радиус сходимости степенного ряда равен 0, во втором радиус сходимости равен половине длины интервала, в третьем он равен бесконечности.

**Теорема.** Пусть существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$$

где R –число или +∞. Тогда радиус сходимости степенного ряда равен R.

**Задача.** Найти область сходимости ряда $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}}$

**Решение.**

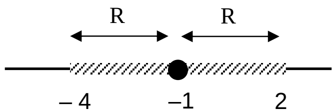
$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

**Ответ.** Этот ряд абсолютно сходится на всей числовой прямой

**Задача.** Найти область сходимости ряда $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 3^n},}$

**Решение.**

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 3^{n+1}}{n\cdot 3^n} = 3.$$




$$x = 2,\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n} - \text{ расходится}$$

$$x = -4,\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} - \text{ сходится условно}$$

**Ответ.** Ряд сходится абсолютно при –4<x<2 и условно при x= –4



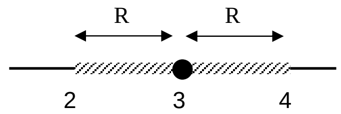
**Задача.** Найти область сходимости ряда

$$\boxed{\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{x-3}{3\cdot 4}+\frac{(x-3)^2}{4\cdot 5}+\ldots}$$

**Решение.**

$$a_0 = \frac{1}{2\cdot 3},\ a_1 = \frac{1}{3\cdot 4},\ \ldots,\ a_n = ? \qquad a_n = \frac{1}{(n+2)\cdot(n+3)}$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)\cdot(n+4)}{(n+2)\cdot(n+3)} = 1.$$




$$x = 2,\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+2)(n+3)} - \text{ сходится абсолютно}$$

$$x = 4,\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)} - \text{ сходится абсолютно}$$

**Ответ.** …

### 7.2.2. Непрерывность суммы степенного ряда

**Теорема.** Сумма степенного ряда непрерывна в любой внутренней точке его интервала сходимости.

### 7.2.3. Почленное дифференцирование степенного ряда

**Теорема.** Степенной ряд можно почленно дифференцировать в любой внутренней точке его интервала сходимости.

**Пример.**

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x} \ \text{ при } |x| < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + 2x + 3x^2 + \ldots = \frac{1}{(1-x)^2} \ \text{ при } |x| < 1$$

### 7.2.4. Почленное интегрирование степенного ряда

**Теорема.** Степенной ряд можно почленно интегрировать по любому отрезку [a,b], такому, что ряд сходится в точках a и b

**Пример.** $$1+x+x^2+x^3+\ldots=\frac{1}{1-x}\quad \text{при}\ |x|<1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots=-\ln(1-x)\quad \text{при}\ |x|<1$$

**Замечание.** Отсюда можно *догадаться*, чему равна сумма ряда $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=$

$$\boxed{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\ln 2}$$

### 7.2.4. Степенные ряды с комплексными членами

Степенной ряд можно рассматривать и когда $a_n$, x и $x_0$ – комплексные числа ($\in$ C). Все предыдущие теоремы соответственно распространяются на этот случай:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,\ z\in C.$$

В частности, степенной ряд сходится

1) либо только в точке $z_0$, (радиус сходимости R=0),

2) либо на всей комплексной плоскости (R=∞),

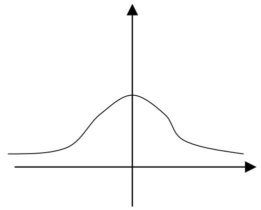
3) либо внутри круга радиуса R с центром в точке $z_0$: $\{z:|z-z_0|<R\}$ и, может быть, в некоторых точках его границы.



Рассмотрение степенных рядов над комплексными числами позволяет установить многие закономерности их поведения. В частности

**Теорема.** Радиус сходимости степенного ряда равен расстоянию от точки $z_0$ до ближайшей особенности представляемой рядом функции

**Пример.** Следующий ряд расходится при |x|≥1, хотя у функции $1/(1+x^2)$ нет никаких особенностей при $x=\pm1$. Где же у неё особенность?



$$1-x^2+x^4-x^6+\ldots=$$
$$=\frac{1}{1+x^2}\quad \text{при}\ |x|<1$$

**Ответ.** При $x=i$ функция не определена.

### 7.2.5. Ряд Тейлора.

**Определение.** Пусть функция f(x) имеет в точке $x_0$ производные любого порядка. Тогда следующий степенной ряд называется рядом Тейлора для функции f(x) в точке $x_0$:

$$\boxed{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.}$$

**Задача.** Выписать ряд Тейлора для функции $f(x)=x^3$ в точке $x_0=-2$.

**Ответ.** $-8+12(x+2)-6(x+2)^2+(x+2)^3$.

**Замечание.** Ряд Тейлора для функции f(x) не обязательно сходится к самой функции f(x). Он может расходиться в некоторых точках, или сходиться в них не к f(x). Тем не менее обычно ряд Тейлора даёт хорошее приближение к f(x) вблизи точки $x_0$.

**Определение.** Если ряд Тейлора для функции f(x) сходится к f(x) в некоторой окрестности точки $x_0$, то говорят, что функция f(x) аналитическая в окрестности точки $x_0$.

**Пример 1.** Ряд Тейлора для функции f(x)=1/x в точке $x_0$=1 имеет вид…

$$f(x) = x^{-1},\ f(1) = 1,\ f^{/}(x) = -x^{-2},\ f^{/}(1) = -1,$$

$$f^{//}(x) = 2x^{-3},\ f^{//}(1) = 2,\ldots,\ f^{(n)}(1) = (-1)^n n! \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+(x-1)^4-\ldots$$

При 0<x<2 ряд сходится к 1/x, при остальных x ряд расходится.

**Пример 2.** Нетрудно показать, что все производные функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при x} \neq 0 \\ 0 & \text{при x} = 0 \end{cases}$$

в точке x=0 равны нулю. Поэтому её ряд Тейлора в точке $x_0$=0 состоит из одних нулей. Сумма ряда из нулей равна 0 ≠ f(x)



**Поэтому в каждом конкретном случае указывают, при каких x ряд Тейлора сходится к функции f(x)**

14

### 7.2.6. Разложения основных элементарных функций в ряды Тейлора

$$1)\quad f(x) = e^x,\quad x_0 = 0$$

$$f^{(n)}(x) = e^x,\ f^{(n)}(0) = 1$$

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ x \in (-\infty, \infty).}$$

2) $f(x)=\sin x, \quad x_0=0$

$$f'(x)=\cos x,\ f''(x)=-\sin x,$$

$$f'''(x)=-\cos x,\ f^{(4)}(x)=\sin x,\ldots$$

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & \text{при } n=2k\\ (-1)^k & \text{при } n=2k+1.\end{cases}$$

$$\boxed{\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x\in(-\infty,\infty)}$$

3) $f(x)=\cos x, \quad x_0=0$

**Замечание.** Почленно дифференцируя ряд для sinx, получаем ряд для cosx:

$$\boxed{\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad x\in(-\infty,\infty)}$$



4) $f(x)=(1+x)^{\alpha}, \quad x_0=0$

$$f(x)=(1+x)^{\alpha} \Rightarrow f(0)=1,$$

$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1} \Rightarrow f'(0)=\alpha,$$

$$f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \Rightarrow f''(0)=\alpha(\alpha-1),\ldots$$

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}C_{\alpha}^{n}x^n,$$

$$C_{\alpha}^{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}, \qquad |x|<1.$$

$$(a+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}C_{\alpha}^{n}a^{\alpha-n}x^n, \qquad |x|<|a|.$$

Следствие

**Примеры**

$$(1+x)^4=1+4x+\frac{4\cdot 3}{2}x^2+\frac{4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 3}x^3+\frac{4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 3\cdot 4}x^4=$$
$$=1+4x+6x^2+4x^3+x^4, \quad (-\infty,+\infty)$$

$$\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\ldots, \ |x|<1.$$

$$\sqrt{1+x}=(1+x)^{1/2}=1+\frac{x}{2}-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\ldots,$$

$|x|<1$

5) $f(x) = \ln(1+x), \quad x_0 = 0$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n dt \Rightarrow$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \le 1.$$

### 7.2.7. Приложения степенных рядов

### *7.2.7.1 Вычисление приближённого значения функции*

**Задача.** Вычислить sin $80^0$ , взяв 3 члена разложения по формуле Тейлора.

**Решение.** Первые несколько слагаемых ряда Тейлора дают хорошее приближение, если x близко к $x_0$. В нашем случае $x=80^0$. Какое взять $x_0$?

$$x = 80^0 = \frac{\pi}{180} \cdot 80 \approx 1{,}396263; \quad x_0 = \pi/2.$$

$$\sin(x_0) = 1, \quad \sin'(x_0) = 0, \quad \sin''(x_0) = -1, \ldots$$

$$\sin(80^0) \approx 1 - \frac{1}{2}\left(1{,}396263 - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(1{,}396263 - \frac{\pi}{2}\right)^4 = 0{,}98480779\ldots$$

Точное значение sin$80^0$ ≈ 0,98480768…





### *7.2.7.2 Решение уравнений*

**Задача.** Найти *три члена разложения* в ряд Тейлора вблизи точки x=0 решения y=y(x) уравнения $y^3+xy=1$.

**Решение.**

**1 способ**

$$y^3 + xy = 1, \; x = 0 \Rightarrow y^3 + 0 = 1 \Rightarrow y(0) = 1$$

$$3y^2 y' + y + xy' = 0, \; x = 0 \Rightarrow 3y^2 y' + y = 0 \Rightarrow y'(0) = 1/3$$

$$6yy'y' + 3y^2 y'' + y' + y' + xy'' = 0 \Rightarrow y''(0) =$$

$$\text{Ряд Тейлора}: 1 - \frac{1}{3}\mathrm{x} - \frac{1}{27}\mathrm{x}^2 + \ldots$$

**2 способ**

$$y = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

$$(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)^3 + x(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) = 1$$

$$3a_1 + 1 = 0 \Rightarrow a_1 = -1/3; \quad a_1^{\,2} + 3a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = -1/27; \ldots$$

### *7.2.7.3 Вычисление интегралов*

**Задача.** Выразить в форме ряда интеграл $\int_0^x \frac{dt}{1-t^9}$ и указать область сходимости

**Решение.**
$$\frac{1}{1-x^9} = 1 + x^9 + x^{18} + x^{27} + \ldots, \quad |x| < 1$$

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t^9} = x + \frac{x^{10}}{10} + \frac{x^{19}}{19} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{9n+1}}{9n+1}, \quad |x| < 1$$

**Задача.** Выразить в форме ряда интеграл $\int_0^x e^{-t^2} dt$ и указать область сходимости

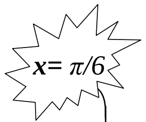
**Ответ.** $\int_0^x e^{-t^2} dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \ldots, \quad -\infty < x < \infty$

**Задача.** Написать ряд Тейлора для *arctgx* в точке 0. Используя его, выписать ряд для числа *π*.

**Решение.**

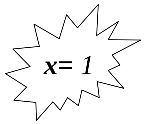
$$arctg\,x=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x \left(1-t^2+t^4-t^6+\ldots\right)dt=$$

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots,\quad |x|<1.$$




$$\pi=6\cdot arctg\frac{1}{\sqrt{3}}=6\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3\left(\sqrt{3}\right)^3}+\frac{1}{5\left(\sqrt{3}\right)^5}-\frac{1}{7\left(\sqrt{3}\right)^7}+\ldots\right)$$

**Замечание. На самом деле можно было взять и x=1, т.е. верно, что**




$$\pi=4\cdot arctg1=4\cdot\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\right)$$

### *7.2.7.4. Производящие функции*

**Задача.** Дана последовательность *1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,…* (каждый член равен сумме двух предыдущих, называется *последовательность Фибоначчи*).
Найти формулу для n-го члена.

**Решение.** $a_1=1$, $a_2=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$. Обозначим

$$f(x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots=\sum_1^\infty a_nx^n$$


Тогда $x\cdot f(x)=\ldots$, $x^2\cdot f(x)=\ldots$

$$xf(x)+x^2f(x)=a_1x^2+a_2x^3+a_3x^4+a_4x^5+\ldots$$
$$+a_1x^3+a_2x^4+a_3x^5+\ldots$$
$$=a_1x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\ldots$$

$$a_1=a_2\Rightarrow xf(x)+x^2f(x)=f(x)-x\Rightarrow f(x)=\frac{-x}{x^2-x-1}$$



*Далее, разложим на простейшие.*

$$x^2-x-1=0\Rightarrow \text{корни}\ \boxed{x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$$

$$f(x)=\frac{-x}{x^2-x-1}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}\Rightarrow -x=A_1(x-x_2)+A_2(x-x_1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_1=\frac{x_1}{x_1-x_2}=-\frac{x_1}{\sqrt{5}},\ A_2=\frac{x_2}{x_2-x_1}=\frac{x_2}{\sqrt{5}}$$

$$f(x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}=$$

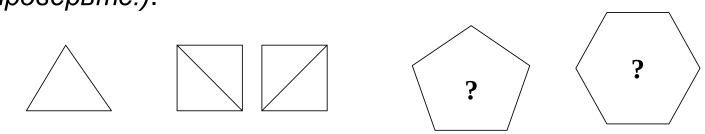
$$=-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{x_1}{x-x_1}\right)+\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{x_2}{x-x_2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-x/x_1}\right)-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-x/x_2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(1+\frac{x}{x_1}+\left(\frac{x}{x_1}\right)^2+\ldots\right)-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(1+\frac{x}{x_2}+\left(\frac{x}{x_2}\right)^2+\ldots\right).$$

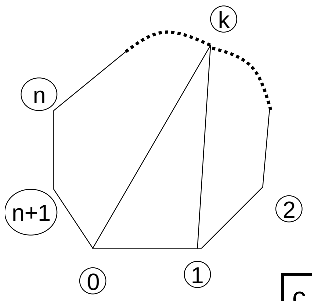
$$\boxed{a_n=\text{коэффициент при } x^n=\frac{1}{\sqrt{5}\cdot(x_1)^n}-\frac{1}{\sqrt{5}\cdot(x_2)^n}.}$$

**Задача.** *Обозначим через $c_n$ количество способов разрезать (n+2) –угольник на треугольники непересекающимися диагоналями (это так называемые числа Каталана).*
*Положим $c_0$=1. Найти формулу для $c_n$.*

**Решение.** *Для начала найдём первые несколько чисел:$c_1$=1, $c_2$=2, $c_3$=5 (проверьте!), $c_4$=14 (тоже проверьте!).*




$$\text{Обозначим}\quad f(x)=1+x+2x^2+5x^3+\ldots=\sum_{n=0}^\infty c_nx^n$$




Занумеруем вершины многоугольника против часовой стрелки, начиная от 0, и рассмотрим треугольник, содержащий сторону (0-1) и вершину, скажем, № k. Тогда справа от треугольника получается k-угольник, а слева: n–k+3 - угольник. Их можно разбить на треугольники, соответственно, $\mathbf{c}_{k-2}$ и $\mathbf{c}_{n-k+1}$ способами. Перебрав все k = 2,3,…,n+1, получаем:

$$\boxed{c_n = c_0c_{n-1} + c_1c_{n-2} + c_2c_{n-3} + \ldots + c_{n-1}c_0}$$

Справа в этом равенстве стоит коэффициент при $x^{n-1}$ в произведении

$$f(x)\cdot f(x) = (c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots)\cdot(c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots)$$

а слева – коэффициент при $x^n$ в f(x).


Отсюда видно, что

$$\boxed{x\cdot f(x)\cdot f(x) = f(x) - 1}$$

*Получилось квадратное уравнение для f:*

$$x\cdot f^2 - f + 1 = 0 \quad\Rightarrow\quad f = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1}{2x}\left(1-(1-4x)^{1/2}\right)$$

*Раскладывая квадратный корень в ряд Тейлора в точке $x_0$=0, получаем*

$$f(x) = \frac{1}{2x}\left(1-\left(1-\frac{4x}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{(4x)^2}{2!}-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{(4x)^3}{3!}-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\frac{(4x)^4}{4!}-\ldots\right)\right) =$$

$$= 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + \ldots + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot4^{n+1}}{2^{n+2}(n+1)!}x^n + \ldots$$

$$c_n = \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot4^{n+1}}{2^{n+2}(n+1)!} = \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot2^n\cdot n!}{n!\cdot(n+1)!} = \frac{2\cdot4\cdot\ldots\cdot1\cdot3\cdot\ldots}{n!\cdot(n+1)!}$$

$$\boxed{c_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}}$$

16



# Список литературы

1. Шипачёв В.С. Высшая математика. – М.: «Высш. школа», 1996.

2. Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И., Шикин Е.В., Заляпин В.И. Вся высшая математика – М.: Эдиториал УРСС, 2000-2002.

3. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М.: .: «Наука», 1987.

4. Болгов В.А., Демидович Б.П., Ефимов А.В. и др. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. – М.: .: «Наука», 1993.

## Оглавление


| | |
|---|---|
| 1. Неопределённый интеграл | 3 |
| 2. Определённый интеграл | 30 |
| 3. Приложения определённого интеграла | 40 |
| 4. Двойной интеграл | 45 |
| 5. Криволинейные интегралы | 57 |
| 6. Дифференциальные уравнения | 67 |
| 7. Ряды | 81 |
| Список литературы | 106 |





Св. план 2008 г.; поз.

Милевский Александр Станиславович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. Ч.2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.
*Конспект лекций*

Подписано в печать Формат 60x84 / 16

Заказ № Усл. печ. л. –

Тираж –

127994, Москва, ул. Образцова, 15.
Типография МИИТа