МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Е.В.Киселев, А.С.Милевский

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

НЕСОБСТВЕННЫЕ, ДВОЙНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Методические указания по дисциплине «Математика»

Рекомендовано редакционно-издательским советом университета в качестве методических указаний для студентов ИЭФ и ИУИТ

Москва – 2007

УДК-517
К-44
Е.В.Киселев, А.С.Милевский. Интегральное исчисление. Несобственные, двойные и криволинейные интегралы. Методические указания. – М.: МИИТ, 2007. – 47 с.
Методические указания предназначены для студентов, изучающих курс математического анализа в институтах ИЭФ и ИУИТ. Приведены задачи для домашних заданий, которые могут быть использованы преподавателями, читающими указанный курс. *Авторы выражают благодарность студентке ИЭФ Гросс А.С. за помощь, оказанную в обработке материала и оформлении издания.*

1. Несобственные интегралы

Несобственными интегралами называются

- Интегралы с бесконечными пределами («*интеграл первого рода*»)
- Интегралы от неограниченных на отрезке функций («*интеграл второго рода*»)

1.1. Интегралы с бесконечными пределами

Несобственный интеграл от функции f(x) в пределах от **a** до +∞ определяется так:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Если этот предел *существует и конечен*, то несобственный интеграл называется *сходящимся*; если же предел не существует или бесконечен – *расходящимся*.

Аналогично, *по определению*

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx.$$

В последнем равенстве: если каждый из несобственных интегралов, стоящих справа, сходится, то сходится и интеграл, стоящий слева.

Примеры.

1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\cos x\,dx=\lim_{b\to+\infty}\sin x\Big|_0^b=\lim_{b\to+\infty}(\sin b-\sin 0)=\lim_{b\to+\infty}\sin b,$$

предел не существует – интеграл расходится.

2. $$\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^{-1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_a^{-1}=\lim_{a\to-\infty}\left(1+\frac{1}{a}\right)=1,$$

интеграл сходится.

3. $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}arctgx\Big|_0^b=\lim_{b\to+\infty}arctgb=\frac{\pi}{2},$$

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}arctgx\Big|_a^0=\frac{\pi}{2},$$

оба интеграла конечны, так что исходный интеграл сходится. При вычислении рассматриваемого интеграла можно было также воспользоваться четностью подынтегральной функции:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi.$$

1.2. Интегралы от неограниченных функций

Пусть функция f(x) интегрируема на любом отрезке [a,b−ε] и неограниченна на интервале [a,b). *Несобственный интеграл 2 рода* $\int_a^b f(x)dx$ определяется следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b-0} \int_a^c f(x)dx.$$

Если предел, стоящий справа, существует и конечен, то интеграл называют *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся.*
Если функция f(x) неограниченна в окрестности точки **a**, то *по определению*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a+0} \int_c^b f(x)dx.,$$

если предел существует и конечен.
Если функция f(x) неограниченна в окрестности точки **c,** лежащей *внутри* отрезка [a, b] то *по определению*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Такой интеграл *называется сходящимся*, если *оба* несобственных интеграла, стоящих в правой части, сходятся.

Примеры.

1. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim\limits_{c\to 1-0} \int\limits_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\lim\limits_{c\to 1-0} \left(2\sqrt{1-x}\right)\Big|_0^c = -\lim\limits_{c\to 1-0} 2(\sqrt{1-c}-1) = 2,$

интеграл сходится.

2. $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^3} = \int\limits_{-1}^c \frac{dx}{x^3} + \int\limits_c^1 \frac{dx}{x^3}.$

Подынтегральная функция неограниченна в окрестности точки 0. Исследуем каждый интеграл отдельно.

$$\lim_{c\to -0} \int\limits_{-1}^c \frac{dx}{x^3} = -\lim_{c\to -0} \frac{1}{x}\Big|_{-1}^c = -\lim_{c\to -0}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{-1}\right) = \infty.$$

«Частичный» интеграл расходится, следовательно, расходится и исходный интеграл

3. $\int\limits_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}} = \int\limits_{-1}^c \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}} + \int\limits_c^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}}$

Подынтегральная функция неограниченна в окрестности точки 0. Исследуем каждый интеграл отдельно.

$$\lim_{c\to -0} \int\limits_{-1}^c \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}} = \lim_{c\to -0} \frac{5}{3}\sqrt[5]{x^3}\Big|_{-1}^c = \frac{5}{3},$$

$$\lim_{c\to +0} \int\limits_c^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}} = \lim_{c\to +0} \frac{5}{3}\sqrt[5]{x^3}\Big|_c^2 = \frac{5}{3}\sqrt[5]{8}.$$

Оба интеграла сходятся, поэтому сходится и исходный интеграл.

2. Двойной интеграл в декартовых координатах

2.1. Объем цилиндрического тела. Двойной интеграл.

Понятие двойного интеграла возникает при определении *объёма цилиндрического тела.*

Пусть цилиндрическое тело ограничено замкнутой областью D плоскости Oxy, поверхностью $z=f(x,y)$ и цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси Oz и направляющей – границей области D (рис.1).

Разобьем область D на n частичных областей ΔS_1, $\Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$ (рис.2). Через границу каждой такой области проведем цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси Oz. Выберем в каждой области ΔS_i некоторую произвольную точку $p_i(x_i, y_i)$ и заменим соответствующее частичное цилиндрическое тело прямым цилиндром с тем же основанием и высотой, равной $z_i = f(x_i, y_i)$.

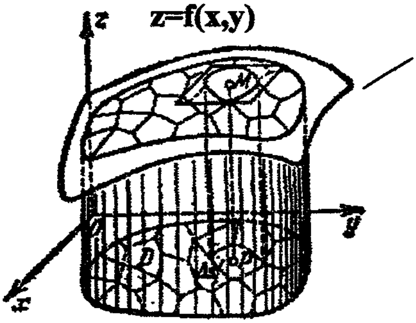


Рис.1

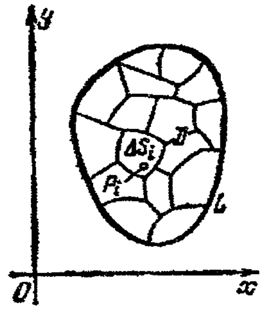


Рис.2

В результате получим ступенчатое тело с объемом:

$$V_n = f(x_1, y_1)\Delta S_1 + \ldots + f(x_n, y_n)\Delta S_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i. \qquad (1)$$

Определение. *Если существует предел* интегральной суммы (1) при неограниченном измельчении разбиений и этот предел *не зависит* от выбора разбиений и выбора точек $p_i(x_i, y_i)$ внутри областей, то он называется *двойным интегралом от функции f(x,y) по области D*. Обозначение:

$$V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy. \qquad (2)$$

2.2. Сведение двойного интеграла к повторному.

Двойной интеграл вычисляют сведением его к *повторному*. Еще раз рассмотрим цилиндрическое тело из предыдущего пункта (рис.3).

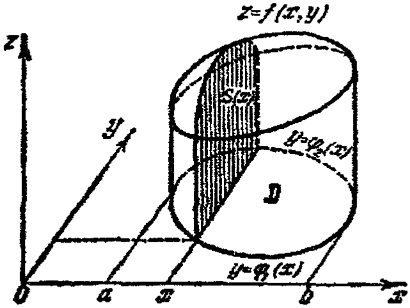


Рис.3

Вычислим объем тела по площадям параллельных сечений. Проведем плоскость x=const (a<x<b). Вычислим площадь S(x) (рис.3):

$$S(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (3)$$

Зная площади параллельных сечений можно найти объем тела следующим образом:

$$V = \int\limits_a^b S(x)dx. \qquad (4)$$

Подставляя (3) в (4), получим:

$$V = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \Big)dx. \qquad (5)$$

Из (2) и (5) получается *представление двойного интеграла в виде повторного*:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \Big) dx.$$

Различают два основных вида области интегрирования:

1. Область интегрирования D ограничена слева и справа прямыми x=a и x=b (a<b), а снизу и сверху – непрерывными кривыми $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$ $[\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)]$ (рис.4)

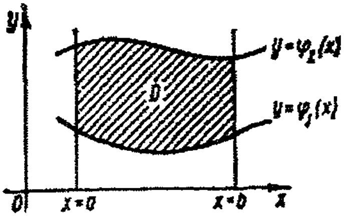


Рис. 4

Для такой области двойной интеграл можно вычислить по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (6)$$

В этом выражении сначала вычисляется внутренний интеграл $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$, в котором переменная x считается константой.

2. Область интегрирования D ограничена снизу и сверху прямыми y=c и y=d (c<d), а слева и справа

непрерывными кривыми $x=\psi_1(y)$ и $x=\psi_2(y)$ $[\psi_1(y) \leq \psi_2(y)]$ (рис. 5).

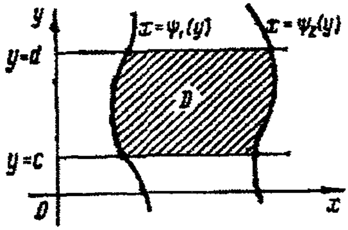


Рис. 5

Двойной интеграл по такой области можно вычислить по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dx. \qquad (7)$$

Здесь сначала вычисляется внутренний интеграл $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dx,$ в котором переменная y считается константой.

Правые части формул (6) и (7) называются *повторными интегралами.*

В общем случае область интегрирования путем разбиения на части сводится к основным областям.

Примеры.

1. Сведение двойного интеграла к повторному приобретает особенно простой вид, когда область D является прямоугольником со сторонами, параллельными осям координат (рис.6). В этом случае

становятся постоянными пределы не только внешнего, но и внутреннего интегралов и порядок интегрирования не имеет значения.

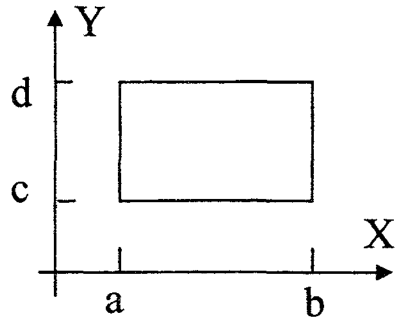


Рис.6

$$\iint_D f(x)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx.$$

2. Область D – треугольник, ограниченный прямыми y=0, y =2x и x=a (рис.7).

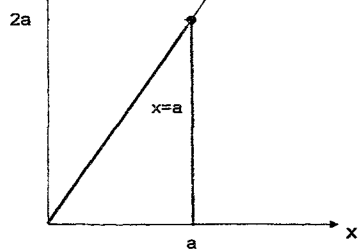


Рис.7

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^a dx \int_0^{2x} f(x,y)dy.$$

Можно избрать и другой порядок интегрирований:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{2a} dy \int_{\frac{y}{2}}^{a} f(x,y)dx.$$

Часто вычисления упрощаются, если правильно выбрать порядок интегрирований.

3. Область D ограничена линиями y=0, $y=x^3$, x+y=10.

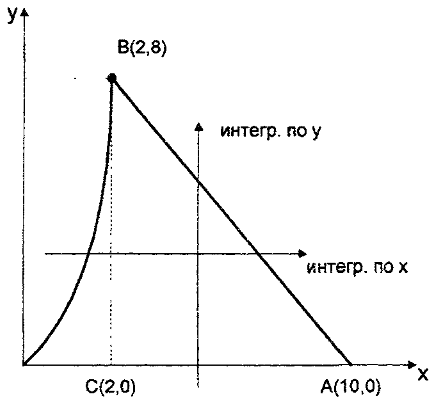


Рис.8

Здесь удобнее интегрировать сначала по x, а потом по y:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{8} dy \int_{3\sqrt{y}}^{10-y} f(x,y)dx.$$

При другом порядке интегрирований область и интеграл приходится разбивать *на две части*:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x^3} f(x,y)dy + \int\limits_2^{10} dx \int\limits_0^{10-x} f(x,y)dy.$$

Обычно при сведении двойного интеграла к повторному порядок интегрирования стремятся выбирать таким образом, чтобы обойтись без разбиения интеграла на части (если это возможно).

2.3. Примеры вычисления двойных интегралов

1. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x=0$, $y=0$, $x+y+z = 1$ (рис.9).

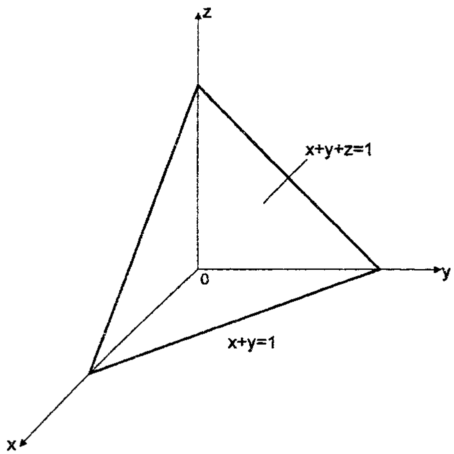


Рис.9

$$V=\int_{1}^{0}dx\int_{1}^{1+x}(1-x-y)dy=\int_{0}^{1}\left((1-x)y-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{1-x}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}(1-x)^2dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\left(1-2x+x^2\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x-x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{1}=\frac{1}{6}$$

2. Найти центр масс однородной пластинки, ограниченной линиями $y = 2-x^2$, $y = 2x-1$ (рис.10).

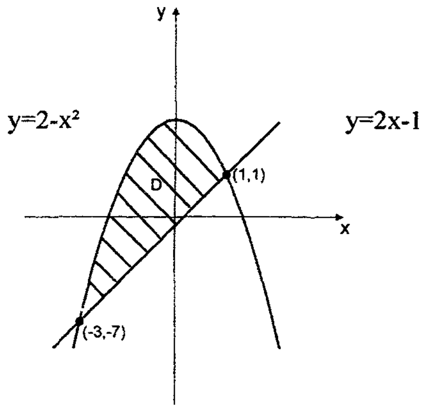


Рис.10

Воспользуемся формулами

$$x_{цм} = \frac{\iint\limits_D x dx dy}{S}, \quad y_{цм} = \frac{\iint\limits_D y dx dy}{S}, \quad S = \iint\limits_D dx dy$$

Тогда

$$S = \iint\limits_D dx dy = \int\limits_{-3}^{1} dx \int\limits_{2x-1}^{2-x^2} dy = \int\limits_{-3}^{1} \left(3 - x^2 - 2x\right) dx =$$

$$= \left(3x - \frac{x^3}{3} - x^2)\right|_{-3}^{1} = \frac{32}{3}.$$

$$\iint\limits_D x dx dy = \int\limits_{-3}^{1} dx \int\limits_{2x-1}^{2-x^2} x dy = \int\limits_{-3}^{1} xy\Big|_{2x-1}^{2-x^2} dx =$$

$$= \int\limits_{-3}^{1} \left(3x - x^3 - 2x^2\right) dx = \left(3\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3})\right|_{-3}^{1} = -\frac{32}{3}$$

$$\iint\limits_D y dx dy = \int\limits_{-3}^{1} dx \int\limits_{2x-1}^{2-x^2} y dy = \int\limits_{-3}^{1} \frac{y^2}{2}\Bigg|_{2x-1}^{2-x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-3}^{1} \left(\left(2 - x^2\right)^2 - (2x-1)^2\right) dx = -\frac{224}{15}$$

$$x_{цм} = -1, \quad y_{цм} = \frac{-224/15}{32/3} = -\frac{7}{5}$$

3. Вычислить $\iint\limits_D (x + 2y) dx dy$, *если область D ограничена прямыми y=x, y=2x, x=2, x=3 (рис.11).*

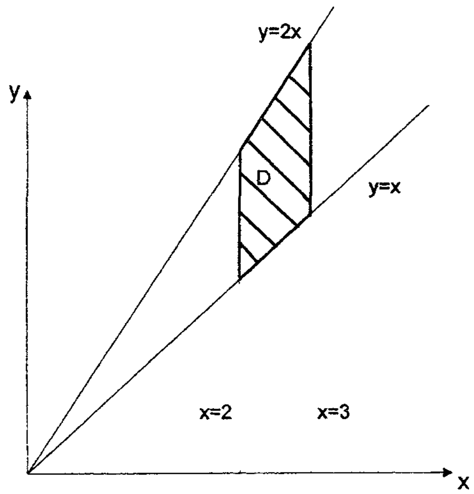


Рис.11

$$\iint\limits_D (x+2y)dxdy = \int\limits_2^3 dx \int\limits_x^{2x} (x+2y)dy = \int\limits_2^3 \left(xy + y^2\right)\Big|_x^{2x} dx =$$

$$= \int\limits_2^3 (2x^2 + 4x^2 - x^2 - x^2)dx = 4\int\limits_2^3 x^2 dx = 25\frac{1}{3}.$$

4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=x^2+y^2$, $y=x^2$, $y=1$, $z=0$ (рис.12, 13).

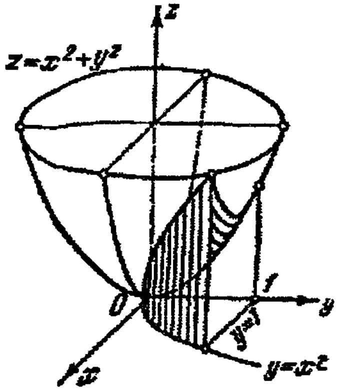


Рис. 12.

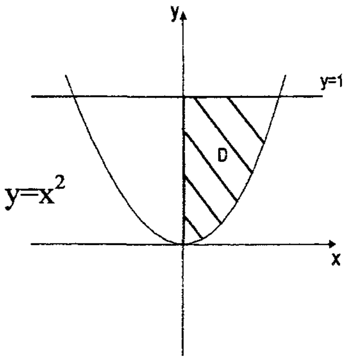


Рис.13

$$V = 2\iint\limits_D (x^2+y^2)dy = 2\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^1 (x^2+y^2)dy =$$

$$= 2\int\limits_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_{x^2}^1 dx = 2\int\limits_0^1 (x^2 + \frac{1}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3})dx =$$

$$= 2\left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}x - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{88}{105}.$$

Если использовать другой порядок интегрирований, то получится

$$V=2\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}}(x^2+y^2)dx=2\int_0^1\left(\frac{x^3}{3}+y^2x\right)\Bigg|_0^{\sqrt{y}}dy=$$

$$=2\int_0^1\left(\frac{y^{\frac{3}{2}}}{3}+y^{\frac{5}{2}}\right)dy=2\left(\frac{2y^{\frac{5}{2}}}{3\cdot 5}+\frac{2\cdot y^{\frac{7}{2}}}{7}\right)\Bigg|_0^1=\frac{88}{105}.$$

3. Двойной интеграл в полярных координатах

Преобразование двойного интеграла от прямоугольных координат x, y к полярным координатам ρ, θ, связанным с прямоугольными координатами соотношениями $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, производится по формуле:

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta.$$

Если область интегрирования D ограничена двумя лучами $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ ($\alpha<\beta$), выходящими из полюса, и двумя кривыми $\rho=\rho_1(\theta)$ и $\rho=\rho_2(\theta)$, где $\rho_1(\theta)\leq\rho_2(\theta)$, то двойной интеграл вычисляется по формуле:

$$\iint_D F(\rho,\theta)\rho d\rho d\theta=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)}F(\rho,\theta)\rho d\rho,$$

где $F(\rho,\theta)=f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Здесь сначала вычисляется интеграл $\int\limits_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} F(\rho,\theta)\rho d\rho$, в котором переменная θ считается константой.

4. Криволинейный интеграл

4.1. Криволинейный интеграл по координатам (криволинейный интеграл второго рода)

Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны в окрестности некоторой кусочно-гладкой кривой L с началом в точке $A(a_1,a_2)$ и концом в точке $B(b_1,b_2)$.

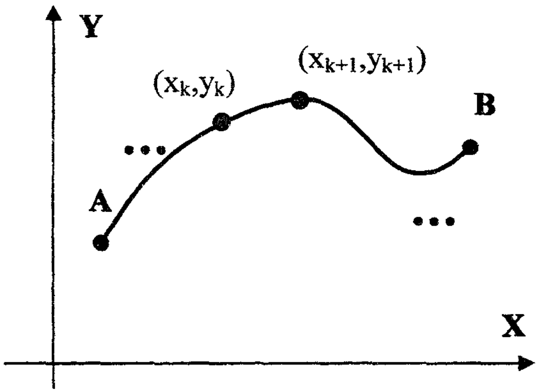


Рис.14

Разобьём кривую последовательными точками на n частей и составим так называемую *интегральную сумму*:

$$\sum_k [P(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k) + Q(x_k, y_k)(y_{k+1} - y_k)]$$

Определение. Если существует предел интегральной суммы при неограниченном измельчении разбиения кривой и этот предел не зависит от выбора разбиений, то он называется криволинейным интегралом по координатам (второго рода).

$$\lim \sum_k [P(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k) + Q(x_k, y_k)(y_{k+1} - y_k)] =$$

$$= \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_L Pdx + Qdy \qquad (1)$$

Чтобы *вычислить* криволинейный интеграл, нужно все переменные выразить через какую-то одну. Например, если удаётся записать уравнение кривой в виде y=y(x), то dy=y$'$dx и рассматриваемый интеграл *вычисляется* по формуле:

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_{a_1}^{b_1} (P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x))dx. \qquad (2a)$$

Если записать уравнение кривой в виде x=x(y), то dx=x$'$dy и получится формула:

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_{a_2}^{b_2} (P(x(y), y)x'(y) + Q(x(y), y))dy \qquad (2b)$$

Если кривая задана параметрически (x=x(t),y=y(t)), и точкам A, B соответствуют значения параметра t_1 и t_2, то, соответственно,

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_{t_1}^{t_2}\left(P(x,y)x'(t)+P(x,y)y'(t)\right)dt \qquad (2c)$$

Полезно рассмотреть некоторые частные случаи.
a) L – отрезок прямой, параллельной оси Ox.

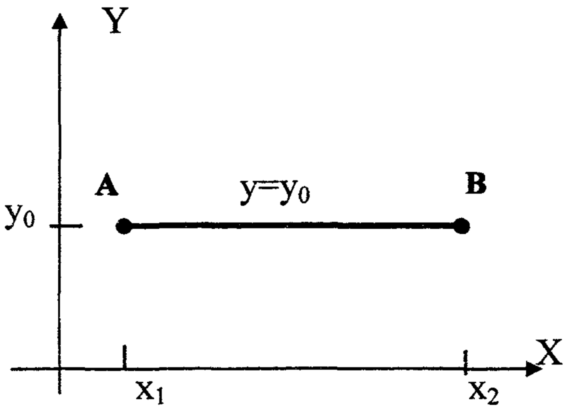


Рис.15

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_{x_1}^{x_2} P(x,y_0)dx. \qquad (3)$$

b) L – отрезок прямой, параллельной оси Oy.

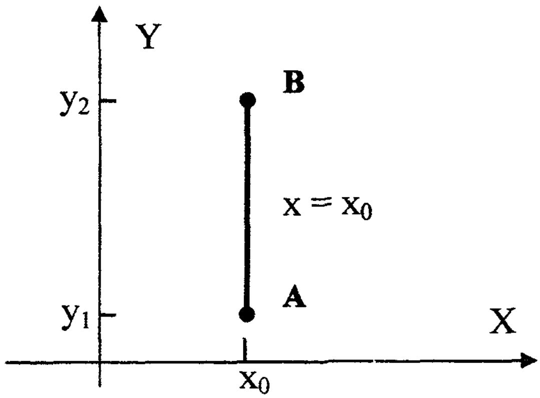


Рис.16

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_{y_1}^{y_2} Q(x_0, y)dy. \qquad (4)$$

Пример.

Вычислить интеграл $\int_L xydx + (x+y)dy$, *от точки O(0;0) до точки A(1;2)*

a) по отрезку прямой;

b) по дуге параболы $y=2x^3$*;*

c) по ломаной OBA.

Решение.

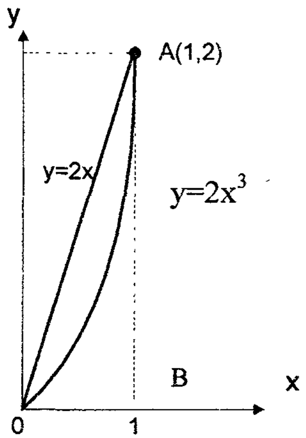


Рис.17

а) y=2x, y ' =2, по формуле (2а)

$$\int_0^1 (2x^2 + 3x \cdot 2)dx = \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 \Big|_0^1 = \frac{11}{3}.$$

б) $y=2x^3$, $y'=6x^2$, по формуле (2а)

$$\int_0^1 \left(2x^4 + (x + 2x^3)6x^2\right)dx = \int_0^1 (2x^4 + 6x^3 + 12x^5)dx =$$

$$= \frac{2}{5}x^5 + \frac{3}{2}x^4 + 2x^6 \Big|_0^1 = \frac{39}{10}.$$

в) Контур интегрирования разбиваем на два участка: OB и BA.

На участке OB: y=0 и dy=0. По формуле (3) интеграл по этому участку равен нулю.

На участке BA: x=1, dx=0. Поэтому по формуле (4)

$$\int_0^2 (1+y)dy = \frac{(1+y)^2}{2}\Big|_0^2 = 4.$$

Замечание. Обратите внимание, *интеграл зависит не только от начальной и конечной точек интегрирования, но и от пути интегрирования между этими точками.*

Пример.

Вычислить $\int_L 6x^2ydx + 10xy^2dy$ *по кривой* $x=t$, $y=t^3$ *в пределах от* $t_1=1$ *до* $t_2=2$.

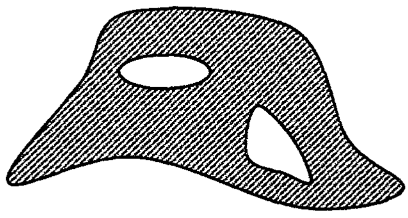
Решение. Воспользуемся формулой (2с):

$$\int_L 6x^2ydx + 10xy^2dy = \int_1^2 (6t^2t^3 \cdot 1 + 10t \cdot t^6 \cdot 3t^2)dt =$$

$$= \int_1^2 (6t^5 + 30t^9)dt = \left(t^6 + 3t^{10}\right)\Big|_1^2 = 3132.$$

4.2. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Нахождение функции по ее полному дифференциалу

Плоская область называется *односвязной*, если она не имеет «дыр». Другими словами, если любой замкнутый контур в этой области можно стянуть в точку. Например, область на рисунке не односвязная:



Теорема. *Для того чтобы криволинейный интеграл*

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (5)$$

между точками A и B не зависел от соединяющего их пути интегрирования L, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой односвязной области D, содержащей все рассматриваемые пути выполнялось равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

При этом подынтегральное выражение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$ то есть

$$dU(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

Замечание. Для того чтобы найти первообразную U(x,y), нужно вычислить интеграл от произвольной точки $A(x_0,y_0)$ до некоторой «плавающей» точки B(x,y).

$$U(x,y)=\int\limits_{x_0,y_0}^{x,y} P(x,y)dx+Q(x,y)dy+C. \qquad (5)$$

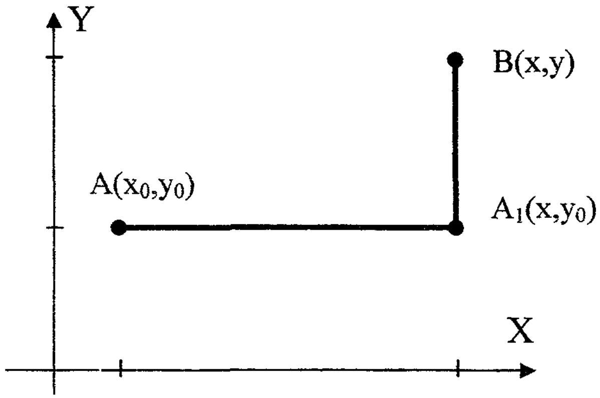


Рис.18

Интегрирование удобно выполнять по ломаной линии, отрезки которой параллельны осям координат.

Интегрирование по AA_1B (рис.18).

$$U(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy+C. \qquad (6)$$

Первый интеграл берется по AA_1 ($y=y_0$, $dy=0$) при помощи формулы (3). Второй интеграл берется по A_1B ($x=const$, $dx=0$) при помощи формулы (4).

Пример.

Найти функцию U(x,y) по ее полному дифференциалу

$$dU=(x^2-2xy^2+3)dx+(y^2-2x^2y+3)dy.$$

Решение. $P=(x^2-2xy^2+3)$,$Q=(y^2-2x^2y+3)$. Проверим условие существования функции U:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=4xy;\frac{\partial Q}{\partial x}=4xy;$$

Воспользуемся формулой (6). Возьмём $x_0=0$, $y_0=0$.

$$U(x,y)=\int_0^x(x^2-2x\cdot 0^2+3)dx+\int_0^y(y^2-2x^2y+3)dy=$$

$$=\frac{x^3}{3}+3x+\frac{y^3}{3}-x^2y^2+3y+C.$$

4.3. Криволинейный интеграл по длине дуги (криволинейный интеграл первого рода)

Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в окрестности некоторой кусочно-гладкой кривой L с началом в точке $A(a_1,a_2)$ и концом в точке $B(b_1,b_2)$.

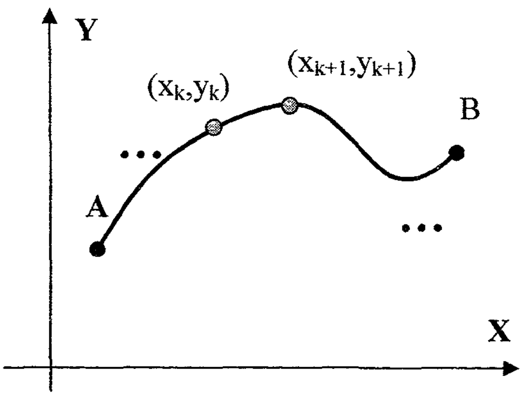


Рис.19

Разобьём кривую последовательными точками на n дуг и составим *интегральную сумму*:

$$\sum_k f(x_k, y_k)\Delta s_k ,$$

где Δs_k – длина k-й дуги.

Определение. Если существует предел интегральной суммы при неограниченном измельчении разбиения кривой и этот предел не зависит от выбора разбиений, то он называется *криволинейным интегралом по длине дуги* L от функции f(x,y):

$$\lim \sum_k f(x_k, y_k)\Delta s_k = \int_L f(x, y)ds .$$

Если удаётся записать уравнение кривой в виде y=y(x), то рассматриваемый интеграл *вычисляется* по формуле:

$$\int_L f(x,y)ds = \int_{a_1}^{b_1} f[x, y(x)]\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx. \qquad (7a)$$

Если записать уравнение кривой в виде x=x(y), то получится формула:

$$\int_L f(x,y)ds = \int_{a_2}^{b_2} f[x(y), y]\sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy. \qquad (7b)$$

Если кривая задана параметрически (x=x(t),y=y(t)), и точкам A, B соответствуют значения параметра t_1 и t_2, то, соответственно,

$$\int_L f(x,y)ds = \int_{t_1}^{t_1} f[x(t), y(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt. \qquad (7c)$$

Пример.

Вычислить $\int\limits_L (x-y)ds$, *где L – отрезок прямой от A(0,0) до B(4,3) (рис.20):*

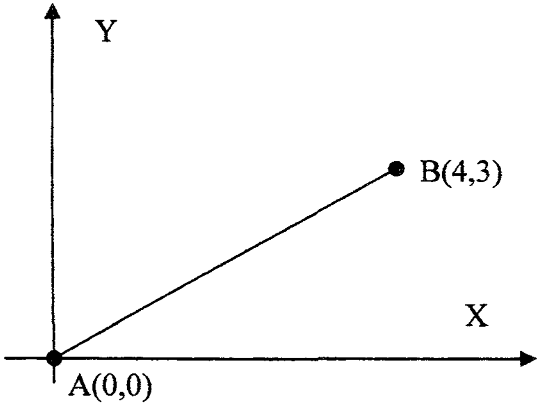


Рис. 20

Решение. Уравнение прямой (AB): y=3x/4. Получаем:

$$\int\limits_L (x-y)ds = \int\limits_0^4 (x-\frac{3}{4}x)\sqrt{1+\frac{9}{16}}dx = \frac{5}{16}\int\limits_0^4 xdx = \frac{5}{32}x^2\Big|_0^4 = \frac{5}{2}.$$

Пример.

Вычислить интеграл $\int\limits_L \sqrt{2y}ds$ *по дуге*

$x=t,\ y=\dfrac{t^2}{2},\ x=t,$ *в пределах от* $t_1=0$ *до* $t_2=1$.

Решение. Воспользуемся формулой (7с):

$$\int\limits_L \sqrt{2y}\,ds = \int\limits_0^1 \sqrt{2\frac{1}{2}t^2}\cdot\sqrt{1+t^2}\,dt = \int\limits_0^1 t\sqrt{1+t^2}\,dt =$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \sqrt{1+t^2}\,d(1+t^2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1+t^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

4.4. Формула Грина

Если L – граница области D и функции P(x,y) и Q(x,y) вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ непрерывны в замкнутой области D (включая границу L), то справедлива *формула Грина*:

$$\int\limits_L (Pdx + Qdy) = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy, \qquad (8)$$

Направление обхода контура L выбирается так, что область D при движении по контуру оставалась слева.

Пример 1.

Преобразовать в двойной интеграл и вычислить интеграл $\int\limits_L 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2 dy$, *где L – контур треугольника с вершинами A(1;1), B(2;2), C(1;3), пробегаемый против часовой стрелки (рис.21).*

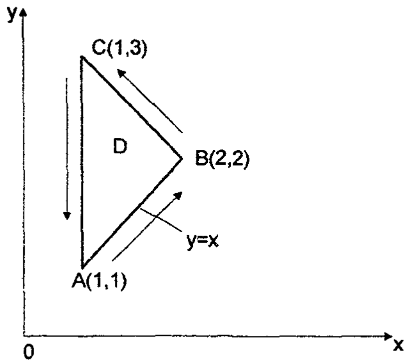


Рис.21

Решение. Здесь $P(x,y)=2(x^2+y^2)$, $Q(x,y)=(x+y)^2$.

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2(x+y)-4y=2(x-y).$$

По формуле Грина,

$$\int_L 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy=\iint_D 2(x-y)dxdy.$$

Вычислим двойной интеграл по области D:

$$\iint_D 2(x-y)dxdy=2\int_1^2 dx\int_x^{4-x}(x-y)dy=$$

$$=2\int_1^2\left[xy-\frac{1}{2}y^2\right]_x^{4-x}dx=$$

$$=2\int_1^2\left[x(4-x)-\frac{1}{2}(4-x)^2-x^2+\frac{1}{2}x^2\right]dx=$$

$$=4\int_1^2(4x-x^2-4)dx=4\left[2x^2-\frac{1}{3}x^3-4x\right]_1^2=\frac{4}{3}.$$

Пример 2.

Применяя формулу Грина, вычислить
$I = \oint\limits_L (-x^2 y)dx + xy^2 dy$, *где L – окружность*
$x^2 + y^2 = R^2$, *пробегаемая против часовой стрелки.*

Решение. Здесь

$$P(x.y) = -x^2 y, Q(x,y) = xy^2. \ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x^2 + y^2.$$

Следовательно,

$$I = \oint\limits_L (-x^2 y)dx + xy^2 dy = \iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy.$$

Введем полярные координаты x=ρcosθ, y=ρsinθ, 0≤θ≤2π; получим

$$I = \iint\limits_D \rho^2 \rho d\rho d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^R \rho^3 d\rho = \frac{1}{4} R^4 \cdot \int\limits_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi R^4}{2}.$$

5. Приложение. Варианты задач.

5.1. Несобственные интегралы

Вариант	Вычислить	Вычислить
1	$\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{x+1}{x^2-x}dx$	$\int\limits_{1}^{e^2+1}\frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx$
2	$\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}}dx$	$\int\limits_{0}^{16}\frac{\sqrt{256-x^2}}{\mathrm{x}}\mathrm{dx}$
3	$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{4arctgx-x}{1+x^2}dx$	$\int\limits_{2}^{4}\frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$
4	$\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}$	$\int\limits_{-1}^{1}\frac{x^3+1}{x^2-1}dx$
5	$\int\limits_{1}^{\infty}e^{-2x}\cos xdx$	$\int\limits_{1}^{e}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$
6	$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{(x^3+3x+1)^2}dx$	$\int\limits_{1/3}^{2/3}\frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}$
7	$\int\limits_{-\infty}^{0}(x+2)^2\cos 3xdx$	$\int\limits_{0}^{2}\frac{x^3dx}{4-x^2}$
8	$\int\limits_{1}^{\infty}\frac{e^xdx}{e^{2x}+5}$	$\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{\cos x\cdot(1-\cos x)}$

Вариант	Вычислить	Вычислить
9	$\int_4^{\infty}(x^2+7x+12)\cos x dx$	$\int_0^{e}\frac{\ln x+1}{x}dx$
10	$\int_1^{\infty}e^{-3x}\sin x dx$	$\int_0^{\sqrt{5}}\frac{dx}{(5-x^2)^{3/2}}$
11	$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x+\sqrt{x}}$	$\int_0^{2}\frac{xdx}{\left(x^2-1\right)^{4/5}}$
12	$\int_0^{\infty}\frac{x arctg 2x}{1+4x^2}dx$	$\int_0^{2}\frac{x^4dx}{(4-x^2)^{3/2}}$
13	$\int_2^{\infty}\frac{1}{(x-1)(x-3)(x-5)}dx$	$\int_0^{1}x\ln^2 x dx$
14	$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$	$\int_0^{1}\frac{x^4dx}{(1-x^2)^{3/2}}$
15	$\int_0^{\infty}x^2e^{-x}dx$	$\int_0^{1}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$
16	$\int_1^{\infty}\frac{1+2x}{x^2\cdot(1+x)}dx$	$\int_0^{2}\frac{dx}{(4-x^2)^{3/2}}$
17	$\int_0^{\infty}(x^2+5x+6)e^{-x}dx$	$\int_0^{4}\frac{dx}{(16-x^2)\sqrt{16-x^2}}$
18	$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+6x+11}$	$\int_0^{\sqrt{2}}\frac{x^4dx}{(2-x^2)^{3/2}}$

Вариант	Вычислить	Вычислить
19	$\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$	$\int_0^1 \sin(\ln x)dx$
20	$\int_2^{\infty} x^2 e^{-3x}dx$	$\int_0^4 \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}$
21	$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+9)^{3/2}}$	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x\cdot(1-x)}}$
22	$\int_{-\infty}^{0} e^{3x}\sin x dx$	$\int_0^4 \frac{dx}{(16-x^2)^{3/2}}$
23	$\int_0^{\infty}\frac{x^3dx}{x^2+1}$	$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sin^3 x}$
24	$\int_0^{\infty}\frac{xdx}{x^4+1}$	$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x^4}$
25	$\int_0^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+8x+1}}$	$\int_0^1 \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2}dx$
26	$\int_1^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^2+2x+10}}$	$\int_0^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
27	$\int_3^{\infty}\frac{\sqrt{x^2-9}}{\mathrm{x}^4}\mathrm{dx}$	$\int_{-2}^{0}\sqrt{\frac{x+6}{x+2}}\mathrm{dx}$
28	$\int_5^{\infty}\frac{1}{x(x-2)(x-4)}dx$	$\int_0^5 \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}\mathrm{dx}$

Вариант	Вычислить	Вычислить
29	$\int_0^{\infty}(x^2+3x+2)\sin x dx$	$\int_0^6 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$
30	$\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2\cdot\sqrt[8]{x}}dx$	$\int_{-10}^{-5}\sqrt{\frac{x}{x+5}}\mathrm{dx}$

5.2. Двойные интегралы

Вариант	Изменить порядок интегрирований	Вычислить
1	$\int_{-2}^{-1}dy\int_{-\sqrt{2+y}}^{0}fdx+\int_{-1}^{0}dy\int_{-\sqrt{-y}}^{0}fdx$	$\iint_D\left(12x^2y^2+8xy^3\right)dxdy,$ $D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}$
2	$\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{0}fdx+\int_1^{\sqrt{2}}dy\int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0}fdx$	$\iint_D\left(9x^2y^2+2x^3y^3\right)dxdy,$ $D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^2$
3	$\int_0^1 dy\int_0^y fdx+\int_1^{\sqrt{2}}dy\int_0^{\sqrt{2-y^2}}fdx$	$\iint_D\left(2xy^2+8x^2y\right)dxdy,$ $D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-\sqrt{x}$
4	$\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}}fdx+\int_1^2 dy\int_0^{\sqrt{2-y}}fdx$	$\iint_D x^3y^2dxdy,$ $D: x^2+y^2\le 2$
5	$\int_{-\sqrt{2}}^{1}dx\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{0}fdy+\int_{-1}^{0}dx\int_x^0 fdy$	$\iint_D\left(x^2+y\right)dxdy,$ $D: y=x^2, x=y^2$
6	$\int_0^{1/\sqrt{2}}dy\int_0^{\arcsin y}fdx+\int_{1/\sqrt{2}}^{1}dy\int_0^{\arccos y}fdx$	$\iint_D\left(x^2/y^2\right)dxdy,$ $D: x=2, y=x, xy=1$

Вари- ант	Изменить порядок интегрирований	Вычислить
7	$\int_{-2}^{-1} dy \int_{0}^{\sqrt{2+y}} f dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{0}^{\sqrt{-y}} f dx$	$\iint_D \cos(x+y) dxdy$, $D: x=0,\ y=\pi,\ y=x$
8	$\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int_{1}^{e} dy \int_{-1}^{\ln y} f dx$	$\iint_D \left(27x^2y^2+48x^3y^3\right) dxdy$ $D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^2$
9	$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{x^2} f dy$	$\iint_D \left(4xy+3x^2y^2\right) dxdy$, $D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}$
10	$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f dy + \int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f dy$	$\iint_D \left(12xy+9x^2y^2\right) dxdy$, $D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^2$
11	$\int_{0}^{1} dx \int_{1-x^2}^{1} f dy + \int_{1}^{e} dx \int_{\ln x}^{1} f dy$	$\iint_D \left(8xy+9x^2y^2\right) dxdy$, $D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^3$
12	$\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt[3]{y}} f dx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{2-y} f dx$	$\iint_D y e^{xy/2} dxdy, D: x=1,$ $x=4, y=\ln 2, y=\ln 3$
13	$\int_{0}^{\pi/4} dy \int_{0}^{\sin y 1} f dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int_{0}^{\cos y} f dx$	$\iint_D \left(xy^2+8x^2y^3\right) dxdy$, $D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}$
14	$\int_{-2}^{-1} dx \int_{-(2+x)}^{0} f dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{\sqrt[3]{x}}^{0} f dy$	$\iint_D y \cos xy dxdy, D: x=1,$ $x=2, y=\pi/2, y=\pi$

Вариант	Изменить порядок интегрирований	Вычислить
15	$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f dx$	$\iint_D (8xy + 18xy^3) dxdy$, $D: x = 1, y = 2x^2, y = -\sqrt{x}$
16	$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^0 f dx$	$\iint_D (xy - 8x^5 y^5) dxdy$, $D: x = 1, y = \sqrt[3]{x}, y = -\sqrt{x}$
17	$\int_0^1 dy \int_{-y}^0 f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f dx$	$\iint_D y e^{-xy/2} dxdy, D: x = 2,$ $x = 3, y = \ln 2, y = \ln 3$
18	$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f dy + \int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f dy$	$\iint_D \frac{dxdy}{16x^2 - y^2}, D: 2x + 3y = 1,$ $2x + 3y = 4, y = 2x, y = 3x$
19	$\int_0^1 dy \int_0^{y^3} f dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f dx$	$\iint_D \frac{y}{y + 2x^2} dxdy, D: y = \sqrt{x},$ $y = 7\sqrt{x}, y = x^2, y = 2x^2$
20	$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f dx + \int_{-\sqrt{3}}^0 dy \int_0^{2-\sqrt{4-y^2}} f dx$	$\iint_D \frac{y}{x} tg \frac{y}{x} dxdy, D: y = \frac{3}{x},$ $y = \frac{5}{x}, y = \frac{\pi}{4x}, y = \frac{\pi}{3x}$
21	$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-2-y}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^0 f dx$	$\iint_D \frac{dxdy}{x^2 - xy} dxdy D: 3x + y = 1,$ $3x + y = 2, y = 3x, y = 4x$

Вариант	Изменить порядок интегрирований	Вычислить
22	$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f dx + \int\limits_1^e dy \int\limits_{\ln y}^1 f dx$	$\iint\limits_D e^{-x^2/y} dxdy, D: y=\sqrt{x}, y=2\sqrt{x}, y=x^2, y=3x^2$
23	$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f dy$	$\iint\limits_D \frac{dxdy}{xy+y^2}, D: x+2y=2, x+2y=4, y=x, y=2x$
24	$\int\limits_0^{\pi/4} dx \int\limits_0^{\sin x} f dy + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int\limits_0^{\cos x} f dy$	$\iint\limits_D \frac{y^2 dxdy}{2x^2y+3x^4}, D: y=\sqrt{x}, y=5\sqrt{x}, y=x^2, y=2x^2$
25	$\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_y^0 f dx$	$\iint\limits_D \frac{y-x}{y+x} dxdy, D: y=\frac{1}{x}, y=\frac{3}{x}, y=x, y=3x$
26	$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f dy$	$\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2) dxdy, D:$ *круг* $r=2$, *центр* $O(0;0)$
27	$\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f dy$	$\iint\limits_D xy\, dxdy, D:$ *эллипс* $x^2+4y^2=1$
28	$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^0 f dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_{-\sqrt{2-x}}^0 f dy$	$\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2} dxdy, D:$ *круг* $r=1$, *центр* $O(0;0)$
29	$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f dx$	$\iint\limits_D (4-2x-3y) dxdy, D:$ *круг* $r=5$, *центр* $O(0;0)$

Вари-ант	Изменить порядок интегрирований	Вычислить
30	$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2-x}} f dy$	$\iint_D \frac{x^2}{y^2} dxdy, D: x = 2,$ $y = x,\ y = 1/x$

5.3. Криволинейные интегралы

Вари-ант	Вычислить	Преобразовать в двойной интеграл и вычислить
1	$\int_{AB} (x+y)dx - x^2 dy$ отрезок, A(1,5),B(2;-1)	$\oint_{ABC} \sin x dx - x^2 dy$ A(1,1),B(2;1),C(2;5)
2	$\int_{AB} dl/(x+y)$ отрезок, A(2,4),B(1;3)	$\oint (x^4 - 2y)dx - e^{3y} dy$ окр - ть r = 3, O(1;1)
3	$\int_{AB} (x+y)dx - x^2 dy$ отрезок. A(1,5),B(2;-1)	$\oint (x^2 + y)dx - 3xdy,$ эллипс $x^2 + 4y^2 = 1$
4	$\int_{AB} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, отрезок, A(0,-2),B(4;0)	$\oint_{ABC} (\sqrt[5]{x} + y^2)dx - 2^y dy$ A(0,0),B(1;1),C(0;2)
5	$\int_{AB} (x+y)dx - x^2 dy$ отрезок, A(1.5),B(2;-1)	$\oint_{ABC} (x^4 + y)dx - \frac{1}{y} dy$ A(1,1),B(2;2),C(2;3)
6	$\int_{AB} x^2 dl$, *дуга* $y = \ln x$ *от* A(1,0) до B(2;ln2)	$\oint (x^3 + 4y)dx - xdy,$ эллипс $x^2 + 2y^2 = 1$

Вари-ант	Вычислить	Преобразовать в двойной интеграл и вычислить
7	$\int_{AB}\sqrt{x}\,dl$, дуга $x=t^2$ $y=t^3, t=1, t=2$	$\oint(x^6+5y)dx-2xdy$, окр - ть $x^2+y^2=9$
8	$\int_{AOB}(x-y)dx-xydy$ ломаная, A(-1,5), B(2;-1)	$\oint_{ABC}(8x+y)dx-xdy$ A(1,5), B(2;-1), C(0;6)
9	$\int_{AB}\sin y\,dx-\sin x\,dy$ отрезок, $A(0,\pi), B(\pi;0)$	$\oint_{ABC}(x^3+y)dx+xdy$ A(0,1), B(1;2), C(0;0)
10	$\int_{OAB}(x^3+y)dx-2xdy$ ломаная, A(1,1), B(2;-2)	$\oint(x^2+3y)dx-2xdy$, эллипс $9x^2+4y^2=1$
11	$\int_{AB}\sqrt{y}\,dx+ydy$, дуга $x=t^2, y=t,\ t=1,\ t=2$	$\oint(x^2+2y)dx-xdy$, окр - ть $x^2+y^2=2x$
12	$\int_{AOB}xdx+(x-y)dy$ ломаная, A(4,1), B(1;2)	$\oint\cos xdx-(3x-y)dy$ окр - ть r = 1, O(-1;1)
13	$\int_{AB}e^x dx-xydy$ отрезок, A(1,1), B(2;0)	$\oint_{ABC}(\ln x+y)dx-\sqrt{y}dy$ A(1,1), B(3;1), C(3;5)
14	$\int_{AB}e^y dx-4xdy$ отрезок, A(-1,1), B(3;3)	$\oint_{ABC}(5x-9y)dx+e^y dy$ A(0,0), B(1;1), C(0;2)
15	$\int_{AB}xy\,dx+3x^2dy$ $y=x^3$, A(0,0), B(2;8)	$\oint(9x-8y)dx+5y\,dy$ окр - ть r = 1, O(0;1)

Вариант	Вычислить	Преобразовать в двойной интеграл и вычислить
16	$\int_{AB}(x^2+y^2)dx - xdy$ отрезок, A(2,3), B(3;2)	$\oint(x^3-y)dx+2^y dy$ окр - ть r = 1, O(-1;0)
17	$\int_{AB}(x+y)dx - x^2dy$ отрезок, A(1,5), B(2;-1)	$\oint_{ABC}(tgx+y)dx+\frac{1}{y}dy$ A(1,1), B(2;1), C(2;2)
18	$\int_{AB}(x^2+y)\,dx+2x\,dy$ $y=2x-x^2$, A(1,1), B(0;0)	$\oint(x^4+5y)dx-2xdy$, эллипс $\frac{x^2}{4}+y^2=1$
19	$\int_{AB}(x+y^2)dx - y^2dy$ отрезок, A(-1,-1), B(2;0)	$\oint(x^3+y)dx-5xdy$, окр - ть $x^2+y^2=2y$
20	$\int_{AB}x^2y\,dx+x\,dy$ $y=x+x^2$, A(0,0), B(1;2)	$\oint(2^x-y)dx-4xdy$, эллипс $4x^2+y^2=1$
21	$\int_{AOB}x^2dx+(x-2y)dy$ ломаная, A(3,3), B(-1;2)	$\oint_{ABC}(e^x+y^3)dx-2^y dy$ A(-1,1), B(1;1), C(0;2)
22	$\int_{AB}x^2dl$, дуга $y=\ln x$ от A(2,ln2) до B(5;ln5)	$\oint_{ABC}(\sqrt[3]{x}+y^2)dx-ydy$ A(0,0), B(2;2), C(0;2)
23	$\int_{AOB}y\,dx-(x-2y)dy$ ломаная, A(6,3), B(-3;-3)	$\oint(x+7y)dx+\sqrt{y}\,dy$ окр - ть r = 2, O(2;0)
24	$\int_{AB}(x+2y)dx+x^3dy$ отрезок, A(-1,1), B(1;-1)	$\oint_{ABC}(x+4y)dx+\frac{2}{y}dy$ A(1,1), B(2;2), C(1;3)

Вари-ант	Вычислить	Преобразовать в двойной интеграл и вычислить
25	$\int_{AB} \sin(x+2y)dx - x\,dy$ отрезок, A(0,0), B(1;-1)	$\oint (x^4 - y)dx + e^y dy$ окр - ть $r = 1$, O(1;1)
26	$\int_{AB} 2xy\,dx - x^2 dy$ $y = \sqrt{x}$, A(0,0), B(1;1)	$\oint_{ABC} (3^x + y^2)dx - xdy$ A(2,2), B(2;4), C(0;2)
27	$\int_{AB} e^{x+y} dx - ydy$ отрезок, A(0,1), B(2;0)	$\oint (x^3 + 2y)dx + xdy$, окр - ть $x^2 + y^2 = 4$
28	$\int_{AB} \cos(x+y)\,dx - x\,dy$ отрезок, A(0,-π), B(π;0)	$\oint (x^3 + 4y)dx - 2^y dy$ окр - ть $r = 2$, O(0;0)
29	$\int_{AOB} (x-y)dx + ydy$ ломаная, A(-2,1), B(1;4)	$\oint x^4 dx - (x + y^3)dy$, окр - ть $x^2 + y^2 = 4x$
30	$\int_{AB} \frac{1}{\sqrt{x}} dl$, дуга $x = t^2 y = t^3, t = 2, t = 3$	$\oint (x + 3y)dx - 5xdy$, эллипс $9x^2 + y^2 = 1$

Список литературы

1. Шипачёв В.С. Высшая математика. – М.: «Высш. школа», 1996.
2. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х., Математический анализ, т. 2. – М.: «Издательство Московского Университета», 1987.
3. Пискунов Н.С., Дифференциальное и интегральное исчисления. – М.: «Наука», 1985.
4. Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И., Шикин Е.В., Заляпин В.И. Вся высшая математика, т. 4. – М.: Эдиториал УРСС, 2002.

Оглавление

Учебно-методическое издание
Киселев Евгений Владимирович,
Милевский Александр Станиславович
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. НЕСОБСТВЕННЫЕ, ДВОЙНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ
Методические указания

Подписано в печать - 13.12.07. Формат 60x84 / 16
Заказ № 662. Усл. печ. л. – 3,0.
Тираж – 300. Изд.N282-07.

127994, Москва, ул. Образцова, 15 Типография МИИТа