МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

ЭЛЕКТРОННЫЙ КОНТЕНТ

А.С.МИЛЕВСКИЙ, А.И. ФРОЛОВИЧЕВ-

Данный электронный контент впервые был разработан в 2013 году, в соответствии с ФГОС ВПО. В 2016 году был переработан и приведен в соответствие с ФГОС ВО.

1. Введение

1.1 Предмет исследования операций.

Принятие решения в реальной задаче управления − сложная проблема, которую традиционно решали, опираясь на опыт и интуицию, а то и методом проб и ошибок.

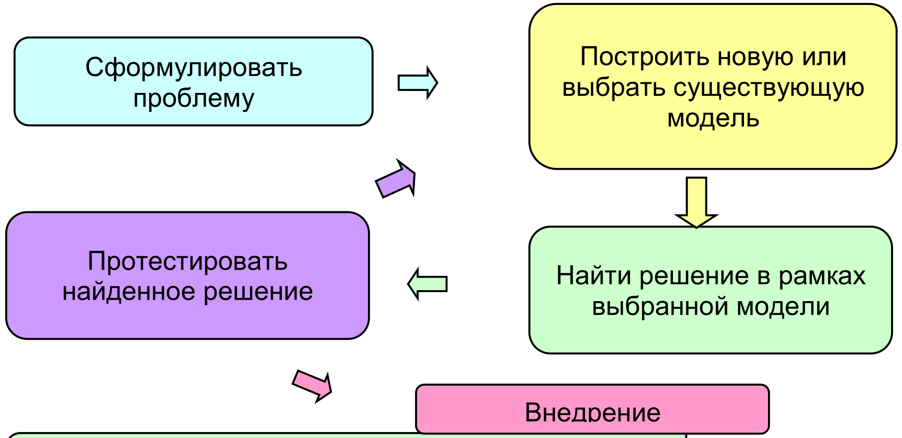
Успехи использования математических методов в естественных науках много раз наталкивали на мысль приложить их и к управленческим задачам.

Это оказывается далеко не просто. Изучаемые здесь явления гораздо труднее поддаются формализации, если вообще поддаются. Приходится производить непростой анализ, надеясь так упростить модель, чтобы её можно было проанализировать и не потерять при этом сути проблемы.

Несмотря на это математические модели всё шире применяют при изучении таких вопросов, которые ранее изучались только на гуманитарном уровне. Этот подход позволяет выделять и обобщать существенные закономерности, а иногда и формулировать решающие рекомендации.

Исследование операций представляет собой применение математических методов к проблемам управления, возникающим в промышленности, деловой сфере, обороне и др.

Важнейшим этапом при этом является построение математической модели.



Надо подчеркнуть, что хотя математические методы дают чёткие ответы на точно поставленные вопросы, сами по себе они вопросов не ставят, критерии не выбирают и решения не принимают. Это - задача менеджера.

Именно менеджер должен увидеть в реальной ситуации возможности применения соответствующих моделей для повышения эффективности управления, собрать необходимую исходную информацию.
А после решения задачи осмыслить полученный результат и продумать, как его использовать для принятия разумного управленческого решения.

1.2 Задача математического программирования.

Математическое программирование —дисциплина, изучающая теорию и методы решения задач о нахождении экстремума функции на заданном множестве.

Пример.

Целевая функция

$$\begin{cases} f(x) = x_1 + 3x_2^{\,3} \to \max \\ x_1^{\,2} + x_2^{\,2} \le 10 \\ x_1 \ge 2^{x_2} \end{cases}$$

Ограничения, определяющие допустимое множество U

В зависимости от природы допустимого множества U изучают различные виды задач. Например:

- задачи дискретного программирования — если множество U конечно или счётно;
- задачи линейного программирования, если все ограничения и целевая функция являются линейными;
- задачи нелинейного программирования, если ограничения или целевая функция содержат нелинейные выражения;
- задачи целочисленного программирования — если значения переменных являются целыми числами.

Методы решения задач разных классов совершенно различны и существенно используют специфику задачи.

Например, задача дискретного программирования при небольшом размере множества U может быть решена простым перебором.

Пример. ***Задача о назначениях***.
Требуется распределить пять работников на пять работ. Эффективность работы зависит от опыта и квалификации. Эффективность

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

i-го работника на j-й работе (зависящая от опыта и квалификации) стоит на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы

Другими словами, требуется найти пять клеток в матрице так, чтобы все они были в разных строках и столбцах, и сумма чисел была максимальна

Ответ. Максимальное значение суммы равно 15.

Пример. ***Портфель ценных бумаг.***

Пусть в нашем распоряжении имеется денежная сумма 100. Можно приобрести три вида акций. Средняя дневная доходность, посчитанная за прошлый год, равна, соответственно, 0,28%, 0,25%, 0,05%. Дисперсии равны 5, 2, 2 ковариации cov_{12}=3, cov_{13}=4, cov_{23}=1. Требуется составить наименее рискованный портфель с доходностью 0,2% в день.

Обозначим Xj ─ количество денег, вложенных в акции j-го вида.

За *меру рискованности инвестиционного портфеля* можно принять его *дисперсию* (т.е. разброс доходности относительно среднего значения).

$$Dx = X_1^2\cdot 5 + X_2^2\cdot 2 + X_3^2\cdot 2 + 2\cdot X_1\cdot X_2\cdot 3 + \\ + 2\cdot X_1\cdot X_3\cdot 4 + 2\cdot X_2\cdot X_3\cdot 1$$

Получим задачу

$$\begin{cases} X_1^2\cdot 5 + X_2^2\cdot 2 + X_3^2\cdot 2 + X_1\cdot X_2\cdot 6 + X_1\cdot X_3\cdot 8 + X_2\cdot X_3\cdot 2 \to \min \\ 0{,}28X_1 + 0{,}25X_2 + 0{,}05X_3 = 0{,}2\cdot(X_1 + X_2 + X_3) \\ X_1 + X_2 + X_3 = 100 \\ X_1, X_2, X_3 \ge 0 \end{cases}$$

Пример. ***Задача о найме работников.***

Для выполнения некоторого проекта в течение шести месяцев по нормам требуются следующие количества работников одинаковой квалификации:

m_1=6, m_2=m_3=m_4=4, m_5=5, m_5=2,

причем перед началом первого месяца (в нулевом месяце) фактически имеется M_0 = 2 сотрудника.

Администрация планирует в конце каждого месяца корректировать число работающих.

На прием одного сотрудника необходимо затратить 200 у. е., а на увольнение — 600 у. е.

Предполагается, что ежедневные расходы на содержание избыточного работника составляют 20 у. е., а в случае нехватки персонала приходится нести затраты в размере 40 у. е. за каждое вакантное место.

Требуется найти оптимальные значения изменений численности работающих в конце каждого из месяцев, при которых суммарные издержки за весь рассматриваемый период будут минимальными.

2. Задача нелинейной оптимизации

2.1 Экстремальные задачи без ограничений.

В классической постановке такой задачи ограничений нет, а целевая функция **дифференцируема**.

$$\boxed{f(x) = f\left(x_1,...,x_n\right) \to \max\left(\min\right)}$$

Необходимое условие экстремума. Если в точке $x_0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$ функция $f(x_1,\dots,x_n)$ имеет экстремум и дифференцируема, то в этой точке каждая из частных производных функции $f(x_1,\dots,x_n)$ равна 0, т.е.

$$\boxed{grad f = 0}$$

Достаточное условие экстремума.

Пусть в некоторой точке grad f=0. Тогда

1) Если матрица Гессе H_f в этой точке <u>положительно определена</u>, то в этой точке <u>минимум</u>.

2) Если матрица Гессе H_f в этой точке <u>отрицательно определена</u>, то в этой точке <u>максимум</u>.

$$\boxed{H_f = \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} & \dots & f''_{x_1x_n} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} & \dots & f''_{x_2x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f''_{x_nx_1} & f''_{x_nx_2} & \dots & f''_{x_nx_n} \end{pmatrix}}$$

Знакоопределённость матрицы H_f, можно проверять следующим образом:

Критерий Сильвестра.

1) H_f <u>положительно</u> определена ↔ Все $\Delta k>0$

2) H_f <u>отрицательно</u> определена ↔ $\Delta 1<0$, $\Delta 2>0$, $\Delta 3<0$, $\Delta 4>0$, и т.д. (знаки чередуются)

Здесь

$$\Delta_1 = f''_{x_1x_1}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} & f''_{x_1x_3} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} & f''_{x_2x_3} \\ f''_{x_3x_1} & f''_{x_3x_2} & f''_{x_3x_3} \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = |\dots|, \ \dots$$

Пример. Найти экстремумы функции
$f(x, y) = \left(x + y^2\right) \cdot e^x$

Решение. Выпишем необходимое условие экстремума

$$gradf(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f_x' = e^x\left(x + y^2 + 1\right) = 0 \\ f_y' = e^x \cdot (2y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Получилась одна точка. Выпишем теперь матрицу Гессе.

$$H_f = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x\left(x + y^2 + 2\right) & e^x \cdot 2y \\ e^x \cdot 2y & e^x \cdot 2 \end{pmatrix}$$

В точке x= −1, y=0:

$$H_f = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-1} \cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = e^{-1} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-1} \cdot 2 \end{vmatrix} = 2e^{-2} > 0$$

Ответ. В точке x= −1, y=0 **минимум**.

Типовая задача.

Цены на два вида товаров равны соответственно $P_1 = 8$ руб. и $P_2 = 10$ руб. Определить, при каких количествах x и y продаж этих товаров прибыль будет максимальной, если функция издержек имеет вид $C = x^2 + xy + y^2$.

Решение.

Функция прибыли имеет вид

$P(x, y) = 8x + 10y - x^2 - xy - y^2$.

Необходимое условие экстремума выглядит так:

$$gradf = 0 \Rightarrow \begin{cases} f_x' = 8 - 2x - y = 0, \\ f_y' = 10 - x - 2y = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 4. \end{cases}$$

Выпишем матрицу Гессе:

$$H_f = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta_1 = -2 < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0 .$$

Значит, матрица Гессе отрицательно определена, следовательно, максимум прибыли, равный f(2;4)=28 будет достигаться при при x=2, y=4.

Ответ. Максимум в точке (2;4)

Задача. Найти экстремумы функции $f(x, y) = x^3 - y^3 - 3xy$.

Ответ. Максимум в точке (-1;1).

Задача. Найти экстремумы функции $f(x, y) = 2xy - 4x - 2y$.

Ответ. Экстремума нет.

Задача. Найти экстремумы функции $f(x, y) = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$.

Ответ. Минимум в точке (0;-2/3).

Задача. Цены на два вида товаров равны соответственно $P_1 = 32$ руб. и $P_2 = 24$ руб. Определить, при каких количествах x и y продаж этих товаров прибыль будет максимальной, если функция издержек имеет вид $C = \frac{3}{2}x^2 + 2xy + y^2$.

Ответ. При $x = 8$, $y = 4$ достигается максимум прибыли, равный 176 руб.

2.2 Градиентный метод поиска экстремума функции.

Решить в явном виде систему уравнений, составляющую необходимое условие экстремума можно только в самых простых ситуациях. В остальных случаях применяют различные численные методы. Одними из основных являются *градиентные методы*.

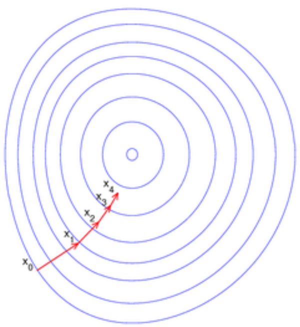
Будем рассматривать задачу на максимум. (Задача на минимум сводится к ней изменением знака функции f(x).)

$$\boxed{f(x) = f(x_1,\ldots,x_n) \to \max\ (\min)}$$

Как известно, <u>градиент</u> функции показывает <u>направление наискорейшего возрастания функции в данной точке</u>

<u>Идея</u> градиентных методов состоит в том, чтобы, начав с некоторой точки, сделать шаг в направлении градиента.
Затем вычислить новый градиент и сделать шаг в направлении его.
И так далее.

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + \lambda_n \cdot gradf(x_n)}$$

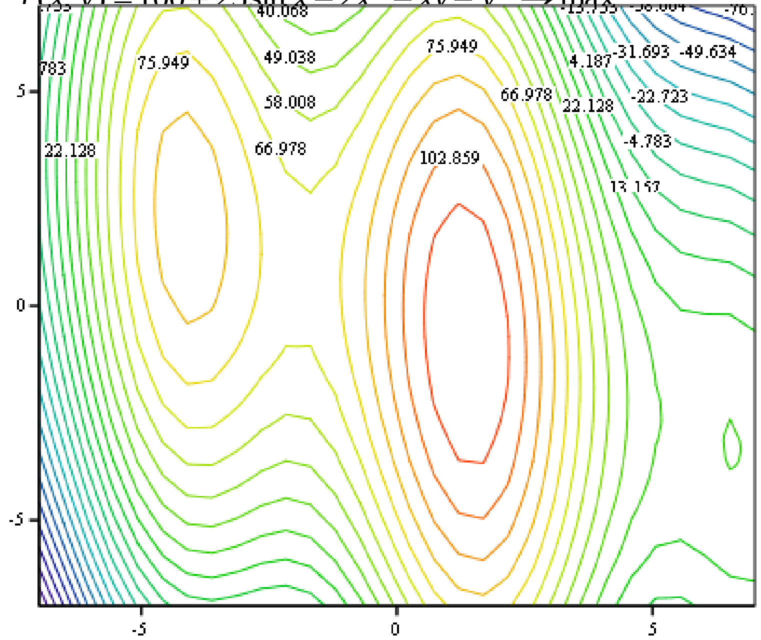


В качестве чисел λ_n можно, например, взять первое число из списка (1,1/2,1/4,1/8,…), для которого

$$\boxed{f(x_{n+1}) > f(x_n)}$$

Пример. Сделаем несколько шагов градиентного метода для задачи.

$$f(x,y) = 100 + 25\sin x - 2x^2 - xy - y^2 \to \max$$



<u>Шаг 1</u>. Начнём, например, с точки x_0=(0;0). $f(x_0)$=100.

$$\begin{cases} f_x' = 25\cos x - 4x - y = 25 \\ f_y' = -x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$gradf = (25{,}0);\quad x_1 = x_0 + \lambda\cdot(25{,}0)$$

$$\lambda = 1 \Rightarrow x_1 = x_0 + (25{,}0) = (25{,}0),\ f(x_1) = -1153 < 100$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = x_0 + \frac{1}{2}(25{,}0) = (12{,}5{,}0),\ f(x_1) = -214 < 100$$

$$\lambda = \frac{1}{4} \Rightarrow x_1 = x_0 + \frac{1}{4}(25{,}0) = (6{,}25{,}0),\ f(x_1) = 21 < 100$$

…

$$\lambda = \frac{1}{16} \Rightarrow x_1 = x_0 + \frac{1}{16}(25{,}0) = (1{,}56;0), \qquad f(x_1) \approx 120{,}1 > 100$$

Шаг 2. x_1=(1,56;0). $f(x_1)$=120,1.

$$\begin{cases} f_x' = 25\cos x - 4x - y = -6{,}04 \\ f_y' = -x - 2y = -1{,}56 \end{cases}$$

…

$$\lambda = \frac{1}{16} \Rightarrow x_2 = x_1 + \frac{1}{16}(-6{,}04;-1{,}56) = (1{,}18;-0{,}09),$$
$$f(x_2) \approx 120{,}46 > 120{,}1$$

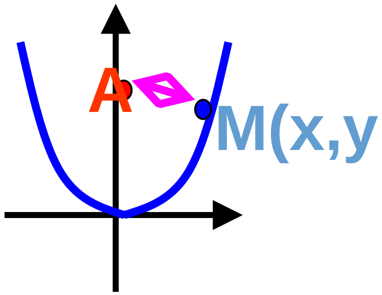
2.3 Экстремальные задачи с ограничениями типа равенств.

$$\begin{cases} f(x) = f(x_1,\dots,x_n) \to \max(\min) \\ g_1(x) = 0 \\ \quad\dots \\ g_m(x) = 0 \end{cases}$$

Необходимое условие условного экстремума.
Пусть в некоторой окрестности точки x_0 целевая функция f(x) и ограничения $g_i(x)$ дифференцируемы и пусть grad(g_1), …, grad(g_m) линейно независимы. Тогда для того, чтобы в точке x_0 был условный экстремум, необходимо, чтобы в этой точке grad(f) разлагался по grad(g_1), …, grad(g_n).

Пример. Найти расстояние от точки A(0;2) до параболы $y=x^2$.

Решение.



$$\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 \to \min \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$f = x^2 + (y-2)^2, \; grad(f) = (2x;\, 2y-4)$$

В этом случае всего одно ограничение, поэтому необходимое условие экстремума примет вид:

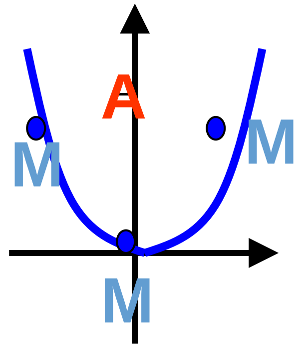
$$\begin{cases} grad(f) = \lambda \cdot grad(g_1) \\ g_1(x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2x;\, 2y-4) = \lambda(-2x;\, 1) \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = -2\lambda x \\ 2y - 4 = \lambda \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$y = 0, \; x = 0$ либо $y = 1{,}5, \; x = \pm\sqrt{1{,}5}$

Три точки, M_1 ,M_2, M_3:

В точке M_1 локальный максимум расстояния, в точках M_2, M_3 – минимумы



Ответ. Расстояние равно

$$|AM_2| = \sqrt{\left(\sqrt{1{,}5}\right)^2 + (1{,}5-2)^2} = \sqrt{1{,}75}$$

Типовая задача.

Предприниматель решил выделить на расширение своего дела 150 тыс. руб. Известно, что если на приобретение нового оборудования затратить x тыс. руб., а на зарплату вновь принятых работников y тыс. руб., то прирост объема продукции составит $Q = 0{,}001x^{0,6}y^{0,4}$. Как следует распределить выделенные денежные ресурсы, чтобы прирост объема продукции был максимальным?

Решение.

Имеем задачу вида

$$\begin{cases} f = 0{,}001x^{0,6}y^{0,4} \to \max, \\ x + y = 150. \end{cases}$$

$$grad f = (0{,}0006x^{-0,4}y^{0,4}; 0{,}0004x^{0,6}y^{-0,6}).$$

Имеем всего одно ограничение, поэтому необходимое условие экстремума примет вид:

$$\boxed{\begin{cases} grad(f) = \lambda \cdot grad(g_1) \\ g_1(x) = 0 \end{cases}}$$

$$\begin{cases} 0{,}0006x^{-0,4}y^{0,4} = \lambda, \\ 0{,}0004x^{0,6}y^{-0,6} = \lambda, \\ x + y = 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6\dfrac{y^{0,4}}{x^{0,4}} = 10000\lambda, \\ 3y = 2x, \\ x + y = 150. \end{cases}$$

Откуда получаем x=60, y=90. Так как в этой точке выполнены необходимые условия экстремума и, например f(150;0)=0, то (60;90) - точка максимума. Значит, 60 тыс. руб. нужно направить на приобретение нового оборудования, а 90 тыс. руб. на зарплату новых работников. Тогда прирост объема продукции будет максимальным.

Ответ. (60;90).

Задача. Найти экстремумы функции $z = 2x + y$ при условии $x^2 + y^2 = 5$

Ответ. Условный минимум в точке (-2;-1), $z_{\min} = -5$; условный максимум в точке (2;1), $z_{\max} = 5$.

Задача . Найти экстремумы функции $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ при условии $x + y = 2$.

Ответ. Условный минимум в точке (-3/2;-3/2), $z_{\min} = -4{,}75$.

Задача. Общие издержки производства заданы функцией $TC = 0{,}5x^2 + 0{,}6xy + 0{,}4y^2 + 700x + 600y + 2000$, где x и y - соответственно количество товаров A и B. Общее количество произведенной продукции должно быть равно 500 ед. Сколько единиц товара A и B нужно производить, чтобы издержки на их изготовление были минимальными?

Ответ. (0;500)

2.4 Экстремальные задачи с ограничениями типа равенств и неравенств

$$\boxed{\begin{cases} f(x) = f(x_1, ..., x_n) \to \max(\min) \\ g_1(x) \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} 0 \\ \dots \\ g_m(x) \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} 0 \end{cases}}$$

Если искомая точка лежит строго внутри области, (неравенства выполняются как строгие), то искать её можно обычными методами безусловной оптимизации.

Но экстремум может достигаться и на границе (тогда некоторые неравенства превращаются в равенства).

Поэтому при решении таких задач обычно приходится отдельно рассматривать внутренние и граничные точки области.

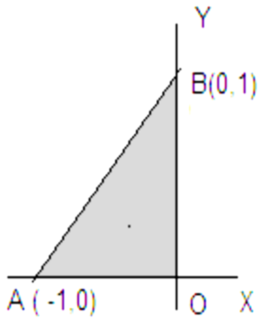
Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y)=x^2-2y+3$ в области
$x\le0,\ y\ge0,\ y\le x+1$

Пример. 1) Сначала найдём экстремальные точки *внутри* области

$$grad(f)=(2x;-2)=0\Rightarrow -2=0$$

Внутри экстремумов нет

2) На стороне АО. $y=0,\ -1\le x\le0.\ \ f=x^2+3$. Экстремальные точки : $2x=0$ (точка О).



3) На стороне ВО. $x=0,\ 0\le y\le1$.
$f(x,y)=-2y+3$. Экстремальные точки:
$-2=0$. Нет.

4) На стороне АВ. $y=x+1,\ -1\le x\le0$.
$f(x,y)=x^2-2x+1$. Экстремальное значение: $2x-2=0$. Не лежит на АВ.

5) Вычислим значения функции в найденных экстремальных точках и в углах.

$f(O)=3,\ f(A)=4,\ f(B)=1,\ f(O)=3$.

Ответ. Минимальное значение функции = 1, максимальное значение = 4. **Задача.**

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x,y)=1+x+2y$ в области $x\ge0,\ 0\le y\le3-x$.

Ответ. $f_{\max}=7=f(0,3),\ f_{\min}=1=f(0,0)$

Задача.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x,y)=x^2+xy+2x+2y$ в области $0\le x\le1,\ 0\le y\le2$.

Ответ. $f_{\max}=9=f(1,2),\ f_{\min}=0=f(0,0)$.

Задача.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x,y)=2x-3y+4$ в области $|x|\le2,\ |y|\le3$.

Ответ. $f_{\max}=17=f(2,-3),\ f_{\min}=-9=f(-2,3)$.

Задача.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x,y)=-5x-6y+1$ в области $|x|\le1,\ x-1\le y\le x+2$.

Ответ. $f_{\max}=18=f(-1,-2),\ f_{\min}=-22=f(1,3)$.

2.5 Решение задач оптимизации при помощи MS Excel

Для решения оптимизационных задач в MS Excel необходимо, чтобы был установлен инструмент "Поиск решения", который не устанавливается при стандартной установке MS Office, а только при выборочной

Пример. На ферме в качестве корма для животных используются два продукта – M и N.
Сбалансированное питание предполагает, что каждое животное должно получать в день не менее 200 килокалорий,

причем потребляемое при этом количество жира не должно превышать 14 единиц.
В 1 кг продукта содержится соответственно:

- в продукте M - 150 килокалорий и 14 единиц жира;
- в продукте N - 200 килокалорий и 4 единицы жира.

Разработать максимально дешевый рацион откорма животных. Стоимость 1 кг продукта M составляет 1,5 руб, а 1 кг продукта N - 2,3 руб.

Решение.

- **Формализация задачи:**

Переменные:
x_1 - количество продукта M в рационе;
x_2 - количество продукта N в рационе.
Целевая функция - стоимость рациона:
$1{,}5x_1+2{,}3x_2 \rightarrow \min$
Ограничение по количеству килокалорий:
$150x_1+200x_2 \geq 200$
Ограничение по количеству жира:
$14x_1+4x_2 \leq 14$
Неотрицательность переменных:
$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$

- **Ввод исходных данных в ячейки Excel:**

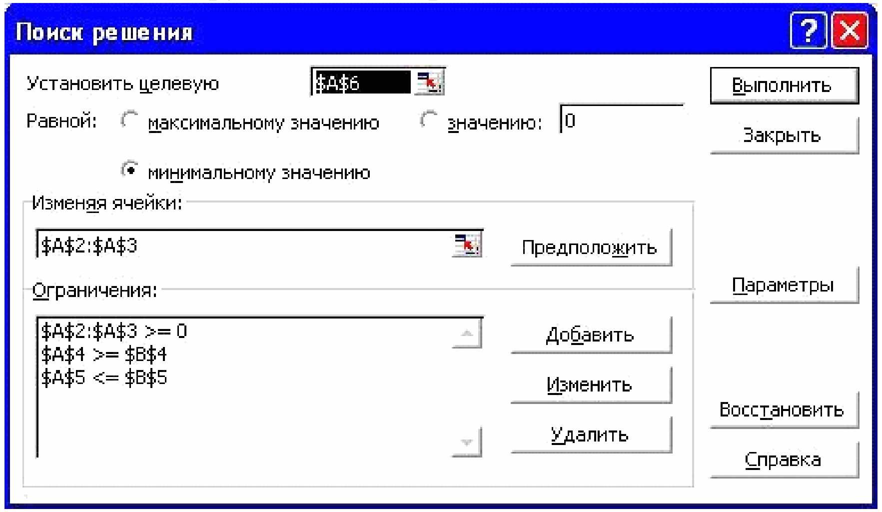
	A	B	C
1	Оптимизация кормового рациона		
2	0	- X1 – продукта M в рационе, кг	
3	0	- X2 – продукта N в рационе, кг	
4	=150*A2+200*A3	200	Ограничение по количеству в ккал
5	=14*A2+4*A3	14	Ограничение по количеству жира
6	=1,5*A2+2,3*A3	Целевая функция – минимум стоимости рациона	

Итак, в ячейки A2 и A3 вводим начальные значения x_1 и x_2 - нули.
В ячейки A4 и A5 вводим левые части ограничений (первоначально получатся нули), в ячейки B4 и B5 - правые части соответствующих ограничений.
В ячейку A6 вводим целевую функцию.

Ввод исходных данных завершен.

- **Решение задачи.**

Последовательностью команд меню **Сервис - Поиск решения** вызываем инструмент "**Поиск решения**".



1) С использованием красной стрелки (переход на рабочий лист) устанавливаем целевую ячейку - $A$6 равной минимальному значению.
2) Изменяя ячейки - $A$2:$A$3 с использованием кнопки Добавить, последовательно добавляем три исходных ограничения.
3) Нажимаем кнопку Выполнить.

- **Интерпретация результатов.**

После вычислений на рабочем листе получили следующие результаты (см. рис. ниже):

	A	B	C
1	Оптимизация кормового рациона		
2	0,909	- x1 – продукта M в рационе, кг	
3	0,318	- x2 – продукта N в рационе, кг	
4	200	200	Ограничение по количеству в ккал
5	14	14	Ограничение по количеству жира
6	2,1	Целевая функция – минимум стоимости рациона	

Итак, при дневном рационе

- 0,909 кг продукта M и
- 0,318 кг продукта N

потребности животного в питании будут удовлетворены, при этом стоимость рациона будет минимальной и составит 2,10 руб.

3. Задача линейного программирования

3.1 Постановка задачи.

В задаче линейного программирования целевая функция и ограничения линейны, т.е. представляют собой суммы произведений констант на переменные задачи.

$$\begin{cases} f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \quad \dots \quad + c_nx_n & \to & \max(\min) \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad \dots \quad + a_{1n}x_n & \begin{pmatrix} \le \\ \ge \\ = \end{pmatrix} & b_1 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad \dots \quad + a_{mn}x_n & \begin{pmatrix} \le \\ \ge \\ = \end{pmatrix} & b_m \end{cases}$$

При помощи моделей линейного программирования удаётся проанализировать множество важных для практики проблем, относящихся к самым разным сферам деятельности.

Важность задачи линейного программирования обусловлена ещё и тем, что существует достаточно эффективный и универсальный алгоритм решения (симплекс-метод и его разновидности). Нелинейный случай оказывается существенно сложнее.

3.2 Примеры задач линейного программирования.

3.2.1 Задача о рационе.

Рацион кормления коров на молочной ферме может состоять из трёх продуктов: сена, силоса и концентрата. Эти продукты содержат питательные вещества: белок, кальций и витамины. Численные данные приведены в таблице.

	Белок	Кальций	Витамины	Цена ед.
Сено	50	10	2	30
Силос	70	6	3	40
Концентраты	180	3	1	120
Суточные нормы потребления	2000	210	87	

Формализация задачи

1. **Переменные** задачи:
x_1 - количество сена;
x_2 - количество силоса
x_3 – количество концентратов.

Целевая функция: стоимость рациона f(x)=…

3. **Ограничения**:
3.1. По белку: $50\ x_1 + 70\ x_2 + \ldots \ge 2000$
3.2. По кальцию: …
3.3. По витаминам: …
3.4. Прочие ограничения: …

$$\begin{cases} f(x) = 30x_1 + 40x_2 + 120x_3 & \to & \min \\ 50x_1 + 70x_2 + 180x_3 & \geq & 2000 \\ 10x_1 + 6x_2 + 3x_3 & \geq & 210 \\ 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 & \geq & 87 \\ x_{1,2,3} \geq 0 & & \end{cases}$$

3.2.2 Задача о раскрое.

Из брёвен изготавливаются комплекты брусьев следующего состава:

(2 бруса по 0,6 м + 1 брус по 1,5 м + 3 бруса по 2,5 м)

Имеется 100 брёвен длины 3 м. Найти план распила, позволяющий получить максимальное количество комплектов.

Формализация задачи

1. **Переменные** задачи: Сначала нужно обдумать, какими разумными способами можно распилить бревно.

- 5 брусьев по 0,6 м.
- 2 по 0,6 м + 1 по 1,5 м
- 2 по 1,5 м
- 1 по 2,5 м

x_j – количество брёвен, распиленных по j-му способу.

Получаем переменные x_1, x_2, x_3, x_4 – этого не хватает.

Нужно ещё x_5 – количество комплектов.

Целевая функция: количество комплектов $f(x)=x_5$

3. **Ограничения**:

3.1. По брусьям длины 0,6 м и т.п.: …

3.2. По количеству брёвен: …

3.3. Прочие ограничения

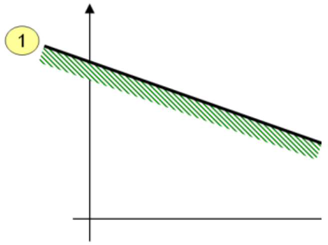
$$\begin{cases} f(x) = x_5 & \to & \max \\ 5x_1 + 2x_2 & \geq & 2x_5 \\ x_2 + 2x_3 & \geq & x_5 \\ x_4 & \geq & 3x_5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & \leq & 100 \\ x_{1,2,3,4,5} \geq 0 & & \end{cases}$$

3.3 Графический метод решения задачи линейного программирования.

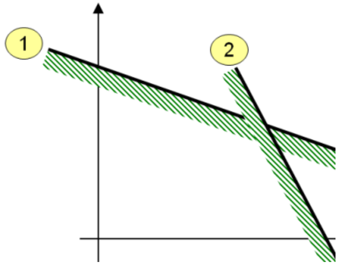
Этот метод можно применять, если количество неизвестных в задаче
равно 2. Рассмотрим пример.

$$\begin{cases} f(x) = 3x_1 + 2x_2 & \to & \max & (0) \\ x_1 + 2x_2 & \leq & 7 & (1) \\ 2x_1 + x_2 & \leq & 8 & (2) \\ x_2 & \leq & 3 & (3) \\ x_{1,2} & \geq & 0 & (4) \end{cases}$$

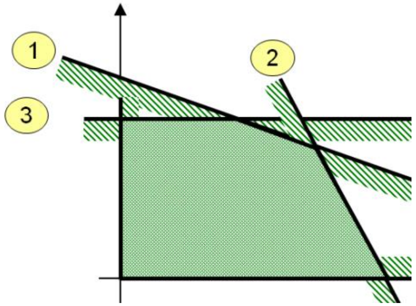
Графически каждому из неравенств соответствует *полуплоскость*. Чтобы её изобразить, нужно сначала нарисовать прямую, заменив знак в неравенстве на “=”. Затем нужно выбрать одну из двух полуплоскостей, на которые прямая разделяет плоскость, и заштриховать эту полуплоскость. Чтобы правильно выбрать, нужно взять какую-нибудь точку плоскости, не лежащую на прямой, и подставить в неравенство. Если неравенство выполняется, то точка лежит в нужной полуплоскости, иначе нужно выбрать другую полуплоскость.
Так, например, неравенству (1) соответствует



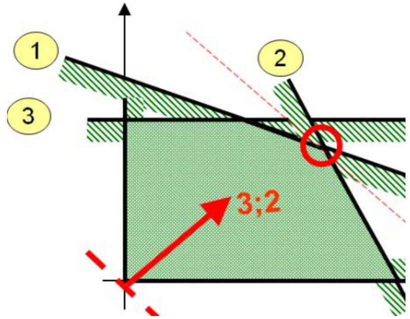
Затем



И так далее. Получаем



Кроме выпуклого многоугольника могут получаться и другие выпуклые фигуры, а также пустое множество.
Далее, вектор c=(3,2), координаты которого – коэффициенты при неизвестных в целевой функции, показывает направление наискорейшего возрастания целевой функции. Самая далёкая точка области в этом направлении – точка максимума. В обратном направлении – точка минимума. Чтобы найти самую далёкую точку, следует провести прямую перпендикулярно вектору и смещать её параллельно самой себе до крайнего положения.



Координаты точки находятся решением системы уравнений пересекающихся в ней прямых.

В зависимости от вида допустимого множества U в ЗЛП может встретиться <u>только</u> один из следующих случаев:

- <u>Ровно одно</u> решение;
- <u>Бесконечное</u> множество решений;
- <u>Нет</u> решений, так как целевая функция неограниченна;
- <u>Нет</u> решений, так как система ограничений противоречива.

Задача.

$$\begin{cases} f(x) = x_1 + 2x_2 & \to & \min, \max & (0) \\ x_1 + x_2 & \geq & 1 & (1) \\ 2x_1 - x_2 & \geq & -1 & (2) \\ x_1 - 2x_2 & \leq & 1 & (3) \\ x_{1,2} & \geq & 0 & (4) \end{cases}$$

Ответ. Максимума нет, целевая функция неограниченна. Минимум в точке (1;0)

Задача.

$$\begin{cases} f(x) = x_1 - 2x_2 & \to & \min & (0) \\ -x_1 + x_2 & \leq & 0 & (1) \\ 2x_1 + x_2 & \leq & 3 & (2) \\ x_1 - x_2 & \leq & 1 & (3) \\ x_{1,2} & \geq & 0 & (4) \end{cases}$$

Ответ. Минимум в точке (1;1).

Задача.

$$f(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_2 \leq 3, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Ответ. Максимум в точке (4;3)

Задача.

$$f(X) = 4x_1 + 2x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 + 2x_2 \leq 16, \\ 2x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1 \leq 4, \end{cases}$$

Ответ. Минимум в точке $X_{\min} = (1-t)(2;2)+t(1;4), 0 \le t \le 1$.

3.4 Симплекс-метод

Рассмотрим задачу линейного программирования вида

$$Z(X) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to min$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j = 1, \dots, n,$$

Здесь $b_i \ge 0$.

Если все ограничения системы заданы уравнениями и переменные неотрицательные, то такая модель задачи линейного программирования (ЗЛП) называется ***канонической.***

Если хотя бы одно ограничение является неравенством, то модель задачи не является канонической. Чтобы перейти от неканонической модели к канонической, необходимо в каждое неравенство ввести балансовую переменную. Если знак неравенства ≤, то переменная вводится со знаком плюс, если знак неравенства ≥, то со знаком минус. В целевую функцию балансовые переменные не вводятся. Кроме того, если правая часть какого-либо ограничения отрицательна, то нужно домножить обе части данного ограничения на (-1).

Пусть ранг матрицы A равен $r < n$. Без ограничения общности, будем считать, что базисными переменными являются первые r неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_r$. Неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ будут свободными переменными.

Общее решение системы ограничений, которое можно получить, например, с помощью метода Жордана-Гаусса, запишется в виде

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - (\alpha_{1r+1}x_{r+1} + \dots + \alpha_{1j}x_j + \dots + \alpha_{1n}x_n), \\ \dots \\ x_r = \beta_r - (\alpha_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + \alpha_{rj}x_j + \dots + \alpha_{rn}x_n). \end{cases} \quad (5.3)$$

Целевая функция примет вид

$$Z(X) = \gamma_0 - (\gamma_{r+1}x_{r+1} + \dots + \gamma_jx_j + \dots + \gamma_nx_n)$$

Решение системы уравнений называется ***базисным***. если свободные переменные равны нулю.

Базисное решение системы уравнений называется ***допустимым базисным,*** если базисные переменные неотрицательны.

Полученную ЗЛП будем называть ***стандартной формой записи допустимого базисного решения***.

Идея симплекс-метода

ЗЛП со многими переменными не имеют такой ясной геометрической интерпретации, как задачи с двумя переменными. Для решения таких задач можно использовать симплекс-метод.

В основу симплекс-метода и многих его модификаций лежат следующие принципы:

- Решение ЗЛП, если оно существует, всегда находится на границе области допустимых решений (ОДР).
- Если оптимальное решение единственно, то оно всегда достигается в одной из вершин ОДР.

- Для того, чтобы найти оптимальное решение, достаточно перебрать все вершины многогранника и выбрать ту, в которой целевая функция принимает оптимальное значение. Такие решения называют допустимыми базисными решениями.
- Этап нахождения допустимых базисных решений - координат вершин ОДР - является составной частью любого алгоритма поиска оптимального решения.
- Алгоритм перебора допустимых решений для поиска оптимума в симплекс-методе организуется целенаправленно так, чтобы при переходе от одной вершины к другой значение целевой функции не возрастало (в задаче на минимум).
- Если на одном из этапов переход к соседним вершинам ОДР приводит к уменьшению (в задаче на минимум) целевой функции, то поиск прекращается, а найденное допустимое базисное решение является оптимальным.

Итак, симплекс-метод - это рациональный перебор допустимых базисных решений системы, при котором целевая функция, по крайней мере, не увеличивается.

Симплекс-таблица

При переходе от одного допустимого базисного решения к другому удобно пользоваться так называемой симплекс-таблицей

СП / БП	Своб. член	x_{r+1}	…	x_j	…	x_n
Z	γ_0	γ_{r+1}	…	γ_j	…	γ_n
x_1	β_1	$\alpha_{1,r+1}$	…	α_{1j}	…	α_{1n}
…	…	…	…	…	…	…
x_i	β_i	$\alpha_{i,r+1}$	…	α_{ij}	…	α_{in}
…	. . .	…	…	…	…	…
x_r	β_r	$\alpha_{r,r+1}$	…	α_{rj}	…	α_{rn}

Правило выбора генерального столбца: в строке Z, не считая свободного члена выбрать любое положительное число. Если положительных чисел нет, решение оптимально.

Пусть $\gamma_j > 0$.

Правило выбора генеральной строки: в столбце x_j среди положительных чисел, не считая строки Z, выбрать то, для которого отношение к нему свободного члена $\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}}$ минимально. Выбор генерального столбца и генеральной строки однозначно определяет **генеральный элемент** α_{ij}.

Переход к новому допустимому базисному решению осуществляется путем пересчета симплекс-таблицы

Правила пересчета симплекс-таблицы:

1. x_i и x_j меняются местами.
2. На месте генерального элемента пишется величина ему обратная.
3. Все элементы генеральной строки (кроме генерального элемента) делятся на генеральный элемент.
4. Все элементы генерального столбца (кроме генерального элемента) делятся на генеральный элемент и берутся с противоположным знаком.
5. Все остальные элементы пересчитываются по правилу прямоугольника

$$\widetilde{y_0} = \frac{\gamma_0\,\alpha_{ij} - \gamma_j\,\beta_i}{\alpha_{ij}}\ ,\widetilde{y_k} = \frac{\gamma_k\,\alpha_{ij} - \gamma_j\,\alpha_{ik}}{\alpha_{ij}}$$

$$\widetilde{\beta_l} = \frac{\beta_l \alpha_{ij} - \alpha_{lj}\beta_i}{\alpha_{ij}}, \widetilde{\alpha_{lk}} = \frac{\alpha_{lk}\alpha_{ij} - \alpha_{lj}\alpha_{ik}}{\alpha_{ij}}$$

Порядок работы по симплекс-методу:

1. Найти исходное допустимое базисное решение в стандартном виде и заполнить симплекс-таблицу.
2. Выбрать генеральный столбец. Если его выбрать нельзя, решение оптимально.
3. Выбрать генеральный элемент, и генеральную строку. Если ее выбрать нельзя, задача решений не имеет.
4. Пересчитать симплекс-таблицу, получив. таким образом, новое оптимальное решение.
5. Перейти к п.2.

Пример . Рассмотрим решение ЗЛП с помощью симплекс-таблицы:

БП \ СП	Своб. чл.	x_1	x_2
Z	0	3	2
x_3	9	**3**	-2
x_4	25	2	5

В качестве генерального столбца возьмем столбец x_1, а в качестве генеральной строки - строку x_3. Перейдем к новому допустимому базисному решению:

БП \ СП	Своб. чл.	x_3	x_2
Z	-9	-1	4
x_1	3	1/3	2/3
x_4	19	-2/3	**19/3**

В качестве генерального столбца возьмем столбец x_2, а в качестве генеральной строки - строку x_4. Перейдем к новому допустимому базисному решению:

БП \ СП	Своб. чл.	x_3	x_4
Z	-21	-1/19	-3/19
x_1	5	5/19	2/19
x_2	3	-3/19	3/19

Далее генеральный столбец выбрать нельзя, значит решение оптимально.

$$X_{опт} = (5; 3; 0; 0), \quad F_{опт} = -21$$

Замечание. Для решения задачи на максимум достаточно рассмотреть функцию $Z_1(X) = -Z(X)$, которую следует минимизировать при заданных ограничениях. Соответственно, $(Z_1)_{max} = -Z_{min}$, и так как система ограничений одна и та же в обоих случаях, то точка оптимума не изменяется при переходе от одной задачи к другой, то есть $(X_1)_{max} = X_{min}$.

Описанный выше пример показывает наличие значительной вычислительной трудоемкости, возникающей при использовании симплекс-метода для решения ЗЛП даже с небольшим количеством переменных и ограничений.

Рассмотрим еще один пример, который проиллюстрирует одно из слабых мест симплекс-метода - поиск начального допустимого базисного решения.

Пример . Решить симплекс-методом ЗЛП:

$$Z(X) = 3x_1 - x_2 - 4x_3 \to min,$$

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 \le 1, \\ -5x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -8x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 3, \end{cases} \qquad x_j \ge 0, j = 1,2,3.$$

Решение. Очевидно, что для начала необходимо добавив две балансовые переменные, т.е. привести задачу к каноническому виду:

$$Z(X) = 3x_1 - x_2 - 4x_3 \to min,$$

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -5x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -8x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 3, \end{cases} \qquad x_j \geq 0, j = 1,2,3.$$

Используя метод Жордана-Гаусса, приведем систему ограничений задачи к равносильной разрешенной системе уравнений, сохранив правые части уравнений неотрицательными. Для этого *п*роведем элементарные матричные преобразования расширенной матрицы системы ограничений. Исходная матрица имеет вид.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -1 & 1 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ -5 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -8 & 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right).$$

Очевидно, что переменная x_4 уже выбрана как базисная. Следующей такой переменной выберем переменную x_2. Для этого к первой строке прибавим вторую, к третьей строке прибавим вторую с противоположным знаком. Получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -5 & 0 & 2 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ -5 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Имеем уже две базисных переменных x_2 и x_4. Последней базисной переменной станет x_3 после того, как к первой строке прибавим третью, умноженную на (-2), а ко второй третью, умноженную на (-1). Получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ -2 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 \end{array}\right),$$

которой соответствует система уравнений

$$\begin{cases} x_2 = 1 + 2x_1, \\ x_3 = 1 + 3x_1 + x_5, \\ x_4 = 1 - x_1. \end{cases}$$

Имеем три базисных переменных x_2, x_3 и x_4, и две свободных x_1 и x_5.

Выразим целевую функцию через свободные переменные

$$Z(X) = 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 3x_1 - (1 + 2x_1) - 4(1 + 3x_1 + x_5)$$
$$= -5 - 11x_1 - 4x_5$$

Запишем начальное допустимое базисное решение в стандартной форме:

$$\begin{cases} x_2 = 1 - (-2x_1), \\ x_3 = 1 - (-3x_1 - x_5), \\ x_4 = 1 - (x_1), \end{cases} \qquad x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5$$

$$Z(X) = -5 - (11x_1 + 4x_5) \to min$$

или

$$X_1 = (0; 1; 1; 1; 0), \qquad Z(X_1) = -5.$$

Так как в скобках у целевой функции есть положительные коэффициенты, то найденное решение можно улучшить. Составим симплекс-таблицу и выберем генеральный элемент:

СП / БП	Своб. чл.	x_1	x_5
Z	-5	11	4
x_2	1	-2	0
x_3	1	-3	-1
x_4	1	**1**	0

Произведем пересчет таблицы, поменяв роли переменных x_1 и x_4.

Новая таблица примет вид

СП / БП	Своб. чл.	x_4	x_5
Z	-16	-11	4

x_2	3	2	0
x_3	4	3	-1
x_1			

В последней таблице в строке Z имеется положительный элемент, то есть генеральный столбец выбрать можно, но в этом столбце нет ни одного положительного элемента, а это значит, что генеральную строку, a следовательно, и генеральный элемент выбрать нельзя. Найденное решение и является оптимальным. Запишем его.

$$\begin{cases} x_1 = 1 - (x_4), \\ x_2 = 3 - (2x_4), \qquad x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5 \\ x_3 = 4 - (3x_4 - x_5), \end{cases}$$

$$Z(X) = -16 - (-11x_4 + 4x_5) \rightarrow min$$

или

$$\mathrm{X}_{\min} = (1; 3; 4), \qquad \mathrm{Z}_{\min} = -16.$$

В векторе $\mathrm{X}_{\min}$ исключены неизвестные x_4 и x_5, так как их не было в исходной формулировке задачи.

Можно заметить, что в этой задаче наиболее трудоемким оказался этап поиска начального допустимого базисного решения. Иногда это решение найти весьма проблематично. Это одна из главных проблем симплекс-метода.

Задача. Решите задачу линейного программирования симплекс-методом

$$Z(X) = x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow max.$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_4 = 6, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \ \ j = 1, \dots, 4$$

Ответ. Максимум в точке (2;0;4;0), значение функции в точке максимума равно 14.

Задача. Решите задачу линейного программирования симплекс-методом

$$Z(X) = x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow max.$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 4, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \ \ j = 1, \dots, 4$$

Ответ. Максимум в точке $X_{\min} = (1-t)(0;3/2;0;5/2) + t(5/3;2/3;0;0), 0 \leq t \leq 1$, значение функции в точке максимума равно 5.

Задача. Решите задачу линейного программирования симплекс-методом

$$Z(X) = -4x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow min.$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 18, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \ \ j = 1,2,3$$

Ответ. Минимум в точке $X_{\min} = (1-t)(0;18;0) + t(6;6;0), 0 \leq t \leq 1$, значение функции в точке минимума равно -36.

Задача. Решите задачу линейного программирования симплекс-методом

$$Z(X) = x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow max.$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 3, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 1, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \ \ j = 1,2,3$$

Ответ. Функция неограниченно возрастает.

3.5 М-метод (метод искусственного базиса.

Пусть требуется решить КЗЛП (каноническую задачу линейного программирования) вида

$$Z(X) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n,$$

где кроме того все $b_i \geq 0$.

При решении этой задачи возникает трудность нахождения исходного допустимого базисного решения. Для того чтобы обойти эту трудность воспользуемся так называемым М-методом.

Запишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) = 0, \\ b_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n) = 0, \\ \cdots \\ b_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n) = 0. \end{cases}$$

Наряду с исходной КЗЛП рассмотрим вспомогательную КЗЛП

$$\begin{cases} b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) = \xi_1, \\ b_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n) = \xi_2, \\ \cdots \\ b_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n) = \xi_m. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n, \xi_i \geq 0, i = 1, \dots, m.$$

В качестве целевой функции возьмем

$$G(X) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + M(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_m) \to min,$$

где М – некоторое достаточно большое число. Эту КЗЛП назовем М-задачей.

Очевидно, что последняя задача уже является стандартной записью исходного допустимого базисного решения, так как $x_j, j = 1, \dots, n$ - свободные переменные, а $\xi_i, i = 1, \dots, m$ - базисные переменные, причем $\xi_i = b_i \geq 0, i = 1, \dots, m$ по условию

Переменные $\xi_i, i = 1, \dots, m$ иногда называют **искусственным базисом.**

При решении М-задачи симплекс-методом могут быть два варианта:

1. M -задача имеет решение.
2. M -задача не имеет решения.

В соответствии с этими вариантами рассмотрим Следующие утверждения:

Теорема 1. Если M -задача имеет оптимальное решение , в котором $\xi_i = 0, i = 1, \dots, m$, то и исходная задача имеет оптимальное решение. при этом минимальные значения целевых функций равны.

Теорема 2. Если M -задача имеет оптимальное решение, в котором хотя бы одна из неизвестных $\xi_i \neq 0$, то исходная задача противоречива.

Теорема 3. Если M -задача не имеет оптимального решения, то и исходная задача не имеет оптимального решения.

Замечание. Если в процессе решения M -задачи симплекс-методом переменная ξ_i перешла из базисных неизвестных в свободные, нет смысла возвращать ее из свободных неизвестных в базисные. Поэтому эту переменную можно исключить, так как она свою роль отыграла.

Пример . Решить ЗЛП М-методом:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 + 3x_5 = 5, \end{cases} \quad x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5,$$

$$Z(X) = 5 - 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 5x_4 \to min.$$

Решение. Составим М-задачу и запишем ее базисное решение в стандартном виде.

$$\begin{cases} \xi_1 = 1 - (x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4), \\ \xi_2 = 5 - (2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 + 3x_5), \end{cases}$$
$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5, \xi_i \geq 0, i = 1,2$

$$G(X) = Z(X) + M(\xi_1 + \xi_2) \to min$$

или

$$G(X) = 5 - (2x_1 - x_2 + 6x_3 - 5x_4) + M\big(6 - (3x_1 + 9x_3 - 3x_4 + 3x_5)\big) \to min$$

Составим симплекс-таблицу

БП \ СП	Своб. чл.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Z	5	2	-1	6	-5	0
M	6	3	0	9	-3	3
ξ_1	1	**1**	-1	4	-2	0
ξ_2	5	2	1	5	-1	3

Так как M - сколь угодно большое положительное число, генеральный столбец выбираем по строке M, т.е. любое положительное число, не считая свободного члена в строке M.

Выберем столбец x_1. В качестве генеральной строки возьмем строку ξ_1 так как $\frac{1}{1} < \frac{5}{2}$. Переменная x_1 становится базисной, а переменная ξ_1 - свободной. Ее мы опускаем (то есть столбец x_1 исчезает). Все элементы генеральной строки делятся на генеральный элемент, а остальные элементы таблицы пересчитываются по правилу прямоугольника.

Получаем новую симплекс-таблицу:

БП \ СП	Своб. чл.	x_2	x_3	x_4	x_5
Z	3	1	-2	-1	0
M	3	3	-3	3	3
x_1	1	-1	4	-2	0
ξ_2	3	**3**	-3	3	3

Выберем теперь в качестве генерального столбца столбец x_2, который исчезает, а в качестве генеральной строки - строку ξ_2. Строка M обнуляется, и мы ее опускаем.

БП \ СП	Своб. чл.	x_3	x_4	x_5
Z	2	-1	-2	-1
x_1	2	3	-1	1
x_2	1	-1	1	1

Далее генеральный столбец выбрать нельзя, поэтому решение оптимально.

Следовательно, оптимальное решение: $X_{опт} = (2; 1; 0; 0; 0)$, $Z_{опт} = 2$.

Пример. (случай несовместности системы ограничений) Решить КЗЛП М-методом:

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 = -5, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \end{cases} \quad x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4,$$
$$Z(X) = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \to min.$$

Решение. Составим М-задачу и запишем ее базисное решение в стандартном виде.

$$\begin{cases} \xi_1 = 5 - (-x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4), \\ \xi_2 = 1 - (3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4), \end{cases} \quad x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4, \ \xi_i \geq 0, i = 1,2$$

$$G(X) = Z(X) + M(\xi_1 + \xi_2) \to min$$

или

$$G(X) = 0 - (-x_1 + x_2 + x_3 - x_4) + M\big(6 - (2x_1 - 8x_2 + 2x_3 - 2x_4)\big) \to min$$

Составим симплекс-таблицу

БП \ СП	Своб. чл.	x_1	x_2	x_3	x_4
Z	0	-1	1	1	-1
M	6	2	-8	2	-2
ξ_1	5	-1	-6	1	-1
ξ_2	1	3	-2	**1**	-1

В качестве генерального столбца возьмем столбец x_3 а в качестве генеральной строки - строку ξ_2 и пересчитаем симплекс-таблицу. Получим

БП \ СП	Своб. чл.	x_1	x_2	x_4
Z	-1	-4	3	
M	4	-4	-4	0
ξ_1	4	-4	-4	0
x_3	1	3	-2	-1

Генеральный столбец выбрать нельзя, так как в строке M все элементы (кроме свободного члена) неположительны. Поэтому решение М-задачи оптимально. Получили $x_1 = 0, x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $\xi_1 = 4$, $\xi_2 = 0$.

С другой стороны, так как $\xi_1 \neq 0$, то исходная задача не имеет решений.

Задача. Решите задачу линейного программирования М-методом

$$Z(X) = -2x_1 + x_2 + 8x_3 - 2x_4 \to min.$$

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 7x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 = 2, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \ \ j = 1, \dots, 4$$

Ответ. Минимум в точке (0;2;0;4), значение функции в точке минимума равно -6.

Задача. Решите задачу линейного программирования М-методом

$$Z(X) = 2x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to min.$$

$$\begin{cases} 13x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 4, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \ \ j = 1, \dots, 4$$

Ответ. Минимум в точке $X_{\min} = (1-t)(1;3;0;0) + t(3;0;0;5), 0 \le t \le 1$, значение функции в точке минимума равно 26.

Задача. Решите задачу линейного программирования М-методом

$$Z(X) = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 \to max.$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 4, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = 4 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \ \ j = 1, \dots, 5$$

Ответ. Максимум в точке (3;3;2;0;0), значение функции в точке максимума равно 11.

Задача. Решите задачу линейного программирования М-методом

$$Z(X) = 2x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 \to max.$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 6, \\ -5x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 1, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \ \ j = 1, \dots, 4$$

Ответ. Система ограничений несовместна.

3.6 *Использование надстройки “Поиск решения” MS Excel для решения задачи линейного программирования.*

Стандартный метод решения задачи линейного программирования – так называемый симплекс-метод.

При не очень большом количестве переменных можно использовать надстройку “Поиск решения” из MS Excel (см. 2.5 выше)

Типовая задача.
Цех может выпускать два вида продукции: шкафы и тумбы для телевизора.
На каждый шкаф расходуется 3,5 м стандартных ДСП, 1 м лицевого стекла и 1 человеко-день трудозатрат. На тумбу -1м ДСП, 2 м стекла и 1 человеко-день трудозатрат. Прибыль от продажи 1 шкафа составляет 200 у. е., а 1 тумбы -100 у е.
Материальные и трудовые ресурсы ограниченны: в цехе работают 150 рабочих, в день нельзя израсходовать больше 350 м ДСП и более 240 м стекла.
Какое количество шкафов и тумб должен выпускать цех, чтобы сделать прибыль максимальной?

Решение.

1. Формализуем задачу (составим математическую модель данной ситуации).

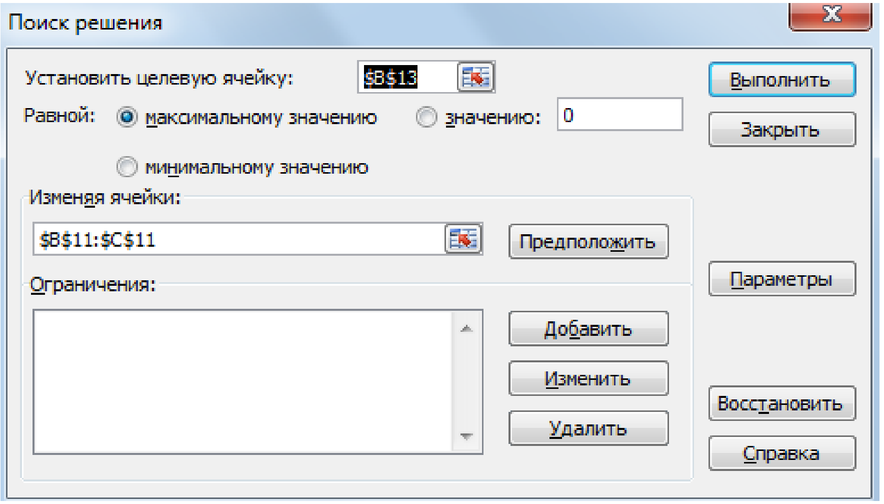
Переменные решения	**Целевая функция**
x_1 - количество шкафов	$P = 200x_1 + 100x_2 \to \max$
x_2 - количество тумб, производимых ежедневно	Ежедневная прибыль цеха

Ограничения
$\begin{cases} 3{,}5x_1 + x_2 \le 350 \\ x_1 + 2x_2 \le 240 \\ x_1 + x_2 \le 150 \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$

2. Организуем данные на листе MS-Excel так, как это показано на рис.

	A	B	C	D
1	Оптимальный план производства мебельного цеха.			
2				
3		Расход ресурса на 1 ед. прод.		
4	Ресурс	Шкафы	Тумбы	Запасы
5	ДСП	3,5	1	350
6	Стекло	1	2	240
7	Чел/дни	1	1	150
8	Прибыль от продажи ед. прод.	200	100	
9				
10	План производства	X1	X2	
11				
12				
13	Прибыль	=СУММПРОИЗВ(B8:C8;B11:C11)		
14				
15	Ограничения	Расход ресурса	Вид неравенства	Запас ресурса
16	ДСП	=B5*$B$11+C5*$C$11	<=	=D5
17	Стекло	=B6*$B$11+C6*$C$11	<=	=D6
18	Чел/дни	=B7*$B$11+C7*$C$11	<=	=D7

3. Выберем пункт меню "Сервис" "Поиск решения". Появится окно, озаглавленное поиск решения:

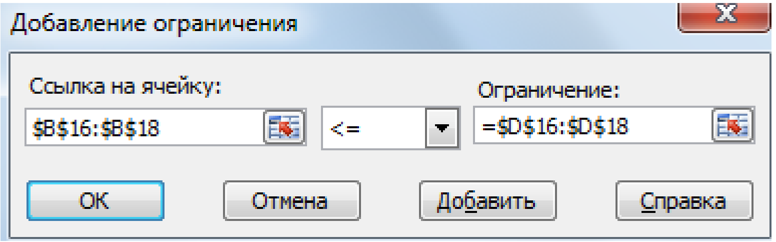


а). В поле окна "*Установить целевую ячейку*" отметим ячейку B13;

б). Установим переключатель на отметке "*Равной максимальному значению*";

в). В поле окна "*Изменяя ячейки*" отметим ячейки B11:C11;

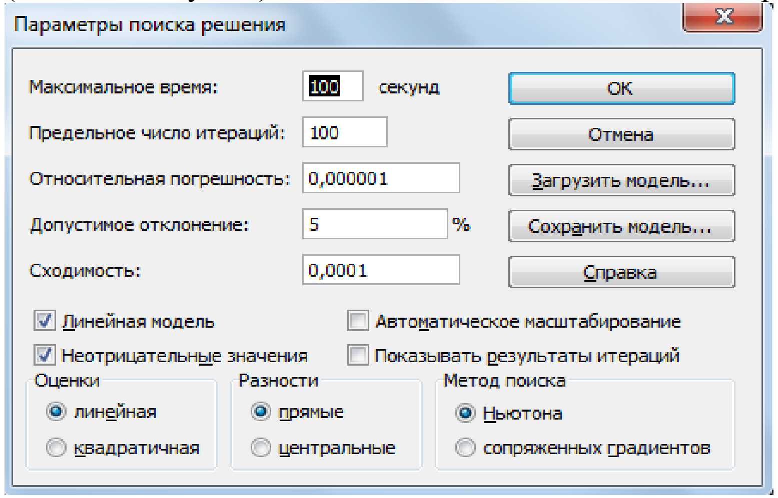
г). Добавим ограничения, щелкая по кнопке "*Добавить*".



В появившемся окне "*Добавление ограничения*", щелкнем в поле "Ссылка на ячейку", а затем отметим ячейки B16:B18, выберем знак ограничения и отметим ячейки D16:D18, содержащие ограничения по ресурсам.

4. Щелкнем по кнопке "Параметры".

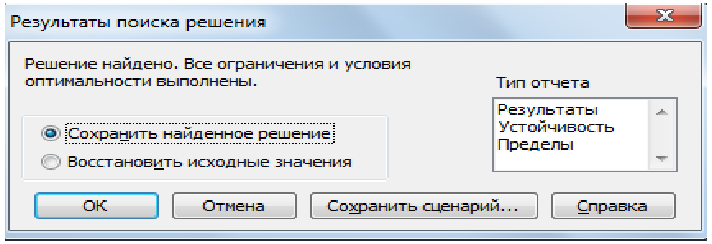
Появится окно "*Параметры поиска решения*", в котором можно (но не нужно) менять многочисленные параметры.



Нас интересует, установлены ли флажки "*Линейная модель*" и "*Неотрицательные значения*" (ограничения $x_1, x_2 \geq 0$ устанавливаются здесь). Если нет, установим их, щелкнем по кнопке Ok и вернемся к окну "*Поиск решения*".

5. Щелкнем по кнопке "Выполнить".

Оптимизационная программа MS-Excel выполнит поиск решения, после чего появится окно "*Результаты поиска решения*".



Прочтите сообщение программы в этом окне. Если все сделано правильно, программа сообщит: "Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены".

Вид листа MS-Excel, соответствующий оптимальному решению, показан на рис.

	A	B	C	D	E
1	**Оптимальный план производства мебельного цеха.**				
2					
3		Расход ресурса на 1 ед. прод.			
4	Ресурс	Шкафы	Тумбы	Запасы	
5	ДСП	3,5	1	350	
6	Стекло	1	2	240	
7	Чел/дни	1	1	150	
8	Прибыль от продажи ед.	200	100		
9					
10	План производс	X1	X2		
11		80	70		
12					
13	Прибыль	23000			
14					
15	Ограничения	Расход ресурса	Вид неравен	Запас ресурса	
16	ДСП	350	<=	350	
17	Стекло	220	<=	240	
18	Чел/дни	150	<=	150	

6. Убедимся, что переключатель в окне "*Результаты поиска решения*" находится в положении "*Сохранить найденное значение*", щелкнем по кнопке Ok и прочтем ответ в ячейках B11:C11. В ячейках D16:D18 содержатся значения ресурсов, которые необходимы для получения оптимального плана.

В случае, если вы неверно задали знак ограничений, ввели неверные формулы для целевой функции или для ограничений и оптимизационная программа не может найти решения в окне появятся сообщения:

"Значения целевой ячейки не сходятся" или

"Поиск не может найти решения" или

"Условия линейной модели не выполняются".

Ответ. При производстве 80 шкафов и 70 тумб в день достигается максимум прибыли, равный 23000 у.е.

Задача.

При составлении суточного рациона кормления скота можно использовать свежее сено (не более 50 кг) и силос не более 85 кг. Рацион должен обладать определенной питательностью (число кормовых единиц не менее 30) и содержать питательные вещества: белок (не менее 1 кг), кальций (не менее 100 г) и фосфор (не менее 80 г). Определить оптимальный рацион из условия минимума себестоимости.

Данные о содержании указанных компонентов в 1 кг каждого продукта питания и о себестоимости этих продуктов приведены в таблице:

Продукт	Кол-во кормовых единиц	Белок, г/кг	Кальций, г/кг	Фосфор, г/кг	Себестоимость, у.е./кг
Сено свежее	0,5	40	1,25	2	1,2
Силос	0,5	10	2,5	1	0,8

Ответ. Сено 20 кг, силос 40 кг.

Задача.

Предприятие выпускает три вида крепежных изделий: болты, гайки и шайбы. Нормы расхода сырья, времени работы оборудования и затарат электроэнергии, которые необходимы для

производства одной тонны каждого изделия, приведены в табл.4.
Месячные запасы ресурсов, которыми располагает предприятие, ограничены. По сырью эти ограничения обусловлены емкостью складских помещений, по оборудованию – станочным парком и трудовыми ресурсами, по электроэнергии – техническими и финансовыми причинами. Размеры запасов и доход от реализации продукции в у.е. за 1 тонну приведены в таблице.

Ресурсы	Нормы расхода ресурсов на тонну продукции			Ограничения по ресурсам
	Шайбы	Гайки	Болты	
Сырье	5	8	11	330
Оборудование	4	6	10	270
Электроэнергия	5	7	9	250
Доход (у.е./т)	90	140	200	

Помимо запасов на формирование программы влияет необходимость выполнения контрактных обязательств: предприятие должно обеспечить поставку шайб в количестве 4 т, гаек – в количестве 2 т, болтов – в количестве 3 т.
Требуется сформировать месячную производственную программу (определить объемы выпуска каждого вида продукции), при которой доход от реализации будет максимальным.

Ответ. 12,77 т шайб, 4,82 т гаек, 0,41 т болтов.

Задача.
Частный инвестор предполагает вложить 500 тыс. руб. в различные ценные бумаги. После консультаций со специалистами фондового рынка он отобрал 3 типа акций, 2 типа государственных облигаций. Часть денег предполагается положить на срочный вклад в банк.

Тип вложения	**Риск**	**Предполагаемый ежегодный доход, %**
Акции A	Высокий	15
Акции B	Средний	12
Акции C	Низкий	9
Облигации долгосрочные		11
Облигации краткосрочные		8
Срочный вклад		6

Имея в виду качественные соображения диверсификации портфеля и неформализуемые личные предпочтения, инвестор выдвигает следующие требования к портфелю ценных бумаг:
- все 500 тыс. руб. должны быть инвестированы;
- по крайней мере 100 тыс. руб. должны быть на срочном вкладе в любимом банке;
- по крайней мере 25% средств, инвестированных в акции, должны быть инвестированы в акции с низким риском;
- в облигации нужно инвестировать по крайней мере столько же, сколько в акции;
- не более чем 125 тыс. руб. должно быть вложено в бумаги с доходом менее чем 10%.

Определить портфель бумаг инвестора, удовлетворяющий всем требованиям и максимизирующий годовой доход. Какова величина этого дохода?

Ответ. 150 тыс. руб. - в акции A, 50 тыс. руб. - в акции C, 200 тыс. руб. - в долгосрочные облигации, 100 тыс. руб. - срочный вклад в банке.

Задача.
Фермер имеет 150 га земель в одной из южных областей и в предстоящем сезоне собирается выращивать пшеницу, кукурузу, овес и сою. В таблице представлены данные о величине ожидаемого урожая, финансовых и трудовых затратах, расходе

минеральных удобрений и предполагаемых ценах на выращенное зерно.

Тип зерна	Ожидаемая урожайность (ц/га)	Труд (час./га)	Издержки (руб./га)	Удобрения (ц/га)	Ожидаемая цена (руб./ц)
Пшеница	21	8	1000	4	160
Кукуруза	30	10	1500	12	128
Овес	18	6	600	2	73
Соя	24	20	1200	8	155

Основываясь на анализе прошлогоднего рынка зерновых, фермер хочет произвести не менее 150 ц пшеницы и не менее 150 ц кукурузы, но не более 125 ц овса. Он располагает 250 тыс. руб. для покрытия издержек, связанных с обработкой и уходом за полями, и планирует работать 12 ч в день в течение 150-дневного сезона. Он также не хочет перерасходовать имеющийся у него с прошлого года запас минеральных удобрений в 120 т.

Какое количество гектаров земли фермер должен отвести под каждую зерновую культуру, чтобы максимизировать прибыль от предполагаемого урожая?

Ответ. 95,8 га пшеницы, 5 га кукурузы, 49, 2 га сои, прибыль составит 361766,7 руб.

Задача.

Большой универсальный магазин собирается заказать новую коллекцию костюмов для весеннего сезона. Решено заказать 4 типа костюмов. Три типа - это костюмы широкого потребления: (1) костюмы из полиэстровых смесей, (2) шерстяные костюмы и (3) костюмы из хлопка. Четвертый тип - это дорогие импортные модельные костюмы из различных тканей. Имеющийся у менеджеров магазина опыт и специальные исследования позволяют оценить средние затраты рабочего времени продавцов на продажу одного костюма каждого типа, количество средств на рекламу и площадей в расчете на один костюм каждого типа. Все эти данные, а также прибыль от продажи одного костюма каждого типа представлены в таблице.

Тип костюма	Прибыль на один костюм, долл.	Рабочее время продавцов	Затраты на рекламу на один костюм	Площадь на один костюм (кв. фут)
Полиэстер	35	0,4	$2	1,00
Шерсть	47	0,5	$4	1,5
Хлопок	30	0,3	$3	1,25
Импорт	90	1,0	$9	3,00

Предполагается, что весенний сезон будет длиться 90 дней. Магазин открыт 10 часов вдень, 7 дней в неделю. Два продавца постоянно будут в отделе костюмов. Выделенная отделу костюмов площадь составляет прямоугольник 100*60 футов. Бюджет, выделенный на рекламу всех костюмов на весенний сезон, составляет 15 тыс. долл.

Сколько костюмов каждого типа нужно закупить, чтобы максимизировать прибыль?

Ответ. 33 костюма из полиэстера, 2535 шерстяных костюма, 1731 костюм из хлопка, 0 импортных костюмов. Прибыль составит 172230$.

Задача. Из пункта А в пункт В ежедневно отправляются скорые и пассажирские поезда. Наличный парк вагонов разных типов, из которых ежедневно можно комплектовать данные поезда, и число пассажиров, вмещающихся в каждом из вагонов, приведены ниже:

Вагон	Число вагонов в поезде	Число пас-	Парк

	Скором	Пассажирском	сажиров	вагонов
Багажный	1	1	-	12
Почтовый	1	-	-	8
Плацкартный	5	8	58	81
Купейный	6	4	40	70
Мягкий	3	1	32	26

Определить:
а). количество скорых и пассажирских поездов, при которых число перевозимых пассажиров достигнет максимума;
б). оптимальное количество поездов для случая, когда железная дорога не может пропустить более шести пассажирских поездов.

Ответ. а). 5 скорых и 7 пассажирских; б). 6 скорых и 6 пассажирских.

3.7 Транспортная задача в матричной форме

3.7.1 Постановка задачи.

Пусть имеется n станций отправления $A_1, \ldots, A_n$, на которых сосредоточены объемы груза $a_1, \ldots, a_n$ и m станций назначения $B_1, \ldots, B_m$, на которых есть потребность в этих грузах $b_1, \ldots, b_m$, причем сумма запасов груза равна сумме потребности в них, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\mathrm{i}} = \sum_{\mathrm{j}=1}^{m} b_{\mathrm{j}}.$$

Известна стоимость перевозки единицы груза c_{ij} со станции A_i на станцию B_j. Требуется так спланировать объемы перевозок x_{ij} со станции A_i на станцию B_j, чтобы все запасы были бы вывезены, все потребности удовлетворены и суммарная стоимость перевозок была бы минимальной.

Сведем все данные в таблицу

	B_1	…	B_j	…	B_m
A_1	c_{11}	…	c_{1j}	…	c_{1m}
$\vdots$	$\vdots$	…	$\vdots$	…	$\vdots$
A_i	c_{i1}	…	c_{ij}	…	c_{im}
$\vdots$	$\vdots$	…	$\vdots$	…	$\vdots$
A_n	c_{n1}	…	c_{nj}	…	c_{nm}

x_{11}	…	x_{1j}	…	x_{1m}	a_1
$\vdots$	…	$\vdots$	…	$\vdots$	$\vdots$
x_{i1}	…	x_{ij}	…	x_{im}	a_i
$\vdots$	…	$\vdots$	…	$\vdots$	$\vdots$
x_{n1}	…	x_{nj}	…	x_{nm}	a_n
b_1	…	b_j	…	b_m	

Математическая модель транспортной задачи имеет вид:

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1m} = a_1 \\ \ldots \\ x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{nm} = a_n \\ x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{n1} = b_1 \\ \ldots \\ x_{1m} + x_{2m} + \cdots + x_{nm} = b_m \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0 \ \forall i, j$$

Если условие баланса $\sum_{i=1}^{n} a_{\mathrm{i}} = \sum_{\mathrm{j}=1}^{m} b_{\mathrm{j}}$ выполняется, то транспортная задача называется **сбалансированной**, в противном случае – **несбалансированной**. Поскольку ограничения модели могут быть выполнены только при сбалансированной транспортной задаче, то при построении транспортной модели необходимо проверять условие баланса. В случае, когда *суммарные запасы превышают суммарные потребности*, необходим дополнительный **фиктивный** пункт потребления, который будет формально потреблять существующий излишек запасов, то есть

$$b_{ф} = \sum_{i=1}^{n} a_{\mathrm{i}} - \sum_{\mathrm{j}=1}^{m} b_{\mathrm{j}}$$

Если *суммарные потребности превышают суммарные запасы*, то необходим дополнительный **фиктивный** пункт отправления, формально восполняющий существующий недостаток продукции в пунктах отправления:

$$a_{ф} = \sum_{\mathrm{j}=1}^{m} b_{\mathrm{j}} - \sum_{i=1}^{n} a_{\mathrm{i}}$$

Введение фиктивного потребителя или отправителя повлечет необходимость формального задания **фиктивных** тарифов $c_{ij}^{ф}$ (реально не существующих) для фиктивных перевозок. Расходы $c_{ij}^{ф}$ по доставке груза до фиктивного потребителя или фиктивного поставщика равны нулю, так как груз фактически не перевозится.

3.7.2 Решение транспортной задачи методом потенциалов.

Алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов

1. Найти исходное допустимое базисное решение. число базисных (заполненных) клеток должно быть равно $m + n - 1$. Если их оказалось меньше поставить недостающее число нулей с учетом того, что не должно существовать цикла, все вершины которого лежат в базисных клетках.
2. Найти потенциалы из системы уравнений $u_i - v_j = c_{ij}$ для базисных клеток.

3. Найти свободную клетку, для которой не выполняется неравенство

$$u_i - v_j \le c_{ij}.$$

Если таких клеток нет, то решение оптимально.

4. Для найденной свободной клетки построить цикл ее пересчета и осуществить сдвиг по нему на величину, равную минимальному объему перевозки в отрицательных вершинах цикла. Построить новую таблицу перевозок. Если клеток с минимальным объемом несколько, то только одну из них перевести в разряд свободных. Остальные оставить среди базисных с нулевым объемом перевозки.
5. См. п.2.

Пример. Решить транспортную задачу методом потенциалов:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	9	8	5	3	100
A_2	4	7	13	6	2	150
A_3	8	6	9	7	1	90
A_4	5	4	7	9	2	30
	40	80	110	50	90	

Решение.

Так как $\sum_{i=1}^{4} a_{\mathrm{i}} = 100 + 150 + 90 + 30 = 370$ и $\sum_{\mathrm{j}=1}^{5} b_{\mathrm{j}} = 40 + 80 + 110 + 50 + 90 = 370$, то данная транспортная задача является сбалансированной. Следовательно, добавлять фиктивного потребителя или фиктивного поставщика не требуется.

Шаг 1. Построение опорного плана

Опорным, называется любой допустимый базисный, как правило, не оптимальный план, который является исходным для последующего решения. Для построения опорного плана существует ряд методов. Самый простой из них – метод северо-западного угла.

Метод северо-западного угла

Берем «северо-западную» клетку матрицы – это клетка A_1B_1 и записываем в нее максимально возможную поставку – 40 т (объем выгрузки 40 т, ресурсы станции отправления 100т). Поскольку ресурсы станции отправления A_1 не исчерпаны, следуем по первой строке вправо и записываем в клетку A_1B_2 максимально возможный объем перевозки – 60 т. Таким образом получается, что ресурсы станции A_1 полностью использованы, однако спрос станции назначения B_2 не удовлетворен. Тогда от клетки A_1B_2 опускаемся вниз до клетки A_2B_2 и записываем в нее поставку равную 20 т. Описанным способом следуем далее до последней «юго-западной» клетки матрицы. В результате получаем допустимый базисный план перевозок груза.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 40	9 60	8	5	3	100
A_2	4	7 20	13 110	6 20	2	150
A_3	8	6	9	7 30	1 60	90
A_4	5	4	7	9	2 30	30
	40	80	110	50	90	

В результате получаем допустимый базисный план перевозок груза. Стоимость перевозки составит:

$$Z_{C-3} = 10 \cdot 40 + 9 \cdot 60 + 7 \cdot 20 + 13 \cdot 110 + 6 \cdot 20 + 7 \cdot 30 + 1 \cdot 60 + 2 \cdot 30 = 2960$$

Количество клеток матрицы, содержащих перевозки, должно быть равно $n + m - 1$. В нашем случае это условие соблюдается: 8 = 4 + 5 – 1.

Метод северо-западного угла имеет существенный недостаток. При его использовании не учитываются значения показателей критерия оптимальности в клетках матрицы. Поэтому поставки могут попасть в «дорогие» клетки с заведомо высокой ценой. Опорный план, полученный с использованием данного метода, как правило, далек от оптимального, что обусловливает большой объем последующих расчетов для доведения его до оптимального. Описанный метод обычно не применяется.

Метод наименьшей стоимости

Наиболее предпочтительным при ручном решении транспортных задач считается метод минимальной стоимости. Суть его в следующем. В транспортной матрице выбирается клетка с минимальной стоимостью. В нашем случае это клетка A_3B_5. В нее записывается максимально возможная поставка – это 90 т:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 X	9 X	8 50	5 50	3 X	~~100~~ ; ~~50~~; 0

A_2	4 40	7 50	13 60	6 X	2 X	~~150~~; ~~110~~; ~~60~~; 0
A_3	8 X	6 X	9 X	7 X	1 90	~~90~~; 0
A_4	5 X	4 30	7 X	9 X	2 X	~~30~~; 0
	~~40~~ 0	~~80~~ ~~50~~ 0	~~110~~ ~~60~~ 0	~~50~~ 0	~~90~~ 0	

После осуществления данной перевозки спрос станции B_5 полностью удовлетворен, а на станции A_3 товара больше не осталось. Поэтому столбец 5 и строку 2 следует из дальнейшего построения плана исключаем (ставим “X ” в пустые клетки).

Следующие по величине показателя критерия оптимальности клетки со стоимостью 4 – это клетки A_2B_1 и A_4B_2. Выбираем одну из них, например, A_2B_1 и записываем в нее поставку 40 т. В результате данной поставки спрос станции B_1 полностью удовлетворен, следовательно, столбец 1 исключается из дальнейшего построения плана. На станции A_2 останется $150-40=110$ т груза.

Далее идет клетка A_4B_2 – поставка 30 т, потом A_1B_4 – 50 т, A_2B_2 – 50 т. Все оставшиеся ресурсы по станциям погрузки распределяем между клетками третьего столбца в клетки A_1B_3 и A_2B_3.

После составления опорного плана во избежание ошибок целесообразно проверить балансы по строкам и по столбцам матрицы. Стоимость данной перевозки:

$$Z(X)=2150.$$

Таким образом, построенный план значительно лучше плана, построенного методом северо-западного угла. Однако число базисных клеток в плане – 7. Это не соответствует требованию к числу заполненных клеток.

Поэтому необходимо ввести недостающее количество базисных клеток с нулевыми поставками. В нашем случае необходимо ввести одну нулевую поставку. Нулевую поставку необходимо вводить в матрицу рядом с базисной клеткой, которая обусловила «пропажу» базисной клетки.

Для того чтобы понять, почему «пропадают» поставки, обратимся к методу северо-западного угла. Из построенного этим методом плана следует, что как только была заполнена «северо-западная» клетка, рядом с ней сразу появляется соседняя базисная клетка, потом еще одна и т.д. Цепочка базисных клеток без разрыва следует до «юго-восточного угла» матрицы. Однако если бы в этой цепочке появилась клетка, связывающая поставщика и потребителя с равными объемами погрузки и выгрузки, и в нее была бы записана такая же поставка, то это привело бы к пропаже базисной клетки.

Описанная ситуация имела место в плане, когда в клетку A_3B_5 была введена перевозка 90 т, равная объемам погрузки и выгрузки по соответствующим станциям. Поэтому необходимо ввести в план дополнительную базисную клетку с нулевой поставкой. Эта клетка должна стоять рядом с клеткой A_3B_5. Из трех соседних клеток следует выбрать клетку с минимальной стоимостью, например, A_2B_5. Записываем в нее перевозку, равную «0»:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	10	9	8 50	5 50	3
A_2	4 40	7 50	13 60	6	2 0
A_3	8	6	9	7	1 90
A_4	5	4	7	9	2

		30			

Таким образом, причиной вырождения плана транспортной задачи является наличие поставщиков и потребителей с равными объемами погрузки и выгрузки или равными объемами сумм погрузки и выгрузки по нескольким станциям в разнообразных комбинациях. Такие случаи необходимо уметь находить для того, чтобы правильно определять места для нулевых поставок. В процессе решения задачи возможны случаи, когда число базисных клеток превышает величину $n + m - 1$. Это означает появление ошибки вследствие того, что при построении опорного плана в какую-то клетку была введена не максимально возможная поставка.

Шаг2. Проверка плана на оптимальность

Расчет потенциалов

Проверка плана транспортной задачи в описываемом методе на оптимальность осуществляется с помощью потенциалов. Потенциалы – это такие числа, которые по определенным правилам назначаются каждой строке и каждому столбцу. **Потенциалы строк** обозначим $\boldsymbol{u_i}$, **потенциалы столбцов** – $\boldsymbol{v_j}$. Они могут принимать любые значения. Однако для удобства будем считать, что $u_1 = 0$. Остальные потенциалы рассчитываем с помощью формулы $u_i - v_j = c_{ij}$.

		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	v_j / u_i	1	-2	-8	-5	3
A_1	0	10	9	8 50	5 50	3
A_2	5	4 40	7 50	13 60	6 *	2 0
A_3	4	8	6	9 *	7 *	1 90
A_4	2	5	4 30	7 *	9	2

Проверка небазисных клеток на соответствие их условию оптимальности

Оптимальный план транспортной задачи должен отвечать **критерию оптимальности**, который выражается в том, соответствуют ли небазисные клетки матрицы условию, формулируемому следующим выражением: $u_i - v_j \leq c_{ij}$

Если это условие для всех небазисных клеток выполняется, то план является оптимальным, а если нет, хотя бы для одной клетки, то план не оптимален. В нашем случае есть четыре клетки, для которых данное условие не выполняется (отмечены звездочкой).

Шаг 3. Улучшение плана

Поскольку полученный план не оптимален, дальнейшие действия алгоритма состоят в его преобразовании в лучшую сторону или просто улучшения.

Построение цикла перераспределения поставок

Улучшение плана осуществляется по одной из небазисных клеток, для которой условие оптимальности оказалось невыполненным. В нашем плане имеется четыре такие клетки. Выбираем одну из них, для которой условие оптимальности не выполняется в наибольшей степени. В нашем плане это клетка A_2B_4. Для нее условие оптимальности не выполнено на 4 единицы $(5 + (-5) - 6 = 4)$. Для этой клетки строим цикл перераспределения поставок. Цикл перераспределения поставок –

это такая замкнутая ломаная линия, которая проходит по клеткам матрицы ходом шахматной ладьи. В вершинах контура обязательно лежит одна небазисная клетка (несоответствующая условию оптимальности, найденная ранее), а остальные соответствуют только базисным клеткам. Линии контура могут пересекаться. Для небазисной клетки A_2B_4 цикл будет проходить по клеткам A_1B_4, A_1B_3, A_2B_3 .

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	10	9	8 + 50	5 - 50	3
A_2	4 40	7 50	13 - 60	6 +	2 0
A_3	8	6	9	7	1 90
A_4	5	4 30	7	9	2

Перераспределение поставок

Перераспределение поставок производится по циклу. Вначале определим объем перераспределения поставок. Для этого присвоим клеткам – вершинам цикла – знаки. В небазисную клетку A_2B_4 ставим «+», поскольку в нее будет вводиться поставка. Далее, чередуя «+» с «–», расставляем знаки по остальным вершинам контура. Величина объема перераспределения поставок принимается равной минимальной поставке в отрицательной клетке. Для нашего случая $\min(60; 50) = 50$ единиц груза. Перераспределение заключается в том, что к поставкам в положительных клетках найденный объем прибавляется, а для отрицательных клеток отнимается:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	10	9	8 100	5	3
A_2	4 40	7 50	13 10	6 50	2 0
A_3	8	6	9	7	1 90
A_4	5	4 30	7	9	2

Стоимость новой перевозки $Z = 1950$.

Полученный улучшенный план, в свою очередь, требует проверки на оптимальность, поэтому необходимо вернуться к шагам 2 и 3. Совокупность действий, описанных в операциях 2 и 3, в процессе решения задачи повторяется до тех пор, пока не будет получен оптимальный план.

Для рассматриваемой задачи оптимальный план перевозок следующий:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	10	9	8 100	5	3
A_2	4 40	7 60	13	6 50	2 0
A_3	8	6	9	7	1 90
A_4	5	4 20	7 10	9	2

Стоимость новой перевозки $Z = 1920$.

Таким образом, получен план перевозок, обеспечивающий минимальный объем перевозочной работы для транспортировки всего груза между станциями погрузки и выгрузки.

Задача 14. Решите транспортную задачу методом потенциалов

Заказы / Запасы	11	7	8	4
9	2	5	8	1
16	8	3	9	2
5	7	4	6	3

Ответ. Минимальные затраты составят 120.

Задача 15. Решите транспортную задачу методом потенциалов

Заказы / Запасы	100	200	200	300
100	1	3	4	1
200	5	2	2	7
400	4	4	3	6
200	7	2	5	3

Ответ. Минимальные затраты составят 2100.

Задача 17. Решите транспортную задачу методом потенциалов

Заказы / Запасы	200	200	100	200
200	5	2	1	1
300	1	3	4	4
200	4	2	3	1
200	4	3	5	2
100	3	2	4	2

Ответ. Минимальные затраты составят 900.

3.7.3 Решение транспортной задачи с помощью надстройки «Поиск решения».

Задача.

В районе имеется 4 песчаных карьера, с которых песок вывозится на 5-тонных грузовиках. Предприятия-поставщики S1 - S4 разрабатывающие карьеры, могут поставлять определенное количество грузовиков с песком в день.

В этом районе имеется 5 заводов железобетонных конструкций - потребителей песка D1-D5, которым требуется определенное количество грузовиков с песком в день. Стоимости перевозки песка одним грузовиком от карьера-поставщика Si к заводу-потребителю Di (в условных единицах) приведены в таблице параметров.

	D1	**D2**	**D3**	**D4**	**D5**	**Запасы**
S1	13	7	14	7	5	**30**
S2	11	8	12	6	8	**48**
S3	6	10	10	8	11	**20**
S4	14	8	10	10	15	**20**
Заказы	**18**	**27**	**42**	**26**	**15**	

Требуется:

1. Составить план перевозок, минимизирующий затраты.
2. Указать какой из 5 заводов не получит песок в нужном объеме.

3. Как изменится оптимальный план, если маршрут от S2 к D4 запрещен.

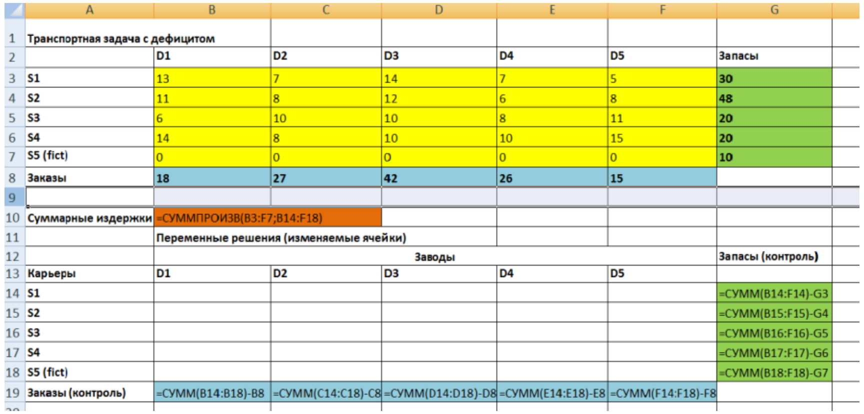
Решение.

Суммарные запасы песка составляют 118 грузовиков в день, суммарные заказы на песок составляют 128 грузовиков в день, т.е. имеем транспортну задачу с дефицитом. Для выравнивания баланса добавим фиктивного поставщика $S_{fict} = S_5$ с запасом песка в 10 грузовиков (тарифы на перевозки каждому из заводов будут равны 0).

Построим математическую модель задачи.

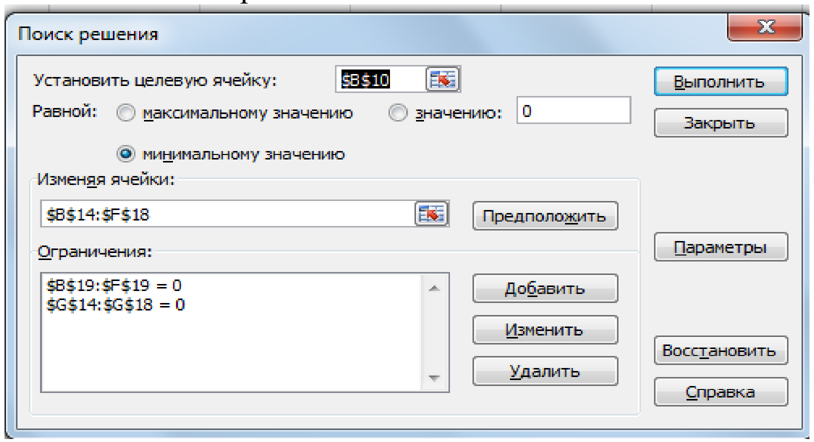
Переменные решения	**Целевая функция**
x_{ij} - объем поставок от i-го карьера $(1 \le i \le 5)$ j-му заводу ($1 \le j \le 5$)	$C = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij} \to \min$ Ежедневная затраты на перевозку
Ограничения	
$\begin{cases} \sum_{j=1}^{5} x_{ij} = S_i, i = 1,2,3,4,5 \\ \sum_{i=1}^{5} x_{ij} = D_j, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$ $x_{ij} \ge 0$	

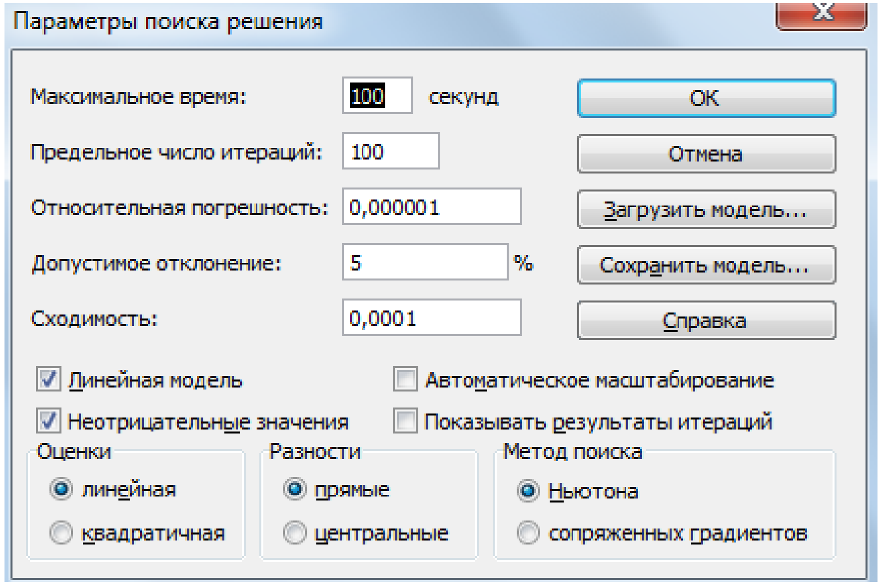
Организуем данные так как это показано на рисунке:



	A	B	C	D	E	F	G
1	Транспортная задача с дефицитом						
2		D1	D2	D3	D4	D5	Запасы
3	S1	13	7	14	7	5	30
4	S2	11	8	12	6	8	48
5	S3	6	10	10	8	11	20
6	S4	14	8	10	10	15	20
7	S5 (fict)	0	0	0	0	0	10
8	Заказы	18	27	42	26	15	
9							
10	Суммарные издержки	=СУММПРОИЗВ(B3:F7;B14:F18)					
11		Переменные решения (изменяемые ячейки)					
12				Заводы			Запасы (контроль)
13	Карьеры	D1	D2	D3	D4	D5	
14	S1						=СУММ(B14:F14)-G3
15	S2						=СУММ(B15:F15)-G4
16	S3						=СУММ(B16:F16)-G5
17	S4						=СУММ(B17:F17)-G6
18	S5 (fict)						=СУММ(B18:F18)-G7
19	Заказы (контроль)	=СУММ(B14:B18)-B8	=СУММ(C14:C18)-C8	=СУММ(D14:D18)-D8	=СУММ(E14:E18)-E8	=СУММ(F14:F18)-F8	

Вызовем "Поиск решения":





Не следует требовать явно, чтобы переменные B11:F14 были целыми.

Вид листа MS-Excel, соответствующий оптимальному решению, показан на рис.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Транспортная задача с дефицитом**							
2		**D1**	**D2**	**D3**	**D4**	**D5**	**Запасы**	
3	**S1**	13	7	14	7	5	**30**	
4	**S2**	11	8	12	6	8	**48**	
5	**S3**	6	10	10	8	11	**20**	
6	**S4**	14	8	10	10	15	**20**	
7	**S5 (fict)**	0	0	0	0	0	**10**	
8	**Заказы**	**18**	**27**	**42**	**26**	**15**		
9								
10	**Суммарные издержки**	880						
11		**Переменные решения (изменяемые ячейки)**						
12				**Заводы**			**Невывезенные запасы**	
13	**Карьеры**	**D1**	**D2**	**D3**	**D4**	**D5**		
14	**S1**	0	15	0	0	15	6,99174E-11	
15	**S2**	0	12	10	26	0	-1,59343E-09	
16	**S3**	18	0	2	0	0	4,66116E-11	
17	**S4**	0	0	20	0	0	4,66116E-11	
18	**S5 (fict)**	0	0	10	0	0	2,33058E-11	
19	**Невыполненные заказы**	4,2E-11	6,3E-11	-1,4E-09	-1,5E-10	3,5E-11		
20								

Для замкнутой (или сбалансированной) задачи все невывезенные запасы и невыполненные заказы должны быть равны 0 (напомним, что, например, число 4,2E-11 есть $4{,}2\cdot 10^{-11}$, т.е. его можно приближенно считать равным нулю).

Итак ответ на первый вопрос: оптимальный план перевозок $X_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 12 & 10 & 26 & 0 \\ 18 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, затраты при этом составят 880 у.е.

Ответ на второй вопрос. Очевидно, что завод D3 не дополучит песка в объеме 10 машин (это те машины, которые отправлены на завод D3 от фиктивного поставщика).

Для ответа на третий вопрос придется заново запустить "Поиск решения", установив тариф на перевозку от поставщика S2 к потребителю D4 равным, например, 100. Результат изображен на рисунке.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Транспортная задача с дефицитом							
2		D1	D2	D3	D4	D5	Запасы	
3	S1	13	7	14	7	5	30	
4	S2	11	8	12	100	8	48	
5	S3	6	10	10	8	11	20	
6	S4	14	8	10	10	15	20	
7	S5 (fict)	0	0	0	0	0	10	
8	Заказы	18	27	42	26	15		
9								
10	Суммарные издержки	954						
11		Переменные решения (изменяемые ячейки)						
12		Заводы					Невывезенные запасы	
13	Карьеры	D1	D2	D3	D4	D5		
14	S1	0	0	0	24	6	9,10408E-10	
15	S2	0	27	12	0	9	-2,85959E-09	
16	S3	18	0	0	2	0	6,63967E-11	
17	S4	0	0	20	0	0	0	
18	S5 (fict)	0	0	10	0	0	0	
19	Невыполненные заказы	0	-3,2E-09	-1,4E-11	9,7E-10	3,4E-10		
20								

Очевидно, что матрица перевозок получилась совершенно иной, а затраты достигли 954 у.е., увеличившись на 54 у.е.

Замечание. Следует заметить, что введение любого дополнительного ограничения в "Поиск решения" для транспортной задачи приводит к тому, что эффективные "транспортные" методы решения таких задач перестают быть применимыми, и задача будет решаться с помощью общих алгоритмов решения ЛП-задач. Помимо того, что эти методы менее эффективны, они не могут гарантировать целочисленного решения, и проблема перейдет в разряд более сложных задач целочисленного программирования.

Задача.

Компания, занимающаяся сбором и переработкой металлолома, имеет четыре промышленные площадки S1-S4, которые могут поставлять металлургическим предприятиям определенное количество товарного металлолома в месяц (в тоннах указано в таблице в графе "Запасы").

В настоящее время у компании имеются заявки на следующий месяц от 5 предприятий D1-D5, которым требуется определенное количество металлолома в месяц (в тоннах указано в таблице в графе "Заказы"). Стоимости перевозки 1 т металлолома от промплощадки-поставщика Si к заводу-потребителю Di (в условных единицах) приведены в таблице.

	D1	D2	D3	D4	D5	Запасы
S1	3	4	5	4	6	**30**
S2	1	5	7	1	5	**48**
S3	4	6	6	3	4	**20**
S4	2	7	4	7	2	**30**
Заказы	**18**	**27**	**42**	**26**	**15**	

Составить математическую модель задачи нахождения плана перевозок, минимизирующего затраты. Найти решение задачи с помощью MS Excel.

Ответ. $X_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 23 & 7 & 0 & 0 \\ 18 & 4 & 0 & 26 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 & 15 \end{pmatrix}$, минимальные затраты составляют 401 у.е.

Задача.

В районе имеется 4 песчаных карьера, с которых песок вывозится на 5-тонных грузовиках. Предприятия-поставщики S1 - S4 разрабатывающие карьеры, могут поставлять определенное количество грузовиков с песком в день.

В этом районе имеется 5 заводов железобетонных конструкций - потребителей песка D1-D5, которым требуется определенное количество грузовиков с песком в день. Стоимости перевозки песка одним грузовиком от карьера-поставщика Si к заводу-потребителю Di (в условных единицах) приведены в таблице параметров.

	D1	**D2**	**D3**	**D4**	**D5**	**Запасы**
S1	1	3	4	3	1	**500**
S2	9	5	2	4	8	**600**
S3	3	4	7	4	3	**900**
S4	5	7	2	6	6	**1000**
Заказы	**300**	**900**	**800**	**400**	**400**	

Требуется:

1. Составить план перевозок, минимизирующий затраты.
2. Составить план перевозок, максимизирующий затраты. Найти разность между наибольшими и наименьшими из возможных затратами.
3. Указать на каком из двух карьеров останется невывезенный песок, в каком количестве.
4. Как изменится оптимальный план, если маршрут от S4 к D3 запрещен.

Ответ.

1. Наилучший план $X_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 500 & 0 & 0 & 0 \\ 300 & 0 & 0 & 300 & 0 \\ 0 & 400 & 200 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 600 & 0 & 400 \end{pmatrix}$,

минимальные затраты составляют 9 700 у.е..

2. Наихудший план $X_{max} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 400 & 100 \\ 0 & 0 & 600 & 0 & 0 \\ 300 & 300 & 200 & 0 & 0 \\ 0 & 600 & 0 & 400 & 0 \end{pmatrix}$,

максимальные затраты составляют 17 800 у.е.

3. Невывезенный песок в количестве 200 машин останется на карьере S3.

4. $X_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 & 400 & 0 \\ 0 & 100 & 800 & 0 & 0 \\ 300 & 100 & 0 & 400 & 0 \end{pmatrix}$, минимальные затраты составляют 10900 у.е., т.е. закрытие маршрута приведет к общему повышению издержек на 1200 у.е.

Задача.

Фирма, занимающаяся перевозкой грузов собственных автомобилях КамАЗ, обслуживает своих клиентов в центральных городах России. Клиенты могут заказать фирме доставку груза из любого населенного пункта в любой город. После доставки КамАЗы ждут распоряжений диспетчера о выполнении следующей заявки в том городе, куда был доставлен груз.

В настоящий момент 4 порожних автомобиля ждут распоряжений в Иваново, 3 автомобиля - в Костроме, 6 машин - в Орле и одна - в Калуге. Одновременно диспетчеру поступили заявки на 5 автомобилей во Владимире, на 3 автомобиля в Санкт-Петербурге и на 6 автомобилей в Москве. Расстояния между городами известны и приведены в таблице.

Машины	**Клиенты**			**Наличие (машин)**
	Владимир	**Санкт-**	**Москва**	

		Петербург		
Иваново	119	971	287	4
Кострома	214	1008	324	3
Орел	508	1024	340	6
Калуга	326	535	135	1
Заявки (машин)	5	3	6	

Составить такой план перегона порожних автомобилей из мест их расположения к клиентам, чтобы суммарный пробег всех автомобилей, а следовательно, и издержки фирмы были минимальными.

Ответ.

Оптимальный план перегона автомобилей: во Владимир - 4 машины из Иваново и 1 из Костромы; в Санкт-Петербург -- 2 машины из Орла и одна из Калуги; в Москву - 2 из Костромы и 4 из Орла. Суммарный пробег всех автомашин составит 5281 км.

3.7.4 Задачи, сводящиеся к транспортным.

Как уже говорилось выше, задачи, не являющиеся транспортными, часто могут быть модифицированы.

Пример. Необходимо распределить специалистов трёх профилей (соответственно, 60,30 и 40 человек) на 4 вида работ. Потребность в специалистах, соответственно, 20, 40, 25 и 45. Cij – эффективность использования специалиста i-го профиля на j-й работе.

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 8 & 6 \\ 5 & 7 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение. Задача похожа на транспортную, но требуется найти не **минимум**, а **максимум**. Поэтому…

−7	−5	−2	0	60
−4	0	−8	−6	30
−5	−7	0	−9	40
20	40	25	45	

Ответ.

−7 20	−5 40	−2	0
−4	0	−8 25	−6 5
−5	−7	0	−9 40

Задача.

Менеджер - координатор аудиторской фирмы должен распределить аудиторов для работы на следующий месяц. Имеются заявки от 10 клиентов на 75 аудиторов. В 4 конторах фирмы имеется 90 аудиторов, 15 "лишних" аудиторов можно отправить на плановую учебу. Аудиторы различаются по квалификации и опыту работы. Прежде чем приступить к аудиту конкретной фирмы, они должны затратить определенное время на подготовку и консультации. Менеджер-координатор, учитывая опыт работы аудиторов каждой конторы, оценил время, необходимое "среднему" аудитору каждой конторы для подготовки к аудиту конкретного клиента. Результаты - в таблице.

Конторы	Клиенты										Запасы
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	
ГААПвилл	8	21	15	13	9	17	18	7	26	9	**35**
Финанстаун	14	18	17	19	12	6	0	15	24	13	**20**
ИСАбург	9	15	18	16	16	15	11	13	21	19	**25**

Нью-Баланс	11	?	14	7	23	9	6	18	?	7	**10**
Заявки	**4**	**9**	**2**	**12**	**7**	**6**	**9**	**3**	**18**	**5**	

Распределить аудиторов так, чтобы суммарные временные затраты на подготовку были минимальны. Знаки вопроса в некоторых клетках таблицы означают, что аудиторы данной конторы не имеют опыта аудита в отрасли, к которой относится данный клиент, и их не должны к нему посылать.

Ответ.

Оптимальное распределение аудиторов

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 2 & 7 & 0 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 9 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача.

Мастер должен расставить 4 рабочих для выполнения 4 типовых операций. Из данных хронометрирования известно, сколько минут в среднем тратит каждый из рабочих на выполнение каждой операции. Эти данные представлены в таблице.

Работы	**Работники**			
	A	**B**	**C**	**D**
1	15	20	18	24
2	12	17	16	15
3	14	15	19	15
4	11	14	12	3

Как распределить рабочих по операциям, чтобы суммарные затраты рабочего времени были бы минимальны?

Составить математическую модель задачи и решить ее с помощью MS Excel.

Ответ. Распределение рабочих по операциям имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, минимальные суммарные временные затраты составят 48 мин.

Задача.

Мастер цеха должен назначить на сборку изделия, требующую выполнения шести различных операций, шесть рабочих. В силу разной квалификации рабочие затрачивают на выполнение операций различное время. Результаты их тестирования приведены в таблице. Следует также учесть, что рабочие 3 и 4 не умеют выполнять операцию №2, а рабочий 6 не может выполнять операцию №6. Кроме того, имеется 7 рабочих, следовательно, один из них не будет задействован в процессе.

Каким образом оптимально распределить рабочих по операциям, чтобы суммарное время, затрачиваемое на сборку изделия, было минимальным? Кому из рабочих можно "отдохнуть"?

Рабочие	**Операции**					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	23	6	7	12	6	12
2	8	16	11	6	12	11
3	6	?	9	8	16	23
4	11	?	18	15	15	12
5	12	17	12	11	7	15
6	4	12	11	8	17	?
7	5	10	8	15	7	14

Ответ. Оптимальное распределение рабочих по операциям имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, минимальные суммарные временные затраты составят 43 мин., отдыхать будет третий рабочий.

Задача.

Фирма, занимающаяся продажей оборудования для компьютерных сетей, имеет 10 специалистов по маркетингу и 10 техников-программистов, которых необходимо объединить в пары (техник - менеджер по маркетингу) - команды по продаже оборудования, соответствующего нуждам конкретного клиента. Менеджер по работе с персоналом провел среди них тест Майера-Бриггса и определил индекс взаимной несовместимости между i-м техником и j-м маркетологом. Индекс варьирует от 20 (выраженная враждебность) до 1 (дружеские отношения). Результаты представлены в таблице индексов несовместимости.

Составить команды так, чтобы суммарный индекс был минимальным.

Индексы несовместимости

Маркетолог	**Техник**									
	Ваня	**Петя**	**Миша**	**Коля**	**Вася**	**Рома**	**Майя**	**Витя**	**Инна**	**Гена**
Аня	11	8	4	3	9	17	14	6	12	2
Зоя	7	4	7	11	19	2	10	5	18	9
Маша	13	20	1	12	14	11	16	9	15	14
Виталий	5	8	12	6	1	3	4	7	10	12
Люба	16	7	18	9	13	1	2	17	12	3
Даша	12	3	9	17	5	6	18	2	1	4
Руслан	9	1	13	4	7	20	19	1	19	16
Валя	8	6	17	8	11	4	3	4	13	16
Юля	17	2	19	13	14	19	11	3	17	1
Галя	12	1	7	1	2	5	6	4	1	13

Ответ. Составы команд: Аня - Коля, Зоя - Ваня, Маша - Миша, Виталий - Вася, Люба - Рома, Даша - Инна, Руслан - Витя, Валя - Майя, Юля - Гена, Галя - Петя.

4. Модели теории игр

4.1 Введение.

В практической деятельности часто приходится рассматривать ситуации, в которых участвуют две или более сторон, имеющих различные интересы. Подобные ситуации принято называть конфликтными.

Для того, чтобы анализ конфликтной ситуации оказался возможным, необходимо оставить существенные и исключить второстепенные факторы, что при благоприятных обстоятельствах позволяет построить модель конфликта, называемую игрой. Такие различного вида модели изучаются при помощи математического аппарата теории игр.

Стороны конфликта называются игроками (их два или более). В условиях конфликта каждый игрок выбирает план действий, который называется стратегией. Заинтересованность игрока описывается величиной его выигрыша.

4.2 Матричные игры.

Одним из самых простых и наиболее изученных классов игр являются матричные игры.

- ❖ В игре участвуют два игрока, A и B.
- ❖ Игрок A имеет возможные стратегии $A_1,\ldots A_m$, игрок B – стратегии $B_1,\ldots,B_n$.
- ❖ Выбор стратегий игроками однозначно определяет исход игры.
- ❖ В ситуации, когда игрок A выбрал стратегию A_k, а игрок B – стратегию B_l, выигрыш A равен числу C_{kl}, выигрыш B равен этому же числу с противоположным знаком («антагонистическая игра», «игра с нулевой суммой»).

Таким образом, матричная игра полностью описывается заданием «платёжной матрицы»:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{32} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Пример. Два игрока, A и B показывают одновременно друг другу от одного до трёх пальцев. Если суммарное количество пальцев чётно, то выигрывает первый, он получает столько очков, сколько суммарно показано пальцев; если сумма нечётна, то выигрывает второй на тех же условиях. Выписать платёжную матрицу.

Ответ. $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$

Рассмотрим эту игру подробнее.

	B_1	B_2	B_3	Минимумы строк
A_1	2	–3	4	–3*
A_2	–3	4	–5	–3*
A_3	4	-5	6	–5
Максимумы столбцов	4*	4*	6	

Максимальное число из минимумов строк – *верхняя цена игры* (помечена звёздочкой). Минимальное из максимумов столбцов – *нижняя цена игры*. Эти два числа не равны, что означает *отсутствие седловой точки*.

Пример. Пусть теперь платёжная матрица такова:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

	B_1	B_2	Минимумы строк
A_1	1	-5	-5
A_2	2	4	2*
A_3	-1	1	-1
Максимумы столбцов	2*	4	

Здесь верхняя цена игры совпадает с нижней, в такой игре есть устойчивая оптимальная для обоих игроков стратегия (*седловая точка*)

Точки пересечения соответствующих строк и столбцов называются седловыми точками, или точками равновесия по Нэшу.

Игроку А имеет смысл применять стратегию A_2, игроку В – стратегию B_1. Если любой откажется от указанной стратегии, то его выигрыш может только уменьшиться. То есть обоим невыгодно отклоняться от седловой точки.

4.3 Смешанные стратегии в матричных играх.

Что делать, если верхняя и нижняя цены игры не совпадают, то есть нет седловой точки? В этом случае можно искать решение игры в смешанных стратегиях.

Смешанной стратегией игрока А называется выбор им своих стратегий $A_1,..,A_m$ случайным образом с некоторыми заданными вероятностями $p_1,\dots,p_m$.
Аналогично определяется смешанная стратегия игрока В – выбор с вероятностями $q_1,\dots,q_n$.

Оказывается, что

Всякая матричная игра имеет решение (положение равновесия) в смешанных стратегиях. Его можно найти, решив вспомогательную задачу линейного программирования.

Пример. Рассмотрим следующую матричную игру:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 50 & 50 \\ 1 & 1 & 0{,}1 \\ 10 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Здесь $\alpha=5 < \beta = 10 \rightarrow$ нет положения равновесия и решения в чистых стратегиях. Будем искать решение в смешанных стратегиях.

Соответствующие задачи линейного программирования имеют вид:

$$\begin{cases} f(x) = v & \rightarrow & \max \\ v - 5p_1 - p_2 - 10p_3 & \le & 0 \\ v - 50p_1 - p_2 - p_3 & \le & 0 \\ v - 50p_1 - 0{,}1p_2 - 10p_3 & \le & 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 & = & 1 \\ p_1, p_2, p_3 & \ge & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x) = v & \rightarrow & \min \\ v - 5q_1 - 50q_2 - 50q_3 & \ge & 0 \\ v - q_1 - q_2 - 0{,}1q_3 & \ge & 0 \\ v - 10q_1 - q_2 - 10q_3 & \ge & 0 \\ q_1 + q_2 + q_3 & = & 1 \\ q_1, q_2, q_3 & \ge & 0 \end{cases}$$

Решив их любым способом, получаем: $p_1=1/6$, $p_2=0$, $p_3=5/6$, $q_1=49/54$, $q_2=5/54$, $q_3=0$.
Цена игры в смешанных стратегиях для А: $v = -0{,}91$ (игра невыгодна)

Типовая задача.

Фирма "Фармацевт" - производитель медикаментов в регионе. Известно, что пик спроса на некоторые лекарственные препараты приходится на летний период (препараты сердечно-сосудистой группы), на другие - на осенний и весенний периоды (антиинфекционные).

Затраты на 1 у.е. продукции за сентябрь-октябрь составили: по первой группе (препараты сердечно-сосудистые) - 20 р.; по второй группе (антиинфекционные) - 15 р.

По данным наблюдений за несколько последних лет службой маркетинга фирмы установлено, что она может реализовать в течение рассматриваемых двух месяцев в условиях теплой погоды 3050 у.е. продукции первой группы и 1100 у.е. продукции второй группы; в условиях холодной погоды - 1525 у.е. продукции первой группы и 3690 у.е. второй группы.

В связи с возможными изменениями погоды ставится задача - определить стратегию фирмы в выпуске продукции, обеспечивающую максимальный доход от реализации при цене продажи 40 р. за 1 у.е. продукции первой группы и 30 р. - второй группы.

Решение.

Фирма располагает двумя стратегиями:

А1 -будет теплая погода;

А2 - погода будет холодная.

Если фирма примет стратегию А1 и в действительности будет теплая погода (стратегия природы В1), то выпущенная продукция будет полностью реализована и доход составит

$3050\cdot(40-20)+1100\cdot(30-15)=77500$ р.

Если фирма примет стратегию А1, а погода будет прохладной (стратегия природы В2), то часть препаратов первой группы останется не реализованной , а доход составит

$1525\cdot(40-20)+1100\cdot(30-15)-20\cdot(3050-1525)=16500$ р.

Аналогично, если фирма примет стратегию А2, а природа стратегию В1, доход составит

$3050\cdot(40-20)+1100\cdot(30-15)-15\cdot(3690-1100)=8150$ р.

Если фирма примет стратегию А2, а природа В2, то доход составит

$1525\cdot(40-20)+3690\cdot(30-15)=85850$ р.

Рассматривая фирму и природу в качестве двух игроков, получаем платежную матрицу

$$\begin{pmatrix} 77500 & 16500 \\ 8150 & 85850 \end{pmatrix},$$

$\alpha=\max(16500;8150)=16500$ р.,

$\beta=\min(77500;85850)=77500$ р.

Таким образом цена игры будет лежать в диапазоне $16500\le\nu\le 77500$.

Найдем решение игры.

Пусть p_1 - вероятность применения фирмой стратегии А1, p_2 - вероятность применения стратегии А2. Составим задачу линейного программирования, соответствующую данной игре:

$$\begin{cases} f(x)=v & \to & \max \\ v-77500p_1-8150p_2 & \le & 0, \\ v-16500p_1-85850p_2 & \le & 0, \\ p_1+p_2+p_3 & = & 1, \\ p_1,p_2,p_3 & \ge & 0; \end{cases}$$

Решив полученную задачу, например, с помощью MS-Excel, получим $p_1=0{,}56$, $p_2=0{,}44$, при этом цена игры 46986 р.

Оптимальный план производства лекарственных препаратов составит

$0{,}56\cdot(3050;1100)+0{,}44\cdot(1525;3690)=(2379;2240)$.

Ответ. Фирме целесообразно производить в течение сентября и октября 2379 у.е. препаратов первой группы и 2240 у.е. препаратов второй группы, тогда при любой погоде она получит доход не менее 46986 руб.

Задача.

Найти оптимальные стратегии и цену игры.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 1 & 5 & 8 \\ 4 & 9 & 3 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 7 & 20 \end{pmatrix}$$

Ответ.

$p_{opt} = (0;6/7;1/7)$; $q_{opt} = (0;0;5/7;0;2/7;0)$; $\nu = 19/7$.

Задача.

Торговая фирма разработала несколько вариантов плана продажи товаров на предстоящей ярмарке с учетом меняющейся конъюнктуры рынка и спроса покупателей. Получающиеся от их возможных сочетаний показатели дохода представлены в таблице

План продажи	Величина дохода, у.е.		
	К1	К2	К3
П1	8	4	2
П2	2	8	4
П3	1	2	8

Определить оптимальный план продажи товаров.

Ответ. Фирма должна придерживаться стратегии (20/45;11/45;14/45), при этом она получит доход не менее 196/45 у.е.

Задача. Фирма производит пользующиеся спросом детские платья и костюмы, реализация которых зависит от состояния погоды. Затраты фирмы в течение августа-сентября на единицу продукции составили: платья - 7 у.е., костюмы - 28 у.е. Цена реализации составляет 15 и 50 у.е. соответственно. По данным наблюдений за несколько предыдущих лет, фирма может реализовать в условиях теплой погоды 1950 платьев и 610 костюмов, а при прохладной погоде - 630 платьев и 1050 костюмов.
В связи с возможными изменениями погоды определить стратегию фирмы в выпуске продукции, обеспечивающую ей максимальную прибыль от реализации продукции.

Ответ. 1330 платьев, 817 костюмов, прибыль составит 18266 у.е.