МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра “Прикладная математика–2”

А.С.МИЛЕВСКИЙ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ЧАСТЬ 3.
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Конспект лекций

МОСКВА – 2008

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра “Прикладная математика–2”

А.С.МИЛЕВСКИЙ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
ЧАСТЬ 3.
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Конспект лекций

Рекомендовано редакционно-
издательским советом
университета в качестве
конспектов лекций для
студентов ИЭФ и ИУИТ

МОСКВА – 2008

УДК-51
М-60
Милевский А.С. Высшая математика. Ч.3. Теория вероятностей: конспект лекций. – М.: МИИТ, 2008. – 105 с.
Конспект лекций предназначен для студентов, изучающих курс математического анализа в институтах ИЭФ и ИУИТ. Включает в себя материал по теории вероятностей, марковским цепям и системам массового обслуживания.

Рецензенты:
Фролов Е.Б., д.т.н., профессор МГТУ Станкин,
Деснянский В.Н., к.ф.-м.н., зав. кафедрой “Вычислительная математика” МИИТ.

Св. план 2008 г.; поз.

Милевский Александр Станиславович
ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. Ч. 3. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.
Конспект лекций

Подписано в печать Формат 60x84 / 16
Заказ № Усл. печ. л. –
Тираж –

127994, Москва, ул. Образцова,15. Типография МИИТа

1. Случайные события

Предмет теории вероятностей

Теория вероятностей изучает **случайные события**.

Случайными называются события, исход которых заранее предсказать нельзя: такое событие может произойти, а может и не произойти.

Примеры:

A: “подброшенная монета три раза подряд упадёт гербом”

B: “эта лампочка перегорит за ближайшие два часа”

Математическая модель случайных событий строится при помощи понятий

- Множество элементарных исходов Ω.
- Алгебра событий.
- Вероятность события.

Множество элементарных исходов Ω

Это понятие проще всего пояснить на примерах.

Пример

Бросили 2 игральных кубика.

Ω = {11,12,13,14,15,16,21,22,23,…}

(сколько всего элементарных исходов?)

Пример

Измерили срок службы электрической лампочки

Ω =[0,+∞)

(сколько всего элементарных исходов?)

Пример

Стрелок выстрелил по круглой мишени радиуса 10 см.

Ω = {все точки, куда может попасть пуля}

(сколько всего элементарных исходов?)

Случайные события

Всякое случайное событие представляет собой некоторое подмножество множества элементарных исходов

Пример

Бросили 2 игральных кубика.

A: “В сумме выпало 10 очков”

A = {46,55,64}

(а сколько всего исходов?)

Пример

Из колоды 36 карт достали 2 карты

A: “Обе карты – тузы”

A = {…}

(а сколько всего исходов?)

Пример

Наудачу выбрали двузначное число.

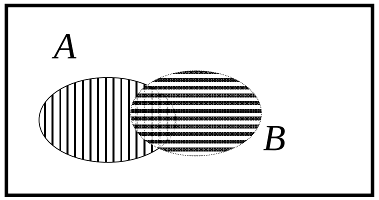
A: “Это число делится на 5”

A = {…}

(а сколько всего исходов?)

Операции над случайными событиями (алгебра событий)

Сумма событий



A+B=“A или B”

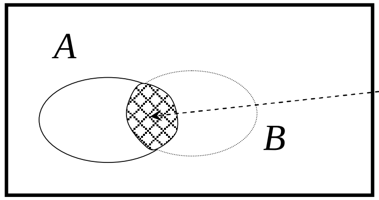
Пример:

A: “Джонсона повесят в пятницу после обеда”

B: “Джонсона повесят в субботу до обеда”

A+B = “Джонсона повесят <u>в пятницу после обеда</u> **или** <u>в субботу до обеда</u>”

Произведение событий



$A \cdot B =$ “A и B”

Пример:

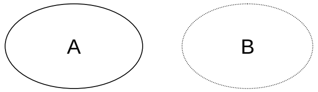
A: “Выбранное число делится на 11”

B: “Выбранное число нечётно”

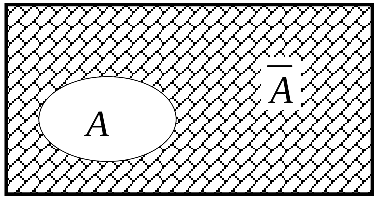
A·B= “Выбранное число <u>делится на 11</u> и <u>нечётно</u>”

Замечание

Если AB= Ø, то говорят, что события A и B **несовместны**:



Противоположное событие



$\boxed{\overline{A} = \text{"не } A\text{"}}$

Пример:

A: “Спартак выиграет у Динамо с разницей в два мяча”

Ā: “Спартак не выиграет у Динамо с разницей в два мяча”

Свойства операций над событиями

Ω – достоверное событие,

Ø– невозможное событие

$$A + B = B + A; \quad AB = BA,$$

$$(A + B) + C = A + (B + C); \quad (AB)C = A(BC),$$

$$A(B + C) = AB + AC; \quad A + BC = (A + B)(A + C)$$

$$A + \Omega = \Omega; \quad A \cdot \varnothing = \varnothing$$

$$A \cdot \Omega = A; \quad A + \varnothing = A$$

$$A + \overline{A} = \Omega; \quad A \cdot \overline{A} = \varnothing$$

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}; \quad \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$A + A = A; \quad A \cdot A = A$$

Какая закономерность?

Вероятность

Вероятность – это числовая функция P на множестве случайных событий, обладающая свойствами:

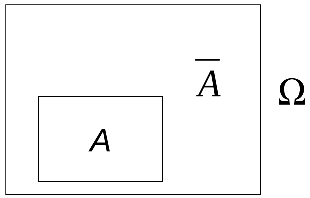
$$1)\ P(\Omega) = 1$$

$$2)\ AB = \phi \Rightarrow P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Следствия:

$$3)\ P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

$$4)\ P(\phi) = 0 \le P(A) \le 1$$



Некоторые формулы комбинаторики

Число перестановок

Это - количество способов расставить n различных предметов по порядку

P_n – число перестановок

$P_2 = 2: \quad \{ab, ba\}$

$P_3 = 6: \quad \{abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba\}$

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$$

Пример:
Сколькими способами можно за стол президиума посадить 8 человек?

$$P_8 = 8! = 40320.$$

Число размещений

Это – количество способов выбрать m различных предметов из n различных предметов <u>с учётом порядка</u>.

A_n^m – число размещений $(m \le n)$.

$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$ (всего m множителей).

Пример.

$\{a, b, c, d\}$

$A_4^0 = 1,\ A_4^1 = 4,$

$A_4^2 = 12: \{ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc\}$

$A_4^3 = ?$

Пример:
Из группы 25 человек выбирают старосту, профорга и культорга. Сколько всего способов?

$$A_{25}^3 = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800.$$

Число сочетаний

Это – количество способов выбрать m различных предметов из n различных предметов <u>без учёта порядка</u>.

C_n^m – число сочетаний $(m \le n)$.

$$C_n^m = \frac{n\cdot(n-1)n\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!}$$

Пример.
$\{a,b,c,d\}$
$C_4^0 = 1$
$C_4^2 = 6: \quad \{\mathrm{ab, ac, ad, bc, bd, cd}\}$
$C_4^3 = ?$

Пример:
Сколькими способами можно из 25 человек выбрать троих на конференцию?

$$C_{25}^3 = \frac{25\cdot24\cdot23}{1\cdot2\cdot3} = 2300.$$

Свойства числа сочетаний.

1. $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^{n-m},$
2. $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m,$
3. $\sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n.$

Бином Ньютона (a+b)ⁿ

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n =$$
$$= \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m.$$

Класическая вероятность

Если множество

1) Ω конечно и

2) элементарные исходы равновероятны,

то вероятность события A можно вычислить по **<u>формуле классической вероятности</u>**:

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

Здесь

n = |Ω| - количество всех элементарных исходов,

m = |A| - количество «благоприятных» исходов

Задача

Монету бросили два раза. Найти вероятность того, что оба раза выпадет герб.

Решение

Здесь

A: “оба раза выпадет герб”

n = … ,

m = … ,

P(A) = …

P(A)=1/4

Задача

Из колоды 36 карт достали три карты. Найти вероятность того, что они одной масти

Решение

1 способ (с учётом порядка взятия карт):
n=36·35·34,
m=36·8·7,
P(A)=…

Какой способ здесь удобнее?

2 способ (без учёта порядка взятия карт):

$$n=C_{36}^{3}=\frac{36\cdot35\cdot34}{3\cdot2\cdot1},$$

$$m=4\cdot C_{9}^{3}=...,$$

$$P(A)=...$$

Задача

Из колоды 36 карт достали четыре карты. Найти вероятности событий

- *A: все карты одной масти*
- *B: все карты разной масти*
- *C: среди них два туза, одна дама и нет червей*

Решение (A- все карты одной масти)

1 способ (с учётом порядка взятия карт):

n=36·35·34·33, m=36·8·7·6, P(A)=…

2 способ (без учёта порядка взятия карт):

$n=C_{36}^{4},\ m=4\cdot C_{9}^{4}, P(A)=...$

Решение (B - все карты разной масти)

1 способ (с учётом порядка взятия карт):

n=…, m = …, P(B)=…

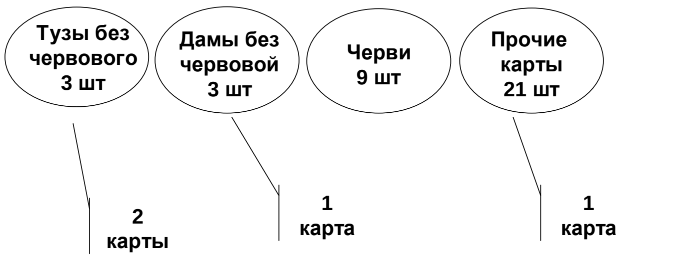
$$P(B)=\frac{36\cdot27\cdot18\cdot9}{36\cdot35\cdot34\cdot33}$$

2 способ (без учёта порядка взятия карт): этим способом здесь труднее

Решение (С - среди них два туза, одна дама и нет червей)

Эта задача решается проще, если не учитывать порядок взятия карт.

Полезно нарисовать схему



$$n = C_{36}^{4},$$
$$m = C_3^2 \cdot C_3^1 \cdot C_{21}^1 = 3 \cdot 3 \cdot 21,$$
$$P(A) = \ldots$$

Задача

В партии из 100 изделий есть 5 бракованных. Найти вероятность того, что из 10 отобранных для контроля изделий будет ровно 2 бракованных.

Решение. Нарисуйте схему и запишите ответ

$$P(A) = \frac{C_5^2 \cdot C_{95}^8}{C_{100}^{10}} \approx 0{,}2015$$

Задача

Бросили 5 игральных кубиков. Найти вероятность того, что ровно на трёх выпадут одинаковые числа

Решение

Всего исходов: n=6·6·6·6·6.

Осталось найти количество благоприятных исходов m..

1) Сначала выбираем повторяющуюся цифру: 6 способов.

2) Затем выбираем 3 места, на которых размещена эта цифра.

$$\boxed{C_5^3}$$

Затем выбираем цифры на оставшиеся 2 места: $\boxed{5 \cdot 4}$

Таким образом,

$$m = 6 \cdot C_5^3 \cdot 5 \cdot 4$$
$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6 \cdot C_5^3 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} \approx 0{,}154$$

Задача

Бросили 4 игральных кубика. Найти
Вероятности событий:
A: выпадет ровно одна пара (например, «5636»)
B: на всех выпадут разные числа

Решение

Для события A:
Всего исходов: n=…
Благоприятных исходов m=...

$$P(A) = \frac{6 \cdot C_4^2 \cdot 5 \cdot 4}{6^4} = \frac{5}{9}$$

Для события B:
Всего исходов: n=…
Благоприятных исходов m=...

$$P(B) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4} = \frac{5}{18}$$

Геометрическая вероятность

Классическая вероятность:
Если множество Ω конечно и элементарные исходы равновероятны:

то

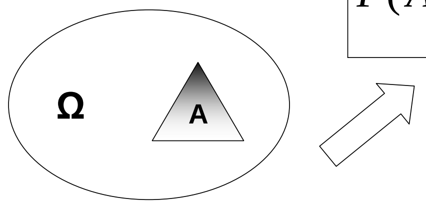
$$P(A) = \frac{m}{n}$$

- Если множество Ω бесконечно (n=∞), то эта формула неприменима!

В такой ситуации иногда можно представить Ω и событие A в виде геометрических фигур и найти вероятность P(A) как отношение длин, площадей или объёмов.

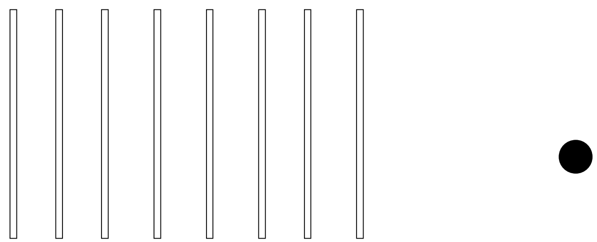
Пример:

$$P(A) = \frac{площадь(A)}{площадь(\Omega)}$$



Задача

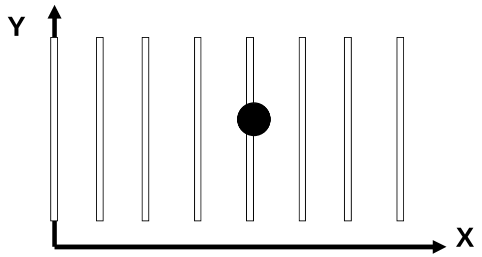
Решётка состоит из параллельных прутьев толщиной 2 см. Расстояние между осями прутьев равно 10 см. В неё бросили мяч диаметром 4 см. Найти вероятность того, что мяч ***не заденет ни одного прута***

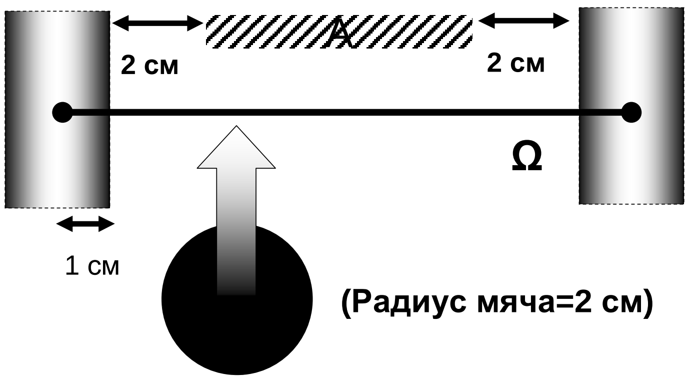


Каково здесь множество Ω?

Его удобно описывать координатами центра мяча. Точнее, координатой X, так как Y здесь роли не играет. А так как решётка периодически повторяется с шагом 10, можно считать, что

$$0 \le X \le 10$$

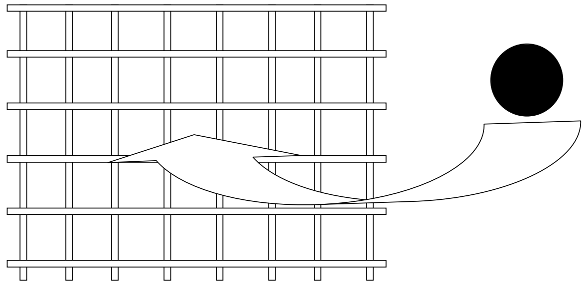




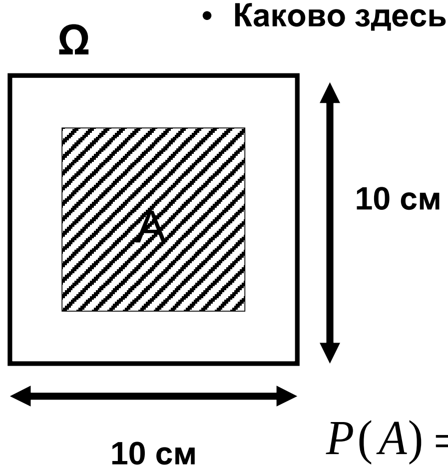
$$P(A) = \frac{длина(A)}{длина(\Omega)} = \ldots$$

Задача

То же самое, но решётка из тонких прутьев с квадратными ячейками 10x10 см. Найти вероятность того, что брошенный мяч не заденет решётку.



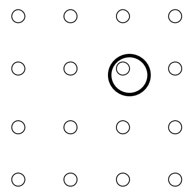
- **Каково здесь множество Ω?**



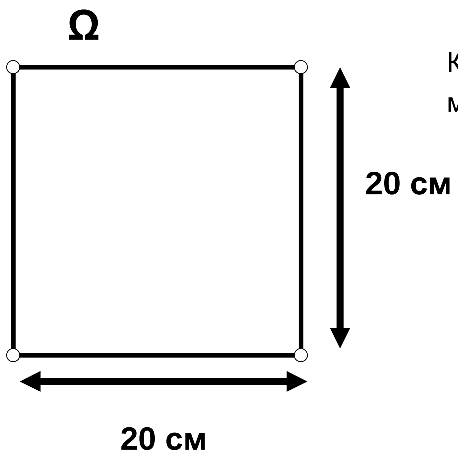
$$P(A) = \frac{площадь(A)}{площадь(\Omega)}$$

Задача

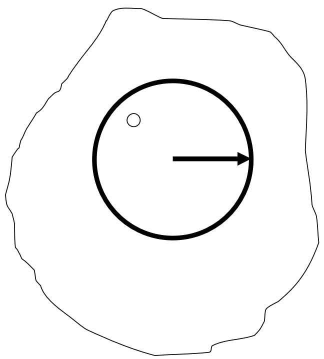
В землю вбито много тонких колышков в вершинах квадратной решётки со стороной 20 см. Случайным образом бросают обруч диаметром 10 см. Найти вероятность того, что он наденется на какой-нибудь колышек

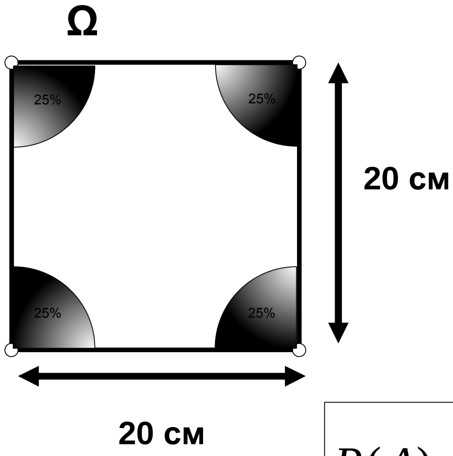


Каково здесь множество Ω?



Каково здесь множество А?





$$P(A) = \frac{площадь(A)}{площадь(\Omega)}$$

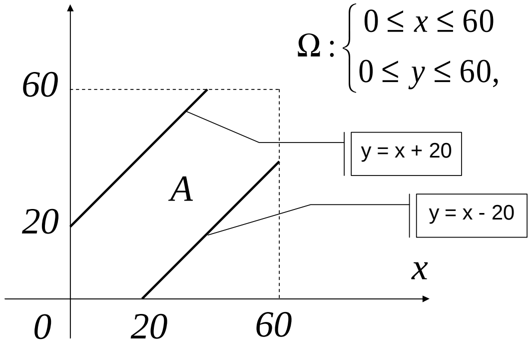
Задача.

Танечка и Ванечка договорились встретиться в следующий раз 1 апреля 2007 года у памятника Грибоедову 14 и 15 часами. Но они забыли уточнить время.

Если каждый из них придёт в случайный момент времени от 14.00 до 15.00 и будет ждать не более 20 минут, то какова вероятность встречи?

Решение.
Обозначим через X момент прихода Танечки (в минутах), Y – момент прихода Ванечки. Ясно, что $0 \le X \le 60$, $0 \le Y \le 60$. Как выглядит множество А, т.е. при каких X, Y они встретятся?

$$\Omega: \begin{cases} 0 \le x \le 60 \\ 0 \le y \le 60, \end{cases} \qquad A: \ |x - y| \le 20.$$



$$-20 \le x - y \le 20, \begin{cases} y \le x + 20 \\ y \ge x - 20. \end{cases}$$

$$P = \frac{3600-1600}{3600} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}.$$

Вероятность суммы нескольких событий

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB),$

$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

$P(A+B+C+D) = \ldots$(напишите самостоятельно)

Если события , то AB=Ø и т.п., и формулы упрощаются:

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$
$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C)$$
$$P(A+B+C+\ldots) = P(A) + P(B) + P(C) + \ldots$$

Условная вероятность.

Обозначение:
P(A|B) – вероятность события A при условии, что событие B произошло

Задача.

Из колоды 36 карт достали 2 карты.

a)Найти вероятность того, что это две дамы, если известно, что обе карты – красные.

b)Найти вероятность того, что обе карты красные, если известно, что это - дамы.

Решение:

a) Если известно, что обе карты красные, то чёрные карты из колоды брать нельзя. То есть в колоде как бы только 18 красных карт, и только один способ взять из них двух дам. Поэтому

$$P(A|B) = \frac{1}{C_{18}^2} = \frac{1}{153}$$

b) Если известно, что обе карты - дамы, то не дам брать нельзя. То есть в колоде как бы только 4 карты (все - дамы), и только один способ взять из них две красные. Поэтому

$$P(A|B) = \frac{1}{C_4^2} = \frac{1}{6}$$

В случае, если P(B)≠0, для нахождения условной вероятности также можно использовать формулу:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Независимость событий

События A и B называются независимыми, если P(A|B)=P(A)

Последнее равенство при условии P(B)≠0 можно записать в симметричной форме:

$$\boxed{\text{A и B независимы} \leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)}$$

Задача.

Кубик бросили 2 раза. Зависимы ли события

A: «в сумме 8 очков»,

B: «не было троек»?

Решение:

P(A)=P(«в сумме 8 очков»)=P({26,35,44,53,62})=…

P(B)=P(«не было троек»)=…

P(AB)= P(«в сумме 8 очков ***И*** *не было троек»)=…*

Сравните P(AB) и P(A)P(B)

Вероятности сложных событий

Задача.

В 1-ой урне 6 белых и 4 чёрных шара, во 2-ой – 3 белых и 7 чёрных. Вынимают по одному шару. Найти вероятность того, что они одинакового цвета.

Решение.

A_i – из i–й урны извлечен белый шар,

B_i – из i–й урны извлечен черный шар.

C – шары одинакого цвета.

$$\mathrm{C} = \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 + \mathrm{B}_1\mathrm{B}_2.$$

$$P(C) = P(A_1A_2) + P(B_1B_2) = 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}46.$$

Задача.

В билете три вопроса из разных тем. Вероятность ответить на первый вопрос равна 0,8, на второй 0,5, на третий – 0,3. Четвёрка ставится, если дан правильный ответ на два вопроса. Найти вероятность получить четвёрку.

Решение

Надо как-то обозначить события.

Событие A (получение четвёрки) состоит из более «мелких»:

B_1-правильно ответить на первый вопрос

B_2-правильно ответить на второй вопрос

B_3-правильно ответить на третий вопрос

Как A выражается через B_1,B_2,B_3?

A= («*ответить на* *<u>первый</u>* *и* *<u>второй</u>* *вопрос»)* или …

$A = A_1 + A_2 + A_3$

$A_1 = B_1 B_2 \overline{B_3}$

$A_2 = \overline{B_1} B_2 B_3$

$A_3 = B_1 \overline{B_2} B_3$

Совместны ли события A_1,A_2,A_3?
Зависимы ли события B_1,B_2,B_3?

$$P(A) = (\textit{так как несовместны}) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

$$P(A_1) = P(B_1 B_2 \overline{B_3}) = (\textit{так как независимы}) =$$

$$= P(B_1)P(B_2)P(\overline{B_3}) = 0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot (1 - 0{,}3) = 0{,}28$$

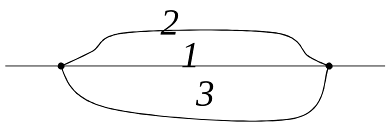
$$P(A_2) = \ldots$$

$$P(A_3) = \ldots$$

$$P(A) = 0{,}28 + \ldots$$

Задача.

p_i - вероятность того, что *i*-й путь занят.



p_1=0,1, p_2=0,2, p_3=0,3.

Найти вероятность беспрепятственного проезда.

Решение.

$$P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3) = 1 - P(\overline{A_1 + A_2 + A_3}) =$$

$$= 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}) = 1 - 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}994.$$

Задача

Два стрелка по очереди стреляют по мишени. Выигрывает тот, кто раньше попадет. Найти вероятность выигрыша 1-го. Вероятности попадания для них p_1*=0,4,* p_2*=0,7.*

Решение

A – выигрыш первого стрелка

A_i = попадание первого стрелка при его *i*-м выстреле

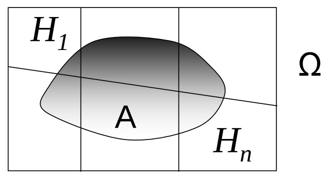
B_i = попадание второго стрелка при его *i*-м выстреле

$$A = A_1 + \overline{A}_1 \overline{B}_1 A_2 + \overline{A}_1 \overline{B}_1 \overline{A}_2 \overline{B}_2 A_3 + \ldots$$

$$P(A) = 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 + (0{,}6 \cdot 0{,}3)^2\, 0{,}4 + \ldots =$$

$$= \tfrac{0{,}4}{1 - 0{,}18} = \tfrac{20}{41}$$

Формула полной вероятности



Пусть всё множество элементарных исходов Ω представлено как объединение попарно несовместных событий-"гипотез" H_1,H_2,…H_n:

$$\Omega = H_1 + H_2 + \ldots + H_n,$$

$$H_i H_j = \varnothing \text{ для любых i, j}$$

Тогда справедлива "формула полной вероятности":

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A \mid H_i).}$$

Доказательство:

$$A = A\Omega = A\cdot(H_1 + H_2 + \ldots) = A\cdot H_1 + A\cdot H_2 + \ldots$$

$$AH_i \text{ и } AH_j \text{ несовместны} \Rightarrow$$

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + \ldots =$$
$$= P(H_1)P(A\,|\,H_1) + P(H_2)P(A\,|\,H_2) + \ldots$$

Задача:

В 1-ой урне 6 белых и 4 чёрных шара. Во 2-ой – 3 белых и 7 чёрных. Из 1-й во 2-ю переложили 1 шар и после этого из 2-й извлекают 1 шар. Какова вероятность того, что он белый?

Решение. A: извлекли белый шар

Гипотезы приходится выдвигать из-за того, что <u>неизвестен цвет переложенного шара</u>. Поэтому:

H_1: переложили белый шар;

H_2: переложили чёрный шар.

$$P(H_1) = 0{,}6, \quad P(H_2) = 0{,}4,$$
$$P(A\,|\,H_1) = \tfrac{4}{11}, \quad P(A\,|\,H_2) = \tfrac{3}{11}.$$
$$P(A) = \tfrac{6}{10}\cdot\tfrac{4}{11} + \tfrac{4}{10}\cdot\tfrac{3}{11} = \tfrac{18}{55}.$$

Задача:

Из полного набора костей домино достают 2 кости. С какой вероятностью их можно приставить друг к другу?

Решение.

A: вторую кость можно приставить к первой.

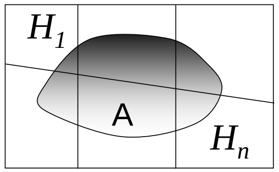
<u>Гипотезы</u> приходится выдвигать из-за того, что <u>неизвестно, разные или одинаковые числа на первой кости</u>. Поэтому:

H_1: первая кость – дубль;

H_2: первая кость – не дубль.

$$P(H_1) = \tfrac{7}{28}, \; P(H_2) = \tfrac{21}{28},$$
$$P(A\,|\,H_1) = \tfrac{6}{27}, \; P(A\,|\,H_2) = \tfrac{12}{27}.$$
$$P(A) = \tfrac{7}{28}\cdot\tfrac{6}{27} + \tfrac{21}{28}\cdot\tfrac{12}{27} = \tfrac{7}{18}.$$

Формула Байеса



Ω

Пусть всё множество элементарных исходов Ω представлено как объединение попарно несовместных событий-"гипотез" $H_1, H_2, \ldots H_n$:

$$\Omega = H_1 + H_2 + \ldots + H_n,$$
$$H_iH_j = \varnothing \text{ для любых i, j}$$

Тогда справедлива "формула Байеса":

$$P(H_i\,|\,A) = \frac{P(H_i)P(A\,|\,H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A\,|\,H_i)}{P(H_1)P(A\,|\,H_1) + P(H_2)P(A\,|\,H_2) + \ldots}$$

Задача:

Из 1-й урны (6 белых и 4 чёрных шара) переложили во 2-ю (3 белых и 7 чёрных) случайно выбранный шар. После этого из 2-й извлекли 1 шар. Он оказался белым. Какова вероятность того, что переложен был тоже белый шар?

Решение. Похоже на формулу полной вероятности…
A: извлекли белый шар
Однако здесь не формула полной вероятности, так как **результат эксперимента известен!**
Требуется же определить **вероятность гипотез**.
H_1: переложили белый шар;
H_2: переложили чёрный шар.
Это – задача на формулу Байеса.
Требуется найти P**(**)

A: извлекли белый шар
H_1: переложили белый шар;
H_2: переложили чёрный шар.
$P(H_1|A)=?$

$$P(H_1)=0{,}6,\ P(H_2)=0{,}4,$$
$$P(A\,|\,H_1)=\tfrac{4}{11},\quad P(A\,|\,H_2)=\tfrac{3}{11},$$
$$P(H_1\,|\,A)=\frac{0{,}6\cdot\dfrac{4}{11}}{0{,}6\cdot\dfrac{4}{11}+0{,}4\cdot\dfrac{3}{11}}$$

Задача:

В группе из 20 студентов 4 отличника, 8 хороших студентов, 5 троечников и 3 двоечника. Отличники знают ответы на все 30 экзаменационных вопросов, хорошие - знают ответы на 25 вопросов, троечники - на 15 вопросов, а двоечники - на 5. Вызванный студент ответил на 3 вопроса и получил «отлично». Какова вероятность того, что был вызван троечник?

Решение.
Опять результат эксперимента известен!
A: студент ответил на три вопроса.
Гипотезы:
H_1: был вызван отличник;
H_2: был вызван хороший студент;
H_3: …
H_4 : …
Требуется найти P**(**)

$$P(H_1)=0{,}2;\qquad P(A\,|\,H_1)=1$$
$$P(H_2)=0{,}4;\qquad P(A\,|\,H_2)=\frac{C_{25}^3}{C_{30}^3}=0{,}567$$
$$P(H_3)=0{,}25;\qquad P(A\,|\,H_2)=\frac{C_{15}^3}{C_{30}^3}=0{,}064$$
$$P(H_4)=0{,}15;\qquad P(A\,|\,H_4)=\frac{C_5^3}{C_{30}^3}=0{,}0025$$

$$P(A)=0{,}2\cdot 1+0{,}4\cdot 0{,}567+0{,}25\cdot 0{,}064+$$
$$0{,}15\cdot 0{,}0025=0{,}4432.$$
$$P(H_3\,|\,A)=\frac{0{,}25\cdot 0{,}064}{0{,}4432}\approx 0{,}036$$

2. Случайные величины

Основные понятия

Случайной величиной (СВ) называется числовая величина, которая в процессе наблюдения *принимает* то или иное *значение*, *заранее неизвестное и зависящее от случайных обстоятельств*.

Различают *дискретные* и *непрерывные* случайные величины.

Дискретная случайная величина может принимать лишь *конечное или счетное множество значений*.
Например, число, которое выпадет при бросании игрального кубика, число покупателей, побывавших в магазине в течение дня, количество аварий на электростанциях в течение года – дискретные случайные величины.

Случайная величина, которая может принимать любые *значения из некоторого интервала*, является *непрерывной*.

Например, размер экспорта за год, месячное количество осадков, объём потребления электроэнергии – непрерывные случайные величины. Для непрерывной случайной величины вероятность того, что она примет любое конкретное значение, равна нулю. Можно лишь говорить о *вероятности попадания в заданный интервал*.

Дискретные случайные величины

Дискретную случайную величину X можно задать, указав вероятности $p_1, p_2, \ldots, p_n \ldots$, с которыми она принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Это удобно записать в виде таблицы

X	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

(первая строчка – все возможные значения, вторая – их вероятности):

Сумма вероятностей во второй строке, конечно, равна 1:

$$\boxed{\sum p_i = 1.}$$

Задача:

Бросили два игральных кубика. X – суммарное число выпавших очков. Составить закон распределения этой случайной величины (т.е. заполнить таблицу).

Решение.

Какие значения может принимать эта случайная величина? Заполните первую строку таблицы

X			…		
P			…		

Теперь надо заполнить вторую строку таблицы. Например,
P(X=4)=P(*в сумме выпало 4 очка*)=P(*13 или 22 или 31*)=…
P(X=6)=P(*в сумме выпало 6 очков*)=…
и т.д.

Ответ:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	*1/36*	*2/36*	*3/36*	*4/36*	*5/36*	*6/36*	*5/36*	*4/36*	*3/36*	*2/36*	*1/36*

Задача:

В шкатулке 3 настоящих монеты и 2 фальшивые. Достают по одной монете, пока не попадётся фальшивая. X – количество вынутых монет. Составить закон распределения этой случайной величины.

Решение.

Какие значения может принимать эта случайная величина?
Заполните первую строку таблицы.
Заполните вторую строку таблицы.
Например,
P(X=1)=P(*уже первая монета - фальшивая*)=…

$$P(X=1)=P(\phi)=\frac{2}{5},$$
$$P(X=2)=P(н,\phi)=\frac{3\cdot 2}{5\cdot 4},$$
$$P(X=3)=P(н,н,\phi)=\frac{3\cdot 2\cdot 2}{5\cdot 4\cdot 3},$$
$$P(X=4)=P(н,н,н,\phi)=\dots$$

Проверьте, равна ли сумма вероятностей единице?

Задача:

Из колоды 36 карт достали 6 карт. X – количество пик среди них. Составить закон распределения этой случайной величины.

Решение.

$$P(X=0)=\frac{C_{27}^{6}}{C_{36}^{6}}\approx 0{,}15197,$$
$$P(X=1)=\frac{C_{9}^{1}C_{27}^{5}}{C_{36}^{6}}\approx 0{,}37302,\dots$$

Ответ:

X	0	1	2	3	4	5	6
P	0,15197	0,37302	0,32437	0,12614	0,02270	0,00175	0,00004

Задача:

В лотерее всего 100 билетов. Из них 10 содержат выигрыш 100 рублей, один – 1000 рублей, остальные без выигрыша. Константин купил 2 билета. X – его выигрыш. Составить закон распределения этой случайной величины.

Решение.

Какие значения может принимать эта случайная величина?
Заполните первую строку таблицы.
Заполните вторую строку таблицы.
Например,
P(X=0)=P(*оба билета без выигрыша*)=…

Независимость дискретныхслучайных величин

Дискретные случайные величины X и Y называются **независимыми**, *если для любых a,b:*

$$P(X=a \text{ и } Y=b)=P(X=a)\cdot P(Y=b)\ (*)$$

Пример.

Из колоды 36 карт достали 2 карты. X-количество тузов, Y-количество пик среди них. Зависимы ли X и Y?

Решение:

X принимает 3 значения, Y – тоже 3. Поэтому нужно проверить 9 равенств (*). Рассмотрим, например,

$$P(X=2 \text{ и } Y=2)=(?)=P(X=2)\cdot P(Y=2)$$

Верно ли это равенство?
Чему равна левая часть?
Чему равна правая?
Какой **ответ**?

Математическое ожидание дискретной случайной величины

Для *дискретной* случайной величины X её **математическим ожиданием** (или *средним значением*) называется:

$$MX=x_1p_1+x_2p_2+\ldots$$

Если множество $\{x_1, x_2, \ldots\}$ значений X конечно, то в этой сумме будет конечное число слагаемых,
если же множество значений *счётно*, математическое ожидание вычисляется как сумма ряда.

Пример.

Из колоды в 36 достали шесть карт. Сколько в среднем среди них будет пик?
Здесь X – количество пик среди 6 карт, и требуется найти MX.

Ответ: $MX=0\cdot P(0п)+1\cdot P(1п+5др)+2\cdot P(2п+4др)+3\cdot P(3п+3др)+\ldots\approx$
$\approx 0\cdot 0{,}15197+1\cdot 0{,}37302+2\cdot 0{,}32437+3\cdot 0{,}12614+4\cdot 0{,}02207+5\cdot 0{,}00174+6\cdot 0{,}00004=1{,}5.$

Задача:

В задаче про лотерею найти <u>средний выигрыш</u> Константина на 2 билета.

Решение.

Воспользуемся таблицей для X из той задачи

X	0	100	200	1000	1100
P	0,791111	0,179798	0,009091	0,01798	0,00202

$MX = 0\cdot 0{,}791111+100\cdot 0{,}179798+200\cdot 0{,}009091+$
$+ 1000\cdot 0{,}01798+1100\cdot 0{,}00202 = 40$ (рублей)

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание константы с равно самой этой константе:
   M(c) = c
2. M(X+Y) = MX+MY
3. M(c·X) = c·MX
4. <u>Если</u> X и Y <u>независимы</u>, то
   M(XY) = MX·MY

Дисперсия
дискретной случайной величины

Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата разности между этой величиной *X* и ее математическим ожиданием *MX* т.е.

$$DX = M(X–MX)^2 = M(X^2)-(MX)^2$$

Величина $\sigma=\sqrt{DX}$ называется *стандартным отклонением.* Она, также как и дисперсия, характеризует меру «разброса» случайной величины относительно её среднего значения MX.

Пример.

X	-3	-2	1	4
P	0,5	0,1	0, 1	0,3

$$MX = (-3)\cdot 0{,}5 + (-2)\cdot 0{,}1 + 1\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}1 = -0{,}4$$

$$M(X^2) = (-3)^2\cdot 0{,}5 + (-2)^2\cdot 0{,}1 + 1^2\cdot 0{,}1 + 4^2\cdot 0{,}1 = 9{,}8$$

$$DX = M(X^2) - (MX)^2 = 9{,}8 - (-0{,}4)^2 = 9{,}64$$

$$\sigma = \sqrt{9{,}64}$$

Свойства дисперсии

1. Дисперсия константы c равна нулю!
   D(c) = 0
2. D(X+c) = DX
3. $D(c\cdot X) = c^2\cdot DX$
4. Если X и Y независимы, то
   D(X+Y) = DX + DY

Задача:

Дано: MX=3, DX=5, Y=3X-6. Найти MY,DY.

Решение.

MY=M(3X-6)=… DY=D(3x-6)=…

5

Геометрический закон распределения

«Схема Бернулли»:

Производятся повторные независимые эксперименты. В каждом эксперименте может быть либо

- ❖ **успех с вероятностью p**,

либо

- ❖ **неудача с вероятностью q = 1 – p**

Рассматривается случайная величина X=количество попыток до первого успеха. Такая величина имеет *геометрический закон распределения.* Выпишем его…

X	1 (успех сразу)	2 (успех со второй попытки)	3 (...)	...
P	?	?	?	?

X	1	2	3	...
P	p	q·p	q^2·p	...

$$P(X=k)=q^{k-1}\cdot p, \quad k=1,2,...$$
$$MX=\frac{1}{p}, \quad DX=\frac{q}{p^2}$$

Биномиальный закон распределения

«Схема Бернулли»:
Производятся повторные независимые эксперименты. В каждом эксперименте может быть либо

- **успех с вероятностью p**,

либо

- **неудача с вероятностью q = 1 – p**

Рассматривается случайная величина X=количество успехов в N экспериментах.
Такая величина имеет биномиальный закон распределения B(N,p)
Выпишем его…

X	0 (нет успехов)	1 (один успех)	2 (два успеха)	...	N
P	?	?	?	?	?

X	0	1	2	...	N
P	q^N	$N\cdot p\cdot q^{N-1}$		...	p^N

$$P(X=k)=C_N^k p^k q^{N-k}, \quad k=0,1,...,N$$
$$MX=Np, \quad DX=Npq$$

Задача:

Проверяются 10 приборов. Вероятность того, что любой отдельный прибор исправен, равна 0,9.

Найти вероятности событий:

A -- исправны ровно 8 приборов,

B -- исправны не менее 8 приборов,

C -- исправен хотя бы один прибор.

Решение:

$$P(X=8)=C_{10}^8 0{,}9^8 0{,}1^2=45\cdot 0{,}9^8\cdot 0{,}01\approx 0{,}19371.$$

$$P(X\geq 8)=P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)\approx 0{,}92981.$$

$$P(X>0)=1-P(X=0)=1-C_{10}^0 0{,}1^{10}=0{,}9999999999.$$

Замечание.

Вычисления по формуле Бернулли могут оказаться очень громоздкими.

Например, вероятность того, что из 100 бросаний монеты выпадет ровно 50 гербов, по этой формуле равна

$$P(X=50)=C_{100}^{50}\left(\frac{1}{2}\right)^{50}\left(\frac{1}{2}\right)^{50}=$$
$$=\frac{100\cdot 99\cdot\ldots\cdot 51}{50\cdot 49\cdot\ldots\cdot 1}\cdot\frac{1}{2^{100}}\approx ?$$

Как это **реально вычислить?**

Существуют различные приближённые формулы, которые будут приведены позже. Одна из них связана с *законом Пуассона*. Две другие – *формулы Муавра-Лапласа* – тоже будут приведены позже.

Закон распределения Пуассона

X	0	1	2	3	4	…
P	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	…

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\qquad k=0,1,2\ldots$$
$$MX=\lambda,\qquad DX=\lambda$$

Число λ>0 – параметр закона Пуассона.

В качестве примера покажем, *как получается формула для математического ожидания*:

$$MX=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot P(X=k)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=$$
$$=e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=(\text{замена } \mathrm{m=k-1})=$$
$$=\lambda e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda.$$

Замечание.

Одно из основных приложений закона Пуассона – он даёт приближённые значения вероятностей биномиального закона при большом числе испытаний и малой вероятности успеха в каждом испытании.

А именно:

Пусть в схеме Бернулли N велико, а p мало. Тогда

$$P(X=k)=C_N^k p^k q^{N-k}\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$
$$\lambda=Np$$

Вот как доказывается эта теорема:

$$\lim_{N\to\infty} P(X=k) = \lim_{N\to\infty} C_N^k p^k q^{N-k} = (p = \frac{\lambda}{N}, q = 1-p) =$$
$$= \lim_{N\to\infty} \frac{N!}{k!(N-k)!}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^k \cdot (1-\tfrac{\lambda}{N})^{N-k} =$$
$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{N\to\infty} \frac{N\cdot(N-1)\cdot\ldots\cdot(N-k+1)}{N^k} \cdot (1-\tfrac{\lambda}{N})^{N-k} =$$
$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{N\to\infty} 1\cdot(1-\tfrac{1}{N})\cdot\ldots\cdot(1-\tfrac{k-1}{N}) \cdot \lim_{N\to\infty}[(1-\tfrac{\lambda}{N})^{-\frac{N}{\lambda}}]^{-\frac{\lambda}{N}(N-k)} =$$
$$= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Другое важное приложение –

“*Пуассоновский поток событий*”:

Здесь число λ – плотность потока – означает *среднее количество событий в единицу времени*.

$$P(k \text{ событий за время } \Delta t) =$$
$$= P_{\Delta t}(k) = \frac{(\lambda \Delta t)^k}{k!} e^{-\lambda \Delta t}, k = 0,1,2,\ldots$$

Задача.

В диспетчерскую поступает в среднем 20 заявок в час.
Найти вероятности событий:

А: за 15 минут поступит не менее 2-х, но не более 4-х заявок,

В : за 12 минут поступит хотя бы одна заявка.

Решение:

$$A:\ \lambda = 20 \text{ (заявок/час)}, \quad \Delta t = \tfrac{1}{4} \text{часа} \Rightarrow \lambda\cdot\Delta t = 5.$$
$$P(A) = P_{\Delta t}(2) + P_{\Delta t}(3) + P_{\Delta t}(4) =$$
$$= (\tfrac{5^2}{2} + \tfrac{5^3}{6} + \tfrac{5^4}{24}) \cdot e^{-5} \approx 0{,}3978.$$
$$B:\ \lambda = 20 \text{ (заявок/час)}, \quad \Delta t = \tfrac{1}{5} \text{часа} \Rightarrow \lambda\cdot\Delta t = 4$$
$$P(B) = P_{\Delta t}(k \geq 1) = 1 - P_{\Delta t}(0) = 1 - e^{-4} \approx$$
$$= 1 - 0{,}0183 = 0{,}9817.$$

Непрерывные случайные величины

Напомним, что *непрерывная случайная величина* может принимать ***любые значения из некоторого интервала***.

Для непрерывной случайной величины вероятность того, что она примет любое конкретное значение, равна нулю! Можно лишь говорить о *вероятности попадания в заданный интервал.*

Поэтому непрерывную случайную величину нельзя описать таблицей её значений. Вместо этого применяют

- *функцию распределения (обозначается F(x))*, либо
- *плотность распределения (обозначается f(x))*.

Функция распределения

$$\boxed{F(x) = P(X < x).}$$

Свойства F(x):

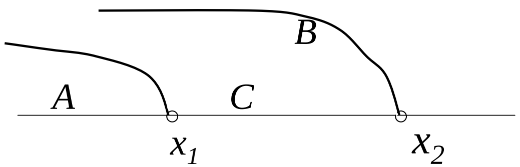
1) $0 \le F(x) \le 1$
2) F(x) – неубывающая функция
3) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0, \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1,$
4) F(x) – ”ступенчатая” для дискретной и непрерывная для непрерывной случайной величины X

А вот как вычисляются вероятности при помощи функции распределения:

Пусть $x_1 \le x_2$. Обозначим события

A: $X < x_1$

B: $X < x_2$



Тогда $F(x_1)=P(A)$, $F(x_2)=P(B)$, B=A+C, где

C: $x_1 \le X < x_2$. Поэтому

$$\boxed{P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)}$$

Замечание

Если случайная величина X – непрерывная, то $P(X=x_1)=P(X=x_2)=0$, так что <u>для непрерывных величин</u>:

$$P(x_1 \le X \le x_2) = P(x_1 < X \le x_2) =$$
$$P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 \le X < x_2) =$$
$$= F(x_2) - F(x_1)$$

В то время как <u>для дискретных</u> верно лишь, что:

$$\boxed{P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)}$$

Замечание

Надо отметить, что функция распределения (в отличие от плотности), имеет смысл и для дискретных случайных величин. Рассмотрим пример.

Пример.

Найти функцию распределения для дискретной с.в. X

X	– 2	0	1
P	0,6	0,1	0, 3

Решение.

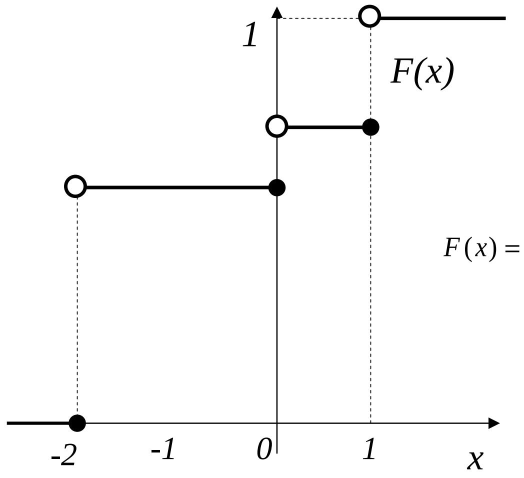
Сначала стоит найти несколько значений “на пробу”.

Вычислите, например, $F(–1) = P(X < –1) = ?$

При каких x функция F(x) будет принимать то же значение?

А чему равно F(1) = P(…)?

F(0,5) = P(…) =?



$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le -2 \\ 0{,}6 & \text{при } -2<x\le 0 \\ 0{,}7 & \text{при } 0<x\le 1 \\ 1 & \text{при } 1<x \end{cases}$$

Плотность распределения

$$\boxed{f(x)=F'(x).}$$

Плотность распределения имеет смысл <u>только для описания непрерывных</u> случайных величин.

Её свойства легко получить из свойств функции распределения F(x).

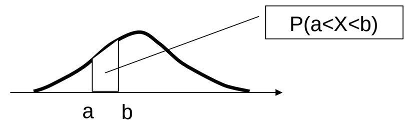
Например, из того, что F(x) *неубывающая* следует, что её производная f(x) *неотрицательна*.

Свойства плотности распределения f(x)

1. $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt,$
2. $f(x)\ge 0\,,$
3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1,$
4. $P(a \overset{<}{\le} X \overset{<}{\le} b)=\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$

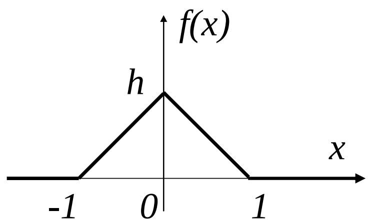
Третье свойство означает, что полная площадь под графиком плотности равна 1:

Четвёртое свойство означает, что *вероятность* равна *площади* под графиком плотности:



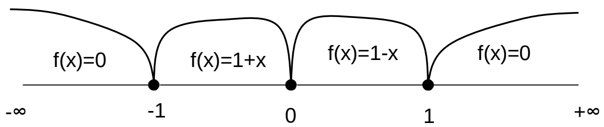
Задача.

Плотность задана графиком. Найти h, написать выражения для f(x), F(x) и найти P(– 0,5 < X < 0,5).



Решение:
По свойству плотности S=1, следовательно h=…

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<-1 \\ 1+x & \text{при } -1\le x<0 \\ 1-x & \text{при } 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{при } x>1 \end{cases}$$



$$x \le -1: \; F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0.$$

$$-1 < x \le 0: \; F(x) = \int_{-\infty}^{x} = \int_{-\infty}^{-1} + \int_{1}^{x} = \int_{-1}^{x} (1+t)dt = \tfrac{(1+t)^2}{2}\Big|_{-1}^{x} = \tfrac{x^2}{2} + x + \tfrac{1}{2},$$

$$0 < x \le 1: \; F(x) = \ldots = \tfrac{1}{2} + \int_{0}^{x} (1-t)dt = \tfrac{1}{2} - \tfrac{(1-t)^2}{2}\Big|_{0}^{x} = -\tfrac{x^2}{2} + x + \tfrac{1}{2},$$

$$x > 1: \; F(x) = \int_{-\infty}^{x} = \int_{-\infty}^{-1} + \int_{-1}^{0} + \int_{0}^{1} + \int_{1}^{x} = \ldots = 1$$

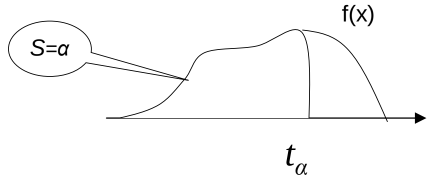
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < -1 \\ \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} & \text{при} \; -1 \le x < 0 \\ -\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} & \text{при} \; 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{при} \quad x > 1 \end{cases}$$

$$P(-0{,}5 < X < 0{,}5) = \int_{-0{,}5}^{0{,}5} f(x)dx =$$

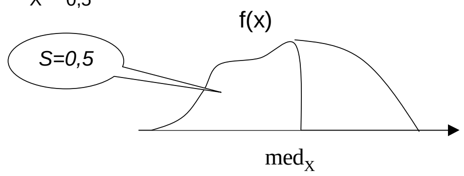
$$= \int_{-0{,}5}^{0} (x+1)dx + \int_{0}^{0{,}5} (1-x)dx = \ldots$$

Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Квантиль уровня α : $P(X < t_\alpha) = \alpha$

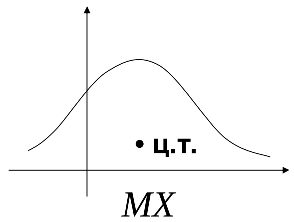


Медиана: $med_X = t_{0,5}$



Математическое ожидание

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

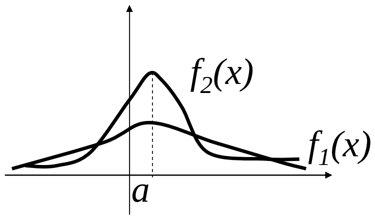


Дисперсия

$$DX = M(X - MX)^2 = M\left(X^2\right) - \left(MX\right)^2$$

$$M\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$$

$$MX_1 = MX_2 = a,$$
$$DX_1 > DX_2.$$



Задача. *Найти* MX *и* DX *для распределения из предыдущего примера.*

$$MX = \int_{-\infty}^{-1} 0dx + \int_{-1}^{0} x(1+x)dx + \int_{0}^{1} x(1-x)dx + \int_{1}^{\infty} 0dx =$$

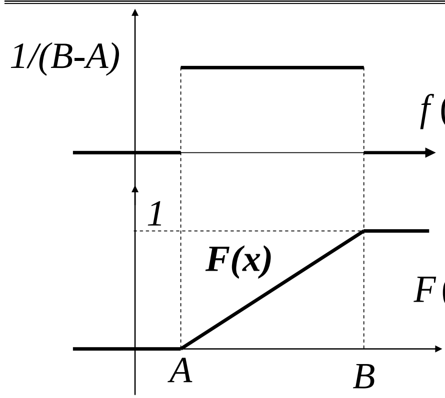
$$= \left(\tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{1} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} = 0.$$

$$M\left(X\right)^2 = \int_{-1}^{0} x^2(1+x)dx + \int_{0}^{1} x^2(1-x)dx =$$

$$= \left(\tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^4}{4}\right)\Big|_{0}^{1} = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{6},$$

$$DX = M\left(X\right)^2 - (MX)^2 = \tfrac{1}{6}.$$

Равномерное на отрезке распределение R(A,B)



$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < A \\ \frac{1}{B-A}, & A \le x \le B \\ 0, & x > B \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < A \\ \frac{x-A}{B-A}, & A \le x \le B \\ 1, & x > B \end{cases}$$

$$\boxed{P(a \le X < b) = \tfrac{b-a}{B-A} \text{ при } A \le a \le b \le \text{B}.}$$

$$MX = \tfrac{A+B}{2},$$

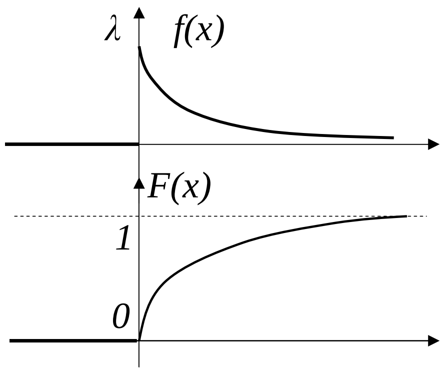
$$DX = \int_A^B \left(x - \tfrac{A+B}{2}\right)^2 \tfrac{1}{B-A}dx = \frac{\left(x - \frac{A+B}{2}\right)^3}{3(B-A)}\Big|_A^B =$$

$$= \frac{(B-A)^2}{12}.$$

Пример. *Интервал движения автобуса 20 минут. Найти вероятность того, что его придется ждать не менее 5, но не более 12 минут.*

$$P(5 \le X \le 12) = \frac{12-5}{20} = 0{,}35.$$

Показательное распределение E(λ)



$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

$\lambda>0.$

$$\boxed{P(a\le X<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}\ \text{при}\ 0\le a\le b}$$

$$\boxed{MX=\lambda\int_0^{+\infty}xe^{-\lambda x}dx=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}dx= =-\tfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}=\tfrac{1}{\lambda}.}$$

$$MX^2=\lambda\int_0^{+\infty}x^2e^{-\lambda x}dx=-x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}xe^{-\lambda x}dx=$$

$$=\tfrac{2}{\lambda^2}.$$

$$\boxed{DX=MX^2-(MX)^2=\tfrac{2}{\lambda^2}-\tfrac{1}{\lambda^2}=\tfrac{1}{\lambda^2}.}$$

Пример. *Имеется простейший пуассоновский поток с плотностью потока λ, Найти закон распределения времени ожидания T следующего события.*

$$F(t)=P(T<t)=P_t(k\ge 1)=1-P_t(0)=$$

$$1-\frac{(\lambda t)^0}{0!}e^{-\lambda t}=1-e^{-\lambda t},\quad t>0.$$

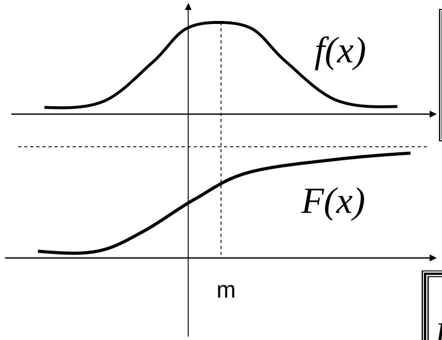
$$f(t)=F'(t)=\lambda e^{-\lambda t},\quad t>0.$$

Пример. *При плотности потока λ=20 заявок в час найти вероятность того, что ждать следующую придется не менее 12 мин. (См. предыдущий пример).*

$$P(T\ge 0{,}2)=1-P(T<0{,}2)=1-F(0{,}2)=$$

$$=1-1+e^{-20\cdot 0{,}2}=e^{-4}=0{,}0183$$

Нормальноераспределение N(m,σ)



$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}dt$$

$$MX=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma t+m)e^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

$$=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{m}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=m.$$

$$DX=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^2t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

$$\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}tte^{-\frac{t^2}{2}}dt=\left|\begin{matrix}u=t\\ dv=te^{-\frac{t^2}{2}}dt\end{matrix}\right|\begin{matrix}du=dt\\ v=-e^{-\frac{t^2}{2}}\end{matrix}\right|=$$

$$-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}te^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sigma^2.$$

Замена переменной позволяет преобразовать выражение для F(x):

$$\frac{x-m}{\sigma}=t,\ \ x=\sigma t+m,\ \ dx=\sigma dt,\ \ t\in\left(-\infty,\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

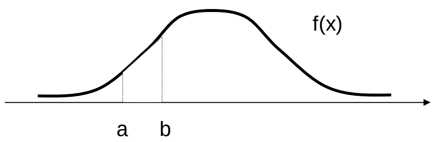
Функция Лапласа Φ(x)

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Свойство: Φ(–x)=1–Φ(x)

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
Φ(x)	0.5	05398	0.5793	0.6179	0.6554	0.6915
x	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1
Φ(x)	0.7257	0.7580	0.7881	0.8159	0.8413	0.8643
x	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7
Φ(x)	0.8849	0.9032	0.9192	0.9332	0.9452	0.9554
x	1.8	1.9	2.0	2.2	2.4	2.6
Φ(x)	0.9641	0.9713	0.9772	0.9861	0.9918	0.9953
x	2.8	3.0	3.4	3.6	3.8	4
Φ(x)	0.9974	0.9984	0.9997	0.9998	0.9999	≈1

$$\boxed{P(a \le X < b) = \Phi\left(\tfrac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\tfrac{a-m}{\sigma}\right)}$$



Важное замечание.
В литературе встречается также <u>другая функция Лапласа</u>:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Она связана с “нашей” формулой

$$\Phi_{\text{"наша"}}(x) = \Phi_{\text{"другая"}}(x) + 0{,}5$$

Пример: Систематическая ошибка измерения $a=5$ ед., а среднеквадратическая $\sigma=20$ ед. Найти вероятность того, что ошибка измерения по модулю не превзойдет 10 ед.

$$P(|X| \le 10) = P(-10 \le X \le 10) =$$
$$= \Phi\left(\tfrac{10-5}{20}\right) - \Phi\left(\tfrac{-10-5}{20}\right) = \Phi\left(\tfrac{5}{20}\right) - \Phi\left(\tfrac{-15}{20}\right) =$$
$$= \Phi\left(\tfrac{5}{20}\right) - 1 + \Phi\left(\tfrac{15}{20}\right) = 0{,}3021.$$

Правило “трёх сигм”.

$$P(m - 3\sigma \le X \le m + 3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(-3) =$$
$$= \Phi(3) - 1 + \Phi(3) = 2 \cdot 0{,}9984 - 1 = 0{,}9968.$$

Неравенства Чебышева

Теорема (первое неравенство Чебышева). Если случайная величина X неотрицательна и существует MX, то для любого ε>0 верно неравенство

$$\boxed{P(X \ge \varepsilon) \le \frac{MX}{\varepsilon}}$$

Доказательство. Рассмотрим только случай непрерывной с.в. X.

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = (\text{так как } X \ge 0) = \int_0^{\infty} x \cdot f(x)dx \ge$$
$$\ge \int_{\varepsilon}^{\infty} x \cdot f(x)dx \ge \int_{\varepsilon}^{\infty} \varepsilon \cdot f(x)dx = \varepsilon \cdot P(X \ge \varepsilon)$$

Следствие(второе неравенство Чебышева).
Если для случайной величины X существуют MX и DX, то для любого ε>0 верно неравенство

$$\boxed{P(|X - MX| \ge \varepsilon) \le \frac{DX}{\varepsilon^2}}$$

Доказательство. Применим предыдущее неравенство к случайной величине Y=|X – MX|.

$$P(Y \ge \varepsilon) = P(|X - MX| \ge \varepsilon) = P\left((X - MX)^2 \ge \varepsilon^2\right) \le$$
$$\le \frac{M\left((X - MX)^2\right)}{\varepsilon^2} = \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

Пример.

$$P\left(\left| X - MX \right| \geq 3\sigma\right) \leq \frac{DX}{9\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{9\sigma^2} = \frac{1}{9}.$$

(ср. с нормальным законом).

Предел последовательности случайных величин

Определение. Последовательность случайных величин X_1, X_2, X_3, … называется *сходящейся к случайной величине X по вероятности при n→∞*, если для любого ε>0

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P\left(\left|X_n - X\right| \geq \varepsilon\right) = 0.}$$

Обозначается это так:

$$\boxed{X_n \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\longrightarrow}} X}$$

Теорема Чебышева (закон больших чисел)

Теорема. *Если выполнены условия*

1. *Случайные величины X_1, X_2, X_3, … попарно независимы;*
2. *DX_i<C для любого i,*

то последовательность их средних арифметических сходится среднему арифметическому их математических ожиданий:

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\longrightarrow}} \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} MX_i}$$

Замечание. Эта теорема подсказывает путь “экспериментального”, статистического определения MX. Пусть X – некоторая случайная величина. Измерим её n раз, пусть X_i – результат i-го измерения. Тогда

$$\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\longrightarrow}} MX$$

В частности, имеет место следующая теорема:

Теорема Бернулли. *Частота успехов в n испытаниях в схеме Бернулли сходится по вероятности к вероятности успеха в одном испытании:*

$$\boxed{\nu = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\longrightarrow}} p}$$

Например, если n раз подбросить кубик, n→∞, то количество выпадений шестёрки будет стремиться к **n/6** по вероятности.

Центральная предельная теорема

Пусть есть последовательность попарно независимых одинаково распределённых случайных величин { X_i}, (i =1,2,…) … Так как они одинаково распределены, то у всех одинаковые математическое ожидание =m и дисперсия = σ^2.Обозначим

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

Вычислим

$$M\overline{X}_n = \frac{1}{n} M\left(X_1 + \ldots + X_n\right) = \frac{1}{n}\left(MX_1 + \ldots + MX_n\right) = \frac{nm}{n} = m$$

$$D\overline{X}_n = \frac{1}{n^2} D\left(X_1 + \ldots + X_n\right) = \frac{1}{n^2}\left(DX_1 + DX_2 + \ldots + DX_n\right) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Обозначим $Y_n = \dfrac{\overline{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}}.$

Тогда

$$MY_n = 0, \quad DY_n = D\frac{\overline{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{n}{\sigma^2} D\overline{X}_n = 1$$

Центральная предельная теорема. *В указанных обозначениях при любом x*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

где $F_n(x)$ – функция распределения Y_n.

Говоря несколько упрощённо, эта теорема утверждает, что закон распределения средних арифметических при большом числе слагаемых “стремится” к нормальному закону !

Формулы Муавра-Лапласа

Пусть X – число успехов в N независимых испытаниях в схеме Бернулли, p – вероятность успеха в одном испытании. Тогда X распределена по биномиальному закону и

$$\boxed{P(X = k) = C_N^k p^k q^{N-k}, \quad k = 0,1,\ldots,N}$$

Ранее уже отмечалось, что вычисления по этой формуле при больших k и N затруднительны и нужны приближённые формулы. Формулы Муавра-Лапласа основаны на использовании нормального закона

Локальная теорема Муавра-Лапласа. *При достаточно больших значениях Npq*

$$P\left(X_N = m\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{Npq}} e^{-\frac{x_m^2}{2}}, \; x_m = \frac{m - Np}{\sqrt{Npq}}$$

Интегральная теорема Муавра-Лапласа. *При достаточно больших значениях Npq*

$$\boxed{P\left(m_1 \le X_N < m_2\right) \approx \Phi\left(x_{m_2}\right) - \Phi\left(x_{m_1}\right)}$$

Задача. *В страховой компании застраховано 10000 автомобилей. Вероятность аварии для автомобиля равна примерно p=0,006. Каждый владелец застрахованного автомобиля платит в год 4000 рублей страховых, и получает в случае аварии 500000 рублей. Найти вероятность того, что по истечении года страховая компания окажется в убытке.*

Решение. Обозначим через X количество аварий за год. Компания окажется в убытке, если X > … (?)

$$P(X > 80) = P(80 < X_N \le 10000) \approx$$
$$\approx \Phi(x_{10000}) - \Phi(x_{80})$$

$$x_{10000} = \frac{10000 - 10000 \cdot 0{,}006}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}006 \cdot 0{,}994}} \approx 1287$$

$$x_{80} = \frac{80 - 10000 \cdot 0{,}006}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}006 \cdot 0{,}994}} \approx 2{,}6$$

$$\Phi(1287) \approx 1, \quad \Phi(2{,}6) \approx 0{,}9953$$

Итак, *вероятность убытка примерно равна* 1–0,9953=0,0047.

3. Двумерные случайные величины

Двумерные дискретные случайные величины

Таблица совместного распределения двух случайных величин.

X \ Y	y_1	y_2	. . .	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	. . .	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	. . .	p_{2n}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
x_m	p_{m1}	p_{m2}	. . .	p_{mn}

$p_{ij} = P(X = x_i; Y = y_j)$.

$\sum_{i,j} p_{ij} = 1$

Задача. *Кубик бросили 2 раза. X – количество троек, Y – наименьшее из выпавших чисел. Заполнить таблицу и найти по ней P(2X>Y), MX, MY.*

Решение.

X \ Y	1	2	3	4	5	6
0						
1						
2						

P(X=0 и Y=5)=P(“нет троек и наименьшее=5”) = …

P(X=1 и Y=2)=P(“одна тройка и наименьшее =2”) = …

X\Y	1	2	3	4	5	6
0	9/36	7/36	0	5/36	3/36	1/36
1	2/36	2/36	6/36	0	0	0
2	0	0	1/36	0	0	0

MX = 0·P(X=0)+1·P(X=1)+…=0·…

MY = 1·P(Y=0)+…=

P(2X>Y) = …

X\Y	1	2	3	4	5	6
0	9/36	7/36	0	5/36	3/36	1/36
1	2/36	2/36	6/36	0	0	0
2	0	0	1/36	0	0	0

Задача. *Дана таблица распределения двух случайных величин. Зависимы ли эти случайные величины?*

X\Y	10	20	30
-1	0,3	0,1	0,1
2	0,1	0,1	0
5	0,2	0	0,1

Напоминание:
Дискретные случайные величины X и Y называются независимыми, *если*
Для любых a и b:
P(X=a и Y=b)=P(X=a) · P(Y=b)

Решение. Будем проверять <u>для каждой клетки</u> (всего 9 равенств, до первого неверного).
1)P(X= –1 и Y=10) =?= P(X= –1) · P(Y=10)

0,3=?=0,5 · 0,6 верно.

2) P(X= –1 и Y=20) …

Коэффициент ковариации

$$\boxed{cov(X,Y) = M(XY) – MX·MY}$$

Задача. *Дана таблица распределения двух случайных величин. Вычислить коэффициент ковариации*

X\Y	1	6
-2	0,3	0,1
1	0,2	0,4

Решение. 1)MX= –2·0,4+1·0,6= –0,2

2)MY=…

3) M(XY)=(каждый X на каждый Y)= (–2)·1·0,3+ (–2)·6·0,1+…=

4)cov(X,Y)=M(XY) – MX· MY=…

Свойства коэффициента ковариации

1. Если X и Y независимы, то $cov(X,Y)=M(XY)-MX \cdot MY=0$
2. $D(X+Y) = DX+DY+2 \cdot cov(X,Y)$
3. В частности, если X и Y независимы, то $D(X+Y)=DX+DY$

Доказательство второго свойства:

$D(X+Y)=M((X+Y)^2)-(M(X+Y))^2=$
$=M(X^2 + 2XY + Y^2) - ((MX)^2 + 2MXMY + (MY)^2)=$
$=M(X^2) - (MX)^2 + M(Y^2) - (MY)^2 + 2M(XY) - 2MXMY$

Коэффициент корреляции

$$r_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY}} = \frac{M(XY) - MX \cdot MY}{\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY}}$$

Задача. *Дана таблица распределения двух случайных величин. Вычислить коэффициент корреляции*

X\Y	1	6
-2	0,3	0,1
1	0,2	0,4

Решение.

MX= – 0,2; MY=3,5; cov(X,Y)=…

$M(X^2)$=… $DX=M(X^2)-(MX)^2$=…

$M(Y^2)$=… DY=…

r_{XY}=

Свойства коэффициента корреляции

- $-1 \le \mathbf{r_{XY}} \le 1$
- Если X и Y независимы, то $r_{XY}=0$
- Чем ближе $\mathbf{r_{XY}}$ по модулю к 1, тем сильнее линейная зависимость между X и Y
- Знак $\mathbf{r_{XY}}$ совпадает со знаком этой зависимости.

Вопрос. *X – рост человека, Y – его вес. Какой знак имеет коэффициент корреляции между X и Y? Близок ли он по модулю к единице или к нулю?*

Вопрос. *Из колоды 36 карт достали 6 карт. X – количество треф среди них, Y – количество пик среди них. Какой знак имеет коэффициент корреляции между X и Y? Близок ли он по модулю к единице или к нулю?*

Линии регрессии

Если коэффициент корреляции по модулю достаточно близок к единице, можно попробовать построить линейную зависимость между X и Y в явном виде.

Можно искать зависимость в виде
$\mathbf{Y=b_0+b_1X}$ либо $\mathbf{X=c_0+c_1Y}$.

Полученные прямые называются линиями регрессии соответственно **Y на X** и **X на Y**

Формулы для линий регрессии имеют следующий вид:

$$b_1 = \frac{\operatorname{cov}(XY)}{DX}; \quad b_0 = MY - b_1 \cdot MX$$
$$c_1 = \frac{\operatorname{cov}(XY)}{DY}; \quad c_0 = MX - c_1 \cdot MY$$

Задача. *Дана таблица распределения двух случайных величин. Найти уравнение для линии регрессии Y на X*

X\Y	1	5
0	0,3	0,1
2	0,2	0,4

Решение.

MX=… MY=…

M(XY)=… cov(X,Y)=…

$M(X^2)$=… $DX=M(X^2) - (MX)^2$=…

b_1=… b_0=…

Уравнение:

Условное математическое ожидание

Задача. *Дана таблица распределения двух случайных величин. Найти условные математические ожидания*

M(X | Y=0), M(X | Y=3), M(Y | X ≥ 2)

X\Y	0	3
1	0,2	0,1
2	0,1	0,2
4	0,3	0,1

Решение.

$$M(X \mid Y=0)=\frac{1\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}1+4\cdot 0{,}3}{P(Y=0)}=\frac{1\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}1+4\cdot 0{,}3}{0{,}2+0{,}1+0{,}3}=\ldots$$

$$M(X \mid Y=3)=\frac{1\cdot 0{,}1+\ldots}{P(Y=3)}=\ldots$$

$$M(Y \mid X\ge 2)=\frac{\ldots}{\ldots}$$

Двумерные непрерывные случайные величины

<u>Одномерная</u> непрерывная с.в.

Задаётся плотностью распределения f(x)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$$

$$P(a\le X\le b)=\int_a^b f(x)dx$$

<u>Двумерная</u> непрерывная с.в.

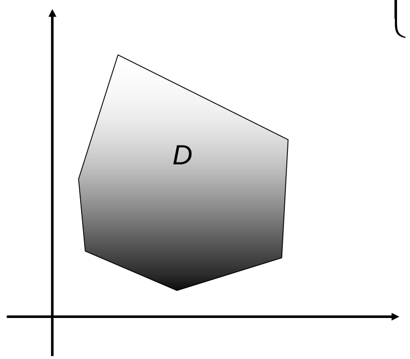
Задаётся плотностью распределения f(x,y)

$$\iint\limits_{\text{по всей плоскости}} f(x,y)dxdy=1$$

$$P((X,Y)\in A)=\iint\limits_A f(x,y)dxdy$$

Пример. Равномерный закон в области D.

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & \text{вне } D\\ \dfrac{1}{S(D)} & \text{внутри } D\end{cases}$$



Пример. Двумерный нормальный закон.

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r^2}}e^{-\frac{\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2}+\frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}-2\cdot r\cdot\frac{(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}}{2\cdot(1-r^2)}}$$

Математическое ожидание, дисперсия, коэффициент ковариации

$$MX=\iint\limits_{\text{по всей плоскости}} x\cdot f(x,y)dxdy$$

$$MY=\iint\limits_{\text{по всей плоскости}} y\cdot f(x,y)dxdy$$

$$DX=M\left(X^2\right)-(MX)^2;\ \ M\left(X^2\right)=\iint\limits_{\text{по всей плоскости}} x^2\cdot f(x,y)dxdy;$$

$$DY=M\left(Y^2\right)-(MY)^2$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=M(XY)-MX\cdot MY;\quad M(XY)=\iint\limits_{\text{по всей плоскости}} xy\cdot f(x,y)dxdy;$$

Условные математические ожидания

$$M(X\mid Y=b)=\frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x,b)dx}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,b)dx}$$

$$M(Y\mid X=a)=\ldots$$

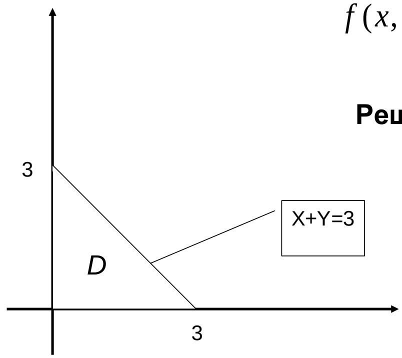
$$M(X\mid (X,Y)\in A)=\frac{\iint\limits_A x\cdot f(x,y)dxdy}{P((X,Y)\in A)}$$

$$M(Y\mid (X,Y)\in A)=\ldots$$

Задача.

Найти с, P(Y>2X), M(Y | X=2)

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & \text{вне } D\\ c(x+2y) & \text{внутри } D\end{cases}$$



Решение.

$$1=\iint f(x,y)dxdy=$$

$$=\iint\limits_D\ldots+\iint\limits_{ост}\ldots=$$

$$=\iint\limits_D c(x+2y)dxdy=\ldots$$

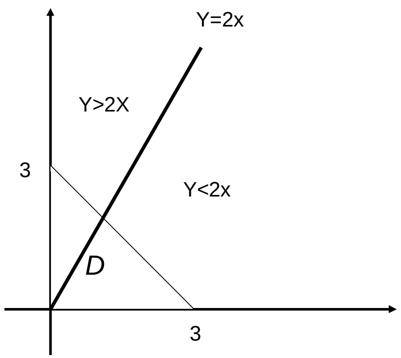
$$= c\int_0^3 dx \int_0^{3-x} dy\left(x+2y\right) = \dots$$

$$= c\int_0^3 dx(xy+y^2)\Big|_0^{3\text{-}x} = c\int_0^3 dx\left(3x - x^2 + (x-3)^2\right) = \dots$$

$$= c\cdot\left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{(x-3)^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = c\cdot\left(\frac{27}{2} - 9 + 9\right) = c\cdot\frac{27}{2}$$

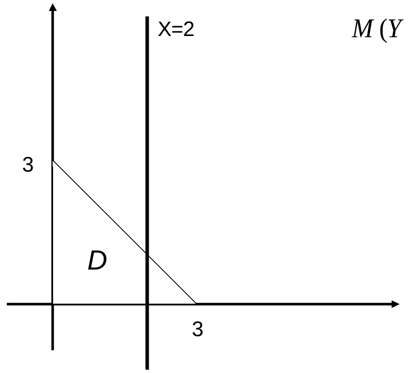
$$c = \frac{2}{27}$$

$$P(Y > 2X) = \iint\limits_{\{Y>2X\}} f(x,y)\,dxdy = \dots$$



$$= \frac{2}{27}\int_0^1 dx \int_{2x}^{3-x} dy\left(x+2y\right) =$$

$$= \frac{2}{27}\int_0^1 dx(xy+y^2)\Big|_{2x}^{3-x} = \dots$$



$$M(Y \mid X = 2) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot f(2,y)dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(2,y)dy} = \dots$$

$$= \frac{\frac{2}{27}\int_0^1 y\cdot(2+2y)dy}{\frac{2}{27}\int_0^1 (2+2y)dy} = \dots$$

4. Марковские цепи с конечным множеством состояний и дискретным временем

Основные понятия

- Цепь в каждый момент времени может находиться только в одном из состояний $E_1, E_2, \dots, E_n$.
- Переходы из одного состояния в другое могут происходить только в моменты времени t=1,2,3…
- Если система в момент времени t находится в состоянии E_i, то вероятность оказаться в состоянии E_j в момент времени t+1 не зависит от t и равна p_{ij}

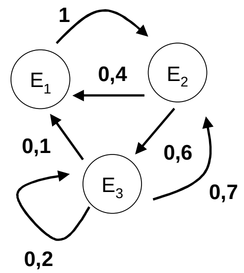
Описание марковской цепи с дискретным временем

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрица переходных вероятностей за 1 шаг

Задача

Выписать матрицу переходных вероятностей для марковской цепи, заданной графом:



$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

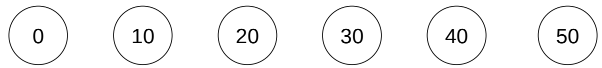
Свойство матрицы переходных вероятностей:

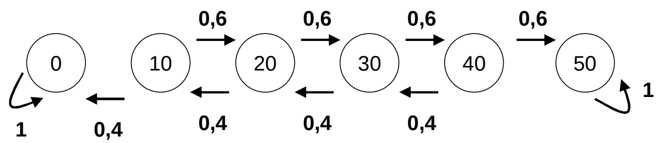
Сумма чисел в любой строке равна 1

Задача

Алиса и Боб играют матч в настольный теннис. Ставка в каждой партии 10 пенсов. В начале у Алисы есть 30 пенсов, у Боба – 20 пенсов. Вероятность выигрыша партии для Боба равна 0,6, ничьих нет. Нарисовать граф для этой марковской цепи.

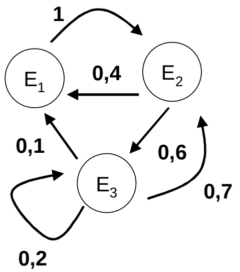
Решение. *Сколько всего состояний и какие?*





Задача

Сейчас цепь находится в состоянии E_3. Найти вероятность оказаться в E_1 через три шага.



Решение

P_{31}(3 шага) = 0,2 · 0,7 · 0,4 + …

Ответ. P_{31}(3 шага) = 0,2 · 0,7 · 0,4 + + 0,2 · 0,2 · 0,1 + 0,1 · 1 · 0,4 + + 0,7 ·0,6 · 0,1 = 0,142

Теорема.

Матрица переходных вероятностей за m шагов находится по формуле

$$\boxed{P(m) = P^m = P\cdot P\cdot\ldots\cdot P}$$

Задача

Найти матрицу переходных вероятностей за 3 шага

Решение

$$P(3) = P^3 = P^2 \cdot P$$

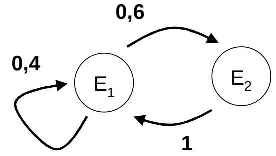
$$P^2 = P \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \end{pmatrix} = \ldots$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0,06 & 0,82 & 0,12 \\ 0,3 & 0,24 & 0,46 \end{pmatrix}$$

$$P^3 = P^2 \cdot P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0,06 & 0,82 & 0,12 \\ 0,3 & 0,24 & 0,46 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} 0,06 & 0,82 & 0,12 \\ 0,34 & 0,144 & 0,516 \\ 0,142 & 0,622 & 0,236 \end{pmatrix}$$

Задача

Сейчас система находится в состоянии E_2. Найти самое вероятное состояние через 4 шага.



Решение

$$P(4) = P^4 = P^2 \cdot P^2$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} 0,76 & 0,24 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

$$P^4 = \begin{pmatrix} 0,76 & 0,24 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,76 & 0,24 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,674 & 0,326 \\ 0,544 & 0,456 \end{pmatrix}$$

Ответ. Самое вероятное состояние – E_1.

$$\boxed{q = (q_1, \quad q_2, \quad \ldots, \quad q_n)}$$

Вектор вероятностей состояний

Свойство вектора вероятностей состояний:

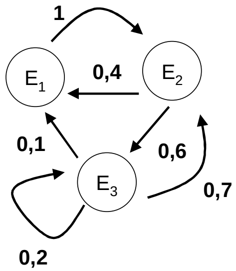
Сумма всех q_j равна 1

Теорема. *Вектор вероятностей состояний через m шагов находится по формуле*

$$\boxed{q(m) = q \cdot P^m}$$

Задача

Сейчас все состояния равновероятны. Найти самое вероятное состояние через 3 шага.



Решение.

q(0)=(1/3;1/3;1/3), q(3)=?

$$q(3\ шага) = q(0)\cdot P^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}06 & 0{,}82 & 0{,}12 \\ 0{,}34 & 0{,}144 & 0{,}516 \\ 0{,}142 & 0{,}622 & 0{,}236 \end{pmatrix} =$$

$$q(3\ шага) = (0{,}181 \quad 0{,}528 \quad 0{,}291)$$

Эргодические цепи

Наибольший интерес обычно представляет поведение марковской цепи за <u>большое</u> количество шагов. Это требует возведения матриц в высокие степени, что сложно.
Но есть цепи, для которых ситуация при большом числе шагов напротив, упрощается.

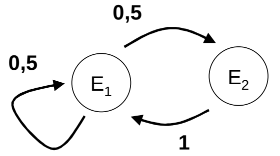
Марковская цепь с дискретным временем называется **эргодической** (или регулярной), если:
❖ Для любого начального вектора q(0) существует предел

$$\lim_{n\to\infty} q(n) = q*$$

❖Это предел не зависит от q(0)

Пример.

Рассмотрим эту цепь Маркова.
Пусть q(0)=(0;1). Тогда



q(0)=(0;1)
q(1)=(1;0)
…

q(∞)=(2/3;1/3)

Пусть теперь q(0)=(1;0). Тогда

q(1)=(1/2;1/2)
q(2)=(3/4;1/4)
q(3)=(5/8;3/8)
…

q(∞)=(2/3;1/3)

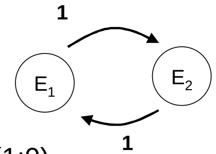
Пусть теперь q(0)=(2/5;3/5). Тогда

q(1)=(4/5;1/5)
q(2)=(3/5;2/5)
q(3)=(7/10;3/10)
…

q(∞)=(2/3;1/3)

Пример.

Рассмотрим эту цепь Маркова.
Пусть q(0)=(0;1). Тогда

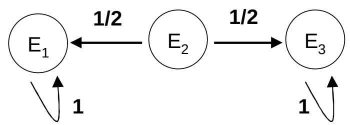


q(0)=(0;1), q(1)=(1;0), q(2)=(0;1), q(3)=(1;0), …

Предел не существует. Цепь не эргодична.

Пример.

Рассмотрим эту цепь Маркова.
Пусть q(0)=(1;0;0). Тогда



q(1)=(1;0;0)
q(2)=(1;0;0)
…

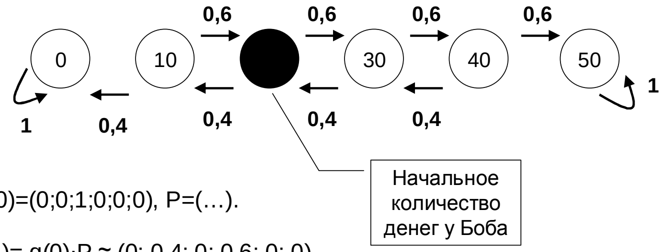
q(∞)=(1;0;0)

Пусть теперь q(0)=(0;0;1). Тогда

q(∞)=(0;0;1)

Предел зависит от q(0), так что цепь не эргодична

Пример (Алиса и Боб)



q(0)=(0;0;1;0;0;0), P=(…).

q(1)= q(0)·P ≈ (0; 0,4; 0; 0,6; 0; 0)

q(3)= q(0)·P^3 ≈ (0,16; 0,19; 0; 0,43; 0; 0,36)

q(10)= q(0)·P^{10} ≈ (0,33; 0; 0,07; 0; 0,07; 0,53)

q(30)= q(0)·P^{30} ≈ (0,36; 0; 0; 0; 0; 0,64)

q(∞) ≈ q(30)

Если бы было
q(0)=(0;1;0;0;0;0),
то
q(∞)=
(0,62; 0;0;0;0; 0,38)

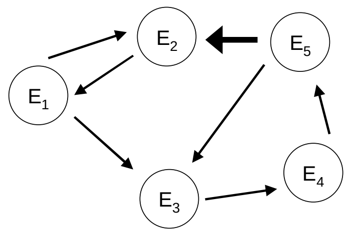
Признак эргодичности

Прежде чем сформулировать признак эргодичности, введём несколько понятий

Состояние E_j марковской цепи называется **существенным**, если куда бы мы ни ушли из него, всегда есть возможность вернуться.

Задача.

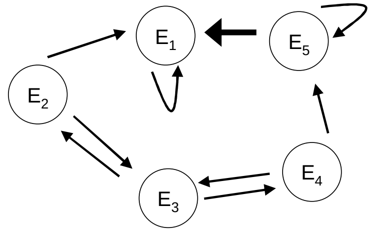
Какие состояния существенны?



А теперь?

Задача.

Какие состояния существенны?



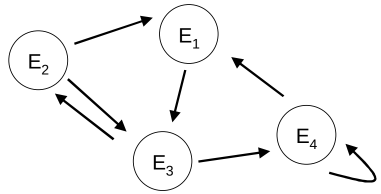
А теперь?

Теорема. Если состояние E_j несущественно, то

$$\lim_{n\to\infty} q_j(n) = 0$$

Важную роль играют длины циклических путей в графе

Задача. Циклы какой длины есть в данном графе?



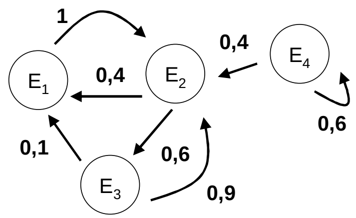
Ответ. 1,2,3,4,…

Теорема (признак эргодичности). Марковская цепь с дискретным временем эргодична в том и только в том случае, если
1) Из любого существенного состояния можно добраться до любого другого существенного
и
2) наименьший общий делитель длин всех циклических путей по существенным состояниям равен 1

Вопрос. Эргодична ли цепь из предыдущего примера?

Задача

Эргодична ли эта марковская цепь?



Решение.

1) Существенные состояния E_1, E_2, E_3

2) Из любого существенного есть путь до любого существенного

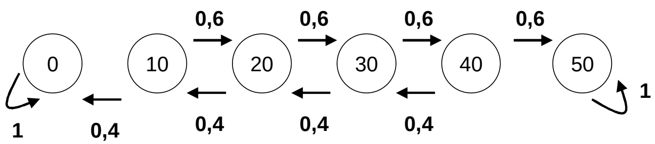
3) Длины циклов по существенным состояниям: 2,3.
НОД(2,3)=1.

Следовательно, **цепь эргодична**

Задача (Алиса и Боб).

Проверить эргодичность при помощи признака.

Решение.



Какие состояния существенные?

Выполнены ли условия 1) и 2) теоремы?

Финальные вероятности

Если цепь эргодична, то для любого начального вектора q(0) существует (одно и то же) финальное распределение вероятностей q*=q(∞):

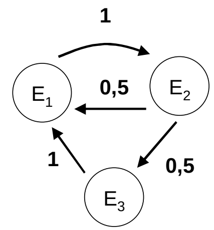
$$q* = \lim_{n\to\infty} q(n)$$

Как его найти?

Теорема. Если цепь эргодична, то q* находится, как (единственное) решение системы уравнений

$$\begin{cases} q*\cdot P = q* \\ \sum q_j* = 1 \end{cases}$$

Задача. Дана марковская цепь.
a) Эргодична ли эта цепь?
b) Если да, то найти финальное распределение вероятностей.



Решение.

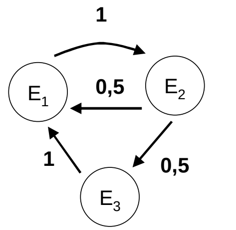
a) Существенные состояния – все.

Из любого существенного есть путь до любого существенного

Длины циклов по существенным состояниям: 2,3.
НОД(2,3)=1.

Следовательно,
цепь эргодична

б) Матрица переходных вероятностей за 1 шаг:



$$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0,5 & 0 & 0,5\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Система уравнений: $\begin{cases} q^* \cdot P = q^* \\ \sum q_j^* = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases}(q_1 \quad q_2 \quad q_3)\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0,5 & 0 & 0,5\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=(q_1 \quad q_2 \quad q_3)\\ q_1+q_2+q_3=1\end{cases}$$

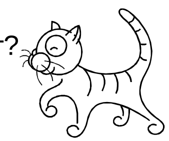
$$\begin{cases}0,5q_2+q_3=q_1\\ q_1=q_2\\ 0,5q_2=q_3\\ q_1+q_2+q_3=1\end{cases}$$

Ответ:

$$q^*=(\ldots,\quad \ldots,\quad \ldots)$$

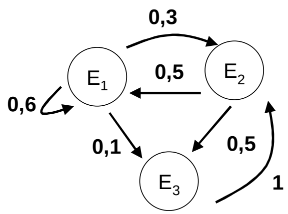
Задача. Кот Василий бывает в одном из трёх состояний: Спит (1), Ест (2), Гуляет (3). Изменение состояния может происходить примерно раз в час. Вероятности перехода: $P_{11}=0,6$, $P_{12}=0,3$, $P_{21}=0,5$, $P_{23}=0,5$, $P_{32}=1$.

Сколько в среднем часов в день Василий спит?



Решение. 1) Составьте граф этой цепи.

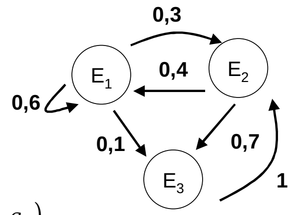
2) Проверьте на эргодичность.



3) Нас интересует поведение “в среднем”, то есть распределение вероятностей состояний за большой период времени.
Другими словами, нужно найти q*

Выпишите систему уравнений для нахождения q*.

$$P=\begin{pmatrix}0,6 & 0,3 & 0,1\\ 0,5 & 0 & 0,5\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$



$$\begin{cases}(q_1 \quad q_2 \quad q_3)\cdot\begin{pmatrix}0,6 & 0,3 & 0,1\\ 0,5 & 0 & 0,5\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=(q_1 \quad q_2 \quad q_3)\\ q_1+q_2+q_3=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}0,6q_1+0,5q_2=q_1\\ 0,3q_1+q_3=q_2\\ 0,1q_1+0,5q_2=q_3\\ q_1+q_2+q_3=1\end{cases}$$

Метод Гаусса: $\left(\begin{array}{ccc|c}-0,4 & 0,5 & 0 & 0\\ 0,3 & -1 & 1 & 0\\ 0,1 & 0,5 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)\to\ldots$

$$q^*\approx(0,435,\quad 0,348,\quad 0,217)$$

Ответ: Василий спит в среднем 10 часов 26 минут в день

5. Марковские цепи с конечным множеством состояний и непрерывным временем

Основные понятия

- Цепь в каждый момент времени может находиться только в одном из состояний $E_1, E_2, \dots, E_n$.
- Переходы из одного состояния в другое могут происходить в **произвольные** моменты времени t
- Если система в момент времени t_0 находится в состоянии E_i, то вероятность оказаться в состоянии E_j в момент времени t_0+t не зависит от t_0 и равна $p_{ij}(t)$
- Функция $p_{ij}(t)$ дифференцируема при t=0: $p_{ij}'(0)=a_{ij}$.

Описание марковской цепи с непрерывным временем

Числа a_{ij} при $i \neq j$ называются **интенсивностями** перехода из E_i в E_j

Свойства матрицы интенсивностей:

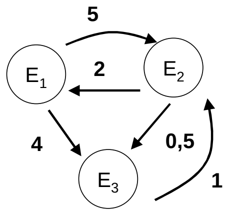
1) $\sum\limits_j p_{ij} = 1 \Rightarrow \sum\limits_j a_{ij} = 0$

2) $a_{ij} \geq 0$ $при$ $i \neq j$

3) $a_{ii} \leq 0$

Число $b_i = -a_{ii}$ называется **интенсивностью выхода из E_i**

Задача. Выписать матрицу интенсивностей для марковской цепи. (Петли не рисуются!)

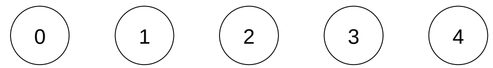


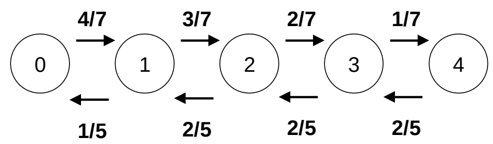
Ответ. $A = \begin{pmatrix} -9 & 5 & 4 \\ 2 & -2{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Задача

Имеется 4 локомотива и 2 ремонтные бригады. Интенсивность поломок каждого локомотива примерно 1 раз в неделю. В случае поломки локомотив ремонтируется одной бригадой. Среднее время ремонта 5 дней. Нарисовать граф для этой марковской цепи.

Решение. *Сколько всего состояний и какие?*





Уравнения Колмогорова

$\boxed{q = (q_1, \quad q_2, \quad \dots, \quad q_n)}$

Вектор вероятностей состояний

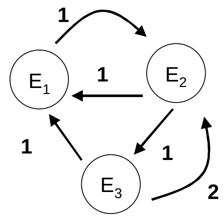
Свойство вектора вероятностей состояний: **Сумма всех q_j равна 1**

Теорема. *Вектор вероятностей состояний q=q(t) удовлетворяет система уравнений Колмогорова*

$$\boxed{q' = q \cdot A}$$

Задача

Сейчас система находится в E_1 или E_2 с равной вероятностью. равновероятны. Найти самое вероятное состояние в момент времени t=10.



Решение.

q(0)=(0,5; 0,5; 0), q(10)=?

Матрица интенсивностей:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Уравнения Колмогорова:

$$q' = q \cdot A \Rightarrow \left(q_1', q_2', q_3'\right) = (q_1, q_2, q_3) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \ldots$$

$$\begin{cases} q_1' = -q_1 + q_2 + q_3 \\ q_2' = q_1 - 2q_2 + 2q_3 \\ q_3' = q_2 - 3q_3 \\ 1 = q_1 + q_2 + q_3 \end{cases}$$

Добавляется всегда!

И ещё…

$$\begin{cases} q_1(0) = 0{,}5 \\ q_2(0) = 0{,}5 \\ q_3(0) = 0 \end{cases}$$

Далее решаем систему уравнений.

1) Одно из уравнений (кроме последнего) выбрасываем.

$$\begin{cases} q_1' = -q_1 + q_2 + q_3 \\ \cancel{q_2' = q_1 - 2q_2 + 2q_3} \\ q_3' = q_2 - 3q_3 \\ 1 = q_1 + q_2 + q_3 \end{cases}$$

2) Из последнего уравнения выражаем “выброшенное” q и подставляем в остальные

$$\boxed{q_2 = 1 - q_1 - q_3}$$

$$\begin{cases} q_1' = 1 - 2q_1 \\ q_3' = 1 - q_1 - 4q_3 \end{cases}$$

3)Если в каком-то уравнении осталась одна неизвестная, решаем его. Если нет, то выражаем из одного уравнения неизвестную и подставляем в другое.

$$y' = 1 - 2y \Rightarrow y' + 2y = 1$$

линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

1) $\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow y_{00} = Ce^{-2t}$

2) $y_{част} = \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{A}' + 2\mathrm{A} = 1 \Rightarrow \mathrm{A} = \dfrac{1}{2}$

3) $q_1 = y_{00} + y_{част} = \dfrac{1}{2} + Ce^{-2t}$

$$\begin{cases} q_1(0) = 0{,}5 \\ q_2(0) = 0{,}5 \\ q_3(0) = 0 \end{cases}$$

$C = 0 \Rightarrow q_1 = \dfrac{1}{2}$

$$\boxed{q_1 = \frac{1}{2}}$$

4) Подставляем в оставшееся уравнение

$$q_3' = 1 - \frac{1}{2} - 4q_3$$

$$y' + 4y = \frac{1}{2}$$

1) $y' + 4y = 0$

$\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = -4 \Rightarrow y_{00} = C_1 e^{-4t}$

1 шаг

2) $y' + 4y = \dfrac{1}{2}$

$y_{част} = \mathrm{A}_1$

2 шаг

$$(\mathrm{A}_1)' + 4(\mathrm{A}_1) = \frac{1}{2}$$

$$4A_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \ldots$$

$$A_1 = \frac{1}{8} \Rightarrow y_{част} = \frac{1}{8}$$

$$\begin{cases} q_1(0) = 0{,}5 \\ q_2(0) = 0{,}5 \\ q_3(0) = 0 \end{cases}$$

$$q_3 = y = y_{част} + y_{oo} = C_1 e^{-4t} + \frac{1}{8}$$

$$C_1 = -\frac{1}{8} \Rightarrow q_3 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} e^{-4t}$$

$$q_2 = 1 - q_1 - q_3 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8}e^{-4t} = \frac{3}{8} + \frac{1}{8}e^{-4t}$$

Итак, $q(t) = (q_1,\ q_2,\ q_3) = \left(\frac{1}{2},\ \ \frac{3}{8} + \frac{1}{8}e^{-4t},\ \ \frac{1}{8} - \frac{1}{8}e^{-4t}\right)$

При t=10: $q(10) \approx (0{,}5;\quad 0{,}375;\quad 0{,}125)$

Ответ: При t=10 наиболее вероятное состояние – E_1

А при t = 100?

14

Эргодические цепи

Наибольший интерес обычно представляет поведение марковской цепи за <u>большой период времени</u>.

Марковская цепь с непрерывным временем называется **эргодической** (или регулярной), если:

❖ Для любого начального вектора q(0) существует предел

$$\lim_{t\to\infty} q(t) = q*$$

❖Это предел не зависит от q(0)

Признак эргодичности

Напоминание:

Состояние E_j марковской цепи называется **существенным**, если куда бы мы ни ушли из него, всегда есть возможность вернуться.

Теорема (признак эргодичности). Марковская цепь с непрерывным временем эргодична в том и только в том случае, если
из любого существенного состояния можно добраться до любого другого существенного.

Финальные вероятности

Если цепь эргодична, то для любого начального вектора q(0) существует (одно и то же) финальное распределение вероятностей q*=q(∞):

$$q* = \lim_{t\to\infty} q(t)$$

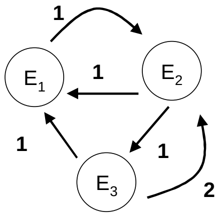
Как его найти?

Теорема. Если цепь эргодична, то q* находится, как (единственное) решение системы уравнений

$$\begin{cases} q* \cdot A = 0 \\ \sum q_j* = 1 \end{cases}$$

Задача

Эргодична ли марковская цепь из предыдущего примера? Если да, то найти финальные вероятности.



Решение.

1) Существенные состояния E_1, E_2, E_3

2) Из любого существенного есть путь до любого существенного

Следовательно, **цепь эргодична**

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} q^* \cdot A = 0 \\ \sum q_j^* = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = -q_1 + q_2 + q_3 \\ 0 = q_1 - 2q_2 + 2q_3 \\ 0 = q_2 - 3q_3 \\ 1 = q_1 + q_2 + q_3 \end{cases}$$

Решается методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 8 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{-8} & \cancel{0} & \cancel{-3} \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 3/8 \\ 0 & 0 & 1 & 1/8 \\ 1 & 0 & 0 & 4/8 \end{array}\right)$$

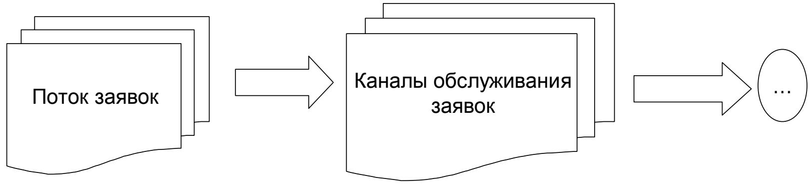
Ответ: $q^* = (4/8,\ 3/8,\ 1/8)$

Сравните с

$$q(t) = (q_1,\ q_2,\ q_3) = \left(\frac{1}{2},\ \ \frac{3}{8} + \frac{1}{8}e^{-4t},\ \ \frac{1}{8} - \frac{1}{8}e^{-4t}\right)$$

6. Системы массового обслуживания

Основные понятия



Примеры: Парикмахерская, магазин, билетная касса, очередь автомобилей на светофоре, заготовки деталей на конвейере и т.п.

Обычно нас интересуют:

1) среднее время ожидания обслуживания;
2) средняя длина очереди;
3) среднее количество занятых каналов;
4) вероятность отказа в обслуживании и т.п.

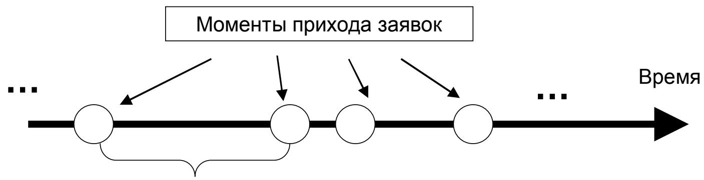
Системы массового обслуживания (СМО) бывают очень разнообразны. Возможные различия:

- характеристики входящего потока заявок;
- количество каналов обслуживания;
- распределение времени обслуживания заявки;
- количество фаз обслуживания;
- наличие или отсутствие приоритетных заявок (“дисциплина обслуживания”);
- характеристики очереди

и т.п.

Мы рассмотрим только простые СМО с
1) **пуассоновским** (“простейшим”) потоком заявок и
2) **показательным** временем обслуживания.

Пуассоновский поток заявок



I – интервал между заявками

I – случайная величина, распределённая по **показательному** закону с параметром λ:

$$P(I<t)=1-e^{-\lambda t}$$

M I = 1/ λ
– средний интервал между заявками

λ – “**интенсивность потока заявок**”
= среднее число заявок в единицу времени

Распределение времени обслуживания

S – продолжительность обслуживания одной заявки.
S – случайная величина, распределённая по **показательному** закону с параметром μ:

$$P(S<t) = 1-e^{-\mu t}$$

M S = 1/ μ
– средняя продолжительность обслуживания заявки

μ – “**интенсивность обслуживания**”
= среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени

15

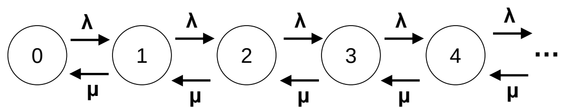
Одноканальная СМО с неограниченной очередью

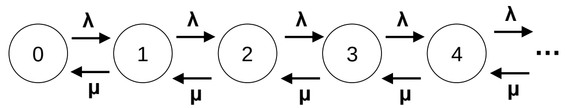
- Входной поток заявок – пуассоновский с параметром λ.
- Время обслуживания – показательное с параметром μ.
- Один канал обслуживания.
- Если канал занят, то пришедшая заявка ставится в очередь.
- Размер очереди не ограничен.

Будем рассматривать такую СМО как **марковскую цепь с непрерывным временем**

Какие состояния?

Какие переходы?



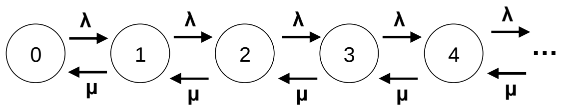


Матрица интенсивностей:
$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & \mu & -\lambda-\mu & \lambda & \dots \\ 0 & 0 & \mu & -\lambda-\mu & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Как правило, наиболее интересно поведение системы за большой период времени. То есть нас интересуют финальные вероятности.

$$q \cdot A = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\lambda q_0 + \mu q_1 = 0 & \Longrightarrow \quad q_1 = \dots \\ \lambda q_0 - (\lambda+\mu) q_1 + \mu q_2 = 0 & \Longrightarrow \quad q_2 = \dots \\ \lambda q_1 - (\lambda+\mu) q_2 + \mu q_3 = 0 & \Longrightarrow \quad q_3 = \dots \\ \dots \end{cases}$$

$$q_n = q_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$ Число $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ называется «загрузка системы»



Если ρ≥1, то в системе будет неограниченно расти очередь. Поэтому рассматривается случай **ρ<1**

$$q_n = q_0 \cdot \rho^n$$

$$q_0 + q_1 + \dots = 1 \Rightarrow q_0 \cdot \left(1 + \rho + \rho^2 + \dots\right) = 1$$

$$q_0 \cdot \frac{1}{1-\rho} = 1 \qquad q_0 = 1 - \rho$$

Вероятность простоя системы

Найдём другие характеристики этой СМО. Основные:

1. *Средняя длина очереди ML.*
2. *Среднее количество заявок в системе Mn.*
3. *Среднее время ожидания обслуживания MW.*

Средняя длина очереди

Пусть L – длина очереди. Это случайная величина, и надо найти её математическое ожидание ML.

L	0	1	2	3	…
P	q_0+q_1	q_2	q_3	q_4	…

$$ML = 0 \cdot (q_0 + q_1) + 1 \cdot q_2 + 2 \cdot q_3 + \dots = q_0\left(\rho^2 + 2\rho^3 + 3\rho^4 + 4\rho^5 + \dots\right)$$

$$= q_0 \rho^2 \left(1 + 2\rho + 3\rho^2 + \dots\right) = q_0 \rho^2 \left(\rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots\right)' = q_0 \rho^2 \left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)' = \dots$$

$$ML = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$ Средняя длина очереди

Среднее число заявок в системе

Пусть n – число заявок в системе. Надо найти Mn.

n	0	1	2	3	…
P	q_0	q_1	q_2	q_3	…

$$Mn = 0 \cdot q_0 + 1 \cdot q_1 + 2 \cdot q_2 + \dots$$

$$Mn = \frac{\rho}{1-\rho}$$ Среднее число заявок в системе

Среднее время ожидания обслуживания

Теорема (формула Литла). Среднее время ожидания обслуживания равно произведению **средней длины очереди** на **средний интервал времени между приходящими заявками**.

$$MW = ML \cdot MI$$

Для рассматриваемой СМО:

$$MW = \frac{\rho^2}{\lambda \cdot (1-\rho)}$$

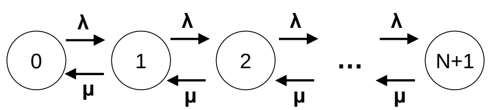
Одноканальная СМО с ограниченной очередью

- ❑ Входной поток заявок – пуассоновский с параметром λ.
- ❑ Время обслуживания – показательное с параметром μ.
- ❑ Один канал обслуживания.
- ❑ Размер очереди не превосходит N
- ❑ Если очередь заполнена, то пришедшая заявка отбрасывается

Какие состояния?

Для такой СМО не обязательно ρ<1

Какие переходы?



Всё выводится аналогично

$$q_n = q_0 \cdot \rho^n,\ n = 1, 2, ..., N+1$$

$$q_0 + q_1 + ... + q_{N+1} = 1 \Rightarrow q_0 \cdot \left(1 + \rho + \rho^2 + ... + \rho^{N+1}\right) = 1$$

$$q_0 = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+2}}\ npu\ \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{N+2}\ npu\ \rho = 1 \end{cases}$$

Вероятность простоя системы

$$q_{N+1} = q_0 \cdot \rho^{N+1}$$

Вероятность отказа в обслуживании

$$ML = \frac{\rho^2\left(1 + N\rho^{N+1} - (N+1)\rho^N\right)}{(1-\rho)\cdot\left(1-\rho^{N+1}\right)}$$

Средняя длина очереди

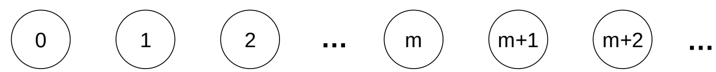
$$MW = ML \cdot MI = \frac{ML}{\lambda}$$

Среднее время ожидания обслуживания

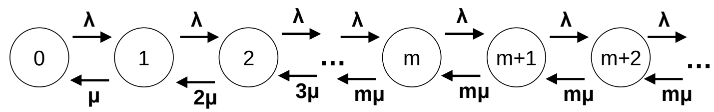
Многоканальная СМО с неограниченной очередью

- ❑ Входной поток заявок – пуассоновский с параметром λ.
- ❑ m каналов обслуживания.
- ❑ Время обслуживания каждым каналом – показательное с параметром μ.
- ❑ Размер очереди не ограничен

Какие состояния?



Какие переходы?



Всё аналогично $\frac{\rho}{m} < 1$

Условие отсутствия перегрузки системы

$$q_n = q_0 \cdot \rho^n, \; n = 1, 2, \ldots, m$$

$$q_n = q_0 \cdot \frac{\rho^m}{m!} \cdot \left(\frac{\rho}{m}\right)^{n-m}, \; n = m+1, m+2, \ldots,$$

$$q_0 = \left(1 + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^m}{m!} + \frac{\rho^{m+1}}{m! \cdot (m-\rho)}\right)^{-1}$$

$$ML = q_0 \cdot \frac{\rho^m}{m!} \cdot \frac{\rho/m}{1 - \left(\rho/m\right)^2}$$

Средняя длина очереди

$$ML = q_0 \cdot \frac{\rho^{m+1}}{(m-1)! \cdot (m-\rho)^2}$$

Другая формула для средней длины очереди

$$Mr = \rho$$

Среднее число занятых каналов

$$Mn = ML + Mr$$

Среднее число заявок в системе

$$MW = ML \cdot MI = q_0 \cdot \frac{\rho^{m+1}}{(m-1)! \cdot (m-\rho)^2} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

Среднее время ожидания обслуживания

Задача

Составы поступают на техобслуживание. В среднем поступает 3 поезда в час. Имеется две бригады. Среднее время обслуживания состава одной бригадой равно 30 минут. Найти среднее время ожидания обслуживания.

Решение.

m = 2, λ = 3 (поезда/час), μ = 2 (поезда/час)

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 1{,}5 < m \qquad q_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{2! \cdot (m-\rho)}\right)^{-1} = \frac{1}{7}$$

$$MW = \frac{1}{7} \cdot \frac{1{,}5^3}{1! \cdot (2-1{,}5)^2} \cdot \frac{1}{3} = 0{,}64(\text{часа}) \approx 39\,\text{мин}$$

16

Список литературы

1. Колемаев В.А. и др. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: «Высш. школа», 1991.

2. Лагутин М.Б. Наглядная математическая статистика. – М.: .: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.

3. Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И., Шикин Е.В., Заляпин В.И. Вся высшая математика – М.: Эдиториал УРСС, 2000-2002.

4. Болгов В.А., Демидович Б.П., Ефимов А.В. и др. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. – М.: .: «Наука», 1993.

Оглавление