МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра “Прикладная математика - 2”

А.С.Милевский, А.Е.Гарслян

ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Москва - 2004

Учебно-методическое издание

Милевский Александр Станиславович
Гарслян Александр Егишевич

ЗАДАЧИ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Подписано в печать Тираж Изд. №
Усл. печ. л. Заказ № Цена

Подписано в печать Формат
Тираж экз. Усл. печ. л.
Изд. N Цена

101475, Москва, А-55, ул. Образцова, 15
Типография МИИТа

1. Моделирование случайных величин

ЗАДАНИЕ. Используя таблицу или генератор случайных чисел, равномерно распределённых на отрезке [0;1], получить выборки для четырёх случайных величин, распределённых, соответственно, по

1) *равномерному* закону **R(a,b)**;
2) *показательному* закону **E(λ)**;
3) *нормальному* закону **N(m,σ)**;
4) *биномиальному* закону **B(N,p)**;

Объём каждой выборки равен **n**.

Вариант	n	[a; b]	λ	m	σ	N	p
1	20	[0; 3]	0,1	1	5	5	0,3
2	25	[–1; 7]	0,2	2	4	6	0,4
3	30	[2; 4]	0,3	3	3	5	0,2
4	20	[5; 9]	0,4	4	4	6	0,4
5	25	[-2;1]	0,5	-1	5	4	0,3
6	30	[-3;1]	0,1	-2	4	5	0,7
7	28	[1;5]	0,2	-3	3	6	0,8
8	22	[2;8]	0,3	-4	4	5	0,6
9	24	[2;6]	0,4	1	2	4	0,3
10	26	[3;7]	0,5	2	3	6	0,7
11	28	[-3;1]	0,1	3	5	5	0,8
12	30	[-5;-1]	0,2	4	2	4	0,2
13	20	[-2;4]	0,3	-1	3	5	0,3
14	25	[-4;2]	0,4	-2	5	6	0,8
15	24	[-1;9]	0,5	-3	4	5	0,2
16	28	[2;8]	0,6	-4	4	4	0,7
17	30	[0;8]	0,1	1	5	5	0,6
18	20	[1;9]	0,2	2	4	6	0,2
19	22	[-1;6]	0,3	3	3	4	0,3
20	25	[2;4]	0,4	4	4	5	0,4
21	26	[-6;0]	0,5	-1	5	6	0,6
22	28	[-9;-1]	0,6	-2	3	4	0,7
23	30	[-3;5]	0,1	-3	5	5	0,3
24	20	[4;8]	0,2	-4	3	6	0,2
25	22	[2;7]	0,3	1	3	4	0,4
26	24	[1;7]	0,4	2	5	5	0,7
27	26	[2;8]	0,5	3	4	6	0,6
28	28	[-1;7]	0,6	4	3	4	0,3
29	30	[-5;3]	0,1	-1	4	5	0,4
30	20	[-3;4]	0,2	-2	3	6	0,2

2. Первичная обработка выборок

ЗАДАНИЕ 1. Для полученной ранее выборки, соответствующей *равномерному* закону распределения **R(a,b)**,

1) заполнить группированную таблицу частот, разбив область значений на 5 интервалов;
2) построить гистограмму;
3) построить график эмпирической функции распределения.

ЗАДАНИЕ 2. То же для выборки из *показательного* закона распределения **E(λ)**, взяв 6 интервалов.

ЗАДАНИЕ 3. То же для выборки из *нормального* закона распределения **N(m,σ)**, взяв 6 интервалов.

ЗАДАНИЕ 4. Для полученной ранее выборки, соответствующей *биномиальному* закону распределения **B(N,p)**,

1) заполнить таблицу частот;
2) построить полигон частот;
3) построить график эмпирической функции распределения.

3. Точечные оценки

ЗАДАНИЕ. По построенным таблицам частот для четырёх выборок найти:

1) выборочное среднее;
2) выборочную дисперсию;
3) выборочный коэффициент асимметрии;
4) выборочный коэффициент эксцесса.

В расчётах по группированным таблицам частот использовать *масштабное преобразование*.

4. Доверительные интервалы

ЗАДАНИЕ 1. Для полученной ранее выборки, соответствующей *нормальному* закону распределения **N(m,σ)**, построить

1) доверительный интервал для математического ожидания **m**, считая дисперсию σ^2 известной;
2) доверительный интервал для математического ожидания **m**, считая дисперсию σ^2 неизвестной;
3) доверительный интервал для σ^2.

ЗАДАНИЕ 2. Для полученной ранее выборки, соответствующей *биномиальному* закону распределения **B(N,p)**, построить доверительный интервал для вероятности успеха в одном испытании **p**.

Вариант	Уровень значимости α	Вариант	Уровень значимости α
1	0,1	**16**	0,05
2	0,05	**17**	0,1
3	0,1	**18**	0,01
4	0,01	**19**	0,05
5	0,1	**20**	0,1
6	0,01	**21**	0,01
7	0,05	**22**	0,05
8	0,1	**23**	0,1
9	0,01	**24**	0,01
10	0,05	**25**	0,01
11	0,1	**26**	0,05
12	0,01	**27**	0,1
13	0,05	**28**	0,01
14	0,1	**29**	0,1
15	0,01	**30**	0,05

5. Проверка статистических гипотез о параметрах закона распределения

ЗАДАНИЕ 1. Для полученной ранее выборки, соответствующей *нормальному* закону распределения **N(m,σ)**:
1) проверить гипотезу $m=m_0$, считая дисперсию σ^2 известной;
2) проверить гипотезу $m=m_0$, считая дисперсию σ^2 неизвестной;
3) проверить гипотезу $\sigma=\sigma^2$.

ЗАДАНИЕ 2. Построить ещё одну выборку, соответствующую нормальному закону распределения, взяв в качестве неё первые 10 чисел исходной выборки (неупорядоченной). Для двух выборок
1)проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий $m_1 = m_2$, считая дисперсии известными и равными σ^2_1 и σ^2_2;
2)проверить гипотезу о равенстве дисперсий $\sigma^2_1 = \sigma^2_2$, считая математические ожидания неизвестными.

ЗАДАНИЕ 3. Для полученной ранее выборки, соответствующей *биномиальному* закону распределения **B(N,p)**,
Проверить гипотезу о вероятности успеха в одном испытании $p=p_0$

ЗАДАНИЕ 4. Построить ещё одну выборку, соответствующую биномиальному закону распределения, взяв в качестве неё первые 10 чисел исходной выборки (неупорядоченной). Для двух выборок проверить гипотезу о равенстве вероятностей успеха $p_1=p_2$.

Вариант	α	m_0	σ_1	σ_2	p_0
1	0,1	0	5	4	0,2
2	0,01	1	4	3	0,3
3	0,05	2	3	4	0,3
4	0,1	3	4	5	0,3
5	0,01	0	5	4	0,4
6	0,05	-1	4	5	0,8
7	0,1	-2	3	4	0,7
8	0,01	-3	4	3	0,7
9	0,05	2	5	4	0,3
10	0,1	3	4	3	0,6
11	0,01	4	3	4	0,2
12	0,05	5	4	3	0,5

Вариант	α	m_0	σ_1	σ_2	p_0
13	0,1	-2	5	4	0,2
14	0,01	-3	3	2	0,7
15	0,05	-4	3	4	0,4
16	0,1	-5	4	3	0,2
17	0,01	0	5	4	0,5
18	0,05	3	2	3	0,3
19	0,1	2	3	2	0,4
20	0,01	5	4	3	0,8
21	0,05	4	5	4	0,3
22	0,01	5	4	3	0,7
23	0,1	4	3	4	0,5
24	0,05	5	4	5	0,4
25	0,1	6	5	4	0,7
26	0,01	5	4	5	0,3
27	0,05	6	3	4	0,7
28	0,1	5	5	4	0,4
29	0,01	7	5	4	0,8
30	0,05	4	4	3	0,7

6. Проверка статистических гипотез о виде закона распределения

ЗАДАНИЕ 1. Для полученной ранее выборки, соответствующей *равномерному* закону распределения **R(a,b)**, проверить гипотезу о том, что закон распределения генеральной совокупности – с параметрами $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{b_1}$.
ЗАДАНИЕ 2. Для полученной ранее выборки, соответствующей *показательному* закону распределения **E(λ)**, проверить гипотезу о том, что закон распределения генеральной совокупности – показательный с параметром λ_1.
ЗАДАНИЕ 3. Для полученной ранее выборки, соответствующей *нормальному* закону распределения **N(m,σ)**, проверить гипотезу о том,

что закон распределения генеральной совокупности – нормальный с параметрами $\mathbf{m_1}$, σ_1.
ЗАДАНИЕ 4. Для полученной ранее выборки, соответствующей *биномиальному* закону распределения **B(N,p)**, проверить гипотезу о том, что закон распределения генеральной совокупности – биномиальный с параметром $\mathbf{p_1}$.

Вариант	α	a_1	b_1	λ_1	m	σ_1	p_1
1	0,1	–1	4	0,2	2	4	0,2
2	0,05	-1	8	0,3	3	3	0,3
3	0,01	1	4	0,4	4	4	0,3
4	0,1	4	9	0,5	0	5	0,3
5	0,05	-3	2	0,6	-1	4	0,4
6	0,01	-4	1	0,2	-2	3	0,6
7	0,1	0	6	0,15	-3	4	0,9
8	0,05	1	8	0,35	-5	5	0,7
9	0,01	1	8	0,45	2	4	0,2
10	0,1	3	8	0,55	3	3	0,6
11	0,05	-4	2	0,15	4	4	0,9
12	0,01	-6	0	0,22	3	5	0,3
13	0,1	-3	5	0,34	0	4	0,2
14	0,05	-4	3	0,44	-1	3	0,7
15	0,01	-2	9	0,54	-2	4	0,3
16	0,1	0	9	0,5	-3	5	0,6
17	0,05	0	9	0,15	2	4	0,7
18	0,01	1	9	0,23	3	3	0,3
19	0,1	-2	7	0,33	2	4	0,4
20	0,05	1	9	0,42	3	5	0,6
21	0,01	-7	1	0,48	-2	4	0,3
22	0,1	-9	2	0,57	-3	3	0,7
23	0,05	-4	8	0,14	-4	4	0,3
24	0,01	2	9	0,25	-3	5	0,2

Вариант	α	a_1	b_1	λ_1	m	σ_1	p_1
25	0,1	0	8	0,28	0	4	0,7
26	0,05	-1	9	0,44	1	3	0,3
27	0,01	1	8	0,55	2	4	0,4
28	0,1	-2	8	0,65	3	5	0,4
29	0,05	-6	4	0,14	0	4	0,8
30	0,01	-4	7	0,24	-1	3	0,9

7. Двумерные выборки

Y\ X	–1	0	1	2
0	2	**N**	5	1
5	3	0	1	0
10	**N**	**N**	4	1
15	0	8	2	**N**

ЗАДАНИЕ. Для данной двумерной выборки:

1) найти точечную оценку коэффициента корреляции r_{xy} ;
2) проверить гипотезу о равенстве нулю коэффициента корреляции на уровне значимости **α=0,01**
3) проверить гипотезу о независимости данных случайных величин на уровне значимости **α=0,01**.

В таблице число **N** равно номеру варианта.

8. Приложение

8.1 Дополнительные указания

8.1.1 Моделирование случайных величин

Пусть $x_1, x_2, \dots$ – (неупорядоченная) выборка для случайной величины **X**, распределённой *равномерно на отрезке [0;1]*. Тогда $y_1, y_2, \dots$ – выборка для случайной величины **Y**, распределённой по закону

1) **R(a,b)**, если $y_i = a + (b - a)x_i$;
2) **E(λ)**, если $y_i = -\ln(x_i) / \lambda$;
3) **N(m,σ)**, если

$$y_{2i-1} = m + \sigma\left(-2\ln(x_{2i-1}) \cdot \cos(2\pi \cdot x_{2i})\right)$$

$$y_{2i} = m + \sigma\left(-2\ln(x_{2i-1}) \cdot \sin(2\pi \cdot x_{2i})\right) \quad ;$$

4) **B(N,p)**, если y_i – количество чисел из множества $\{x_{N(i-1)+1}, \dots, x_{Ni}\}$, попавших в интервал $(0, \mathbf{p})$;

8.1.2 Первичная обработка выборок

Если выборку записать в таблицу

Значение	x_1	x_2	...	x_k
Частота	N_1	n_2	...	n_k

где первая строчка содержит все *различные* значения из выборки, а нижняя - сколько раз они встречаются, то получится *таблица частот* (или *статистический ряд*).

Часто используется также *группированная таблица частот*

Интервал	$a_1 \div a_2$	$a_2 \div a_3$	...	$a_r \div a_{r+1}$
Частота	n_1	n_2	...	n_r

Здесь область значений разбита на **r** интервалов, а нижняя строка содержит количества элементов выборки, попавших в соответствующий интервал. Если элемент попадает на границу двух соседних интервалов, то он учитывается в левом.
Аналогично устроена *двумерная таблица частот*, содержащая результаты измерений *случайного двумерного вектора* (X,Y):

X \ Y	y_1	y_2	...	y_q
x_1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1q}
...	...	...	...	...
x_k	n_{k1}	n_{k2}	...	n_{kq}

Здесь n_{ij} - количество элементов выборки, равных

(x_i, y_i) (i=1...k; j=1...q).

Для построения *группированной двумерной таблицы частот* области значений X и Y разбивают на интервалы (как в одномерном случае).

8.1.3 Точечные оценки

Оценка для математического ожидания MX называется “*выборочное среднее*”, обозначается $\overline{X}$ и вычисляется как среднее арифметическое чисел - элементов выборки (с учетом кратностей):

$$\overline{x} = \frac{x_1 n_1 + \ldots + x_k n_k}{n}$$

Оценка для дисперсии **DX** называется “*выборочная дисперсия*”, обозначается D^*_x и вычисляется по формуле:

$$D^*_x = \overline{(x-\overline{x})^2} = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 .$$

Несмещенная оценка для **DX** обозначается S^2 и вычисляется по формуле:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D^* x .$$

Оценка *коэффициента асимметрии* обозначается A^*_x и находится по формуле:

$$A^*_x = \frac{1}{(D^*_x)^{3/2}} \left(\overline{x^3} - 3 \cdot \overline{x^2} \cdot \overline{x} + 2 \cdot (\overline{x})^3 \right).$$

Оценка *коэффициента эксцесса обознача*ется E^*_x и находится по формуле:

$$E^*_x = \frac{1}{(D^*_x)^2} \left(\overline{x^4} - 4 \cdot \overline{x^3} \cdot \overline{x} + 6\overline{x^2} \cdot (\overline{x})^2 - 3 \cdot (\overline{x})^4 \right) - 3$$

В расчётах обычно удобно использовать *масштабное преобразование*. Пусть $\mathbf{u = \frac{x-a}{b}}$, где **a,b** – произвольные константы. Тогда

$$\overline{x} = a + b \cdot \overline{u} ,\ D^*_x = b^2 \cdot D^*_u ,\ A^*_x = A^*_u ,\ E^*_x = E^*_u .$$

В случае группированной таблицы с одинаковой длиной интервалов удобно положить число **b** равным длине интервала.

8.1.4 Доверительные интервалы

Пусть случайная величина распределена по нормальному закону **N(m,σ)**.

1) Доверительный интервал для **m**, при известной **σ**:

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\alpha/2} < m < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\alpha/2}.$$

2) Доверительный интервал для **m**, при неизвестной **σ**:

$$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}(n-1) < m < \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}(n-1)$$

3) Доверительный интервал для **σ**:

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}$$

Пусть случайная величина распределена по нормальному закону **B(N,p).**

4) Доверительный интервал для **p** (приближённый):

$$\nu - \frac{\sqrt{\nu(1-\nu)}}{\sqrt{nN}} \cdot u_{1-\alpha/2} < p < \nu + \frac{\sqrt{\nu(1-\nu)}}{\sqrt{nN}} \cdot u_{1-\alpha/2}$$

Здесь $\nu = \sum x_i \big/ nN = \bar{x} \big/ N$ – частота успехов.

8.1.5 Проверка статистических гипотез о параметрах закона распределения

Порядок проверки.

1. Сформулировать исходную гипотезу в виде равенства
   $H_0 : \Theta = \Theta_0$.
2. Выбрать конкурирующую гипотезу из списка:
   $H_1: \Theta > \Theta_0$,
   $H_1: \Theta < \Theta_0$,
   $H_1: \Theta \neq \Theta_0$.
3. Выбрать статистику **Z** критерия.

4. В зависимости от вида конкурирующей гипотезы построить *область принятия гипотезы* **V** по одной из формул

$$H_1 : \Theta \neq \Theta_0; V = \{z : k_{\alpha/2} < z < k_{1-\alpha/2}\}$$

$$H_2 : \Theta < \Theta_0; V = \{z : z > k_\alpha\}$$

$$H_3 : \Theta > \Theta_0; V = \{z : z < k_{1-\alpha}\}$$

(здесь буквой ***k*** обозначены соответствующие квантили).

5. По выборке вычислить $\mathbf{Z^B}$.
6. Если это значение попало в область **V**, то гипотеза H_0 принимается, иначе отвергается (принимается конкурирующая).

8.1.5.1 Проверка гипотез о параметрах m, σ нормального закона распределения N(m, σ)

1) H_0 : m = m_0 и дисперсия σ^2 известна. В этом случае

$$z^{в} = \frac{(\bar{x} - m)}{(\sigma / \sqrt{n})}; k_p = u_p.$$

2) H_0 : m = m_0 и дисперсия σ^2 неизвестна. В этом случае

$$z^{в} = \frac{(\bar{X} - m)}{(s / \sqrt{n})}; k_p = t_p(n-1).$$

3) H_0 : σ = σ_0 и математическое ожидание неизвестно. В этом случае

$$z^{в} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}; k_p = \chi^2_p(n-1)$$

Пусть теперь две случайные величины, X_1 и X_2 и соответственно две выборки из соответствующих генеральных совокупностей, распределенных по законам **N(m_1, σ_1)** и **N(m_2, σ_2)**.

4)H_0 : m_1=m_2 и дисперсии известны. В этом случае

$$z^{в} = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}; \; k_p = u_p .$$

5)H_0 : σ_1=σ_2 и математические ожидания неизвестны. Тогда

$$z^{в} = s_1^2 / s_1^2; k_p = F_p(n_1 - 1, n_2 - 1).$$

8.1.5.2 Проверка гипотез о параметре p биномиального закона распределения B(N,p)

Рассмотрим схему Бернулли. Пусть проведено n независимых испытаний; **p** - вероятность успеха в одном испытании; **q=1–p** - вероятность неудачи; **X** - количество успехов в одном испытании.

Тогда $\nu = \sum x_i / nN = \overline{x} / N$ – частота успехов.

1) H_0 : p=p_0 . В этом случае

$$z^{в} = \frac{(\nu - p_0)}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}; \; k_p = u_p .$$

Пусть теперь две выборки из законов **B(N,p_1)**, **B(N,p_2)** и, соответственно, две частоты успехов ν_1 и ν_2. Обозначим через ν общую частоту успехов:

$$\nu = \frac{n_1\nu_1 + n_2\nu_2}{n_1 + n_2}.$$

2) H_0 : p_1 =p_2 . В этом случае

$$z^{в} = \frac{(\nu_1 - \nu_2)}{\sqrt{\nu(1-\nu)\left(\frac{1}{Nn_1} + \frac{1}{Nn_2}\right)}}; \; k_p = u_p .$$

8.1.6 Проверка статистических гипотез о виде закона распределения

Порядок проверки.

1. По выборке оценить значения *неизвестных параметров* гипотетического закона распределения (если не все параметры известны). Так, например

   N(m,σ): $m \approx \overline{x}$; $\sigma \approx s^2$;

   E(λ): $\lambda \approx \frac{1}{\overline{x}}$;

   B(N,p): $p \approx \frac{\overline{x}}{N}$.
2. *Всю область значений* случайной величины **X** разбить на несколько подмножеств (интервалов) **Δ_1, Δ_2 ,..., Δ_r** .
3. Заполнить *группированную таблицу частот*; вторая строка таблицы содержит *наблюдаемые частоты* попадания элементов выборки в соответствующие интервалы.
4. По формулам из предполагаемого закона распределения найти вероятности **p_i=P(X∈Δ_1) (i=1,...,r)** попадания в эти интервалы.
5. Добавить в таблицу частот еще одну строку "*ожидаемые частоты*" и заполнить ее по формулам

   $$\tilde{n}_i = p_i \cdot n \, .$$

   Отметим, что суммы чисел в последних двух строчках таблицы должны быть равны объему выборки. Если некоторые ожидаемые частоты оказались меньше, чем 3, то следует *объединить соседние интервалы* (и столбцы таблицы).

6. Вычислить

$$z^{в} = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - \tilde{n}_i)^2}{\tilde{n}_i}$$

7. Если это число окажется меньше, чем $\chi^2_{1-\alpha}$ **(r–L–1),** то гипотеза о законе распределения принимается, иначе отвергается. Здесь через **r** обозначено количество интервалов, а через L - количество неизвестных параметров закона распределения, найденных на первом шаге.

8.1.7 Двумерные выборки

8.1.7.1 Вычисление выборочного коэффициента корреляции

Выборочный коэффициент корреляции вычисляется по формуле

$$r^*_{XY} = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sqrt{D^* x} \cdot \sqrt{D^* y}}$$

Для расчёта также можно применять масштабное преобразование. А именно, если сделать замены $u = \frac{x-a}{b}$, $v = \frac{y-c}{d}$, то выборочный коэффициент корреляции не меняется: $r^*_{xy} = r^*_{uv}$

8.1.7.2 Проверка гипотезы о значимости коэффициента корреляции (или линейной зависимости X и Y)

H_0 **:** $r_{XY} = 0$ **.** В этом случае

$$z^{в} = r^*_{XY};\ k_p = \frac{t_p(n-2)}{\sqrt{n-2+(t_p(n-2))^2}}$$

8.1.7.3 Проверка гипотезы о независимости двух случайных величин

Пусть n_{ij} - двумерные частоты, r_1-число вариаций значений случайной величины **X**, r_2-число вариаций значений случайной величины **Y, n** –объём выборки. Положим :

$$n_i^X = \sum_{j=1}^{r_1} n_{ij}$$

$$n_j^Y = \sum_{i=1}^{r_2} n_{ij}$$

$$Z^{в} = n\left[\sum_{i=1}^{r_1}\sum_{j=1}^{r_2} \frac{n_{ij}^2}{n_i^X n_j^Y} - 1\right]$$

Тогда, если

$$Z^{в} \le \chi^2_{1-\alpha}[(r_1-1)(r_2-1)] \quad ,$$

то гипотеза о независимости принимается, иначе отвергается.

8.2 Таблицы

- Квантили u_p стандартного нормального закона распределения **N(0;1).**

P	**0.9**	**0.95**	**0.975**	**0.99**	**0.995**	**0.999**	**0.9995**
u_p	1.282	1.645	1.960	2.325	2.576	3.090	3.291

- Квантили $\chi_p^2(k)$ закона распределения $\chi^2(k)$.

k \ p	**0,005**	**0,01**	**0,05**	**0,1**	**0,9**	**0,95**	**0,99**	**0,995**
1	0	0,0002	0,004	0,0158	2,71	3,84	6,63	7,88
4	0,2	0,297	0,711	1,06	7,78	9,49	13,3	18,5
9	1,73	2,09	3,33	4,17	14,7	16,9	21,7	23,6
19	6,84	7,63	10,1	11,7	27,2	30,1	36,2	38,6
29	13,1	14,3	17,7	19,8	39,1	42,6	49,6	52,3
40	20,7	22,2	26,5	29,1	51,8	55,8	63,7	66,8
50	28,0	29,7	34,8	37,7	63,2	67,5	76,2	79,5
75	47,2	49,5	56,1	59,8	91,1	96,2	106,4	110,3
100	67,3	70,1	77,9	82,4	118,5	124,3	135,6	140,2

- Квантили t_p **(k)** закона распределения Стьюдента **T(k)**.

k \ p	**0,900**	**0,950**	**0,975**	**0,990**	**0,995**	**0,999**
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
9	1,383	1,833	2,262	2,281	3,250	4,297
19	1,328	1,729	2,093	2,539	3,579	3,579
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,758	3,398
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160
∞	1,232	1,645	1,96	2,326	2,576	3,09

- Квантили $F_{0,9}(n_1,n_2)$ закона распределения Фишера

$n_1 \backslash n_2$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**10**	**15**	**20**	**30**	**120**
1	40	8,53	5,54	4,54	4,06	3,29	3,07	2,97	2,88	2,75
2	49,5	9	5,46	4,32	3,78	2,92	2,7	2,59	2,49	2,35
3	53,6	9,16	5,39	4,19	3,62	2,73	2,49	2,38	2,28	2,13
4	55,8	9,24	5,34	4,11	3,52	2,61	2,36	2,25	2,14	1,99
10	60,2	9,39	5,23	3,92	3,3	2,32	2,06	1,94	1,82	1,65
20	61,7	9,44	5,18	3,84	3,21	2,2	1,92	1,79	1,67	1,48
30	62,2	9,46	5,17	3,82	3,17	2,16	1,87	1,74	1,61	1,41
60	62,8	9,47	5,15	3,79	3,14	2,11	1,82	1,68	1,54	1,32

- Квантили $F_{0,95}(n_1,n_2)$ закона распределения Фишера

$n_1 \backslash n_2$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**10**	**15**	**20**	**30**	**120**
1	161	18,5	10,13	7,71	6,61	4,96	4,54	4,35	4,24	3,92
2	199	19	9,55	6,94	5,79	4,1	3,68	3,49	3,39	3,07
3	216	19,16	9,28	6,59	5,41	3,71	3,29	3,1	2,99	2,68
4	225	19,25	9,12	6,39	5,19	3,48	3,05	2,87	2,76	2,45
30	250	19,46	8,62	5,75	4,5	2,7	2,25	2,04	1,84	1,55

- Квантили $F_{0,99}(n_1,n_2)$ закона распределения Фишера

$n_1 \backslash n_2$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**10**	**15**	**20**	**30**	**120**
1	4052	98,5	34,1	21,2	16,3	10	2,62	8,1	7,56	6,85
2	4999	99	30,8	18	13,3	7,56	6,36	5,85	5,39	4,79
3	5403	99,2	29,5	16,7	12,1	6,55	5,42	4,94	4,51	3,95
4	5625	99,3	28,7	16	11,3	5,99	4,89	4,43	4,02	3,48
30	6261	99,5	26,5	13,8	9,38	4,25	3,21	2,78	2,39	1,86

- Степени числа e

X	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
e^{-x}	1	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065
X	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,2
e^{-x}	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679	0,3012
X	1,4	1,6	18	2	2,5	3
e^{-x}	0,2466	0,2019	0,1653	0,1353	0,0821	0,0498
X	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
e^{-x}	0,0302	0,0183	0,0111	0,0067	0,0041	0,0025

- Значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$

X	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
φ(x)	0,3989	03970	0,3910	0,3814	0,3683	0,3521
X	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1
φ(x)	0,3332	0,3123	0,2897	0,2661	0,2420	0,2179
X	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
φ(x)	0,1942	0,1714	0,1497	0,1295	0,1109	0,0940
X	1,8	1,9	2,0	2,2	2,4	2,6
φ(x)	0,0790	0,0656	0,0540	0,0355	0,0224	0,0136
X	2,8	3,0	3,4	3,6	3,8	4,0
φ(x)	0,0079	0,0044	0,0012	0,0006	0,0003	0,0001

- Значения функции $\Phi(x)= \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)dx$

X	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Φ(x)	0,5	05398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915
X	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1
Φ(x)	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159	0,8413	0,8643
X	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
Φ(x)	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554
X	1,8	1,9	2,0	2,2	2,4	2,6
Φ(x)	0,9641	0,9713	0,9772	0,9861	0,9918	0,9953

X	2,8	3,0	3,4	3,6	3,8	4
Φ(x)	0,9974	0,9984	0,9997	0,9998	0,9999	≈1