федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

**«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»**

**Кафедра «Математика»**

**В. И. Новосельцева**

# ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

## Учебное пособие

**МОСКВА - 2012**

УДК – 512.64

Н -76

Новосельцева В.И. Линейная алгебра. Учебное пособие. - М.: МИИТ, 2012 – 140 с.

Предназначено для направления 080100.62 «Экономика», в учебных планах которого предусмотрена дисциплина «Линейная алгебра». Учебное пособие содержит изложение теоретических вопросов по линейной алгебре, решение примеров и варианты индивидуальных заданий.

Рецензенты: к. ф.м. н. доцент МИИТ О.А.Платонова;

д.ф.-м.н. профессор МГУ

им.М.В. Ломоносова А.Л. Шмелькин.

## ВВЕДЕНИЕ

Линейная алгебра занимает важное место в математическом образовании будущих экономистов. Изучение экономических объектов часто сводится к математическим моделям, которые представляют собой различного вида системы линейных уравнений, исследование которых требует знания матричной алгебры, понятия определителей квадратных матриц, линейных векторных пространств и квадратичных форм.

На простом примере рассмотрим необходимость введения понятий матрицы и ее определителя.

Пусть требуется найти решение системы двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \qquad (1)$$

Решением этой системы являются пара чисел $x_1$ и $x_2$, обращающих оба уравнения в тождества.

Здесь используются известные коэффициенты с двумя индексами $a_{ij}$, $i$ – номер уравнения, $j$ – номер неизвестной.

Для решения системы умножим первое уравнение на $a_{22}$, второе на $(-a_{12})$ и сложим их.

Получим:

$x_1\,(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=b_1a_{22}-b_2a_{12}$.

Отсюда при условии, что $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$, будем иметь:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_1a_{22}-a_{12}a_{21}} \qquad (2)$$

Аналогично, умножая первое уравнение на $(-a_{21})$, второе на $a_{11}$ и складывая, получим:

$x_2\,(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=a_{11}b_2-a_{21}b_1$.

и $$x_2 = \frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \qquad (3)$$

Очевидным образом напрашивается рассмотреть таблицу:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Такие таблицы чисел называются матрицами. В первой строке находятся коэффициенты при неизвестных в первом уравнении, а во второй строке коэффициенты из второго уравнения.

Один и тот же знаменатель дробей (2), (3) легко получить из матрицы: из произведения элементов стоящих на диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний (эту диагональ называют главной) вычитается произведение элементов, стоящих по второй (побочной) диагонали. Число $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, полученное из квадратной матрицы системы уравнений называют определителем матрицы А и обозначают:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

числители в выражениях (2), (3) тоже могут быть представлены и вычислены по правилу определителя второго порядка:

$$\begin{vmatrix} b1 & a12 \\ b2 & a22 \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12} = \Delta x_1,$$

$$\begin{vmatrix} a11 & b1 \\ a21 & b2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = \Delta x_2.$$

Решение системы, таким образом, имеет вид:

$$x_1 = \Delta x_1/\Delta,\ \ x_2 = \Delta x_2/\Delta,\ \Delta \neq 0.$$

Этот способ решения системы уравнений с помощью определителей называется правилом Крамера. Г. Крамер (1704-1752) – швейцарский математик.
Перейдем теперь к изложению общей теории матриц и определителей и других вопросов линейной алгебры.

# 1. Матрицы и определители

## 1.1 Определение и виды матриц

Матрицей размера $m \cdot n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая $m$ строк и $n$ столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются элементами матрицы и обозначаются строчными буквами с двойной индексацией: $a_{ij}$, $i$ – номер строки, $j$ – номер столбца.

В общем виде матрица обозначается:

$$A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или кратко $A = (a_{ij})_{mn}$; где $i=1,2,3,\dots,m;\ j=1,2,3,\dots,n$.

Виды матриц:

1. Матрица называется квадратной n-го порядка, если число строк равно числу столбцов и равно n.

Например,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ - квадратная матрица 3-го порядка.

2. Матрица, состоящая из одной строки, называется матрицей-строкой (или вектором). Если матрица состоит из одного столбца, то называется матрицей-столбцом (вектором)

Например, $A = (5, -3\ \ 4\ \ 2)$ – матрица-строка;

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ - матрица-столбец.}$$

3. Матрица вида:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$ - называется диагональной третьего порядка,

то есть это квадратная матрица любого порядка, в которой все недиагональные элементы равны нулю.

4. Диагональная матрица называется единичной, если все диагональные элементы равны единице:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ - единичная матрица третьего порядка.

5. Нулевая матрица – матрица любых размеров, все элементы которой равны нулю.

Например,

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 1.2 Операции над матрицами

### 1. Умножение матрицы на число

Произведение матрицы $A=(a_{ij})_{mn}$ на число $\lambda$ называется матрица $B=(b_{ij})_{mn}=(\lambda a_{ij})_{mn}$, то есть все элементы матрицы $A$ умножаются на число $\lambda$.

Пример. Для матрицы:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ и числа $\lambda=2$ матрица $B=2A=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Очевидно, что из правила умножения матрицы на число следует возможность вынести за знак матрицы общий множитель всех элементов матрицы.
Пример.

$$\begin{pmatrix} 30 & -20 \\ 40 & 50 \end{pmatrix} = 10\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

**2. Сложение матриц**

Если матрицы $A=(a_{ij})_{mn}$ и $B=(b_{ij})_{mn}$, то их суммой является матрица:
$C=A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{mn}$, то есть складываются элементы, стоящие на одинаковых местах.

Пример. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Сумма $C=A+B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 7 & -2 & 10 \end{pmatrix}$.

Заметим, что по этому же правилу можно произвести вычитание матриц одинакового размера. Для данных матриц в примере разность равна:

$$D=A\text{-}B=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

**3. Умножение матриц**

Операция умножения возможна только для таких матриц $A$ и $B$, у которых число столбцов матрицы $A$ равно числу строк матрицы $B$.

$$C_{mn}=A_{mk}\cdot B_{kn};\ C_{mn}=(c_{ij})_{mn}$$

Каждый элемент $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+ a_{i2}b_{2j}+ \ldots + a_{ik}b_{kj}$ ; $i=1,2,\ldots m;$ $j=1,2,\ldots,n.$
Это означает, что для того, чтобы получить элемент $c_{ij}$, нужно каждый элемент $i$-й строки матрицы $A$ умножить на

соответствующий элемент $j$-го столбца матрицы $B$ и сложить все полученные произведения.
Пример. Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Требуется вычислить произведение $A \cdot B = C$.
Решение. Произведение $A \cdot B$ возможно, так как число столбцов $A$ равно числу строк $B$.

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + (-1)\cdot 1 & 2\cdot 1 - 1\cdot 4 & 2\cdot 3 + (-1)\cdot(-2) \\ 3\cdot 2 + 4\cdot 1 & 3\cdot 1 + 4\cdot 4 & 3\cdot 3 + (-2)\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 10 & 19 & 1 \end{pmatrix}$$

Замечание 1.
Для данных матриц произведения $B \cdot A$ не существует, так как число столбцов первого сомножителя $B$ равно $3$, а число строк второго сомножителя $A$ равно $2$.

Замечание 2.
В общем случае переместительный закон умножения не выполняется:

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Пример. Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Требуется вычислить произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$.
Решение.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Получились различные матрицы, то есть $AB \neq BA$.
Замечание 3.
Переместительным свойством обладает произведение любой квадратной матрицы $A$ $n$-го порядка на единичную матрицу $E$ того же порядка:

$$AE=EA=A$$

Пример. Пусть

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AE=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}=A$$

$$EA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}=A$$

Замечание 4.
Произведение двух ненулевых матриц может равняться нулевой матрице.
Пример. Пусть

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$ - ненулевые матрицы.

Вычислим произведение:

$$AB=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=N$$- нулевая матрица.

Другими словами, если $A \cdot B=N$, то это не означает, что $A=0$ или $B=0$ (нулевые матрицы).

4. Возведение в степень.

Если $A$ квадратная матрица и целое число $m>0$, то возможна операция возведения в степень по правилу:

$$A^m=A\cdot A\cdots A$$ – где $m$ множителей, равных $A$.

Например, для

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}, A^2=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}.$$

5. Транспонирование матрицы – это перемещение элементов матрицы таким образом, что строки становятся столбцами, а столбцы – строками. При этом элементы первой строки становятся элементами первого столбца, вторая строка становится вторым столбцом и т. д.

Пример. Дана матрица:

$$A_{2\times 3}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & -5\end{pmatrix}$$

Относительно $A$ транспонированной матрицей будет:

$$A^T{}_{3\times 2}=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 4\\ 0 & -5\end{pmatrix}.$$

Свойства операции транспонирования:

1) $(A^T)^T=A;$ 2) $(\lambda A)^T=\lambda A^T;$

3) $(A+B)^T=A^T+B^T;$ 4) $(AB)^T=B^T\cdot A^T$.

6. Общие свойства алгебры матриц.

1) $A+B=B+A;$

2) $A+B+C=(A+B)+C=A+(B+C);$

3) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B;$ 4) $A(B+C)=AB+AC;$

5) $(A+B)C=AC+BC;$ 6) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B);$

7) $A(BC)=A\cdot(BC);$ 8) $AB\neq BA$ в общем случае.

## РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Составьте матрицу размерности 4х2 и 4х4. Выпишите диагональные элементы квадратной матрицы и элемент $x_{32}$ в матрицах.

Решение: Обозначим через А- матрицу размерности 4х2.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ -3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Обозначим через В матрицу размерности 4х4. Пусть

$B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 & 5 \\ 6 & 6 & -7 & 7 \\ 8 & -8 & -9 & -9 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

$B$ – квадратная матрица

элементы диагонали: $a_{11} = 3, \quad a_{22} = 6, \quad a_{33} = -9, \quad a_{44} = 0.$

Элемент $a_{32} = 4$, элемент $b_{32} = -8$,

2. Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

а) укажите матрицы, для которых возможно произвести сложение и вычислите сумму матриц.

б) укажите матрицы, для которых возможно произвести умножение и вычислить произведение.

Решение:

б) $AB$, $BA$, $AD$, $BD$ – возможные произведения, составленные из предложенных матриц. Вычислим

$AB=$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1+(-1)\cdot 0 & 2\cdot 2+(-1)\cdot 1 \\ 3\cdot 1+(-2)\cdot 0 & 3\cdot 2+(-2)\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$BA=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+2\cdot 3 & 1\cdot(-1)+2\cdot(-2) \\ 0\cdot 2+1\cdot 3 & 0\cdot(-1)+1\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$AD=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$BD=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 11 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$DC=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

а) Складывать можно матрицы $A$ и $B$. Вычислим сумму:

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & -1+2 \\ 3+0 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Найти матрицу $X$, для которой $3A-4X=2\left(BC\right)^T$, если

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение: вычислим

$$BC=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 5 \\ -1 & -1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем полученную матрицу:

$$(BC)^T=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 5 \\ -1 & -1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 & 7 \\ 3 & 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

и вычислим

$$2(BC)^T=2\begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 & 7 \\ 3 & 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 12 & -2 & 14 \\ 6 & 10 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Из уравнения следует, что

$$4X=3A-2(BC)^T=3\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 10 & 12 & -2 & 14 \\ 6 & 10 & -2 & -4 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -9 & 0 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & -6 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 10 & 12 & -2 & 14 \\ 6 & 10 & -2 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -19 & -12 & 5 & -11 \\ 0 & -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Откуда $X=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} -19 & -12 & 5 & -11 \\ 0 & -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$

## Упражнения для самостоятельного решения

1. Указать размерность матриц, написать значение элементов матриц: $a_{21,} b_{13}, c_{32}$.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\\ 4 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}5 & 2 & -3 & -3\\ -7 & -2 & 4 & 2\\ -1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & -2 & -3 & 4\end{pmatrix}.$$

2. Из предложенных матриц выбрать те, которые можно сложить и провести суммирование. Выбрать матрицы, которые можно перемножить и произвести умножение. Вычислить матрицу *2A-B:*

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 4 & -5\\ 6 & 4 & 5\\ 11 & 3 & 6\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}.$

2) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$

3) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2\\ 6\\ 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1 & 6 & 1\end{pmatrix}.$

3. Для данных матриц А, В и С проверить выполнение свойств:

1) $(A+B)^T=A^T+B^T$.

2) $(AB)C=A(BC)$ *,если* $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -3 & 2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}.$

4. Для заданных матриц А, В и С проверить выполнение свойств:

1) $(A+B)+C=A+(B+C)$,

2) $(AB)^T=B^TA^T$, *если* $A=\begin{pmatrix}0&3\\4&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1\\3&-1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3&2\\0&4\end{pmatrix}$.

5. Для заданных матриц A, B и C проверить выполнение свойств:

1) $A(B+C)=AB+AC$, 2) $(A+B)^T=A^T+B^T$,

*если* $A=\begin{pmatrix}3&0\\-1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-4\\0&3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&-1\\2&5\end{pmatrix}$.

6. Произвести указанные действия: $3(AB)^T-C$, если

$$A=\begin{pmatrix}-1&2&-1&-1\\3&1&1&2\\0&1&2&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&2\\0&-1\\-1&2\\-1&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-3&6&1\\7&-9&2\end{pmatrix}.$$

7. Найти матрицу Д$=(-1)\cdot C^T+(AB)$,

если $A=\begin{pmatrix}-1&2\\1&0\\1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6&-3&1&0\\7&2&9&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}7&6&13&-13\\7&-2&1&1\\17&1&-8&-10\\2&0&1&-1\end{pmatrix}$.

8. Вычислить (СА)·(ВС),

если $C=\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0&1&3\\2&0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

### 1.3. Определитель квадратной матрицы

Каждой квадратной матрице можно поставить в соответствие число, вычисляемое по определенному правилу. Если матрица $A=(a_{ij})_{nn}, n=2,$ то ее определителем называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (1.2.1.)$$

Например, для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ определитель

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 + 3\cdot 2 = 10.$$

Рассмотрим квадратную матрицу третьего порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определителем матрицы третьего порядка называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

*Пример*. Вычислить определитель третьего порядка:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

*Решение*.

$$\Delta_3 = 2\cdot 1\cdot 4 + (-1)\cdot 2(-2) + 1\cdot 3\cdot 3 - (-2)1\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot 3 - (-1)\cdot 1\cdot 4 = 19.$$

Чтобы получить правило для вычисления определителя любого порядка, введем понятие минора

$M_{ij}$ и алгебраического дополнения элемента $a_{ij}$ квадратной матрицы $A=(a_{ij})_{nn}$.

Минором $M_{ij}$ элемента $a_{ij}$ матрицы n-го порядка называется определитель (n-1)-го порядка, полученный из матрицы A вычеркиванием i-й строки и $j$-го столбца.

Алгебраическим дополнением $A_{ij}$ элемента $a_{ij}$ матрицы n-го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, то есть $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

*Пример*. Дана матрица третьего порядка:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти миноры $M_{11}$, $M_{12}$ и алгебраические дополнения $A_{11}$, $A_{12}$.

*Решение*. Вычеркивая первую строку и первый столбец, получим минор $M_{11}=\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=12-5=7.$ Вычеркивая первую строку и второй столбец, найдем минор $M_{12}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=11.$ Тогда

$A_{11}=(-1)^2M_{11}=7,\quad A_{12}=(-1)^3M_{12}=-11.$

*Ответ*. $M_{11}=7,\quad A_{11}=7,\quad M_{12}=11,\quad A_{12}=-11.$

За правило вычисления определителя n-го порядка примем утверждение следующей теоремы.

*Теорема Лапласа*. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \ ,$$

где $i$=1,2,…,n.

Эта формула называется разложением определителя по элементам i-й строки. Аналогично имеет место разложение по элементам j-го столбца:

$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$, *где j=1,2,…,n.*

Убедимся в справедливости теоремы на примере определителя третьего порядка, разложив его по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}(-1)^2 M_{11} +$$

$$a_{12}(-1)^3 M_{12} + a_{13}(-1)^4 M_{13} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) +$$

$$a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} -$$

$$- a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Полученный ответ совпадает с определением $\Delta_3$.

*Пример 1.* Вычислить определитель квадратной матрицы третьего порядка:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & -2 & 5\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}.$$

*Решение*. Разложим определитель по элементам первой строки $\Delta_3 = 2A_{11} + 0A_{12} - 1A_{13} = 2\begin{vmatrix}-2 & 5\\ 3 & 4\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & 3\end{vmatrix} = -57.$

*Пример 2*. Вычислить определитель матрицы четвертого порядка: $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2 & 5\\ 0 & 2 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 6\end{pmatrix}.$

*Решение*. Раскроем определитель данной матрицы по элементам первого столбца

$$\Delta_4 = 3A_{11} + 0A_{21} + 0A_{31} + 0A_{41} = 3(-1)^2\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 5\end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}1 & 6\\ 0 & 5\end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot 1\cdot 5 = 30.$$

Заметим, что определитель равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали. И вообще, если квадратная матрица имеет под главной диагональю или над ней элементы равные нулю, то ее определитель равен произведению чисел главной диагонали

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

## Свойства определителей

Рассмотрим свойства определителей, которые можно доказать с помощью теоремы Лапласа.

1. При транспонировании матрицы ее определитель не меняется. Из этого свойства следует, что все свойства, сформулированные относительно строк, справедливы и относительно столбцов.
2. Если все элементы какой-либо строки имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя:
$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$
3. При перестановке двух строк матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.
4. Определитель, имеющий нулевую строку, равен нулю.
5. Если определитель имеет две одинаковые строки, то он равен нулю.
6. Если определитель имеет две пропорциональные строки, то он равен нулю.
7. Если все элементы какой-либо строки представляют сумму двух слагаемых, то определитель можно представить как сумму двух определителей: у первого в соответствующей строке стоят первые слагаемые, а у второго – вторые, остальные элементы те же, что и у данного определителя:
$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}+\beta_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha_{21}+\beta_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha_{31}+\beta_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \beta_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \beta_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

**8.** Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки матрицы прибавить элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

**9.** Сумма произведений элементов какой-либо строки матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки этой матрицы равна нулю.

**10**. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей.

$\Delta(AB)=\Delta(A)\Delta(B)$, где $A,B$- матрицы $n$-го порядка. То есть если даже $AB\neq BA$, $\Delta(AB)=\Delta(BA)$.

Приведенные свойства определителей используются при их вычислении.

*Пример 3*. Вычислить определитель матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

*Решение*. Выполним преобразования, которые по свойству *8* не изменят величины определителя: первую строку прибавим ко второй, и, умноженную на *2*, вычтем из последней строки:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix}=-102.$$

Определитель третьего порядка можно вычислить по определению или продолжить применение свойства *8:* третью строку, умноженную на *4,* вычитаем из первой строки, умноженную на *3* вычтем из второй, получим

$$\Delta=\begin{vmatrix}0 & 17 & 17\\ 0 & 14 & 8\\ 1 & -4 & -3\end{vmatrix}=17\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 7 & 4\end{vmatrix}=34\cdot(-3)=-102.$$

**Примеры для самостоятельной работы**

Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix}1 & -1 & -3 & 2\\ 1 & 1 & -2 & 2\\ 2 & -2 & -3 & 4\\ 3 & -3 & -9 & 10\end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix}3 & 6 & 9 & -3\\ -5 & -9 & -15 & 5\\ 1 & 4 & 5 & -1\\ 4 & 9 & 8 & -4\end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix}4 & 9 & -1 & 2\\ -4 & -4 & 0 & -2\\ 8 & 13 & 4 & 6\\ 5 & 10 & 0 & 3\end{vmatrix}.$

4) $\begin{vmatrix}2 & 0 & 1 & -3\\ 7 & -1 & 4 & 2\\ 0 & 3 & 5 & -5\\ 11 & -1 & 6 & -4\end{vmatrix}$

Ответы: 1)24; 2)0; 3)10; 4) 0.

## 1.4 Обратная матрица

Пусть дана квадратная матрица *A*, определитель (детерминант) которой отличен от нуля, то есть $\Delta = det\ A \neq 0$.

Обратной к *A* матрицей называется такая матрица $A^{-1}$, для которой выполняется условие:

$AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где *E* – единичная матрица.

Формула для вычисления обратной матрицы получается следующим образом:

1. Составим матрицу из алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы А:

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

2. Транспонируем матрицу *B* и получаем матрицу $A^*$, которая называется присоединенной к матрице *A:*

$$A^* = B^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

3. Перемножая матрицы А и А*, получим:

$$A^*A = AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \Delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta \end{pmatrix}, \ \Delta = det\ A.$$

Здесь мы воспользовались теоремой Лапласа: сумма произведений любой строки на соответствующие алгебраические дополнения равна величине определителя. И согласно свойству №9 определителей, сумма произведений элементов строки определителя на алгебраические дополнения к другой строке равна нулю.

4. Разделим предыдущее равенство на величину определителя *Δ=det A* и в правой части получим единичную матрицу *E*:

$\dfrac{AA^*}{\det A} = E$, следовательно, обратная матрица к *A* будет: $A^{-1} = \dfrac{A^*}{\det A}$

Для матрицы 3-го порядка обратная матрица:

$$A^{-1} = 1/\Delta \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T$$

*Пример 1.*

Найти матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Определитель данной матрицы $\Delta = 2$. Алгебраические дополнения элементов равны.

$A_{11} = 3$, $A_{12} = -2$, $A_{21} = -5$, $A_{22} = 4$.

Следовательно,

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что для матрицы второго порядка обратная матрица получится, если выполнить следующие действия:

1. вычислить определитель $\Delta \neq 0$;
2. поменять местами элементы главной диагонали;
3. изменить знаки на противоположные у элементов второй диагонали.

То есть, если исходная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \Delta \neq 0,$$

то обратная матрица $A^{-1} = 1/\Delta \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$

Вычисление обратной матрицы через алгебраические дополнения становится громоздким для матриц, порядок которых $n \geq 3$.
Для таких матриц используется прием с применением элементарных преобразований строк матрицы.

Определение: *Элементарными преобразованиями строк (столбцов) матрицы называются следующие преобразования:*
1.умножение $i$–й строки (столбца) на число $K \neq 0$;
2.прибавление к $i$–й строке (столбцу) $j$-й строки (столбца), умноженной на число $K$;
3.перестановка $i$–й и $j$-й строк (столбцов) местами.

Алгоритм построения обратной матрицы с помощью элементарных преобразований строк матрицы:

1. К данной матрице А приписать справа единичную матрицу

$$C_1 = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right).$$

2. Объединенную матрицу $C_1$ с помощью элементарных преобразований привести к виду $C_2$.

$$C_2 = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right).$$

3. Обратная матрица $A^{-1}$ будет иметь вид:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пример: Найти матрицу, обратную к матрице:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: Составим объединенную матрицу. Умножая 2-ю строку на 2, вычтем из 1-й строки; и умножая на 5 вычтем из 3-й строки.

$$C_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

2-ю строку умножая на 5, вычтем из 3-й строки:

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix};$$

В $C_2$: 1-ю строку вычтем из 2-й строки:

$$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix};$$

В $C_3$: 3-ю строку вычтем из 2-й:

$$C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 16 & -1 & 8 & -1 \\ 0 & -3 & -9 & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix};$$

В $C_4$: 2-ю строку, умножим на 3 и прибавим к 3-й:

$$C_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 16 & -1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 39 & -3 & 19 & -2 \end{pmatrix};$$

На этом этапе вычислений нужно обратить внимание на то, что величина определителя исходной матрицы $\Delta(A)=39$. То есть можно осуществить промежуточную проверку правильности вычислений.

В $C_5$: 3-ю строку разделим на 39:

$$C_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 16 & -1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{39} & \frac{19}{39} & -\frac{2}{39} \end{pmatrix};$$

В $C_6$: умножая 3-ю строку на 2, вычтем из 1-й строки, и, умножая 3-ю строку на 16, вычтем из 2-й строки:

$$C_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{6}{39} & \frac{1}{39} & \frac{4}{39} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{39} & \frac{8}{39} & -\frac{7}{39} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{39} & \frac{19}{39} & -\frac{2}{39} \end{pmatrix}.$$

Из $C_7$ следует обратная матрица:

$$A^{-1} = 1/39 \begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 9 & 8 & -7 \\ -3 & 19 & -2 \end{pmatrix}.$$

Проверка правильности вычислений:

$$A^{-1} \cdot A = 1/39 \begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 9 & 8 & -7 \\ -3 & 19 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 1/39 \begin{pmatrix} 39 & 0 & 0 \\ 0 & 39 & 0 \\ 0 & 0 & 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

### 1.5. Решение простейших матричных уравнений

Пусть требуется решить уравнение $AX=B$ , где $A, B, X$ – матрицы. Если $A$ такая, что $det(A)\neq 0$ , то у нее существует $A^{-1}$. Тогда произведем тождественное преобразование уравнения, умножив левую и правую часть на матрицу $A^{-1}$. Каждый раз размещаем множитель $A^{-1}$ слева от сомножителей. Получим $A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$. По определению матрицы $A^{-1} \cdot A = E$, а $E \cdot X = X$. Таким образом, левая часть уравнения преобразуется следующим образом: $(A^{-1} \cdot A) \cdot X = E \cdot X = X = A^{-1} \cdot B$.

Неизвестная матрица найдена: $X = A^{-1}B$.

Пример 1. Найти матрицу $X$,

если $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

если $\begin{matrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{matrix} \cdot X = \begin{matrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{matrix}$ .

Решение: Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Вычислим: $\Delta(A)=8$ и составим

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Умножая заданное матричное уравнение слева на $A^{-1}$ , получим

$$X = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 14 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

.

Проверка:

$$\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 14 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix} 3\cdot 14 - 2\cdot 5 & -32+6 \\ 14+10 & -2-6 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 24 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, ответ:

$$X = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 14 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найти матрицу $X$, если

$$X \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение: Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Вычислим $\Delta(A) = 1$ и составим

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

заданное уравнение умножим справа на $A^{-1}$, получим

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 17 \\ -5 & 19 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$\begin{pmatrix} -5 & 17 \\ -5 & 19 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35+34 & -15+17 \\ -35+38 & -15+19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

.

Следовательно, решено верно:

Ответ:

$$X = \begin{pmatrix} -5 & 17 \\ -5 & 19 \end{pmatrix}$$

## Упражнения для самостоятельного решения

Построить обратную матрицу для следующих матриц:

*1.* $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&1\\-1&-2&0\end{pmatrix}$. Ответ $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-2&-1\\-1&1&0\\2&-1&0\end{pmatrix}$.

*2.* $A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. Ответ $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&2&-4\\0&1&-1\\-2&-3&7\end{pmatrix}$.

*3.* $A=\begin{pmatrix}7&1&1\\-1&1&1\\1&2&-1\end{pmatrix}$. Ответ $A^{-1}=-\frac{1}{24}\begin{pmatrix}-3&3&0\\0&-8&-8\\-3&-13&8\end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix}1&0&3&2\\-2&1&1&-1\\3&-2&0&4\\-1&1&2&1\end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix}1&-2&0&3\\0&1&2&-1\\2&-3&4&0\\1&-1&-2&2\end{pmatrix}$

6. Решить матричное уравнение $AXB=C$, если

$A=\begin{pmatrix}2&-3\\-3&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}$.

Ответ $X=\begin{pmatrix}3&-5\\2&-3\end{pmatrix}$.

7. Решить матричное уравнение $AX=B$, если

$A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&2\\0&1\end{pmatrix}$. Ответ $X=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3&7\\2&-3\end{pmatrix}$.

8. Решить матричное уравнение $XA=B$, если

$A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. Ответ $X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-13 & 8\\ 0 & 3\end{pmatrix}$.

9. Найти матрицу X, если:

$$X\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix},$$

10. Найти матрицу X, если:

$$X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

### 1.6. Ранг матрицы

Пусть задана произвольная матрица

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}..$$

Из элементов матрицы, расположенных на пересечении некоторых $\kappa$ строк и $\kappa$ столбцов, можно образовать определитель $\kappa$-го порядка, который называется минором $\kappa$-го порядка этой матрицы. Например, $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}a_{13} & a_{14}\\ a_{33} & a_{34}\end{vmatrix}$ – миноры второго порядка, $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ – минор третьего порядка. Очевидно, что порядок образуемого минора меньше или равен наименьшему из чисел m, n.

*Пример*. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Написать минор самого большого порядка.

*Решение.* Самый большой порядок минора для данной матрицы к=3. Одним из миноров 3-го порядка является минор $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$, образованный элементами первых трех строк. Вообще же можно написать 4 минора 3-го порядка, последовательно вычеркивая по одной строке.

*Определение.* Если в матрице среди миноров порядка r имеется хотя бы один, отличный от нуля, а все миноры порядка k>r равны нулю, то число r называется рангом матрицы.

Если матрица квадратная и ее детерминант не равен нулю, то ранг матрицы равен ее порядку. Например, пусть A- матрица 3-го порядка: $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. $Det(A)=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0.$ По определению ранг *r=3*.

*Пример*. Определить ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

*Решение*. Очевидно, что в качестве минора 2-ого порядка, отличного от нуля, можно взять минор $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$ Все миноры 3-его порядка равны нулю, так как третья строка пропорциональна первой. Значит $r=2$.

Вычисление ранга матрицы непосредственно по определению является громоздким и поэтому рассмотрим прием, основанный на элементарных преобразованиях матрицы.

Элементарные преобразования матрицы определены в пункте 1.4.

Матрицы, полученные одна из другой при помощи конечного числа элементарных преобразований, называются эквивалентными. Для эквивалентных матриц выполняется теорема, которую приводим без доказательства.

*Теорема*. Эквивалентные матрицы имеют один и тот же ранг.

Построение эквивалентных матриц и применение этой теоремы позволяет использовать для вычисления ранга матрицы следующее правило: с помощью элементарных преобразований привести исходную матрицу к треугольному виду, число ненулевых строк которой будет равно рангу данной матрицы.

*Пример1*. Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

*Решение*. Умножим первую строку на два и вычтем из второй строки, затем умножим первую строку на три и вычтем из третьей строки, получим эквивалентную матрицу , в которой из третьей строки вычтем вторую:

$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Ранг последней матрицы, а, значит и данной, равен 2, так как $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

*Пример2*. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

*Решение*. Первую строку прибавим ко второй строке, умножив на 3 вычтем из третьей строки, умножив на 2, вычтем из четвертой строки. Получим следующую матрицу, эквивалентную данной: $A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. В этой матрице вторую строку умножим на 3 и вычтем из третьей: $A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -14 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Из последней матрицы ясно, что минор третьего порядка $M_3$ = $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -14 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$. Все же миноры четвертого порядка равны 0, поэтому ранг данной матрицы равен 3.

### Упражнения для самостоятельного решения

Найти ранги следующих матриц:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 5\\ -2 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 6\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0 & -2 & 3\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 0 & 8\\ 2 & 4 & 10\end{pmatrix},\quad Д=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Ответы: *r(A)=3, r(B)=3, r(C)=2, r(Д)=4.*

### 2.Решение систем линейных уравнений

Система линейных уравнений – это система вида:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \cdots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \cdots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \cdots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{cases} \qquad (2.1)$$

где $m$ уравнений с $n$ неизвестными $x_i$, $a_{ij}$ – числа – коэффициенты при неизвестных, $b_i$ – числа, называемые свободными членами.

Решением системы уравнений (2.1) называется совокупность таких чисел $x_1 = \alpha_1,\quad x_2 = \alpha_2, \cdots,\quad x_n = \alpha_n$, которые обращают все уравнения системы в тождества.

Если система линейных уравнений имеет хотя бы одно решение, то она называется совместной. В противном случае она называется несовместной.

Совместная система, имеющая единственное решение, называется определенной, а система, имеющая более одного решения, неопределенной. Две системы линейных уравнений называются эквивалентными, если они имеют одни и те же решения. Запишем систему (2.1) в матричной форме. Для этого введем обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тогда система (2.1) , учитывая правила умножения матриц, примет вид: $A \cdot X = B$.

## 2.1 Формулы Крамера

Рассмотрим частный случай системы (2.1) , когда матрица А- квадратная, то есть число уравнений равно числу неизвестных (m=n). Если det(A)≠0, то существует обратная матрица $A^{-1}$и решение системы может быть найдено в матричной форме:

$$X = A^{-1} \cdot B. \qquad (2.1.1)$$

Запишем равенство (2.1.1) в развернутом виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \det A \neq 0,$$

(2.1.2)

Здесь $A_{ij}$ - алгебраические дополнения к элементам матрицы $a_{ij}$. Из (2.1.2) следует:

$$x_1 = \frac{1}{\det A}\cdot(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n) = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Вводя общепринятые обозначения $\Delta$=detA- определитель системы, $\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, записываем кратко формулу для вычисления $x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta}$. Аналогично для любой неизвестной $x_к$ имеем

$$x_k = \frac{1}{\det A}(A_{1k}b_1 + A_{2k}b_2 + \cdots + A_{nk}b_n) = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

где столбец свободных членов стоит вместо *к*-го столбца матрицы системы. Таким образом, формулы Крамера в краткой записи имеют вид:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta} \qquad (2.1.3)$$

Правило решения линейной системы по формулам Крамера состоит в следующем:

1. Вычислим определитель системы $\Delta$, и если $\Delta \neq 0$, то переходим к вычислению определителей $\Delta x_к$.

2. Каждый определитель $\Delta x_k \quad (k = 1,2,...,n)$ образуется путем замены к-ого столбца матрицы системы столбцом правых частей.

3. Применяя формулы (2.1.3.) получим решение.

*Пример*. Найти решение системы $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$

*Решение*.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -15.$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -15.$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 15.$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \tfrac{-15}{-15} = 1, \qquad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \tfrac{15}{-15} = -1, \qquad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \tfrac{0}{-15} = 0.$$

*Замечание*. При увеличении числа уравнений и неизвестных решение системы уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы становятся трудоемкими и не применяются. Более удобным является метод Гаусса, использующий элементарные преобразования в матрицах.

## 2.2 Метод Гаусса

Метод Гаусса - это метод последовательных исключений неизвестных с помощью элементарных преобразований системы, состоящий в следующих операциях:

1. Умножение на число $\lambda \neq 0$ обеих частей какого-либо уравнения.
2. Прибавление к обеим частям какого-либо уравнения соответствующих частей любого другого уравнения, умноженного на одно и то же число.
3. Перестановка уравнений местами.

Такие элементарные преобразования не изменяют решений системы, линейная система переходит в систему, эквивалентную первоначальной системе.

Для простоты рассмотрим сначала систему n уравнений с n неизвестными с невырожденной матрицей системы, т.е. $det(A) \neq 0$, и система имеет единственное решение.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_n x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2.2.1)$$

Пусть для определенности коэффициент $a_{11} \neq 0$. Будем умножать первое уравнение на числа $\lambda_i = -\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$ и прибавлять его почленно к каждому уравнению с номерами $i=2,3,\ldots,n$. Получим эквивалентную систему , в которой $x_1$ будет только в первом уравнении.

В качестве второго уравнения возьмем то, в котором коэффициент при $x_2$ не равен нулю и поступая аналогично, исключим $x_2$ из всех уравнений с номерами $i = 3, 4, \ldots, n$.

Продолжая процесс, после $n$-$1$ шагов получим систему вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \qquad\qquad \alpha_{33}x_3 + \cdots + \alpha_{3n}x_n = \beta_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \alpha_{nn}x_n = \beta_n, \end{cases} \qquad (2.2.2)$$

матрица которой имеет треугольный вид:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (2.2.3)$$

Заметим, что в этой квадратной матрице элементы, стоящие на главной диагонали не равны нулю, $\det(A) = a_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot \cdots \cdot \alpha_{nn} \neq 0$, и ранг матрицы $r=n$.

Из системы (2.2.2) последовательно находятся все неизвестные, начиная с $x_n = \dfrac{\beta_n}{\alpha_{nn}}$.

Алгоритм метода Гаусса удобно применять, выполняя элементарные преобразования над матрицей системы с приписанным справа столбцом правых частей (так называемая расширенная матрица). Расширенная матрица приводится к треугольному виду, а затем легко найти все неизвестные.

*Пример.* Найти решение системы методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -5 \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 = -2 \end{cases}.$$

Составим расширенную матрицу системы:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -5 \\ 4 & 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. В этой матрице первую строку вычтем из второй и, умноженную на 4, вычтем из третьей. Получим эквивалентную матрицу, определяющую эквивалентную систему уравнений:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ - матрица приняла треугольный вид.

Последняя строка матрицы определяет уравнение $-3x_3 = -6 \;\Rightarrow x_3 = 2.$ Вторая строка определяет уравнение $x_2 - 2x_3 = -6.$ Подставляя в него $x_3 = 2,$ найдем $x_2 = -6 + 4 = -2.$ Первая строка матрицы означает первое уравнение $x_1 + x_2 + x_3 = 1.$ Подставляя в него $x_3 = 2, \quad x_2 = -2,$ найдем $x_1 = 1 - 2 + 2 = 1.$ Таким образом, решение системы $x_1 = 1, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 2.$

*Пример.* Найти решение методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу и будем приводить ее к треугольному виду.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Первую строку, умноженную на 3, вычтем из второй строки, умноженную на 2 из третьей строки, первую строку вычтем из последней строки. Получим матрицу $C_1$~$C$.

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

В матрице $C_1$ вторую строку умножим на –1 и переставим местами вторую и третью строки. Матрица $C_2$~$C$..

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 4 & 7 & 11 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

В матрице $C_2$ вторую строку, умноженную на 4, вычтем из третьей строки, вторую строку вычтем из четвертой $C_3$~$C$.

$$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 27 & 39 & 39 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$ В матрице $C_3$ третью строку разделим на 3, четвертую строку на 6 и переставим местами. Матрица $C_4 \sim C$.

$$C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 9 & 13 & 13 \end{pmatrix}.$$ В матрице $C_4$ третью строку умножим на 9 и вычтем из четвертой строки. Матрица $C_5 \sim C$.

$$C_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{17}{2} & \frac{17}{2} \end{pmatrix}.$$ В матрице $C_5$ последнюю строку разделим на $\frac{17}{2}$. Матрица $C_6 \sim C$.

$$C_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$ Матрица $C_6$ определяет систему уравнений, эквивалентную исходной системе:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 - 5x_3 - 7x_4 = -8 \\ x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{1}{2} \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

В этой системе $x_4=1$, подставим его в третье уравнение. $x_3+\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_3=0$. Далее $x_3=0, \quad x_4=1$ подставим во второе уравнение: $x_2-7=-8 \Rightarrow x_2=-1$. Подставим в первое уравнение $x_2=-1, \quad x_3=0, \quad x_4=1$:
$x_1-1+3=1 \Rightarrow \quad x_1=-1$.
Получили решение $x_1=-1, \quad x_2=-1, \quad x_3=0, \quad x_4=1$.
Для проверки правильности решения подставим его в исходную систему и убедимся, что оно найдено верно.

## 2.3.Исследование произвольных линейных систем уравнений

В предыдущем параграфе мы рассмотрели системы, в которых число неизвестных равно числу уравнений, $\det(A)\neq 0$ ,и системы имели единственное решение. Пусть теперь система имеет произвольный вид (2.1), где $m\neq n$. Главный вопрос для этой системы – вопрос о ее совместности, то есть о существовании хотя бы одного решения. По этому поводу имеется теорема Кронекера-Капелли.
<u>*Теорема.*</u> Для того, чтобы система линейных уравнений (2.1) была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранги матрицы системы и ее расширенной матрицы были равны.
*Необходимость*. Пусть система совместная, то есть существует решение:

$$\begin{cases} x_1=\alpha_1, \quad x_2=\alpha_2,\dots \quad ,x_n=\alpha_n. \\ a_{11}\alpha_1+ \quad a_{12}\alpha_2+ \quad \cdots+ \quad a_{1n}\alpha_n \quad = \quad b_1 \\ a_{21}\alpha_1+ \quad a_{22}\alpha_2+ \quad \cdots+ \quad a_{2n}\alpha_n \quad = \quad b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad = \quad \cdots \\ a_{m1}\alpha_1+ \quad a_{m2}\alpha_2+ \quad \cdots+ \quad a_{mn}\alpha_n \quad = \quad b_m \end{cases}$$

Расширенная матрица системы:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

В матрице $C$ из последнего столбца вычтем первый, умноженный на $\alpha_1$, второй, умноженный на $\alpha_2, ..., n-й$ столбец, умноженный на $\alpha_n$.

Получим матрицу $C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & 0 \end{pmatrix}.$

Элементарные преобразования не изменяют ранг матрицы и если ранг исходной матрицы *r(C)=r*, то ранг *r* $(C_1)$ тоже равен *r*.

*Достаточность*. Пусть ранг системы *r (A)* равен рангу расширенной матрицы *r(C)*, *r(A)=r(C)=r*. По определению ранга матрицы существует минор порядка r, отличный от нуля.

Пусть для определенности минор имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Систему уравнений (2.1) перепишем в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r & = & b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r & = & b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{2n}x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r & = & b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

(2.3.1)

Остальные уравнения системы (2.1) являются линейными комбинациями этих первых уравнений. Неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ могут принимать различные значения, их называют свободными. При каждом фиксированном значении свободных неизвестных можно вычислить соответствующие неизвестные $x_1, x_2, ..., x_r$, которые называются базисными или основными. Тем самым система имеет бесчисленное множество решений и, следовательно, совместна. Если решая (2.3.1), выразить все основные неизвестные через свободные, то получим общее решение. На практике исследование системы на совместность проводится с помощью метода Гаусса.

*Пример*. Исследовать на совместность систему, написать общее решение.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 - x_4 & = & 2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 & = & 5 \end{cases}.$$

*Решение.*

Составим расширенную матрицу системы:

$C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Первую строку, умноженную на 2, вычтем из второй, умноженную на 3 вычтем из третьей.

$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -11 & -9 & 4 & -1 \\ 0 & -11 & -9 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. В матрице $C_1$ вторую строку вычтем из третьей, получим:

$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -11 & -9 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Из матрицы $C_2$ следует, что ранг матрицы системы и расширенной матрицы одинаков и равен 2 , так как минор $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -11 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$, а все миноры третьего порядка равны нулю. Матрица $C_2$ определяет систему

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 2 - 4x_3 + x_4 \\ -11x_2 = -1 + 9x_3 - 4x_4 \\ \end{cases}$$

$x_2 = \frac{1}{11} - \frac{9}{11}x_3 + \frac{4}{11}x_4$, $x_1 = 2 - 4x_3 - 5x_2 = 2 - 4x_3 + x_4 - \frac{5}{11} + \frac{45}{11}x_3 - \frac{20}{11}x_4 = \frac{17}{11} + \frac{1}{11}x_3 - \frac{9}{11}x_4$.

Таким образом, имеем множество решений данной системы:

$\begin{cases} x_1 = \frac{17}{11} + \frac{1}{11}x_3 - \frac{9}{11}x_4 \\ x_2 = \frac{1}{11} - \frac{9}{11}x_3 + \frac{4}{11}x_4 \end{cases}$-общее решение. Система совместна. Здесь $x_3$, $x_4$ свободные, им можно придавать различные значения и в зависимости от этого получать значения базисных неизвестных $x_1$, $x_2$.

*Пример*. Исследовать систему на совместность

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= \quad 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= \quad 6 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 &= -4 \\ 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= \quad 5 \end{cases}.$$

*Решение.*

Расширенная матрица системы имеет следующий вид:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -4 & 1 & -2 & -4 \\ 4 & -5 & 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

.Переставим третью строку на место первой строки.

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & -5 & 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

.Первую строку, умноженную на 3, вычтем из второй строки; умноженную на 2, вычтем из третьей; умноженную на 4, вычтем из четвертой строки..

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 11 & -1 & 5 & 14 \\ 0 & 11 & -1 & 5 & 14 \\ 0 & 11 & -1 & 5 & 21 \end{pmatrix}.$$

Вторую строку вычтем из третьей и четвертой строк и затем переставим местами третью и четвертую строки.

$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 11 & -1 & 5 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Из матрицы $C_3$ следует, что ранг матрицы системы (без учета столбца свободных членов) равен 2, а ранг расширенной матрицы равен 3 . Поэтому система несовместна.

**Упражнения для самостоятельного решения.**

1. Решить системы по формулам Крамера:

$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 &= -2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \end{cases}$. Ответ: $x_1$=0, $x_2$=1, $x_3$=1.

$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_3 &= 5 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \end{cases}$. Ответ: $x_1$=3, $x_2$=1, $x_3$=1.

$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= -5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= -4 \end{cases}$. Ответ: $x_1$=-1, $x_2$=2, $x_3$=0.

2. Решить систему методом Гаусса:

$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 &= 4 \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 9 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 &= 1 \end{cases}$. Ответ: $x_1$=1, $x_2$=1, $x_3$=2, $x_4$=1.

3. Исследовать на совместность, найти общее решение:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 2. \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 4 \end{cases}$$ Ответ: Система несовместна.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 &= 3 \\ 5x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 4x_4 + 15x_5 &= 9. \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 7x_5 &= 5 \end{cases}$$

Ответ: $x_1=1+x_5$, $x_2=1+x_3+x_4-2x_5$.

## 3. Векторные пространства
### 3.1. Линейные векторные пространства

*Определение 1.* Упорядоченная совокупность из $n$ действительных чисел называется $n$- мерным вектором и обозначается в виде строки $X = (x_1, \ x_2, \ \cdots \ x_n)$ или в виде столбца $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Числа $x_1, \ x_2, \ \cdots, \ x_n$ называются компонентами вектора.

*Определение 2.* Два $n$-мерных вектора $X = (x_1, \ x_2, \ \cdots; \ x_n)$ и $Y = (y_1, \ y_2, \ \cdots, \ y_n)$ называются равными, если у них соответствующие компоненты равны: $x_1 = y_1, \ x_2 = y_2, \ \cdots; \ x_n = y_n$.

*Определение 3.* Нулевым вектором будем называть такой вектор 0, у которого все компоненты равны нулю.

Линейные операции над $n$-мерными векторами – это умножение вектора на действительное число и сложение векторов. При умножении вектора $X$ на число α все компоненты вектора умножаются на это число:

$$\alpha X = (\alpha x_1, \ \alpha x_2, \ ..., \ \ \alpha x_n).$$

При сложении двух векторов складываются соответствующие компоненты:

$$X + Y = (x_1 + y_1, \quad x_2 + y_2, \quad \cdots, \quad x_n + y_n).$$

*Определение 4*. Линейным векторным пространством $R_n$ называется множество всех $n$-мерных векторов, для которых определены операции умножения на число и сложение и при этом выполняется:

для $\forall X \in R_n$ и числа α вектор $\alpha X \in R_n$;

для $\forall X, Y \in R_n$ существует вектор $Z = X + Y \in R_n$.

Кроме того, операции сложения векторов и умножения вектора на число удовлетворяют следующим аксиомам:

1) $X + Y = Y + X$,

2) $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$,

3) $0 \in R_n$,

4) $\exists (-X)$, $X + (-X) = 0$,

5) $1 \cdot X = X$,

6) $\alpha(\beta X) = (\alpha\beta)X$, $\alpha, \beta$ – числа,

7) $(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$,

8) $\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y$.

.

### 3.2. Линейная зависимость и независимость векторов

Пусть имеются $n$-мерные векторы $a_1, a_2, ..., a_k \in R_n$ и числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$. Будем говорить, что вектор $b$ является линейной комбинацией векторов $a_1, a_2, ..., a_k$, если $b = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k$. В результате составления линейной комбинации векторов можно получить нулевой вектор. Существуют такие совокупности векторов, линейные комбинации которых в нулевой вектор не превращаются ни при каких наборах чисел, одновременно не равных нулю. В зависимости от этого вводятся понятия линейной зависимости и линейной независимости векторов.

*Определение.* Векторы $a_1, a_2, ..., a_k \in R_n$ называются линейно зависимыми, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$, не равные нулю одновременно, что выполняется $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k = 0.$ Векторы $a_1, a_2, ..., a_k \in R_n$ называются линейно независимыми, если линейная комбинация $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k \neq 0$ ни при каких числах $\alpha_i$, кроме случая, когда все числа $\alpha_i = 0$ одновременно.

*Пример.* Рассмотрим $R_2$ – пространство двумерных векторов. Геометрически $R_2$ – множество всех векторов на плоскости. Пусть плоскость фиксируется системой координат Х0У, $i, j$ – единичные векторы, направленные по осям координат. Тогда $i = (1,0)$, $j = (0,1)$ – линейно независимые векторы, так как $\alpha_1 i + \alpha_2 j \neq 0$ ни при каких числах $\alpha_1, \alpha_2$ (кроме случая $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ одновременно). Заметим, что матрица А, составленная из компонентов векторов $i, j$, имеет определитель не равный нулю: $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$ Любые два неколлинеарных вектора на плоскости линейно независимы, например, если $a = (2,3)$, $b = (1,4)$, то $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$

Рассмотрим любые два коллинеарных вектора $a_1, b_1$. Как известно из векторной алгебры, существует единственное число α, при котором выполняется $b_1 = \alpha a_1 \quad \Rightarrow \alpha a_1 - b_1 = 0.$ Линейная комбинация обращается в 0. Ясно, что компоненты векторов пропорциональны и если $a_1 = (3{,}5), \quad то \quad b_1 = (3\alpha, 5\alpha) \quad, \alpha \neq 0$ и тогда $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3\alpha & 5\alpha \end{vmatrix} = 0$.

*Пример*. Являются ли векторы $a_1 = (1,-1,2) \quad, a_2 = (2,3,1) \quad, a_3 = (4,1,5)$ линейно зависимыми?

*Решение*. Составим линейную комбинацию данных векторов: $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0,$ в которой числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ нужно определить. Для этого перейдем к линейным комбинациям соответствующих компонентов:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 & = & 0, \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 & = & 0, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3 & = & 0. \end{cases}$$

Имеем однородную линейную систему уравнений, которая имеет единственное нулевое решение $\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0$, если определитель системы не равен нулю (легко проверить по правилу Крамера), другими словами ранг r матрицы системы равен трем. В этом случае векторы $a_1, \quad a_2, \quad a_3$ линейно независимы. Для линейной зависимости должно существовать хотя бы одно ненулевое решение системы уравнений, тогда ранг r матрицы меньше трех. Выпишем матрицу A системы и вычислим ранг, приведя ее к ступенчатому виду. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Обратим внимание на то, что в матрице А компоненты векторов расположены в виде столбцов. Хотя, как известно, величина ранга не меняется при транспонировании. Прибавим элементы первой строки к элементам второй строки и, умноженные на два, вычтем из третьей строки. Получим в результате матрицу $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$. В матрице $A_1$ вторую строку разделим на 5, а третью на (-3). Тогда будем иметь матрицу:

$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Вычтем из третьей строки элементы второй строки, получим ступенчатую матрицу $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Отсюда видно, что ранг матрицы равен двум. Данные векторы линейно зависимы. Можно найти ненулевые значения $\alpha_1$, $\alpha_2, \alpha_3$, составив систему уравнений по последней матрице:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 &= -4\alpha_3 \\ \alpha_2 &= -\alpha_{33} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \alpha_1 - 2\alpha_2 &= -4\alpha_3 \\ \alpha_2 &= -\alpha_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha_1 &= -2\alpha_3 \\ \alpha_2 &= -\alpha_3 \end{aligned}.$$

Вместо $\alpha_3$ можно подставить любое число не равное нулю. Например, если принять $\alpha_3 = 1$, то $\alpha_2 = -1$, $\alpha_1 = -2$. Тогда имеем $-2a - a_2 + a_3 = 0$ или $a_3 = 2a_1 + a_2$. Согласно определению векторы $a_1$, $a_2$, $a_3$ линейно зависимы.

Рассмотрим в общем виде критерий линейной зависимости и независимости системы векторов из пространства $R_n$. Пусть

$y_1=(x_{11},x_{12},...,x_{1n}),\quad y_2=(x_{21},x_{22},...,x_{2n}),...,y_k=(x_{k1},x_{k2},...,x_{kn})$ элементы пространства $R_n$. Составим матрицу, столбцами которой являются компоненты векторов

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix}.$$

Если ранг этой матрицы равен числу векторов в системе, то векторы линейно независимы. Например, векторы: $e_1=(1{,}0),\quad e_2=(0{,}1)$ из пространства $R_2$ линейно независимые, так как ранг матрицы $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ равен двум. В пространстве $R_3$ векторы $e_1=(1{,}0{,}0),\quad e_2=(0{,}1{,}0),\quad e_3=(0{,}0{,}1)$ линейно независимые. И вообще, в пространстве $R_3$ любые три некомпланарных вектора линейно независимы.

Заметим, что если среди множества векторов присутствует нулевой вектор, то такая система векторов всегда линейно зависима. Этот факт легко проверить, составив линейную комбинацию таким образом, чтобы все ненулевые векторы умножались на нулевые коэффициенты, а нулевой вектор умножался на число не равное нулю. В результате получим линейную комбинацию векторов, равную нулю.

Отметим также следующий факт: если множество векторов содержит линейно зависимую подсистему векторов, то само будет линейно зависимым. Это легко доказать, составив линейную комбинацию векторов таким образом, что векторы подсистемы войдут с ненулевыми коэффициентами, а остальные векторы умножатся на нулевые коэффициенты. Тем самым линейная комбинация всех векторов, входящих в данное множество, обратится в нуль. Если же исходная система векторов линейно независима, то любая подсистема этих векторов будет тоже линейно независима.

Критерием линейной зависимости совокупности векторов из пространства $R_n$ является следующая теорема:

*Теорема.* Чтобы система векторов $y_1, y_2, ..., y_k$ была линейно зависимой необходимо и достаточно, чтобы один из векторов выражался в виде линейной комбинации через остальные векторы.

1. *Необходимость*. Пусть векторы $y_{1,} y_2, ..., y_k$ линейно зависимы. Тогда по определению существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$, не все равные нулю одновременно, что выполняется равенство $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_k y_k = 0.$ Пусть для определенности $\alpha_1 \neq 0.$ Очевидно , что получим соотношение $y_1 = \dfrac{-\alpha_2}{\alpha_1} y_2 - ... - \dfrac{\alpha_k}{\alpha_1} y_k.$ Это равенство означает, что вектор $y_1$ является линейной комбинацией векторов $y_2, y_3, ..., y_k.$

2. *Достаточность*. Предположим, что $y_1 = \beta_2 y_2 + \beta_3 y_3 + ... + \beta_k y_k,$ где $\beta_2, \beta_3, ..., \beta_k -$ действительные числа. Из этого разложения непосредственно следует линейная зависимость всей системы векторов, так как выполняется равенство $y_1 - \beta_2 y_2 - ... - \beta_k y_k = 0.$

***Алгоритм решения вопроса о линейной зависимости или независимости системы векторов*** $a_1, a_2, ..., a_k$ ***следующий:***

1) составить линейную комбинацию векторов
$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_к a_к = 0,$ которая в координатной форме представляет собой однородную систему линейных уравнений относительно неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_к$;
2) записать матрицу, располагая векторы столбцами;
3) методом Гаусса привести матрицу к ступенчатому виду;
4) сделать вывод о ранге матрицы и существовании ненулевых решений однородной системы уравнений:

а) если ранг равен числу векторов и система имеет только нулевое решение, то система векторов линейно независима.

б) если ранг меньше числа векторов и система имеет ненулевые решения, то векторы линейно зависимы.

*Пример.* Является ли данная система векторов линейно зависимой?

$a_1 = (1,3,-5) \qquad a_2 = (-8,-4,12) \qquad a_3 = (6,3,-9).$

*Решение.* Линейная комбинация векторов имеет следующий вид $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0$. Запишем матрицу и преобразуем ее методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & -8 & 6 \\ 3 & -4 & 3 \\ -5 & 12 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -8 & 6 \\ 3 & -4 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ 0 & -4 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r = 2.$$

Система векторов линейно зависима. Составим систему уравнений по последней матрице:

$\left.\begin{matrix} \alpha_1 & = & 0 \\ -4\alpha_2 & = & -3\alpha_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha_1 & = & 0 \\ \alpha_2 & = & \frac{3}{4}\alpha_3 \end{matrix},$ при $\alpha_3=4$ имеем $\alpha_1=0$, $\alpha_2=3$, $\alpha_3=4$. Векторы линейно зависимы и $3a_2 + 4a_3 = 0.$

**Упражнения для самостоятельного решения**

Является ли система векторов линейно зависимой или независимой?

1. $a_1 = (2,-1,3), \quad a_2 = (-3,5,2), \quad a_3 = (0,2,-4).$
2. $a_1 = (2,-3,0,1), \quad a_2 = (1,4,-2,3), \quad a_3 = (5,2,-1,2).$
3. $a_1 = (2,-5,1,0), \quad a_2 = (1,3,1,-2), \quad a_3 = (4,1,3,-4).$

Ответы:

1. Линейно независимы.
2. Линейно независимы.
3. Линейно зависимы.

## 3.3 Размерность и базис пространства векторов

Рассмотрим линейное пространство $R_n$ $n$-мерных векторов. Если существует в $R_n$ система n линейно независимых векторов и при этом любые *n+1* векторов линейно зависимы, то число n называется размерностью пространства.

Базисом линейного векторного пространства $R_n$, имеющего размерность n, называется совокупность $n$ линейно независимых векторов.

Например, размерность пространства всех векторов, лежащих в плоскости, равна двум, а базисом является любая совокупность двух линейно независимых векторов. Два вектора $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ образуют базис. Любые три вектора на плоскости линейно зависимы.

В пространстве $R_3$ трехмерных векторов любая совокупность трех линейно независимых векторов образует базис, а любые четыре вектора линейно зависимы. Таким образом, в пространстве $R_n$, имеющем размерность n, существует бесчисленное количество базисов. Все базисы содержат одинаковое количество векторов, равное размерности пространства.

*Теорема о единственности разложения вектора по базису.*

Любой вектор $x \in R_n$, не входящий в число базисных, может быть представлен единственным образом в виде линейной комбинации базисных векторов.

*Доказательство.* Пусть векторы $e_1, e_2, ..., e_n$ образуют базис и вектор X не входит в их число. Из условия теоремы следует, что векторы $e_{1,}, e_2, ..., e_n$ линейно независимы и размерность пространства n, тогда любые *n+1* векторов линейно зависимы. Это означает, что существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, ...., \alpha_n, \alpha_{n+1}$, одновременно не равные нулю такие, что $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n + \alpha_{n+1} X = 0.$ Число $\alpha_{n+1} \neq 0$, иначе векторы $e_1, e_2, ..., e_n$ были бы линейно зависимы. Поскольку $\alpha_{n+1} \neq 0$ то разделив на него последнее равенство получим, что $X = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}} e_1 - \dfrac{\alpha_2}{\alpha_{n+1}} e_2 - ... - \dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} e_n$, то есть $X$ записан в виде линейной комбинации базисных векторов. Такое представление $X$ будет единственным. Если предположить, что найдется другое представление вектора $X = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + ... + \beta_n e_n$ , то разность

$X - X = (\beta_1 - \dfrac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}})e_1 + ... + (\beta_n - \dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}})e_n = 0.$ Векторы $e_1, e_2, ...., e_n$ линейно независимы, следовательно $\beta_1 = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}}, \ \beta_2 = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_{n+1}}, ..., \beta_n = \dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}.$ Это и доказывает единственность разложения.

*Пример*. Даны векторы

$e_1 = (1,2,3), \ e_2 = (-1,0,2), \ e_3 = (0,0,1), \ e_4 = (1,0,-1).$ Проверить, образуют ли векторы $e_1, e_2, e_3$ базис в пространстве $R_3$ и найти разложение $e_4$ по базису.

*Решение*. Чтобы векторы $e_1, e_2, e_3$ составили базис пространства $R_3$, они должны быть линейно независимы, то есть ранг матрицы, составленной из компонентов векторов, должен равняться трем. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Определитель этой квадратной матрицы равен двум. Поэтому ранг $r(A) = 3.$ Следовательно, векторы $e_1, e_2, e_3$ линейно независимы и образуют базис в $R_3$. Существует единственный набор чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ такой, что $e_4 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3.$ От векторного равенства перейдем к равенствам над соответствующими компонентами, получим систему уравнений $\left.\begin{array}{rcr} \alpha_1 - \alpha_2 & = & 1 \\ 2\alpha_1 & = & 0 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 & = & -1 \end{array}\right\}.$

Решая эту систему, найдем что $\alpha_1 = 0, \ \ \alpha_2 = -1, \ \ \alpha_3 = 1.$ Значит, $e_4 = -e_2 + e_3.$ Заметим, что вектор $e_4$ в первоначальном базисе задан компонентами (1,0,-1), а в базисе $(e_1, e_2, e_3)$ этот же вектор определен другими компонентами (0,-1,1).

### 3.4 Ранг системы векторов

Пусть имеется система $m$ векторов $n$-мерного векторного пространства

$$\begin{cases} a_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots a_{1n}) \\ a_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots a_{2n}) \\ \dots \quad \dots \quad \dots\dots\dots \\ a_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots a_{mn}) \end{cases}.$$

*Определение.* Рангом $r$ системы векторов называется максимальное число линейно независимых векторов системы.

Любая линейно независимая часть системы, состоящая из r векторов, является ее базисом. Ранг системы векторов равен рангу матрицы, составленной из компонентов этих векторов. (Доказательство этого утверждения см. в работе Ф.И. Карпелевич, Л.Е.Садовский “Элементы линейной алгебры и линейного программирования”).

Составим эту матрицу, располагая координаты строчками (или столбцами):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если ранг $r$ равен числу $m$ содержащихся в системе векторов, то система векторов линейно независима. Если

$r<m$, то система линейно зависима, то есть любой вектор из системы линейно выражается через базисные векторы.

*Пример1.* Дана система векторов четырехмерного пространства

$a_1=(2,\ 1,\ \text{-}1,\ 0)$; $a_2=(3,\ 2,\text{-}1,\ 2)$; $a_3=(1,\ 0,\ \text{-}1,\ \text{-}2)$. Требуется определить является ли данная система линейно зависимой и, если да, то найти зависимость.

*Решение.* Составим матрицу:

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Находим ранг матрицы $A$. Для этого переставим строки в матрице $A$, получим $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. В матрице $A_1$, умножив первую строку на два, вычтем из второй и, умножив на три, вычтем из третьей. Получим матрицу $A_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$. В матрице $A_2$ третью строку разделим на два. Получим матрицу: $A_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

В матрице $A_3$ вторую строку вычтем из третьей, получим матрицу: $A_4=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. В матрице $A_4$ исключим последнюю строку, получим матрицу:

$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Ранг матрицы $A_5$ равен двум, так как минор второго порядка $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ и минора более высокого порядка, отличного от нуля, в этой матрице нет.

Преобразования, которые применялись к матрицам, не изменяют их ранга, то есть все матрицы в примере имеют один и тот же ранг. Таким образом, ранг матрицы системы векторов равен двум, а это означает, что данная система векторов линейно зависима. В этой системе любые два вектора линейно независимы и образуют базис, а третий можно выразить в виде линейной комбинации через выбранные два вектора.

Линейная зависимость трех векторов означает, что существует три числа, одновременно не равные нулю, такие, что выполняется соотношение $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$. Если предположить, что $\lambda_1 \neq 0$, *то* $a_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} a_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} a_3$. Тем самым вектор $a_1$ выражен через $a_2$ *и* $a_3$. Найдем численные значения коэффициентов. Сначала для краткости введем переобозначения $\kappa_2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, $\kappa_3 = -\frac{\lambda_3}{\lambda_1}$. Тогда $a_1 = \kappa_2 a_2 + \kappa_3 a_3$. Векторное равенство переносится на все компоненты векторов. Поэтому получаем систему уравнений относительно $\kappa_2, \kappa_3$

$$\left.\begin{array}{rcr} 3\kappa_2+\kappa_3 & = & 2 \\ 2\kappa_2+0\kappa_3 & = & 1 \\ -\kappa_2-\kappa_3 & = & -1 \\ 2\kappa_2-2\kappa_3 & = & 0 \end{array}\right\}.$$ Очевидно, что $\kappa_2=\frac{1}{2}, \kappa_3=\frac{1}{2}$. Таким образом, $a_1=\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{2}a_3$. Из последнего равенства ясно, что можно $a_2$ выразить через $a_1$ и $a_3$ :$a_2$=2$a_1$-$a_3$. Вектор $a_3$ через $a_1$ и $a_2$: $a_3 = 2a_1 - a_2$.

*Пример2.* Дана система пяти трехмерных векторов. Требуется определить ранг системы векторов и разложить вектор $a_1$ по новому базису.

$$a_1=(2,3,-4), a_2=(1,0,3), a_3=(2,-1,2), a_4=(0,2,+1), a_5=(4,0,3).$$

*Решение.* Составим матрицу:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & +1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Определим ранг этой матрицы. Так как порядок самого большого минора, который можно составить из элементов матрицы A равен трем, то r≤3 равен трем и система векторов линейно зависима. По условию задачи требуется разложить вектор $a_1$ по линейно независимым векторам. Для определения множества линейно независимых векторов рассмотрим минор из элементов векторов, не содержащих вектор $a_1$. Например рассмотрим минор:

$$M=\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & +1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-1-4+12=7\neq 0.$$

Так как минор составлен из элементов векторов $a_2$ ,$a_3,$ $a_4$, то эти векторы линейно независимы и образуют базис. Напомним, что базисом в трехмерном пространстве является любой набор из трех линейно независимых векторов. Любой другой вектор может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векторов. Поэтому вектор $a_1=\alpha a_2+\beta a_3+\gamma a_4$, где α ,β , γ- числа, которые требуется определить. Из векторного равенства получим соответствующие соотношения, связывающие компоненты векторов:

$$\left.\begin{array}{rcr}\alpha+2\beta & = & 2\\ --\beta+2\gamma & = & 3\\ 3\alpha+2\beta+\gamma & = & -4\end{array}\right\}.$$ Полученную систему уравнений можно решить любым известным способом. Предлагается этот этап выполнить самостоятельно, а в итоге получим
$\alpha=-\frac{32}{7},\quad \beta=\frac{23}{7},\quad \gamma=\frac{22}{7}.$

*Замечание.* Вектор $a_5$ не принял участия в решении, однако, если бы мы взяли в матрице А минор $M=\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 2 & +1\\ 4 & 0 & 3\end{vmatrix}=-18\neq 0,$ то базисными были бы векторы $a_2$ ,$a_4$ , $a_5$ . Тогда вектор $a_1$ записали бы в виде $a_1=\mu a_2+\nu a_4+\eta a_5$, числа $\mu$ ,$\nu$ ,$\eta$ определились бы аналогичным способом.

## Задачи для самостоятельного решения

Найти ранг и базис системы векторов и один из векторов, не входящий в базис, разложить по базису.

1.
$a_1 = (5,-1,2), \quad a_2 = (-3,2,-1), \quad a_3 = (1,0,2), \quad a_4 = (0,1,4), \quad a_5 = (-2,2,1).$

2.
$a_1 = (0,1,-1,2), \quad a_2 = (-1,2,3,1), \quad a_3 = (3,0,-1,2), \quad a_4 = (2,3,1,5).$

3.
$a_1 = (1,-2,1,1), \quad a_2 = (1,0,2,3), \quad a_3 = (-1,2,0,3), \quad a_4 = (2,-4,3,6), \quad a_5 = (1,-2,2,5).$

Ответы: 1.$r$=3; если базис ($a_2$, $a_3$, $a_4$), то $a_1 = \frac{4}{3}a_2 + 9a_3 - \frac{11}{3}a_4.$

2.$r$=3; если базис ($a_1$, $a_2$, $a_3$), то $a_4 = a_1 + a_2 + a_3$.

3.$r$=3; если базис ($a_1$, $a_2$, $a_3$), то $a_5 = 2a_1 + a_3$.

## 3.5. Пространство решений однородной системы уравнений

Однородной системой линейных алгебраических уравнений называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

В общем случае $m \neq n$. Эта система уравнений всегда совместна, так как имеет очевидное нулевое решение $x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \ldots, x_n = 0.$ Поставим задачу отыскания ненулевых решений такой системы. В матричной форме система примет вид $A \cdot X=0$, где $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ матрица системы уравнений, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - матрица неизвестных. Если матрица $A$ квадратная $(m=n)$, и ранг матрицы $r=n$, то система уравнений имеет единственное нулевое решение. Поэтому для существования ненулевого решения предположим, что $r<m\leq n$. Тогда существует минор $M_r$ порядка r матрицы $A$, не равный нулю, пусть для определенности это будет минор:

$M_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$ Исходная система уравнений может быть записана в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r & = & -a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ \cdots & = & \cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r & = & -a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n \end{cases}.$$

Данная система, очевидно, эквивалентна предыдущей. Назовем $x_1, x_2, \ldots, x_r -$ основными неизвестными, $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n -$ свободными неизвестными. Свободным неизвестным можно придавать любые числовые значения, кроме случая одновременного равенства всех свободных неизвестных нулю.

Следовательно, последняя система имеет бесчисленное множество решений.

Множество решений однородной системы уравнений образует линейное векторное пространство. Действительно, если вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ является решением однородной системы уравнений, то вектор $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$ также является решением, что легко проверить, подставив компоненты вектора αx в систему.

Если векторы $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ являются решениями, то их сумма $z = x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$ является решением данной однородной системы уравнений, что проверяется подстановкой компонентов вектора z в систему уравнений.

Найдем теперь размерность и базис пространства решений однородной системы уравнений. Количество свободных неизвестных равно *n-r*, придавая поочередно каждой свободной неизвестной значение, равное единице, а остальные приравнивая нулю, можно получить *n-r* векторов решений: при $x_{r+1} = 1,\quad x_{r+2}, = x_{r+3} = ... = x_n = 0,$ решая систему, получим вектор $e_1 = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r, 1, 0, ..., 0).$ При $x_{r+2} = 1,\quad x_{r+1} = x_{r+3} = ... = x_n = 0$ получим вектор решения $e_2 = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r, 0, 1, 0, ..., 0)$ и так далее. Аналогично при $x_{r+1} = x_{r+2} = ... = x_{n-1} = 0,\quad x_n = 1$ решение будет $e_{n-r} = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_r, 0, 0, ..., 1).$ Векторы $e_1, e_2, ..., e_{n-1}$ линейно независимы, так как матрица *C*, составленная из компонентов этих векторов имеет ранг, равный к=n-r, то есть равен числу векторов. Матрица

$$C=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_r & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_r & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_r & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Векторы $e_1$, $e_2$,…..,$e_k$ называются фундаментальной системой решений, они образуют базис пространства решений, размерность которого равна k = n – r . Любое другое решение будет линейной комбинацией базисных векторов. Поэтому можно записать общее решение однородной системы в виде $X_{00} = c_1e_1 + c_2e_2 + .... + c_\kappa e_\kappa$, где $c_1$, $c_2$, ……,$c_\kappa$- произвольные действительные числа, одновременно не равные нулю.

*Пример*. Найти фундаментальную систему решений и размерность пространства решений однородной системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 & = & 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 & = & 0. \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 & = & 0 \end{cases}$$

*Решение*. Сначала найдем ранг матрицы А системы уравнений: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Умножим первую строку на два и вычтем из второй строки, затем умножим первую строку на три и вычтем из третьей строки, получим матрицу $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -9 \\ 0 & -2 & -4 & -11 & -13 \end{pmatrix}$. В матрице $A_1$ вторую строку умножим на (-2) и прибавим к третьей строке, получим матрицу $A_2$, в которой элементы второй строки запишем с противоположным знаком.

Получим матрицу $A_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$. В матрице $A_2$ третью строку разделим на (-5) и запишем матрицу:

$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Очевидно, что в $A_3$ базисный минор, составленный из элементов первого, второго и четвертого столбцов, третьего порядка и равен 1:

$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Следовательно, ранг матрицы $A$ системы уравнений равен трем, ранг меньше числа неизвестных, что доказывает существование бесчисленного множества решений данной системы уравнений. За основные неизвестные возьмем $x_1$ ,$x_2$, $x_4$, а за свободные $x_3$, $x_5$ . По последней матрице $A_3$ запишем систему уравнений в виде:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_4 = -3x_3-5x_5 \\ x_2+3x_4 = -2x_3-9x_5 \\ x_4 = -x_5 \end{cases}$$

1) Пусть $x_3=1$, $x_5=0$. Получим систему уравнений:

$$\left.\begin{matrix} x_1+2x_2+4x_4 & = & -3 \\ x_2+3x_4 & = & -2 \\ x_4 & = & 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1+2x_2 & = & -3 \\ x_2 & = & -2 \\ x_4 & = & 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 & = & 1 \\ x_2 & = & -2 \\ x_4 & = & 0 \end{matrix}$$

Вектор решения $e_1$=(1,-2,1,0,0).

2) Пусть $x_3=0$, $x_5=1$, тогда система уравнений примет вид:

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1+2x_2+4x_4 &=& -5 \\ x_2+3x_4 &=& -9 \\ x_4 &=& -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcr} x_1+2x_2 &=& -1 \\ x_2 &=& -6 \\ x_4 &=& -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcr} x_1 &=& 11 \\ x_2 &=& -6 \\ x_4 &=& -1 \end{array}$$

Вектор решения $e_2=(11,-6,0,-1,1)$. Векторы $e_1$, $e_2$ – фундаментальная система решений, образует базис пространства решений, размерность которого $k=2$. Пространство решений можно записать в виде общего решения $X_{00}=c_1e_1+c_2e_2$, где $c_1$ и $c_2$ - произвольные числа, одновременно не равные нулю.

## Задачи для самостоятельного решения

Найти фундаментальную систему решений и размерность пространства решений однородной системы уравнений:

$$1)\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3+2x_4 = 0, \\ 2x_1+x_2-3x_3-x_4 = 0, \\ 4x_1-5x_2+5x_3+3x_4 = 0. \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} x_1+x_2-4x_3-2x_4+2x_5 = 0, \\ 3x_1-3x_2+2x_3-x_5 = 0, \\ 5x_1-x_2-6x_3-4x_4+x_5 = 0. \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} 4x_1+3x_2-2x_3-x_4+x_5 = 0, \\ 3x_1-x_2+x_3+2x_4+3x_5 = 0, \\ x_1+4x_2-3x_3-3x_4-2x_5 = 0, \\ 2x_1+5x_2-4x_3-5x_4-5x_5 = 0. \end{cases}.$$

Ответы: 1. $k=2$; $e_1=\left(\frac{5}{7},\frac{11}{7},1,0\right)$, $e_2=\left(\frac{1}{7},\frac{5}{7},0,1\right)$.

2. $k$=3; $e_1 = \left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 1, 0, 0\right)$, $e_2 = (1, 1, 0, 1, 0)$

$$e_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 0, 1\right).$$

3. $k$=3; $e_1 = \left(-\frac{1}{13}, \frac{10}{13}, 1, 0, 0\right)$, $e_2 = \left(\frac{-5}{13}, \frac{11}{13}, 0, 1, 0\right)$,

$$e_3 = \left(-\frac{10}{13}, \frac{9}{13}, 0, 0, 1\right).$$

## 3.6. Общее решение неоднородной системы линейных алгебраических уравнений

Исследование произвольных систем линейных уравнений рассмотрено в параграфе 2.3. Предположим, что система (2.1.) совместна и ранг матрицы $A$ системы меньше числа неизвестных, то есть система имеет бесчисленное множество решений. Для краткости изложения систему (2.1.) запишем в матричной форме $AX=B$. Соответствующее однородное уравнение $AX=0$ имеет линейное векторное пространство решений $X_{00} = c_1 e_1 + c_2 e_2 + ... + c_к e_к$, которое можно назвать общим решением однородной системы уравнений, $e_1$, …, $e_к$ – фундаментальная система решений, $c_1$, $c_2$, …,$c_к$ – произвольные числа, $к$-размерность пространства. Обозначим $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ -одно фиксированное решение системы $AX=B$. Легко доказать, что множество решений системы $AX=B$ является суммой частного решения $X^*$ неоднородной системы и общего решения $X_{00}$ однородной системы, то есть

$$X = X^* + X_{00} \qquad (3.6.1.)$$

Действительно, подставим $X$ в уравнение $AX=B$ и, пользуясь свойствами матриц, получим $AX = A(X^* + X_{00}) = AX^* + AX_{00} = B$, так как $AX^* = B$, $AX_{00} = 0$.

Любое решение неоднородной системы принадлежит своему множеству решений, выражаемому формулой (3.6.1.). Поэтому $X$ называется общим решением линейной неоднородной системы уравнений, имеющей бесчисленное множество решений.

*План построения общего решения неоднородной системы уравнений:*

1. Исследовать систему уравнений на совместность по теореме Кронекера–Капелли.
2. Если ранг меньше числа неизвестных $n$, обозначить основные (базисные) и свободные неизвестные.
3. Выразить основные неизвестные через свободные.
4.Все свободные неизвестные приравнять нулю и, решая систему, найти вектор $X^*$.
5.Для соответствующей однородной системы уравнений найти фундаментальную систему решений $e_1, e_2, \ldots, e_к$ и записать $X_{00}$.
6.Записать ответ в виде $X = X^* + X_{00}$.

*Пример.* Найти общее решение системы уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}$$

*Решение.*

1. Запишем расширенную матрицу системы

$$C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы одинаковые, то есть $r=2$. Система совместна и имеет бесчисленное множество решений.

2. Пусть базисный минор $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$,

следовательно, основными неизвестными будут $x_1$, $x_2$, а свободными = $x_3$, $x_4$.

3.По преобразованной матрице запишем эквивалентную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 - x_3 + x_4 \\ 3x_2 = 4 - 2x_3 - 5x_4 \end{cases}$$

4. Пусть $x_3=0$, $x_4=0$. Тогда имеем систему:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 \\ 3x_2 &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 \\ x_2 &= \tfrac{4}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \tfrac{7}{3} \\ x_2 &= \tfrac{4}{3} \end{aligned}.$$

Таким образом, $X^* = (\tfrac{7}{3}, \quad \tfrac{4}{3}, \quad 0, \quad 0)$.

5. Запишем однородную систему уравнений в виде:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -x_3 + x_4 \\ 3x_2 = -2x_3 - 5x_4 \end{cases}.$$

6. а) Пусть $x_3=1$, $x_4=0$, тогда $\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 &= -1 \\ 3x_2 &= -2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= -\tfrac{5}{3} \\ x_2 &= -\tfrac{2}{3} \end{aligned}$

$\Rightarrow$ $e_1 = (-\tfrac{5}{3}, -\tfrac{2}{3}, \quad 1, \quad 0)$.

б) Пусть $x_3=0$, $x_4=1$ , тогда:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 \\ 3x_2 &= -5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \tfrac{-2}{3} \\ x_2 &= \tfrac{-5}{3} \end{aligned} \Rightarrow e_2 = (\tfrac{-2}{3}, \quad \tfrac{-5}{3}, 0, 1).$$

Таким образом, $X_{00} = C_1 e_1 + C_2 e_2$.

Ответ. Общее решение:

$$X = X^* + X_{00},\ X^* = \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, 0, 0\right),$$

$$e_1 = \left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 0\right),\ e_2 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, 0, 1\right).$$

## 3.7. Переход к новому базису

Пусть в линейном векторном пространстве $R_n$ имеются два базиса $l = (l_1, l_2, \ldots l_n)$ и $l' = (l'_1, l'_2, \ldots, l'_n)$.

Первый называем «старым базисом», второй- «новым базисом».

Вектор $x$ в старом базисе имел разложение

$$x = x_1 l_1 + x_2 l_2 + \ldots + x_n l_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (3.7.1)$$

В новом базисе этот же вектор будет записываться следующим образом:

$$x = y_1 l_1' + y_2 l_2' + \ldots + y_n l'_n = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (3.7.2)$$

Требуется установить правило вычисления координат $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, если известны координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Очевидно, что каждый вектор нового базиса единственным образом раскладывается по векторам старого базиса:

$$\begin{aligned} l'_1 &= c_{11} l_1 + c_{21} l_2 + \ldots + c_{n1} l_n \\ l'_2 &= c_{12} l_1 + c_{22} l_2 + \ldots + c_{n2} l_n \\ l'_n &= c_{1n} l_1 + c_{2n} l_2 + \ldots + c_{nn} l_n \end{aligned} \qquad (3.7.3)$$

Соотношения (3.7.3) можно записать в матричной форме:

$$\left(l_1',l_2',...,l_n'\right)=\left(l_1,l_2,...,l_n\right)\cdot\begin{vmatrix} c_{11}c_{12}...c_{1n} \\ c_{21}c_{22}...c_{2n} \\ .............. \\ c_{n1}c_{n2}...c_{nn}\end{vmatrix}=l\cdot C,$$

где $C$ называется матрицей перехода от старого базиса к новому базису $l$.

Столбцами матрицы перехода являются координаты векторов нового базиса, записанные в старом базисе (3.7.3).

Определитель матрицы $C$ не может равняться нулю, так как базисные векторы $l_1',l_2',...,l_n'$ линейно независимы по определению. Поэтому существует обратная матрица $C^{-1}$.

Чтобы установить связь старых и новых координат вектора $x$, нужно разложение (3.7.3) подставить в (3.7.2) выполнить алгебраические преобразования (что предлагается сделать читателю самостоятельно) и в силу единственности разложения вектора $x$ получить равенства:

$$\begin{cases} x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+...+c_{1n}y_n, \\ x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+...+c_{2n}y_{n.}, \\ ..........................................., \\ x_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+...+c_{nn}y_n \end{cases} \qquad (3.7.4)$$

В матричной форме (3.7.4) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathrm{C} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad (3.7.5)$$

Старые координаты вектора $x$ получаются из новых, если матрицу перехода $C$ умножить на столбец новых компонент.

Если известны компоненты вектора в старом базисе, то новые координаты получатся если равенство (3.7.5) умножить слева на обратную матрицу $C^{-1}$.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (3.7.6)$$

*Пример*. Найти координаты вектора $x$=(-3;2) в базисе из векторов $l_1'$=(1;-1), $l_2'$=(5;3).

*Решение*. Составим матрицу перехода из компонентов нового базиса $l_1', l_2'$:

$C=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ и найдем обратную матрицу $C^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

По формуле (3.7.6) имеем:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -19 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow y_1 = -\frac{19}{8}, y_2 = -\frac{1}{8}.$$

и в новом базисе вектор имеет разложение:

$$x = -\frac{19}{8}\ l_1' - \frac{1}{8} l_2'$$

*Ответ*: Вектор в новом базисе имеет вид:

$$x = \left(-\frac{19}{8}, -\frac{1}{8}\right).$$

### 3.8. Евклидово пространство

В линейных пространствах $R_2$ и $R_3$ существует понятие длины вектора и угла между векторами. Обе эти характеристики взаимного расположения векторов определяются величиной скалярного произведения. В произвольном векторном пространстве удобно сначала ввести скалярное произведение двух элементов этого пространства, а затем уже определить длину вектора и угол между векторами.

Скалярным произведением двух векторов $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ называют число, полученное следующим образом: $(XY)=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$. Скалярное произведение подчиняется определенным законам (аксиомам):

*1) $(XY)=(YX)$,*

*2) $((X+Z)Y)=(XY)+(ZY)$,*

*3) $((\alpha X)Y)=\alpha(XY)=(X(\alpha Y))$, где $\alpha$-число*

*4) $(XX)\geq 0$, если $X\neq\vec{0}$,*

*5) $(XX)=0$, если $X=0$.*

Линейное пространство, в котором определено скалярное произведение, называют евклидовым пространством. Евклидово пространство обозначают символом Е, если известна его размерность, то $E_n$. Длина вектора $X$ (или норма) обозначается $|X| = \sqrt{(XX)}$. Угол между векторами определится по формуле

$\cos\varphi = \dfrac{(XY)}{|X||Y|}$, $(0 \le \varphi \le \pi)$. Те ненулевые векторы, у которых скалярное произведение равно нулю, называются ортогональными векторами. Для любого пространства, в котором введено скалярное произведение, справедлива теорема: если векторы *X,Y* ортогональны, то: $|X+Y|^2 = ((X+Y)(X+Y)) = (XX)+(XY)+(YX)+(YY)$. Произведение (XY)=(YX)=0, так как векторы ортогональны, следовательно, $|X+Y|^2 = |X|^2 + |Y|^2$.

Для элементов эвклидова пространства справедливо также неравенство Коши-Буняковского: $|(XY)| \le |X||Y|$. Докажем это неравенство. Возьмем любое неравное нулю число α и составим элемент $X\text{-}\alpha Y$. Тогда $((X-\alpha Y)(X-\alpha Y)) \ge 0$ по аксиоме 4. С другой стороны по аксиомам 1-3 это выражение можно записать иным образом $(XX)-2\alpha(XY)+\alpha^2(YY)\ge 0$. Относительно α последнее выражение является квадратным трехчленом, значения которого больше нуля или равны нулю для любого значения аргумента. В этом случае дискриминант квадратного трехчлена должен быть неположительным, т.е. $4(XY)^2 - 4(XX)(YY) \le 0$ *или* $|(XY)| \le |X||Y|$, что и требовалось доказать.

В пространстве $E_n$ для любых X,Y$\in R_n$ справедливо неравенство треугольника $|X+Y| \le |X| + |Y|$. Для доказательства этого неравенства воспользуемся неравенством Коши–Буняковского.

$$|X+Y|^2 = ((X+Y)(X+Y)) = |X|^2 + 2(XY) + |Y|^2 \le |X|^2 + 2|X||Y| + |Y|^2 = (|X|+|Y|)^2$$

отсюда $|X+Y| \le |X| + |Y|$. Очевидно, что нулевой вектор ортогонален любому другому.

Если два ненулевых вектора ортогональны, то угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$. Векторы $e_1, e_2, \ldots e_n$ образуют ортонормированный базис, если они попарно ортогональны и норма каждого равна единице, т.е.

$$(e_i e_j) = 0 \quad при \quad i \neq j \quad и \quad (e_i e_i) = 1 \quad при \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

Во всяком $n$-мерном евклидовом пространстве ортонормированный базис не единственный. Примером ортонормированного базиса может служить декартов прямоугольный базис евклидова пространства всех свободныхвекторов:

$$e_1 = (1,0,\ldots,0), \quad e_2 = (0,1,\ldots,0), \quad \ldots, e_n = (0,0,\ldots,1).$$

Ортонормированный базис – это особо удобный базис пространства. Особая роль этих базисов в том, что если произвольные векторы пространства $X$ и $Y$ определены в таком базисе, то их скалярное произведение равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов $(xy)=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$.

Координаты произвольного вектора $X$ относительно ортонормированного базиса равны скалярным произведениям этого вектора на соответствующие базисные векторы. Таким образом, в евклидовом пространстве ортонормированный базис обладает свойствами, аналогичными свойствам декартового прямоугольного базиса.

*Пример.* Проверить, что векторы $e_1=(1,-1,0)$, $e_2=(2,2,1)$, $e_3=(1,1,-4)$ образуют ортонормированный базис и для вектора $x=(2,5,3)$ найти разложение по этому базису.

*Решение.* Проверим, составляют ли векторы $e_1$, $e_2$, $e_3$ базис в $R_3$. Для этого составим определитель из компонентов векторов и вычислим его

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -18 \neq 0.$$

Следовательно, векторы составляют базис в пространстве $R_3$. Проверим ортогональность векторов с помощью скалярного произведения:

$$e_1e_2 = 2-2+0 = 0 \Rightarrow e_1,\ e_2 - \textit{ортогональны},$$

$$e_1e_3 = 1-1-0 = 0 \Rightarrow e_1,\ e_2 - \textit{ортогональны},$$

$$e_2e_3 = 2+2-4 = 0 \Rightarrow e_2,\ e_3 - \textit{ортогональны}.$$

Таким образом, векторы попарно ортогональны и составляют базис. Составим теперь ортонормированный базис:

$$e_1^* = \frac{e_1}{|e_1|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),$$

$$e_2^* = \frac{e_2}{|e_2|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

$$e_3^* = \frac{e_3}{|e_3|} = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}}\right).$$

Векторы $e_1^*, e_2^*, e_3^*$ ортогональны и имеют единичную длину, то есть составляют ортонормированный базис и координаты вектора $x$ относительно этого базиса равны скалярным произведениям $x$ на соответствующие базисные векторы.

$$xe_1^* = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{\sqrt{2}},$$

$$xe_2^* = \frac{4}{3} + \frac{10}{3} + 1 = \frac{17}{3},$$

$$xe_3^* = \frac{2}{3\sqrt{2}} + \frac{5}{3\sqrt{2}} - \frac{12}{3\sqrt{2}} = -\frac{2}{3\sqrt{2}}.$$

*Ответ.* Вектор $x = -\frac{3}{\sqrt{2}} e_1^* + \frac{17}{3} e_2^* - \frac{2}{3\sqrt{2}} e_3^*.$

Замечание. Если данный базис не является ортогональным, то разложение по нему осуществляется по правилу, которое изложено в параграфе 3.4.

**Упражнения для самостоятельного решения**

Проверить составляют ли векторы ортогональный базис и разложить вектор $x$ по этому базису:

1) $\begin{array}{lcl} e_1 & = & (2,0,-2) \\ e_2 & = & (1,-2,1) \\ e_3 & = & (1,1,1) \\ x & = & (3,-2,5) \end{array}$ 2) $\begin{array}{lcl} e_1 & = & (1,2,5) \\ e_2 & = & (2,-3,-1) \\ e_3 & = & (2,-3,-2) \\ x & = & (3,-1,1) \end{array}$

Ответы:
1) $x = -\sqrt{2}e_1^* + 2\sqrt{6}e_2^* + 2\sqrt{3}e_3^*.$
2) $x = e_1^* + 2e_2^* + 3e_3^*.$

## 4. Линейные преобразования и линейные операторы

### 4.1. Матрица линейного преобразования

Рассмотрим два линейных векторных пространства $R_n$ – размерности $n$ и $R_m$ размерности $m$. Пусть задана матрица чисел:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если записать матричное равенство:

$$y=Ax \qquad (4.1.1)$$

где $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in R_n$, $y=(y_1,y_2,...,y_m)\in R_m$, то говорят, что задано линейное преобразование векторов. Матрица A называется линейным оператором, задающим отображение пространства $R_n$ *в* $R_m$.

Выражение (4.1.1) через компоненты векторов имеет вид:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (\ 4.1.2.)$$

Очевидно, что из (4.1.2) следует

$$\begin{cases} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots &= \cdots\cdots\cdots \\ y_n &= a_{n1}x_n + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n. \end{cases} \qquad (4.1.3)$$

Если матрица квадратная и невырожденная, то есть $det(A)\neq 0$, то вектор $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ будет принадлежать тому же пространству $R_n$. Тогда говорят, что оператор $A$ отображает пространство $R_n$ в себя. Такие операторы будем использовать в дальнейшем при изложении темы. Линейные операторы удовлетворяют следующим соотношениям:

1) $A(x+y)=A(x)+A(y)$
2) $A(\lambda x)=\lambda A(x)$, *где* $x,y \in R_n$ ,$\lambda$- действительное число.
3) $(A+B)x=A(x)+B(x)$
4) $(AB)x=A(B(x))$, где матрицы $A$, $B$ квадратные и одной и той же размерности. Существует нулевой оператор 0, переводящий все векторы пространства $R_n$ в нулевые векторы $0x=0$ и тождественный оператор $E$, оставляющий вектор неизменным, т.е. $Ex=x$.

*Пример.* В пространстве $R_3$ в базисе $e_1,e_2.e_3$ линейный оператор задан матрицей $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. Найти образ вектора $x=e_1-2e_2+3e_3$.

*Решение.* По формулам (4.1.2), (4.1.3) имеем

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

*Ответ.* $y=10e_1+7e_2+17e_3$.

## 4.2. Изменение матрицы линейного преобразования при переходе к новому базису

В параграфе 3.7. мы рассмотрели пересчет координат фиксированного вектора при переходе к новому базису, ввели понятие матрицы перехода. Теперь пусть в старом базисе $e_1$. $e_2 \ldots ,e_n$ имеется линейное преобразование в матричной форме:

$$Q=AP, \qquad (4.2.1)$$

где $Q$–матрица-столбец, составленная из компонент вектора $q=(q_1,q_2,\ldots q_n)$ и $P$-матрица-столбец, составленная из компонент вектора $p=(p_1,p_2,\ldots,p_m)$. $A$- матрица преобразования векторов

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

При переходе к новому базису $e_1^/,e_2^/,...,e_n^/$ те же векторы $p$, $q$ будут иметь новые координаты $p=(p_1^/,p_2^/,...p_m^/)$ и $q=(q_1^/,q_2^/,..,q_n^/)$. Преобразование имеет вид:

$$Q' = A'P' \qquad (4.2.2)$$

Найдем матрицу A´ из следующих соображений. По формуле (3.7.5) имеем:

$$P=CP' \qquad (4.2.3)$$

$$Q=CQ' \qquad (4.2.4)$$

Здесь $C$-матрица перехода. В равенство (4.2.1) подставим (4.2.3) и (4.2.4), получим:

$$CQ'=ACP' \qquad (4.2.5)$$

Умножим равенство (4.2.5) слева на матрицу $C^{-1}$, обратную матрице перехода: $C^{-1}CQ'=C^{-1}ACP'$.

Так как $C^{-1}C=E$- единичная матрица, то получаем:

$$Q'=C^{-1}ACP' \qquad (4.2.6)$$

Это и есть линейное преобразование векторов в новом базисе. Матрица линейного оператора в новом базисе вычисляется по формуле:

$$A'=C^{-1}AC \qquad (4.2.7)$$

Заметим, что из матричной формулы (4.2.7) следует числовое равенство $Det(A')=det(A)$, то есть величина определителя матрицы оператора не зависит от выбора базиса. Действительно, используя свойства определителей, получаем:

$$|A'| = |C^{-1}AC| = |C^{-1}||A||C| = |C^{-1}||C||A| = |C^{-1}C||A| = |E||A| = |A|.$$

*Пример.* В базисе $e_1$, $e_2$ преобразование имеет матрицу $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}$. Найти матрицу этого преобразования в новом базисе $e_1^{/}, e_2^{/}$, *если* $e_1^{/} = e_1 - e_2$, $e_2^{/} = 3e_1 + 2e_2$.

*Решение.* Составим матрицу перехода к новому базису, располагая координаты векторов $e_1'$=(1,-1), $e_2'$=(3,2) по столбцам, $C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$. Вычислим обратную матрицу $C^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Матрица оператора $A$ в новом базисе будет получена по формуле (4.2.7):

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-7 & 2\\ 4 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-9 & -17\\ -2 & 24\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{9}{5} & -\frac{17}{5}\\ -\frac{2}{5} & \frac{24}{5}\end{pmatrix}$$

Ответ. Матрица оператора в новом базисе равна:

$$\begin{pmatrix}-\frac{9}{5} & -\frac{17}{5}\\ -\frac{2}{5} & \frac{24}{5}\end{pmatrix}.$$

## 4.3. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Определение. Ненулевой вектор $X$ называется собственным вектором линейного оператора $A$, если найдется такое действительное число λ , что $AX=\lambda X$. Число λ называется собственным значением оператора (матрицы) $A$.

Из определения следует, что собственный вектор после действия на него оператором $A$, переходит в тот же вектор, умноженный на число, то есть в вектор коллинеарный самому себе. Из матричного равенства $AX=\lambda X$ следуют равенства, связывающие компоненты вектора $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & \lambda x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & \lambda x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = & \ldots. \\ a_{n1}x_n + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = & \lambda x_n. \end{cases} \qquad (4.3.1)$$

Перепишем систему уравнений (4.3.1) в виде:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = & 0, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n & = & 0. \end{cases} \qquad (4.3.2)$$

или $(A-\lambda E)X=0$

Система (4.3.2) однородная и для существования ненулевых решений такой системы необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы равнялся нулю.

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & ... & a_{2n} \\ ...... & ....... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.3.3)$$

Уравнение(4.3.3) называется характеристическим уравнением оператора (матрицы) *A*. Левая часть этого уравнения является многочленом степени n относительно собственного значения λ. Этот многочлен называется характеристическим многочленом линейного оператора (матрицы) *A*. Характеристический многочлен не зависит от выбора базиса. Это свойство многочлена имеет место потому, что величина определителя матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса.

*Пример*. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

*Решение*. Составим характеристическое уравнение (4.3.3)

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

Корни этого квадратного уравнения $\lambda_1=2$ *и* $\lambda_2=3$ являются собственными значениями матрицы. Для каждого собственного значения найдем соответствующее множество собственных векторов.

а) Подставим $\lambda=\lambda_1=2$ в систему уравнений (4.3.2), получим

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 & = & 0 \\ -x_1 + 2x_2 & = & 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2x_2.$$

Придавая $x_2=k$ любые числовые значения $(x_2 \neq 0)$, получим множество коллинеарных векторов $e_1=(2k,k)$, $k \neq 0$.

б) Аналогично для $\lambda=\lambda_2=3$ найдем систему уравнений:

$\begin{cases} -2x_1+2x_2 & = & 0 \\ -x_1+x_2 & = & 0 \end{cases} \Rightarrow x_1=x_2$. Обозначим $e_2=(k,k)$ ,$k \neq 0$.

Собственные векторы имеют важное свойство: если собственные значения попарно различны, тогда системы соответствующих собственных векторов линейно независимы и образуют базис векторного пространства. Матрица линейного оператора в базисе из собственных векторов, соответствующих различным собственным значениям, имеет диагональный вид:

$$A^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

*Пример*. Привести матрицу $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ к диагональному виду.

*Решение*. Для данной матрицы в предыдущем примере найдены собственные значения и собственные векторы. Пусть $k=1$, тогда векторы $e_1=(2,1)$ *и* $e_2=(1, 1)$ образуют базис как два линейно независимых вектора в пространстве $R_2$. Найдем матрицу $A^*$ в выбранном базисе по формуле $A^* = C^{-1} A\ C$. Матрица перехода $C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и обратная к ней $C^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Значит:

$$A^*=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}.$$

*Ответ*. $A^*=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ имеет диагональный вид, на диагонали расположены собственные значения данной матрицы.

*Пример*. Привести к диагональному виду матрицу:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -3 & 2 & 0\\ 4 & 2 & 4\end{pmatrix}.$$

*Решение*. Найдем собственные значения матрицы А. Для этого составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & -1\\ -3 & 2-\lambda & 0\\ 4 & 2 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Раскрывая любым способом определитель, получим уравнение третьей степени $(2-\lambda)(\lambda-3)^2=0$, которое имеет собственные значения $\lambda_1=2$, $\lambda_2=\lambda_3=3$. Так как среди корней характеристического уравнения имеются кратные корни, то нельзя выбрать базис из собственных векторов и матрица $A$ не приводится к диагональному виду.

**Упражнения для самостоятельного решения**

1. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & 5\end{pmatrix}$.

2. Привести матрицу к диагональному виду $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Составить матрицу $C$ перехода к базису из собственных векторов и найти матрицу $B= C^{-1} A\ C$.

Ответы: *1.* $\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 4, \ l_1 = (-2k, k), \ l_2(k, -k), k \neq 0.$

*2.* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$.

*3.* $C=\begin{pmatrix} -6 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

## 4.4.Ортогональные и симметрические матрицы линейных преобразований

Матрица $A$ является симметрической, если она не меняется при транспонировании, то есть $A=A^T$. Например, следующие матрицы симметрические $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ , $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4 & 0 & 9 \\ -1 & 9 & 7 \end{pmatrix}$.

Свойства симметрических матриц:

1. Собственные значения симметрической матрицы – действительные числа.
2. Любая симметрическая матрица имеет по крайней мере один набор попарно перпендикулярных собственных векторов.

3. Симметрическая матрица может быть приведена к диагональному виду.

Матрица $Q$ называется ортогональной, если при транспонировании она совпадает со своей обратной матрицей, то есть $Q^{-1} = Q^T$ .

Свойства ортогональных матриц $Q$:

1) Если матрица ортогональная, то $Q^{-1}$ также ортогональная.

2) Столбцы матрицы $Q$ образуют ортонормированную систему векторов.

3) Для каждой симметрической матрицы $A_C$ существует такая ортогональная матрица $Q$, что матрица $Q^{-1}A_CQ$ является диагональной.

На основании перечисленных свойств симметрических и ортогональных матриц (преобразований) можно составить план приведения симметрической матрицы к диагональному виду:

1. Найти собственные значения матрицы.
2. Сформировать базис из ортогональных собственных векторов.
3. Составить матрицу перехода $C$ к базису из собственных векторов.
4. Столбцы матрицы $C$ подвергнуть нормализации (т.е. каждый собственный вектор разделить на его длину), в результате получится матрица $Q$.
5. Транспонируя матрицу $Q$, получим обратную матрицу $Q^{-1}$.
6. Вычислим:

произведение $A^* = Q^{-1}A_CQ$, $A^*$ –диагональная матрица.

*Пример*. Привести симметрическую матрицу $A$ к диагональному виду с помощью ортогональной матрицы $Q$, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

*Решение*. Составим характеристическое уравнение $det(A\text{-}\lambda E)=0$,

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 5\lambda^2 - 9\lambda + 45 = 0.$$

Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 5$ – действительные и различные числа. Определим собственные векторы. В систему уравнений:

$$\begin{cases} (3-\lambda)x_1 - 2x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ -2x_1 - (1+\lambda)x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + (3-\lambda)x_3 & = & 0 \end{cases}$$

подставим собственные значения.

1) $\lambda=\lambda_1=-3$ получим

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 & = & 0 \\ x_2 + 2x_3 & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 & = & x_3 \\ x_2 & = & -2x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 & = -x_3 \\ x_2 & = -2x_3 \end{cases}$$

$x_3$ - любое число, и не равно нулю. Пусть $x_3=-1$, тогда имеем собственный вектор $e_1=(1, 2, -1)$.

2) Возьмем $\lambda=\lambda_2=3$.

$$\begin{cases} -2x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + 2x_2 & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 & = x_3 \\ x_1 & = -x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 & = -x_3 \\ x_2 & = x_3 \end{cases}.$$

Пусть $x_3=1$. Второй собственный вектор $e_2$=(-1, 1, 1).

3) Подставим $\lambda=\lambda_3=5$.

$$\begin{cases} -2x_1-2x_2+2x_3 &= 0 \\ -2x_1-6x_2+2x_3 &= 0 \\ 2x_1+2x_2-2x_3 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2-x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 &= x_3 \\ x_2 &= 0 \end{cases}.$$

Если $x_3=1$, то $e_3=(1,0,1)$. Полученные собственные векторы попарно ортогональны:
$e_1e_2=0,\quad e_1e_3=0,\quad e_2e_3=0$. Имеем ортогональный базис: $e_1=(1,2,-1),\ \ e_2=(-1,1,1)\ \ e_3=(1,0,1)$. Матрица перехода к этому базису $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Можно было бы найти $C^{-1}$ и тогда диагональная матрица $A^*=C^{-1}AC$. Однако быстрее нормировать базис, разделив каждый вектор на его длину и составить матрицу $Q$. Действительно

$$e_1^*=(1/\sqrt{6},2/\sqrt{6},-1/\sqrt{6})\quad e_2^*=(-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}),\quad e_3^*=(1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2}),$$

- это ортонормированный базис. Матрица

$$Q=\begin{Bmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \end{Bmatrix}$$ - ортогональная матрица.

По свойству $Q^T=Q^{-1}$ запишем обратную матрицу:

$Q^{-1}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Вычислив произведение трех матриц, получим диагональную матрицу $\dot{A}^*=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим теперь пример, в котором собственные числа не все различны.

*Пример*. Привести к диагональному виду матрицу А, определяющую линейное преобразование в ортогональном базисе: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

*Решение*. Составим характеристическое уравнение.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 27\lambda - 54 = 0. \quad (*)$$

Решая уравнение, найдем собственные значения $\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = -3, \quad \lambda_3 = 6.$ Для нахождения собственных векторов в систему уравнений

$(A - \lambda E)X = \begin{cases} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 - 4x_3 & = 0 \\ 2x_1 + (-2-\lambda)x_2 - 2x_3 & = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 + (1-\lambda)x_3 & = 0 \end{cases}$ подставим сначала двукратный корень $\lambda=\lambda_1=\lambda_2=-3$. Получим следующую систему $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 & = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 & = 0, \\ -4x_1 - 2x_2 + 4x_3 & = 0 \end{cases}$ которая сводится к одному уравнению:

$$2x_1+x_2-2x_3=0 \qquad (**)$$

Из последнего уравнения можно сделать вывод, считая его скалярным произведением, что все собственные векторы $e_1$, $e_2$ , соответствующие кратному собственному значению $\lambda=-3$, лежат в одной плоскости и ортогональны вектору $e=(2,1,-2)$, координаты которого есть коэффициенты уравнения (**). Следовательно, вектор е принадлежит множеству собственных векторов, соответствующих $\lambda_3=6$. Этот факт можно проверить следующим образом: подставим $\lambda_3=6$ в систему (*), а затем подставим туда координаты вектора $e$. Получим

$$\begin{cases} -5x_1+2x_2-4x_3 &= 0 \\ 2x_1-8x_2-2x_3 &= 0. \\ -4x_1-2x_2-5x_3 &= 0 \end{cases}$$

При $x_1=2$ $x_2=1$, $x_3=-2$: $-10+2+8=0$ $4-8+4=0$, $-8-2+10=0$. Поэтому $e_3=e=(2,1,-2)$. Теперь, пользуясь уравнением (**), подберем решение $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=2$ и обозначим собственный вектор $e_2=(1, 2, 2)$. Чтобы найти еще один собственный вектор из бесчисленного множества векторов, соответствующих $\lambda=-3$, примем во внимание, что искомый вектор должен быть ортогонален векторам $e_2$ и $e_3$. Следовательно, его можно вычислить как векторное произведение, т.е. $e_1=[e_3,e_2]$. В координатной форме это выглядит следующим образом:

$$e_1=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=6i-6j+3k,\quad e_1=(6,-6,3).$$

Таким образом, новый ортогональный базис из собственных векторов: $e_1=(6,-6,3)$, $e_2=(1,2,2)$, $e_3=(2,1,-2)$. Разделим каждый вектор на его длину $|e_1|=9,\ \ |e_2|=3,\ \ |e_3|=3,$ и получим ортонормированный базис $e_{10}=(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})$, $e_{20}=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$, $e_{30}=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$.

Ортогональная матрица:

$$Q=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица: $Q^{-1} = Q^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Диагональная матрица, определяющая преобразование в новом ортонормированном базисе, найдется по формуле:

$$A^*=Q^{-1}AQ=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

*Ответ:* $A^* = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Если собственные значения симметрической матрицы в трехмерном линейном пространстве все одинаковы $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda$, то матрица определяет преобразование подобия с коэффициентом $\lambda$. В этом случае все векторы пространства являются собственными векторами. В качестве нового базиса можно взять любую тройку единичных попарно ортогональных векторов, например $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$.

## 5.Квадратичные формы

### 5.1.Матрица квадратичной формы

Определение. Квадратичной формой $L(x_1,x_2,\dots,x_n)$ от $n$ переменных называется сумма, каждый член которой является или квадратом одной из переменных или произведением двух разных переменных, взятых с некоторыми коэффициентами – действительными числами.

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum\sum a_{ij} x_i x_j .$$

Мы будем рассматривать квадратичные формы с двумя переменными

$$L(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \qquad (5.1.1)$$

и с тремя переменными

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \\ +2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \end{aligned} \qquad (5.1.2)$$

Квадратичные формы можно записать в матричной форме, введя в рассмотрение матрицу А квадратичной формы. Для (5.1.1) матрица имеет вид $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Для (5.1.2) матрица записывается в виде:

А= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$.

То есть матрица квадратичной формы является симметрической матрицей. Для переменных вводится матрица-столбец $X$ и транспонированная $X^T$ - матрица – строка. Тогда квадратичная форма может быть записана в виде произведения трех матриц:

$$L = X^T AX \qquad ( 5.1.3)$$

*Пример.* Дана квадратичная форма $L(x_1,x_2)=2x_1^2-4x_1x_2+5x_2^2$. Записать ее в матричной форме.

*Решение.* Матрица квадратичной формы составляется следующим образом: элементы главной диагонали равны коэффициентам при квадратах переменных, остальные элементы равны половине коэффициента при произведении $x_1x_2$:

$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. Матрица $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $X^T=(x_1 \quad x_2)$.

Таким образом, $L(x_1,x_2)=(x_1,x_2)\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

*Пример.* Написать матрицу квадратичной формы $L(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+5x_1x_2-4x_1x_3+x_2^2+6x_3^2$.

*Решение.* На главной диагонали располагаем элементы при квадратах переменных $a_{11}$=3, $a_{22}$=1, $a_{33}$=6, остальные элементы $a_{12}=a_{21}$=5/2, $a_{13}=a_{31}$=-2, $a_{23}=a_{32}$=0.

Следовательно, A=$\begin{pmatrix} 3 & 2.5 & -2 \\ 2.5 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Ранг матрицы квадратичной формы называют рангом квадратичной формы. Если ранг совпадает с числом переменных квадратичной формы, то ее называют невырожденной. Если ранг меньше, то квадратичная форма– вырожденная.

*Пример.* Является ли невырожденной квадратичная форма $L(x_1,x_2,x_3) = x^2_1+4x_1x_3$?

*Решение.* Составим матрицу квадратичной формы $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Найдем ранг матрицы $A$. Так как величина ранга не зависит от элементарных преобразований матрицы, то отбрасывая нулевую строку, найдем минор второго порядка $M_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-4\neq 0 \Rightarrow r(A)=2,$ то есть ранг меньше трех переменных, входящих в квадратичную форму. Следовательно, данная квадратичная форма вырожденная.

### 5.2.Канонический вид квадратичной формы

В квадратичной форме $L = X^T AX$ можно выполнить линейное преобразование переменных

$X = CY$, $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)^T$, $C = (c_{ij})_{nn}$ – невырожденная квадратная матрица n-ого порядка. Учитывая линейное преобразование переменных, получим равенство:

$$L = X^T AX = (CY)^T A(CY) = Y^T C^T ACY = Y^T (C^T AC)Y \qquad (5.2.1)$$

Здесь использовано свойство $(CY)^T = Y^T C^T$. Новая матрица квадратичной формы

$$A^* = C^T AC \qquad (5.2.2)$$

Первоначальная квадратичная форма и полученная из нее (5.2.1) с помощью невырожденного линейного преобразования называются эквивалентными квадратичными формами.

*Пример.* Дана квадратичная форма $L(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$. Найти эквивалентную квадратичную форму $L(y_1,y_2)$, используя линейное преобразование переменных $x_1=y_1-2y_2$, $x_2=y_1+y_2$.

*Решение.* По условию матрица данной квадратичной формы $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Заданное линейное преобразование в матричной форме $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Следовательно, матрица $C=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Теперь по формуле (5.2.2) новая матрица получается:

$$A^* = C^T AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

*Ответ.* Квадратичная форма, эквивалентная данной $L(y_1, y_2) = 6y_1^2 + 3y_2^2$.

**Определение**. Квадратичная форма имеет канонический вид, если все коэффициенты $a_{ij} = 0 \quad i \neq j$, т.е. $L = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{nn}x_n^2$ и ее матрица является диагональной.

В примере после линейного преобразования квадратичная форма приняла канонический вид.

Справедливо следующее утверждение: любая квадратичная форма с помощью невырожденного линейного преобразования переменных может быть приведена к каноническому виду. Возможны два способа приведения квадратичных форм к каноническому виду.

*Первый способ.* Идея метода состоит в том, что путем тождественных преобразований в квадратичной форме последовательно выделяются полные квадраты по всем переменным.

*Пример.* Привести к каноническому виду квадратичную форму $L = 2x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2$.

*Решение.* Выделим полный квадрат по переменной $x_1$:

$L = 2(x_1^2 - 3x_1x_2 + \frac{9}{4}x_2^2) - \frac{9}{2}x_2^2 + 3x_2^2 = 2(x_1 - \frac{3}{2}x_2)^2 - \frac{3}{2}x_2^2$.

Введя новые переменные $y_1 = x_1 - \frac{3}{2}x_2$, $y_2 = x_2$, получим канонический вид $L = 2y_1^2 - \frac{3}{2}y_2^2$.

*Пример.* Привести к каноническому виду квадратичную форму $L = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$.

*Решение.* Сначала сгруппируем все слагаемые, содержащие $x_1$, и затем дополним их до полного квадрата:

$$L=(x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3)+3x_2^2+5x_3^2+6x_2x_3=(x_1^2+4x_1(x_2+x_3)+4(x_2+x_3)^2)-4(x_2+x_3)^2$$

$$3x_2^2+5x_3^2+6x_2x_3=(x_1+2x_2+2x_3)^2-4(x_2^2+2x_2x_3+x_3^2)+3x_2^2+5x_3+6x_2x_3.$$

Теперь полный квадрат по $x_1$ оставляем неизменным, а среди оставшихся слагаемых объединяем все члены, содержащие $x_2$, и выделяем полный квадрат:

$$L=(x_1+2x_2+2x_3)^2-(x_2^2+2x_2x_3+x_3^2)+2x_3^2=(x_1+2x_2+2x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_3^2$$

Обозначим $y_1=x_1+2x_2+2x_3$, $y_2=x_2+x_3$, $y_3=x_3$, в результате получаем канонический вид $L = y_1^2 - y_2^2 + 2y_3^2$.

*Второй способ.* Матрица квадратичной формы всегда симметрическая, поэтому она имеет действительные собственные значения и сводится к диагональному виду с помощью линейного ортогонального преобразования $X=QY$, где $Q$ – ортогональная матрица (см. пример в 4.4.1)

Если квадратичная форма зависит от двух переменных $L=L(x_1,x_2)$ и $\lambda_1,\lambda_2$ собственные значения ее матрицы , то канонический вид квадратичной формы $L = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$.

Если $L=L(x_1,x_2,x_3)$ и ее матрица имеет собственные значения $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ , то канонический вид в новых переменных $L = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$.

Чтобы найти линейное преобразование переменных, приводящих квадратичную форму к каноническому виду, нужно найти собственные векторы, нормировать их и записать матрицу $Q$.

*Пример.* Привести к каноническому виду квадратичную форму $L = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2$.

*Решение*. Матрица данной квадратичной формы $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3-\lambda)^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0.$$

Собственные значения $\lambda_1=1, \lambda_2=5$. Квадратичная форма в новом базисе из собственных векторов имеет канонический вид $L = y_1^2 + 5y_2^2$.

Найдем собственные векторы. Для этого в систему уравнений вида (4.3.2) $\begin{cases} (3-\lambda)x_1 - 2x_2 & = & 0 \\ -2x_1 + (3-\lambda)x_2 & = & 0 \end{cases}$, подставим собственные значения.

а) При $\lambda=\lambda_1=1$ получим $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 & = & 0 \\ -2x_1 + 2x_2 & = & 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2$.

Пусть $x_2=1$ *и* $x_1=1$. Тогда $e_1=(1,1)$.

б) При $\lambda=\lambda_2=5$ система имеет вид $\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 & = & 0 \\ -2x_1 - 2x_2 & = & 0 \end{cases}$.

Таким образом, $x_1=-x_2$ и за второй собственный вектор можно взять $e_2=(-1,1)$. Очевидно, что $e_1e_2=0$ – векторы ортогональны. Нормируя $e_1$, $e_2$, запишем ортонормированный базис:

$$e_1=(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}), \quad e_2 = (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}).$$

Матрица $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Следовательно, преобразование координат получено.

$$x_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}y_2, \quad x_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}y_2.$$

Заметим, что в случае ортогональных преобразований легко получить обратное преобразование переменных, воспользовавшись свойством $Q^{-1}=Q^{T}$. Обратная матрица равна $Q^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $Y=Q^{-1}X$. Поэтому выполняются соотношения $y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2$, $y_2=\frac{-1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2$.

*Ответ*. Канонический вид

$L=y_1^2+5y_2^2$, $y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2$, $y_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2$.

*Пример*. Привести квадратичную форму к каноническому виду и найти ортогональное преобразование переменных, если $L=3x_1^2-x_2^2+3x_3^2+6x_1x_2-2x_1x_3+6x_2x_3$.

*Решение*. Матрица квадратичной формы A=$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 & -1 \\ 3 & -1-\lambda & 3 \\ -1 & 3 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda^3-5\lambda^2-16\lambda+80=0,$$

корни которого $\lambda_1=5$, $\lambda_2=-4$ , $\lambda_3=4$ Тогда канонический вид квадратичной формы $L=5y_1^2-4y_2^2+4y_3^2$. Заметим,. что нумерация собственных значений произвольная. Например, если взять

$\lambda_1=-4, \lambda_2=4, \quad \lambda_3=5,$ то канонический вид будет

$L=-4y_1^2+4y_2^2+5y_3^2$. Для каждого такого варианта обозначений меняется соответственно расположение (нумерация) базисных собственных векторов (то есть система координат), а смысл квадратичной формы не меняется.

Найдем теперь ортонормированный базис и преобразование переменных. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} (3-\lambda)x_1+3x_2-x_3 & = & 0 \\ 3x_1+(-1-\lambda)x_2+3x_3 & = & 0 \\ -x_1+3x_2+(3-\lambda)x_3 & = & 0 \end{cases}$$ , в.которую

последовательно подставим собственные значения.

а) При $\lambda$=*5* система примет вид $\begin{cases} -2x_1+3x_2-x_3 & = & 0, \\ 3x_1-6x_2+3x_3 & = & 0, \\ -x_1+3x_2-2x_3 & = & 0. \end{cases}$

Выпишем матрицу системы и подвергнем ее элементарным преобразованиям:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r=2$$

Получим систему эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3 & = & 0 \\ x_2-x_3 & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1-3x_2 & = & -2x_3 \\ x_2 & = & x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 & = & x_3 \\ x_2 & = & x_3 \end{cases}.$$

Если $x_3=k$ – любое число, не равное нулю, то множество собственных векторов ($k,k,k$). Пусть $k=1$, тогда $e_1=(1,1,1)$.

б) При $\lambda$=*-4* имеем систему $\begin{cases} 7x_1+3x_2-x_3 & = & 0, \\ 3x_1+3x_2+3x_3 & = & 0, \\ -x_1+3x_2+7x_3 & = & 0. \end{cases}$

Преобразуем матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 24 & 48 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow r = 2$$

По последней матрице запишем систему уравнений $\begin{cases} x_1 - 3x_2 & = & 7x_3 \\ \quad x_2 & = & -2x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 & = & x_3 \\ x_2 & = & -2x_3 \end{cases}$ При $x_3=k$, где $k\neq 0$, множество собственных векторов ($k$, -2$k$, $k$). Возьмем $k=1$, тогда $e_2=(1, -2, 1)$.

в) При $\lambda=4$ получим систему уравнений $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - x_3 & = & 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 & = & 0 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 & = & 0 \end{cases}$. Здесь первое и третье уравнения одинаковые, поэтому запишем матрицу системы в виде: $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r = 2$. Откуда следует, что $\begin{cases} x_1 - 3x_2 & = & -x_3 \\ \quad x_2 & = & 0 \end{cases}$. Если $x_3=k$, где $k\neq 0$, то множество собственных векторов (-$k$, 0, $k$). Пусть $k=1$, тогда $e_3=(-1,0,1)$. Получили собственные векторы $e_1=(1,1,1)$, $e_2=(1,-2,1)$, $e_3=(-1, 0, 1)$. Легко увидеть, что они попарно ортогональны. Запишем ортонормированный базис:

$$e_{10} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ e_{20} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right),\ e_{30} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),.$$

Ортогональная матрица $Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Транспонируя матрицу Q, получим матрицу:

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

И так как $Y = Q^{-1}X$, записываем ортогональное преобразование переменных:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3 \\ y_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_3 \qquad (*) \\ y_3 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 \end{aligned}$$

*Ответ.* Квадратичная форма имеет канонический вид $L = 5y_1^2 - 4y_2^2 + 4y_3^2$ в базисе из собственных векторов и может быть получена с помощью преобразования координат в виде (*).

Отметим некоторые свойства квадратичных форм:

1. Канонический вид квадратичной формы не определяется однозначно, так как зависит от выбора системы координат (базисных векторов).
2. В каноническом виде число слагаемых с положительными (отрицательными) коэффициентами не зависит от способа приведения формы к каноническому виду.
3. Ранг матрицы квадратичной формы не меняется при линейных преобразованиях переменных. Ранг всегда равен количеству ненулевых коэффициентов в канонической форме.
4. Квадратичная форма называется положительно (отрицательно) определенной, если при всех значениях переменных, из которых хотя бы одно отлично от нуля, выполняется

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) > 0, \ (L(x_1, x_2, ..., x_n) < 0.$$

Например, $L = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2$ – положительно определенная форма, а $L = -x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$ – отрицательно определенная.

5.Если все собственные значения матрицы квадратичной формы положительны, то $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ >0 положительно определена. Если все собственные значения отрицательны, то $(L(x_1, x_2, ..., x_n)$ < 0- отрицательно определенная форма.

6.Знакоопределенность квадратичной формы может быть установлена с помощью критерия Сильвестра: если все главные миноры матрицы квадратичной формы положительны, то квадратичная форма положительно определена. Если все главные миноры матрицы нечетного порядка положительны, то квадратичная форма отрицательно определена.

Продемонстрируем на примере перечисленные свойства.

*Пример.* Дана квадратичная форма $L = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2$. Ее канонический вид $L = y_1^2 + 5y_2^2$ получен с помощью собственных значений $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$. Приведем теперь эту форму к каноническому виду по первому способу с помощью выделения полных квадратов.

$$L = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 = 3(x_1^2 - \tfrac{4}{3}x_1x_2 + \tfrac{4}{9}x_2^2) - 3\tfrac{4}{9}x_2^2 + 3x_2^2 =$$

$$= 3(x_1 - \tfrac{2}{3}x_2)^2 - \tfrac{4}{3}x_2^2 + 3x_2^2 = 3(x_1 - \tfrac{2}{3}x_2)^2 + \tfrac{5}{3}x_2^2.$$

Таким образом,

$$L = 3z_1^2 + \tfrac{5}{3}z_2^2, \qquad z_1 = x_1 - \tfrac{2}{3}x_2, \qquad z_2 = x_2.$$

Канонический вид квадратичной формы зависит от выбора линейного преобразования переменных, то есть от выбора системы координат. Если, например, взять $L=1$, то уравнения $y_1^2 + 5y_2^2 = 1$ *и* $3z_1^2 + \tfrac{5}{3}z_2^2 = 1$ являются уравнениями одного и того же эллипса в разных системах координат.

*Пример.* В предыдущем примере мы обратили внимание на то, что канонический вид квадратичной формы можно записать разными способами:

$$L = 5y_1^2 - 4y_2^2 + 4y_3^2 \quad \textit{или} \quad l = -4y_1^2 + 4y_2^2 + 5y_3^2$$

$$\textit{или} \quad L = -4y_1^2 + 5y_2^2 + 4y_3^2.$$

Во всех этих записях число слагаемых с положительными и отрицательными коэффициентами одно и то же.

*Пример.* Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму $L = 3x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3$.

*Решение.* Составим матрицу данной квадратичной формы $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и вычислим главные угловые миноры:

$M_1$=3>0, $M_2$= $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$ >0,

$M_3$= $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3-1-1=1$>0.

Следовательно, по критерию Сильвестра квадратичная форма положительно определенная.

**Упражнения для самостоятельного решения**

1. Привести к каноническому виду квадратичную форму $L=x^2-y^2-4xy$ путем выделения полного квадрата. Какую кривую определяет уравнение $L(x,y)=1$?

2. Привести к каноническому виду квадратичную форму, выделяя полные квадраты, $L = x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$.

3. Привести к каноническому виду квадратичную форму, определив собственные значения ее матрицы $L = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_2x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

4. Привести к каноническому виду квадратичную форму: $L = x_1^2 - 4x_2x_3 + x_3^2$.

5. Найти ортогональное преобразование неизвестных, приводящее квадратичную форму к каноническому виду:

$$L = 3x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

Ответы:

1. $L = x_1^2 - 5y_1^2;\quad x_1 = x - 2y,\ \ y_1 = y.$

2. $L = y_1^2 - y_2^2 - 4y_3^2;\ y_1 = x_1 + x_2,\ \ y_2 = x_2 - x_3,\ y_3 = x_3.$

3. $L = 2y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2.$

4. $L = y_1^2 - 4y_2^2 + y_3^2;\quad \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = -2x_2 + x_3 \end{cases}$

5. $L = 5y_1^2 + 4y_2^2 - 4y_3^2;$

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3,$$
$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_3,$$
$$y_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}x_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_3.$$

**Вопросы для самоконтроля**

| | |
|---|---|
| 1. | Сформулируйте определение матрицы. |
| 2. | Как умножить матрицу на число? |
| 3 | Какие матрицы можно перемножить? |
| 4 | Что значит транспортировать матрицу? |
| 5 | Перечислите виды матриц. |
| 6 | Какая матрица имеет определитель? |
| 7 | Какие свойства имеет определитель матрицы? |
| 8 | Что такое миноры и алгебраические дополнения? |
| 9 | Какие правила вычисления определителя матрицы? |
| 10 | Для какой матрицы существует обратная матрица? |
| 11 | Запишите вид обратной матрицы. |
| 12 | Дайте определение ранга матрицы. |
| 13 | Какие преобразования матрицы называются элементарными? |
| 14 | Какие матрицы называются эквивалентными? |
| 15 | Сформируйте теорему о ранге эквивалентных матриц. |
| 16 | Какая система линейных уравнений имеет единственное решение? |
| 17 | В чём заключается правило Крамера решения систем линейных уравнений. |
| 18 | Сформулируйте идею метода Гаусса решения систем линейных уравнений. |
| 19 | Какие условия должны выполняться для того, чтобы система линейных уравнений была совместна? |
| 20 | Дайте определение линейного векторного пространства. |
| 21 | Что значит векторы линейно зависимы или линейно независимы? |
| 22 | В чем заключается правило определения линейной зависимости или независимости системы векторов? |

| | |
|---|---|
| 23 | Какова роль ранга системы векторов? |
| 24 | Как находится фундаментальная система решений и размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений? |
| 25 | Приведите план построения общего решения неоднородной системы линейных уравнений. |
| 26 | Как определить, составляют ли векторы ортогональный базис? |
| 27 | Как осуществляется переход к новому базису? |
| 28 | Дайте определение линейного оператора линейных векторных пространств. |
| 29 | Как изменяется матрица линейного преобразования при переходе к новому базису? |
| 30 | Как изменяется матрица линейного преобразования при переходе к новому базису? |
| 31 | Дайте определение собственных векторов и собственных значений линейного оператора. |
| 32 | Какая матрица называется ортогональной? |
| 33 | Что означает симметрическая матрица? |
| 34 | Перечислите свойства симметрических и ортогональных матриц. |
| 35 | Как симметрическую матрицу привести к диагональному виду? |
| 36 | Что значит квадратичная форма и её матрица? |
| 37 | Как привести квадратичную форму к каноническому виду? |

## Индивидуальные задания для студентов по теме « Линейная алгебра».

1. Вычислить, используя свойства определителя.

| Вар. | Определитель | Вар. | Определитель | Вар. | Определитель |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\begin{vmatrix} -4 & 4 & -3 & -2 \\ -5 & 4 & -3 & -3 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & -4 & -8 \end{vmatrix}$ | 2 | $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ | 3 | $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 9 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \\ -4 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ |
| 4 | $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ -5 & 2 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ | 5 | $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ -5 & 2 & 1 & -2 \\ -6 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ | 6 | $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 10 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \\ -5 & 3 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ |
| 7 | $\begin{vmatrix} 6 & -8 & 3 & 2 \\ -5 & 1 & 0 & -4 \\ 7 & -3 & 1 & 5 \\ -3 & -6 & 2 & -6 \end{vmatrix}$ | 8 | $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 10 \\ -4 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ -3 & 5 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ | 9 | $\begin{vmatrix} 7 & 4 & -2 & 10 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \\ 6 & 2 & 1 & 9 \\ -5 & 1 & -3 & -6 \end{vmatrix}$ |
| 10 | $\begin{vmatrix} 6 & -2 & -2 & 3 \\ -7 & 1 & 0 & -6 \\ 1 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$ | 11 | $\begin{vmatrix} 7 & -2 & -3 & 3 \\ -7 & 1 & 0 & -6 \\ 1 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & -0 \end{vmatrix}$ | 12 | $\begin{vmatrix} 2 & -4 & -7 & -8 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & -9 & 1 & -15 \\ -2 & 4 & -8 & 5 \end{vmatrix}$ |
| 13 | $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -4 & -3 \\ -5 & 1 & 0 & -4 \\ 2 & -6 & 1 & -3 \\ -7 & 2 & -5 & -9 \end{vmatrix}$ | 14 | $\begin{vmatrix} 4 & -3 & -4 & -2 \\ -5 & 1 & 0 & -4 \\ 2 & -6 & 1 & -3 \\ -7 & 2 & -5 & -9 \end{vmatrix}$ | 15 | $\begin{vmatrix} 7 & -3 & -4 & 1 \\ -5 & 1 & 0 & -4 \\ 4 & -6 & 1 & -1 \\ -7 & 2 & -4 & -9 \end{vmatrix}$ |
| 16 | $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 8 & 15 \\ -5 & 1 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 7 & 3 \end{vmatrix}$ | 17 | $\begin{vmatrix} 6 & -1 & 4 & 10 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -10 & 3 & 1 & -6 \\ -2 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$ | 18 | $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -10 & 3 & 1 & -6 \\ -5 & -5 & 3 & -6 \end{vmatrix}$ |
| 19 | $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 & 2 \\ -8 & 1 & 0 & -7 \\ -6 & 4 & 1 & -1 \\ -2 & -8 & 0 & -9 \end{vmatrix}$ | 20 | $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 9 & 16 \\ -7 & 1 & 0 & -3 \\ -3 & 5 & 1 & 3 \\ -6 & -4 & 8 & -1 \end{vmatrix}$ | 21 | $\begin{vmatrix} 6 & -6 & -4 & -3 \\ -7 & 1 & 0 & -6 \\ -11 & -8 & 1 & -18 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \end{vmatrix}$ |
| 22 | $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 \\ 10 & 1 & 0 & -9 \\ 7 & 4 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 4 & -3 \end{vmatrix}$ | 23 | $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -3 & 8 \\ -10 & 1 & 0 & -9 \\ -7 & 4 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -4 & -4 \end{vmatrix}$ | 24 | $\begin{vmatrix} -3 & -1 & 4 & 1 \\ -10 & 1 & 0 & -9 \\ -9 & 5 & 1 & -3 \\ -8 & -7 & 3 & -11 \end{vmatrix}$ |

| Вар. | Определитель | Вар. | Определитель | Вар. | Определитель |
|---|---|---|---|---|---|
| 25 | $\begin{vmatrix} -1 & -3 & 8 & 5 \\ -12 & 1 & 0 & -11 \\ -5 & 3 & 1 & -1 \\ -9 & -7 & 7 & -8 \end{vmatrix}$ | 26 | $\begin{vmatrix} 6 & 7 & 7 & 21 \\ -10 & 1 & 0 & -9 \\ -8 & 8 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 6 & 3 \end{vmatrix}$ | 27 | $\begin{vmatrix} 6 & -2 & 7 & 12 \\ -17 & 1 & 0 & -16 \\ -5 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -6 & 6 & 2 \end{vmatrix}$ |
| 28 | $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 & 15 \\ -16 & 1 & 0 & -15 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ -8 & -1 & 7 & -1 \end{vmatrix}$ | 29 | $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 10 & 18 \\ -13 & 1 & 0 & -12 \\ -7 & 7 & 1 & 1 \\ -5 & -5 & 9 & 0 \end{vmatrix}$ | 30 | $\begin{vmatrix} 2 & 9 & 8 & 20 \\ -20 & 1 & 0 & -19 \\ -11 & 9 & 1 & -1 \\ -7 & -1 & 7 & 0 \end{vmatrix}$ |

## 2. Решить по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы

| Вар. | Система уравнений | Вар. | Система уравнений |
|---|---|---|---|
| 1 | $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -7 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$ | 2 | $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$ |
| 3 | $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$ | 4 | $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$ |
| 5 | $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$ | 6 | $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$ |
| 7 | $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}$ | 8 | $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$ |
| 9 | $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$ | 10 | $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$ |

| Вар. | Система уравнений | Вар. | Система уравнений |
|---|---|---|---|
| 11 | $\begin{cases} x_1+5x_2+3x_3 = 11 \\ 3x_1-2x_2-x_3 = 3 \\ 5x_1+x_2-3x_3 = 1 \end{cases}$ | 12 | $\begin{cases} x_1-3x_2+x_3 = -5 \\ 2x_1+x_2-3x_3 = -1 \\ 5x_1+2x_2-x_3 = 3 \end{cases}$ |
| 13 | $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3 = 4 \\ 3x_1-x_2+x_3 = 3 \\ x_1+3x_2+2x_3 = 2 \end{cases}$ | 14 | $\begin{cases} 2x_1+x_3 = 5 \\ 3x_1-x_2-x_3 = -2 \\ x_1+2x_2 = 5 \end{cases}$ |
| 15 | $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3 = 6 \\ x_1-2x_2-2x_3 = -3 \\ 4x_1+x_2-6x_3 = 1 \end{cases}$ | 16 | $\begin{cases} 5x_1+2x_2-5x_3 = 0 \\ x_1-3x_2+2x_3 = 3 \\ 3x_1+x_2-x_3 = 2 \end{cases}$ |
| 17 | $\begin{cases} 3x_1-x_2-2x_3 = 1 \\ x_1+x_2-5x_3 = 0 \\ 2x_1+3x_2-10x_3 = 3 \end{cases}$ | 18 | $\begin{cases} 5x_1-x_2-3x_3 = 0 \\ x_1+2x_2+2x_3 = 3 \\ 2x_1-2x_2+x_3 = 6 \end{cases}$ |
| 19 | $\begin{cases} x_1+3x_2+x_3 = 0 \\ 2x_1+5x_2+3x_3 = 1 \\ 3x_1-x_2-2x_3 = -5 \end{cases}$ | 20 | $\begin{cases} 4x_1+7x_2+3x_3 = 1 \\ x_1-2x_2-x_3 = 2 \\ 2x_1+x_2-x_3 = 3 \end{cases}$ |
| 21 | $\begin{cases} 2x_1+x_2-4x_3 = 0 \\ x_1-3x_2+x_3 = 3 \\ 3x_1-x_2-5x_3 = 1 \end{cases}$ | 22 | $\begin{cases} 5x_1-2x_2-x_3 = -4 \\ 2x_1+3x_2-x_3 = 1 \\ x_1-4x_2+2x_3 = 0 \end{cases}$ |
| 23 | $\begin{cases} x_2-x_3 = 2 \\ 3x_1-x_2-2x_3 = 1 \\ x_1+2x_2-5x_3 = 3 \end{cases}$ | 24 | $\begin{cases} 2x_1+2x_2-3x_3 = 4 \\ x_1-x_2+5x_3 = 0 \\ 3x_1-2x_2+x_3 = 1 \end{cases}$ |
| 25 | $\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3 = 0 \\ 5x_1-2x_2+x_3 = 2 \\ 3x_1+x_2-4x_3 = 1 \end{cases}$ | 26 | $\begin{cases} 2x_1-x_2+7x_3 = 0 \\ x_1+3x_2-5x_3 = 7 \\ x_1-x_2+4x_3 = -1 \end{cases}$ |
| 27 | $\begin{cases} 7x_1-2x_2-3x_3 = 1 \\ x_1+3x_2+x_3 = 3 \\ 2x_1-x_2-x_3 = 0 \end{cases}$ | 28 | $\begin{cases} 3x_1-x_2-5x_3 = 0 \\ x_1+2x_2+2x_3 = -1 \\ 2x_1+x_2+x_3 = 1 \end{cases}$ |

| Вар. | Система уравнений | Вар. | Система уравнений |
|---|---|---|---|
| 29 | $\begin{cases} 5x_1-2x_2+x_3 &= 0 \\ 2x_1+2x_2+3x_3 &= 3 \\ x_1+x_2+4x_3 &= -1 \end{cases}$ | 30 | $\begin{cases} x_1+3x_2-3x_3 &= 0 \\ 5x_1-x_2-14x_3 &= 1 \\ x_1+5x_2-2x_3 &= 1 \end{cases}$ |

3. Выбрать пары матриц, которые можно перемножить, и выполнить умножение.

| Вар. | Матрицы |
|---|---|
| 1 | $A=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&2&2&-2\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-1&1&0&1\end{pmatrix}$ |
| 2 | $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&2&2&-2\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3&3\\-1&1\end{pmatrix}$ |
| 3 | $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\1&0&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&2&2&-2\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$ |
| 4 | $A=\begin{pmatrix}0&1&2&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&2&2&-2\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ |
| 5 | $A=\begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\0&2&0&-2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-1&-1\\3&-3\end{pmatrix}$ |
| 6 | $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\0&2&0&-2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}0&2\\2&0\\0&2\end{pmatrix}$ |

| Вар. | Матрицы |
|---|---|
| 7 | $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3\\ -3\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ |
| 8 | $A=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & 3 & 3 & -3\\ 1 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$ |
| 9 | $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 0 & -2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ |
| 10 | $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ |
| 11 | $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3\\ -3\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ |
| 12 | $A=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & 3 & 0 & -3\\ 1 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$ |
| 13 | $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ |
| 14 | $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 4 & 0\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ |

| Вар. | Матрицы |
|---|---|
| 15 | $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3\\ -3\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ |
| 16 | $A=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 6\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & 3 & 1 & 6\\ 0 & 1 & 6 & 0\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0 & 6\end{pmatrix}$ |
| 17 | $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 7 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 7\\ 0 & 2 & 7 & 1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 7 & 7\end{pmatrix}$ |
| 18 | $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 8\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 8\\ 0 & 2 & 0 & 9\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}0 & \text{ё}1\\ -1 & 8\\ -8 & 1\end{pmatrix}$ |
| 19 | $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 9 & 0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 9 & 1 & 9\\ 0 & 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}9\\ -9\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ |
| 20 | $A=\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-3 & 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$ |
| 21 | $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ |
| 22 | $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ |

| Вар. | Матрицы |
|---|---|
| 23 | $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2 & 3\\0 & 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}2\\-3\\-3\\2\end{pmatrix}$ |
| 24 | $A=\begin{pmatrix}2\\4\\0\\2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 0 & -4\\2 & 2 & 4 & 2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 0 & 2\end{pmatrix}$ |
| 25 | $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\5 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 2 & 5 & 5\\0 & -2 & 0 & 5\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-2 & 2\\5 & 5\end{pmatrix}$ |
| 26 | $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\0 & 2 & 6\\-6 & 6 & -1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0 & 6\\2 & 6 & 2 & 6\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\-2 & 6\\6 & 2\end{pmatrix}$ |
| 27 | $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\0 & 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3\\-3\\0\\1\end{pmatrix}$ |
| 28 | $A=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\8\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0 & 8\\2 & 8 & 0 & 8\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0 & 8\end{pmatrix}$ |
| 29 | $A=\begin{pmatrix}2 & 9\\1 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 9 & 0\\2 & 9 & 9 & 2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-2 & -1\\-1 & -9\end{pmatrix}$ |

| Вар. | Матрицы |
|---|---|
| 30 | $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&3&0\\0&3&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&1&1&-3\\0&3&0&3\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}0&3\\-3&0\\0&1\end{pmatrix}$ |

4. Решить матричное уравнение.

| Вар. | Уравнение |
|---|---|
| 1 | $X\cdot\begin{pmatrix}2&-1\\1&3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\1&-1\end{pmatrix}^T+3X\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}$ |
| 2 | $2\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&2\\1&-1\end{pmatrix}\cdot X=3\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}^T-\begin{pmatrix}6&5\\-1&-1\end{pmatrix}\cdot X$ |
| 3 | $\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}^T-X\cdot\begin{pmatrix}2&2\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\1&3\end{pmatrix}^T+X\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}$ |
| 4 | $\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot X\cdot(\begin{pmatrix}2&2\\-1&1\end{pmatrix}^T-3\begin{pmatrix}2&2\\2&0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}6&5\\-1&1\end{pmatrix}$ |
| 5 | $X\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}-X\begin{pmatrix}1&7\\4&2\end{pmatrix}$ |
| 6 | $X\cdot\begin{pmatrix}3&-2\\2&3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\1&-1\end{pmatrix}^T+2X\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}$ |
| 7 | $6\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7&7\\5&-5\end{pmatrix}\cdot X=5\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}^T-\begin{pmatrix}4&5\\-2&-2\end{pmatrix}\cdot X$ |
| 8 | $6\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}^T-X\cdot\begin{pmatrix}3&3\\-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2\\2&4\end{pmatrix}^T+X\begin{pmatrix}0&0\\5&7\end{pmatrix}$ |

| Вар. | Уравнение |
|---|---|
| 9 | $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \left( \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^T - 4\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ |
| 10 | $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - X\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| 11 | $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^T + X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ |
| 12 | $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X$ |
| 13 | $2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^T + X\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ |
| 14 | $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ |
| 15 | $X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - X\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ |
| 16 | $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^T + 2X \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ |
| 17 | $2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X$ |
| 18 | $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - X \cdot \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}^T - X\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ |
| 19 | $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \left( \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^T$ |

| Вар. | Уравнение |
|---|---|
| 20 | $X\cdot\begin{pmatrix}0&3\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}-X\begin{pmatrix}-5&4\\-4&3\end{pmatrix}$ |
| 21 | $X\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0&1\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\1&-1\end{pmatrix}^T+3X\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}$ |
| 22 | $\begin{pmatrix}0&2\\3&4\end{pmatrix}^T-\begin{pmatrix}3&3\\1&-1\end{pmatrix}\cdot X=2\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&5\\-1&-1\end{pmatrix}\cdot X$ |
| 23 | $2\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}-X\cdot\begin{pmatrix}2&2\\-5&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&3\end{pmatrix}^T-X\begin{pmatrix}3&5\\-1&-1\end{pmatrix}$ |
| 24 | $2\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}\cdot X\cdot(\begin{pmatrix}3&3\\2&-2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}^T$ |
| 25 | $X\cdot\begin{pmatrix}6&0\\7&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-3&-3\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}+X\begin{pmatrix}7&3\\4&8\end{pmatrix}$ |
| 26 | $X\cdot\begin{pmatrix}6&-5\\5&9\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\-1&2\end{pmatrix}^T+2X\cdot\begin{pmatrix}3&-3\\0&3\end{pmatrix}$ |
| 27 | $4\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&2\\1&-1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3&0\\2&-2\end{pmatrix}^T-\begin{pmatrix}3&5\\1&1\end{pmatrix}\cdot X$ |
| 28 | $5\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+X\cdot\begin{pmatrix}5&3\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}^T+X\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ |
| 29 | $\begin{pmatrix}4&-3\\3&-1\end{pmatrix}\cdot X\cdot(\begin{pmatrix}2&3\\3&3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}6&5\\1&1\end{pmatrix}$ |
| 30 | $X\cdot\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\-3&1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&2\\-3&0\end{pmatrix}^T-X\begin{pmatrix}1&-1\\-2&-3\end{pmatrix}$ |

5. Найти ранг матрицы

| Вар. | Матрица | Вар. | Матрица |
|---|---|---|---|
| 1 | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ | 2 | $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 0 \\ 10 & -3 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ |
| 3 | $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 8 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ | 4 | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ |
| 5 | $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ | 6 | $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| 7 | $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ | 8 | $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ |
| 9 | $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ | 10 | $\begin{pmatrix} 3 & -7 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ |
| 11 | $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ | 12 | $\begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 & 2 \\ -7 & -5 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ |

| Вар. | Матрица | Вар. | Матрица |
|---|---|---|---|
| 13 | $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ | 14 | $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ |
| 15 | $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ | 16 | $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ |
| 17 | $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ | 18 | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \\ 7 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| 19 | $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ | 20 | $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ |
| 21 | $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -8 & 1 \\ 0 & 7 & -7 & 0 \end{pmatrix}$ | 22 | $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 5 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ |
| 23 | $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ | 24 | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ |

| Вар. | Матрица | Вар. | Матрица |
|---|---|---|---|
| 25 | $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ -7 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ | 26 | $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ |
| 27 | $\begin{pmatrix} -1 & -9 & 6 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ | 28 | $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ |
| 29 | $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ | 30 | $\begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -1 & -7 \end{pmatrix}$ |

6. Найти решение системы уравнений методом Гаусса.

| Вар. | Система | Вар. | Система |
|---|---|---|---|
| 1 | $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$ | 2 | $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$ |
| 3 | $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$ | 4 | $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases}$ |

| Вар. | Система | Вар. | Система |
|---|---|---|---|
| 5 | $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4 = 3 \\ x_2-3x_3-5x_4 = 6 \\ 2x_1-x_2+4x_3+x_4 = 2 \\ 3x_1+2x_3+x_4 = 5 \end{cases}$ | 6 | $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3+x_4 = 0 \\ x_1+2x_2+5x_4 = 3 \\ 3x_1+x_2+2x_3+x_4 = 2 \\ x_1-2x_2+3x_3-x_4 = -4 \end{cases}$ |
| 7 | $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3+2x_4 = 4 \\ x_1+x_2+x_3-x_4 = -2 \\ 2x_1-2x_2+x_3+2x_4 = 3 \\ x_1-3x_2+2x_3+x_4 = 0 \end{cases}$ | 8 | $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-3x_4 = -2 \\ 2x_1-3x_2-x_3+2x_4 = 0 \\ x_1+x_2+4x_3+2x_4 = -1 \\ 3x_1+4x_2+2x_3+x_4 = 3 \end{cases}$ |
| 9 | $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3-x_4 = 2 \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4 = 6 \\ 2x_1+x_2-3x_3+x_4 = 2 \\ x_1-x_2+4x_3-2x_4 = -1 \end{cases}$ | 10 | $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3+5x_4 = 4 \\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4 = 2 \\ x_1-x_2+x_3+2x_4 = 0 \\ x_1+5x_2+x_3+x_4 = 5 \end{cases}$ |
| 11 | $\begin{cases} 4x_1+3x_2-x_3+x_4 = 3 \\ x_1+x_2-2x_3+2x_4 = -1 \\ 3x_1-x_2+x_3-x_4 = 4 \\ x_1+2x_2-x_3-x_4 = 0 \end{cases}$ | 12 | $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4 = 3 \\ 3x_2+5x_3+2x_4 = -2 \\ 2x_1-x_2+3x_4 = 3 \\ 3x_1-x_2+2x_3+x_4 = 3 \end{cases}$ |
| 13 | $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+2x_4 = 0 \\ x_1+x_2+3x_3-x_4 = 1 \\ 3x_1-x_2+x_3+2x_4 = 4 \\ x_1-3x_2-2x_3+x_4 = 2 \end{cases}$ | 14 | $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4 = 1 \\ 3x_2-x_3+2x_4 = 3 \\ 2x_1+x_2-3x_3-4x_4 = 1 \\ 3x_1-2x_2+x_3-2x_4 = 0 \end{cases}$ |
| 15 | $\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3+2x_4 = 5 \\ x_1+x_2-2x_3+x_4 = 2 \\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4 = -1 \\ x_1+3x_2+x_3+x_4 = 0 \end{cases}$ | 16 | $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+3x_4 = 4 \\ 3x_1-x_2-2x_3-x_4 = 0 \\ 3x_2+4x_3+2x_4 = 1 \\ x_1+x_2+2x_3+2x_4 = 1 \end{cases}$ |
| 17 | $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3+4x_4 = 0 \\ 3x_1-2x_2+x_3+2x_4 = -2 \\ 2x_1-2x_2-3x_3+x_4 = 3 \\ x_1+2x_2+5x_3-3x_4 = 0 \end{cases}$ | 18 | $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4 = 2 \\ 2x_2-x_3-x_4 = 1 \\ 3x_1-x_2+2x_3+x_4 = -1 \\ x_1+3x_2+2x_3+x_4 = 3 \end{cases}$ |

| Вар. | Система | Вар. | Система |
|---|---|---|---|
| 19 | $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -3 \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 8 \end{cases}$ | 20 | $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$ |
| 21 | $\begin{cases} 5x + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ | 22 | $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$ |
| 23 | $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ | 24 | $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 4x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$ |
| 25 | $\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$ | 26 | $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + -2x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$ |
| 27 | $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$ | 28 | $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$ |
| 29 | $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ | 30 | $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$ |

7. Исследовать систему на совместность, написать множество решений.

| Вар. | Система | Вар. | Система |
|---|---|---|---|
| 1 | $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+x_4 = 1 \\ 2x_1-x_2+2x_3-x_4 = -2 \\ 5x_1+x_2+3x_3-x_4 = -3 \end{cases}$ | 2 | $\begin{cases} 5x_1-x_2+4x_3+6x_4 = 2 \\ 2x_1+x_2-x_3+5x_4 = 3 \\ 3x_1-x_2+5x_3+x_4 = 1 \end{cases}$ |
| 3 | $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+4x_4 = 0 \\ x_1-x_2+5x_3-x_4 = 1 \\ 4x_1+x_2+9x_3+2x_4 = 2 \end{cases}$ | 4 | $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3-x_4 = 4 \\ x_1+x_2-x_3+3x_4 = 2 \\ 2x_1+4x_2-5x_3+10x_4 = 2 \end{cases}$ |
| 5 | $\begin{cases} 2x_1-6x_2+2x_3-x_4 = 4 \\ x_1-3x_2+x_3-x_4 = 2 \\ x_1+x_2+3x_3+2x_4 = 1 \end{cases}$ | 6 | $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3+4x_4 = 5 \\ x_1+x_2+x_3-3x_4 = 1 \\ 5x_1+4x_2+x_3-2x_4 = 7 \end{cases}$ |
| 7 | $\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3-2x_4 = 2 \\ x_1+2x_2+2x_3-x_4 = 3 \\ 2x_1-3x_2-x_3-x_4 = -1 \end{cases}$ | 8 | $\begin{cases} x_1+3x_2-4x_3+5x_4 = 6 \\ 3x_1+2x_2-x_3+6x_4 = 7 \\ 2x_1-x_2+3x_3+x_4 = 1 \end{cases}$ |
| 9 | $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3 = 1 \\ 2x_1-x_2-x_3 = 0 \\ 3x_1+2x_2+x_3 = 2 \\ 6x_1-x_2+3x_3 = 3 \end{cases}$ | 10 | $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3 = 1 \\ 2x_1+x_2+x_3 = 0 \\ 4x_1-x_2+7x_3 = 2 \\ 5x_1+x_2+5x_3 = 1 \end{cases}$ |
| 11 | $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4 = 0 \\ x_1+2x_2-x_3+3x_4 = 2 \\ 3x_1-4x_2+3x_3+x_4 = 2 \end{cases}$ | 12 | $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-4x_4 = 3 \\ x_1-x_2+2x_3-x_4 = 1 \\ 2x_1+7x_2+7x_3-11x_4 = 8 \end{cases}$ |
| 13 | $\begin{cases} 3x_1-2x_2-x_3+x_4 = 2 \\ 4x_1-x_2-3x_3+3x_4 = 1 \\ x_1+x_2-2x_3+2x_4 = -1 \end{cases}$ | 14 | $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+3x_4 = 1 \\ 4x_1-4x_2+x_3+7x_4 = 7 \\ x_1-x_2+x_3+2x_4 = 3 \end{cases}$ |
| 15 | $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4 = 3 \\ x+2x_2+x_3+2x_4 = -12 \\ 2x_1+4x_2-4x_3+x_4 = 0 \end{cases}$ | 16 | $\begin{cases} -x_1+3x_2-x_3+x_4 = 0 \\ 2x_1-x_2+x_3+2x_4 = 1 \\ 3x_1+x_2+x_3+5x_4 = 2 \end{cases}$ |

| Вар. | Система | Вар. | Система |
|---|---|---|---|
| 17 | $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3 &= 1 \\ x_1+x_2-2x_3 &= 0 \\ 4x_1-x_2-x_3 &= 1 \\ 8x_1-2x_2-2x_3 &= 2 \end{cases}$ | 18 | $\begin{cases} 3x_1-4x_2+x_3 &= 3 \\ x_1-x_2+2x_3 &= 2 \\ 2x_1-3x_2-x_3 &= 1 \\ -x_1+2x_2+3x_3 &= 1 \end{cases}$ |
| 19 | $\begin{cases} 5x_1+x_2-2x_3+5x_4 &= 6 \\ x_1+x_2-2x_3+3x_4 &= 2 \\ 3x_1-x_2+2x_3-x_4 &= 1 \end{cases}$ | 20 | $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-x_4 &= 5 \\ -3x_1-2x_2+x_3-2x_4 &= 2 \\ 5x_1+x_2+2x_3+x_4 &= 3 \end{cases}$ |
| 21 | $\begin{cases} x_1+4x_2-2x_3+3x_4 &= -2 \\ x_1-x_2+3x_3-2x_4 &= 3 \\ 2x_1+3x_2+x_3-x_4 &= 1 \end{cases}$ | 22 | $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+2x_4 &= 5 \\ -x_1-2x_2+3x_3+x_4 &= 2 \\ x_1-x_2+2x_3+3x_4 &= 7 \end{cases}$ |
| 23 | $\begin{cases} x_1-+3x_2 &= 1 \\ -x_1+2x_2-x_3 &= 0 \\ 3x_1-x_2+2x_3 &= 1 \\ 2x_1+x_2+x_3 &= 1 \end{cases}$ | 24 | $\begin{cases} 3x_1+4x_3 &= 3 \\ x_1-x_2+3x_3 &= 1 \\ 2x_1+x_2+x_3 &= 2 \\ -x_1-2x_2+2x_3 &= -1 \end{cases}$ |
| 25 | $\begin{cases} x_1-3x_2+x_3 &= 1 \\ -x_1+2x_2-x_3+2x_4 &= 0 \\ x_1-4x_2+x_3+2x_4 &= 2 \end{cases}$ | 26 | $\begin{cases} 6x_1-x_2+5x_3-7x_4 &= 3 \\ 4x_1-3x_2+x_3-x_4 &= 1 \\ x_1+x_2+2x_3-3x_4 &= 2 \end{cases}$ |
| 27 | $\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3+5x_4 &= -1 \\ -x_1-x_2+3x_3+4x_4 &= -3 \\ 2x_1-x_2+x_3+x_4 &= 2 \end{cases}$ | 28 | $\begin{cases} x_1+3x_2-4x_3 &= -2 \\ x_1-2x_2+x_3 &= 3 \\ 2x_1+x_2-3x_3 &= 1 \\ 3x_1-x_2-2x_3 &= 4 \end{cases}$ |
| 29 | $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-3x_4 &= 1 \\ 3x_1-x_2+2x_3-x_4 &= 4 \\ 2x_1+x_2-x_3+x_4 &= 3 \end{cases}$ | 30 | $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+x_4 &= 2 \\ -x_1+x_2-2x_3+3x_4 &= 1 \\ 3x_1-x_2+4x_3+5x_4 &= 5 \end{cases}$ |

8. Проверить, образуют ли векторы $e_1$, $e_2$, $e_3$ ортогональный базис, и найти разложение вектора $X$ по этому базису.

| Вар. | Векторы | Вар. | Векторы |
|---|---|---|---|
| 1 | $e_1=(1, 1, 0)$, $e_2=(3, -3, 4)$, $e_3=(-2, 2, 3)$, $X=(1, 2, 3)$. | 2 | $e_1=(1, -1, 1)$, $e_2=(3, 3, 0)$, $e_3=(1, -1, -2)$, $X=(-1, -2, -3)$. |
| 3 | $e_1=(2, 1, -2)$, $e_2=(-1, 4, 1)$, $e_3=(1, 0, 1)$, $X=(1, 2, 3)$. | 4 | $e_1=(1, -2, 0)$, $e_2=(0, 0, 4)$, $e_3=(2, 1, 0)$, $X=(-1, -2, 0)$. |
| 5 | $e_1=(2, 3, 5)$, $e_2=(2, -3, 1)$, $e_3=(-9, -4, 6)$, $X=(1, 2, 3)$. | 6 | $e_1=(1, 4, 3)$, $e_2=(2, 1, 5)$, $e_3=(3, 4, 2)$, $X=(6, 9, 10)$. |
| 7 | $e_1=(3, 1, 2)$, $e_2=(4, 5, 3)$, $e_3=(2, 2, 4)$, $X=(1, 2, 3)$. | 8 | $e_1=(1, 3, 2)$, $e_2=(1, 1, 1)$, $e_3=(2, 5, 2)$, $X=(2, 14, 5)$. |
| 9 | $e_1=(1, 2, 4)$, $e_2=(1, -1, 1)$, $e_3=(1, 1, 4)$, $X=(1, -5, -2)$. | 10 | $e_1=(1, 2, 4)$, $e_2=(3, 6, 8)$, $e_3=(2, 1, -1)$, $X=(4, 2, 2)$. |
| 11 | $e_1=(2, 3, 4)$, $e_2=(4, 6, -1)$, $e_3=(1, 2, -3)$, $X=(4, 4, 1)$. | 12 | $e_1=(2, 3, 4)$, $e_2=(4, 6, -1)$, $e_3=(1, 2, -3)$, $X=(4, 4, 1)$. |
| 13 | $e_1=(-1, 2, -3)$, $e_2=(2, -1, 2)$, $e_3=(-1, 2, -2)$, $X=(4, 1, 4)$. | 14 | $e_1=(2, -2, 1)$, $e_2=(-1, 3, 1)$, $e_3=(4, -1, -2)$, $X=(-1, 11, 7)$. |
| 15 | $e_1=(-3, 2, 1)$, $e_2=(3, -2, 1)$, $e_3=(-3, 2, -1)$, $X=(-6, 12, -4)$. | 16 | $e_1=(-2, 1, 0)$, $e_2=(2, -2, 3)$, $e_3=(1, 4, 2)$, $X=(13, 4, 15)$. |
| 17 | $e_1=(-1, 2, -3)$, $e_2=(2, -1, 2)$, $e_3=(3, 4, -2)$, $X=(4, 1, 4)$. | 18 | $e_1=(2, -2, 1)$, $e_2=(-1, 3, 1)$, $e_3=(4, -1, -2)$, $X=(-1, 11, 7)$. |
| 19 | $e_1=(-1, 1, 3)$, $e_2=(-1, 2, 4)$, $e_3=(-1, 4, -1)$, $X=(-8, 14, 9)$. | 20 | $e_1=(1, 3, 4)$, $e_2=(-2, 2, -3)$, $e_3=(3, -1, 2)$, $X=(2, -6, -7)$. |
| 21 | $e_1=(1, 1, -2)$, $e_2=(3, -1, 1)$, $e_3=(1, -1, 2)$, $X=(9, 1, -5)$. | 22 | $e_1=(0, -2, 1)$, $e_2=(2, -2, -1)$, $e_3=(-2, 3, 2)$, $X=(-4, -23, 1)$. |
| 23 | $e_1=(3, 2, -1)$, $e_2=(1, -1, 1)$, $e_3=(2, 4, 1)$, $X=(-4, -3, 1)$. | 24 | $e_1=(4, -2, 0)$, $e_2=(-1, 2, -2)$, $e_3=(2, 3, 1)$, $X=(10, 14, 0)$. |
| 25 | $e_1=(3, -2, -1)$, $e_2=(4, 2, 1)$, $e_3=(1, -1, 3)$, $X=(9, 4, -5)$. | 26 | $e_1=(2, 0, -3)$, $e_2=(5, -1, 2)$, $e_3=(1, -1, 2)$, $X=(-1, 3, -9)$. |
| 27 | $E_1=(-6, -3, -2)$, $e_2=(5, -1, 2)$, $e_3=(1, 2, -1)$, $X=(-8, -1, 3)$. | 28 | $e_1=(2, 1, 1)$, $e_2=(-2, 3, 2)$, $e_3=(1, 1, -2)$, $X=(14, 0, 7)$. |

| Вар. | Векторы | Вар. | Векторы |
|---|---|---|---|
| 29 | $e_1$=(1, 1,-2), $e_2$=(3, -1, 1), $e_3$=(1, -1, 2), X=(9, 1, -5). | 30 | $e_1$=(1, 3, 4), $e_2$=(-2, 2, -3), $e_3$=( 3, -1, 2), X=(2, -6, -7). |

9. Определить, является ли система векторов линейно зависимой.

| Вар. | Векторы | Вар. | Векторы |
|---|---|---|---|
| 1 | $X_1$=(-1,1,1), $X_2$=(4,1,-2), $X_3$=(0,-1, 2). | 2 | $X_1$=(1,-1,2), $X_2$=(3,-1,-8), $X_3$=(-1,0,5). |
| 3 | $X_1$=(2,1,0), $X_2$=(-5,0,5), $X_3$=(1, 4, 3) | 4 | $X_1$=(5,3,0), $X_2$=(-1,-6,-1), $X_3$=(0,-1,1) |
| 5 | $X_1$=(5,-6,1), $X_2$=(3,-5,-3), $X_3$=(0, -1, 3) | 6 | $X_1$=(6,3,1), $X_2$=(0,-3,0), $X_3$=(-3,-2 0) |
| 7 | $X_1$=(-6 -2, 1), $X_2$=(3,-2, 1), $X_3$=(0, 0, 3) | 8 | $X_1$=(3,-1,2), $X_2$=(-2,2,-3), $X_3$=(1,3,4). |
| 9 | $X_1$=(5,-1,1), $X_2$=(5,3,2), $X_3$=(9,-1,2). | 10 | $X_1$=(2,5,2), $X_2$=(1,1,1), $X_3$=(1,3 ,2). |
| 11 | $X_1$=(1,1,0), $X_2$=(-1,2,0), $X_3$=(0,3,-3). | 12 | $X_1$=(-1,2,-1), $X_2$=(0,2,-1), $X_3$=(1,2 ,2 ). |
| 13 | $X_1$=(2,0,-1), $X_2$=(3,1,-3), $X_3$=(1,-1,0). | 14 | $X_1$=(0,2,-1), $X_2$=(3,1,2), $X_3$=(1,2 ,1 ). |
| 15 | $X_1$=(-2,-7,6), $X_2$=(-4,4,4), $X_3$=(0,-2 ,3) | 16 | $X_1$=(1,-2,3), $X_2$=(5,-3,4), $X_3$=(2,1 ,-2) |
| 17 | $X_1$=(-7,0 ,7), $X_2$=(1,3 ,1 ), $X_3$=(-2,1 ,-1) | 18 | $X_1$=(1,-1,0), $X_2$=(0,2,-1), $X_3$=(0,2 ,0). |
| 19 | $X_1$=(8,0,-3 ), $X_2$=(-1,-1 ,2), $X_3$=(7,-1,-1) | 20 | $X_1$=(1,-1,2), $X_2$=(4,-7,12), $X_3$=(-1,3,1) |
| 21 | $X_1$=(1,2 ,1), $X_2$=(2,-1,-1 ), $X_3$=(1,1 ,2). | 22 | $X_1$=(-3,-1,3), $X_2$=(1,1,-1), $X_3$=(-2,-1,2) |
| 23 | $X_1$=(1,-1,4), $X_2$=(3,3,-6), $X_3$=(2,1,-1) | 24 | $X_1$=(-1,-2,1), $X_2$=(4,-1,1), $X_3$=(2,0,2) |

| Вар. | Векторы | Вар. | Векторы |
|---|---|---|---|
| 25 | $X_1=(-3,-4,-7)$, $X_2=(1,-2,3)$, $X_3=(2,2,2)$ | 26 | $X_1=(0,-2,8)$, $X_2=(-1,2,-1)$, $X_3=(3,2,-1)$ |
| 27 | $X_1=(1,3,3)$, $X_2=(2,3,-2)$, $X_3=(0,-8,-1)$ | 28 | $X_1=(10,15,2)$, $X_2=(9,10,12)$, $X_3=(2,4,4)$ |
| 29 | $X_1=(2,3,2)$, $X_2=(2,2,3)$, $X_3=(-4,-3,-7)$ | 30 | $X_1=(1,3,3)$, $X_2=(2,4,1)$, $X_3=(1,2,3)$. |

10. Найти фундаментальную систему решений системы уравнений

| Вар. | Система уравнений | Вар. | Система уравнений |
|---|---|---|---|
| 1 | $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3+x_4-3x_5 = 0 \\ x_1+4x_2-7x_3+0x_4+7x_5 = 0 \\ 3x_1-0x_2-x_3+2x_4+x_5 = 0 \\ 5x_1-4x_2+5x_3+4x_4-5x_5 = 0 \end{cases}$ | 2 | $\begin{cases} 2x_1-0x_2-x_3+3x_4+2x_5 = 0 \\ 3x_1+x_2-4x_3+8x_4+x_5 = 0 \\ x_1-x_2+2x_3-2x_4+3x_5 = 0 \\ 5x_1-x_2+0x_3+4x_4+7x_5 = 0 \end{cases}$ |
| 3 | $\begin{cases} 3x_1-x_2+0x_3+x_4+2x_5 = 0 \\ x_1+3x_2+x_3+x_4-3x_5 = 0 \\ 4x_1+2x_2+x_3+0x_4-x_5 = 0 \\ -2x_1+4x_2+x_3-2x_4-5x_5 = 0 \end{cases}$ | 4 | $\begin{cases} 4x_1-2x_2+x_3+0x_4+2x_5 = 0 \\ -x_1+2x_2+x_3-x_4-3x_5 = 0 \\ 3x_1-0x_2+2x_3-x_4-x_5 = 0 \\ -2x_1-2x_2-3x_3+2x_4-0x_5 = 0 \end{cases}$ |
| 5 | $\begin{cases} 5x_1+2x_2-x_3+0x_4-x_5 = 0 \\ x_1-0x_2-x_3+6x_4+3x_5 = 0 \\ 2x_1+x_2-0x_3-3x_4-2x_5 = 0 \\ 3x_1+x_2-x_3+3x_4+x_5 = 0 \end{cases}$ | 6 | $\begin{cases} 0x_1+x_2-3x_3+x_4+4x_5 = 0 \\ x_1+3x_2+2x_3-5x_4+x_5 = 0 \\ 3x_1+2x_2-5x_3-2x_4+5x_5 = 0 \\ 2x_1-3x_2-4x_3+2x_4-0x_5 = 0 \end{cases}$ |
| 7 | $\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3+3x_4-4x_5 = 0 \\ 2x_1+2x_2-2x_3+4x_4-x_5 = 0 \\ 4x_1-0x_2-x_3+7x_4-5x_5 = 0 \\ 0x_1+4x_2-3x_3+x_4+3x_5 = 0 \end{cases}$ | 8 | $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4-4x_5 = 0 \\ 5x_1-x_2+3x_3+x_4+0x_5 = 0 \\ 4x_1-3x_2+3x_3+4x_4-7x_5 = 0 \\ 2x_1+3x_2-2x_3+0x_4+3x_5 = 0 \end{cases}$ |
| 9 | $\begin{cases} 2x_1+x_2+0x_3-x_4-2x_5 = 0 \\ 3x_1-4x_2+4x_3+3x_4+x_5 = 0 \\ x_1-5x_2+4x_3+4x_4+3x_5 = 0 \\ 5x_1-3x_2+4x_3+2x_4-x_5 = 0 \end{cases}$ | 10 | $\begin{cases} 3x_1+2x_2-2x_3+3x_4+4x_5 = 0 \\ -x_1+3x_2+2x_3+0x_4-x_5 = 0 \\ 3x_1+5x_2+x_3+x_4+4x_5 = 0 \\ x_1-0x_2+x_3-2x_4+x_5 = 0 \end{cases}$ |

| Вар. | Система уравнений | Вар. | Система уравнений |
|---|---|---|---|
| 11 | $\begin{cases} 2x_1-5x_2+x_3+2x_4+3x_5 = 0 \\ x_1+0x_2-3x_3+x_4+2x_5 = 0 \\ 2x_1-3x_2+5x_3-4x_4-5x_5 = 0 \\ 0x_1+x_2-2x_3-3x_4-4x_5 = 0 \end{cases}$ | 12 | $\begin{cases} 4x_1-0x_2+2x_3+6x_4-4x_5 = 0 \\ 2x_1-0x_2+x_3+3x_4-2x_5 = 0 \\ 4x_1-2x_2-x_3-6x_4+3x_5 = 0 \\ 6x_1-2x_2+0x_3-3x_4+x_5 = 0 \end{cases}$ |
| 13 | $\begin{cases} 3x_1+6x_2-5x_3+x_4+2x_5 = 0 \\ x_1-2x_2+3x_3-x_4+0x_5 = 0 \\ 2x_1+8x_2-8x_3+2x_4+2x_5 = 0 \\ 4x_1+4x_2-2x_3+0x_4+2x_5 = 0 \end{cases}$ | 14 | $\begin{cases} x_1-3x_2+0x_3+2x_4+x_5 = 0 \\ -x_1-4x_2-2x_3+x_4+9x_5 = 0 \\ 5x_1-0x_2-2x_3+x_4+3x_5 = 0 \\ 7x_1+x_2+0x_3+2x_4-5x_5 = 0 \end{cases}$ |
| 15 | $\begin{cases} 5x_1-0x_2+x_3-x_4+2x_5 = 0 \\ 2x_1+2x_2-0x_3-3x_4-x_5 = 0 \\ -x_1+4x_2-x_3-5x_4-4x_5 = 0 \\ 3x_1-2x_2+x_3+2x_4+3x_5 = 0 \end{cases}$ | 16 | $\begin{cases} 4x_1-2x_2+3x_3-x_4+2x_5 = 0 \\ x_1-x_2+3x_3+0x_4+x_5 = 0 \\ 3x_1-x_2-0x_3-x_4+x_5 = 0 \\ x_1-x_2+3x_3+0x_4+x_5 = 0 \end{cases}$ |
| 17 | $\begin{cases} 7x_1+5x_2-3x_3+x_4+2x_5 = 0 \\ 2x_1+4x_2-x_3-2x_4-2x_5 = 0 \\ 5x_1+x_2-2x_3+3x_4+4x_5 = 0 \\ 3x_1-3x_2-x_3+5x_4+6x_5 = 0 \end{cases}$ | 18 | $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3+5x_4+6x_5 = 0 \\ 3x_1-x_2-2x_3+5x_4+4x_5 = 0 \\ x_1+2x_2-3x_3+0x_4-2x_5 = 0 \\ 4x_1+x_2-5x_3+5x_4+2x_5 = 0 \end{cases}$ |
| 19 | $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+3x_4-2x_5 = 0 \\ x_1+7x_2-5x_3-6x_4+7x_5 = 0 \\ 3x_1+5x_2-x_3+0x_4+3x_5 = 0 \\ 4x_1+4x_2+x_3+3x_4+x_5 = 0 \end{cases}$ | 20 | $\begin{cases} 2x_1+3x_2+0x_3-x_4-2x_5 = 0 \\ 3x_1-3x_2-2x_3+2x_4+x_5 = 0 \\ -x_1+6x_2+2x_3-5x_4-3x_5 = 0 \\ 5x_1-0x_2-2x_3+3x_4-x_5 = 0 \end{cases}$ |
| 21 | $\begin{cases} 3x_1-2x_2+0x_3+x_4+5x_5 = 0 \\ x_1-0x_2-3x_3+2x_4+8x_5 = 0 \\ 2x_1-2x_2+3x_3-x_4-3x_5 = 0 \\ 5x_1-4x_2+x_3+0x_4+2x_5 = 0 \end{cases}$ | 22 | $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3+2x_4+x_5 = 0 \\ 5x_1-x_2+3x_3+5x_4+3x_5 = 0 \\ -3x_1-3x_2+3x_3-x_4-x_5 = 0 \\ 4x_1+x_2+0x_3+3x_4+2x_5 = 0 \end{cases}$ |
| 23 | $\begin{cases} 6x_1-7x_2+5x_3+3x_4+3x_5 = 0 \\ 2x_1-5x_2+4x_3+2x_4+x_5 = 0 \\ 2x_1+3x_2-3x_3-x_4+x_5 = 0 \\ 4x_1-2x_2+x_3+x_4+2x_5 = 0 \end{cases}$ | 24 | $\begin{cases} 7x_1+2x_2+3x_3+x_4+5x_5 = 0 \\ 3x_1+8x_2-x_3+3x_4-3x_5 = 0 \\ 5x_1+5x_2+x_3+2x_4+x_5 = 0 \\ 2x_1-3x_2+2x_3-x_4+4x_5 = 0 \end{cases}$ |
| 25 | $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+0x_4+x_5 = 0 \\ 3x_1-0x_2-x_3+2x_4+3x_5 = 0 \\ x_1+4x_2-5x_3+2x_4+x_5 = 0 \\ 5x_1+6x_2-4x_3+4x_4+5x_5 = 0 \end{cases}$ | 26 | $\begin{cases} 2x_1-0x_2-3x_3+4x_4+5x_5 = 0 \\ x_1-2x_2-0x_3+3x_4+4x_5 = 0 \\ x_1+2x_2-3x_3+x_5 = 0 \\ 2x_1-0x_2-3x_3+4x_4+5x_5 = 0 \end{cases}$ |

| Вар. | Система уравнений | Вар. | Система уравнений |
|---|---|---|---|
| 27 | $\begin{cases} 5x_1+3x_2+2x_3+4x_4+7x_5 = 0 \\ -x_1+5x_2-4x_3+0x_4+3x_5 = 0 \\ 3x_1-x_2+3x_3+2x_4+2x_5 = 0 \\ 2x_1+4x_2-x_3+2x_4+5x_5 = 0 \end{cases}$ | 28 | $\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3+0x_4+3x_5 = 0 \\ -x_1-5x_2+6x_3-3x_4+2x_5 = 0 \\ -3x_1-2x_2+2x_3-3x_4-x_5 = 0 \\ 5x_1-x_2+2x_3+3x_4+4x_5 = 0 \end{cases}$ |
| 29 | $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3+x_4-2x_5 = 0 \\ 4x_1-2x_2+4x_3+x_4+x_5 = 0 \\ 7x_1-3x_2+5x_3-x_4+4x_5 = 0 \\ 2x_1-0x_2-2x_3-3x_4+5x_5 = 0 \end{cases}$ | 30 | $\begin{cases} 3x_1+2x_2-3x_3+x_4-x_5 = 0 \\ x_1+3x_2-5x_3-x_4-4x_5 = 0 \\ 5x_1+x_2-x_3+3x_4+2x_5 = 0 \\ 2x_1-x_2+2x_3+2x_4+3x_5 = 0 \end{cases}$ |

### 11. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

| Вар. | Матрица | Вар. | Матрица |
|---|---|---|---|
| 1 | $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ | 2 | $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ |
| 3 | $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 10 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ | 4 | $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ |
| 5 | $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ | 6 | $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ |
| 7 | $\begin{pmatrix} -4 & 10 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 & -5 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ | 8 | $\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ |

| Вар. | Матрица | Вар. | Матрица |
|---|---|---|---|
| 9 | $\begin{pmatrix} -6 & 7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ | 10 | $\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ |
| 11 | $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ | 12 | $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ |
| 13 | $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ | 14 | $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ |
| 15 | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & -9 & 5 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ | 16 | $\begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 11 & -12 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ |
| 17 | $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -6 & 8 & 0 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ | 18 | $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$ |
| 19 | $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 14 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 26 & 0 \end{pmatrix}$ | 20 | $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ |
| 21 | $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ 3 & -10 & -4 \end{pmatrix}$ | 22 | $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ |
| 23 | $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ | 24 | $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ |

| Вар. | Матрица | Вар. | Матрица |
|---|---|---|---|
| 25 | $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 15 & -3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 16 & 0 \end{pmatrix}$ | 26 | $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 13 & 0 \end{pmatrix}$ |
| 27 | $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 6 & -5 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ | 28 | $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ |
| 29 | $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ | 30 | $\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ |

12. Найти линейное преобразование переменных, приводящее квадратичную форму к каноническому виду.

| Вар. | Квадр.форма $L(x,y)$ | Вар. | Квадр. форма $L(x,y)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $5X^2 - 4XУ + 2У^2$ | 2 | $X^2 - 10XУ + 4У^2$ |
| 3 | $X^2 + 4XУ + 5У^2$ | 4 | $X^2 - 8XУ + У^2$ |
| 5 | $5X^2 + 16XУ + 16У^2$ | 6 | $16X^2 - 16XУ + 5У^2$ |
| 7 | $5X^2 - 4XУ + У^2$ | 8 | $X^2 - 8XУ + У^2$ |
| 9 | $X^2 - 6XУ - У^2$ | 10 | $2X^2 + 8XУ + 9У^2$ |
| 11 | $X^2 + 8XУ + У^2$ | 12 | $4X^2 + 8XУ + 5У^2$ |
| 13 | $-X^2 + 6XУ + У^2$ | 14 | $9X^2 + 12XУ + 5У^2$ |
| 15 | $X^2 - 4XУ + 5У^2$ | 16 | $4X^2 + 4XУ + 2У^2$ |
| 17 | $X^2 - 4XУ + 6У^2$ | 18 | $-X^2 - 6XУ + У^2$ |
| 19 | $5X^2 - 12XУ + 9У^2$ | 20 | $X^2 + 10XУ + 4У^2$ |

| Вар. | Квадр.форма $L(x,y)$ | Вар. | Квадр. форма $L(x,y)$ |
|---|---|---|---|
| 21 | $X^2 + 8XУ + У^2$ | 22 | $X^2 + 6XУ - У^2$ |
| 23 | $5X^2 + 4XУ + У^2$ | 24 | $2X^2 - 4XУ - 7У^2$ |
| 25 | $9X^2 + 6XУ + 5У^2$ | 26 | $2X^2 - 4XУ + 4У^2$ |
| 27 | $5X^2 - 8XУ + 4У^2$ | 28 | $4X^2 + 16XУ + 17У^2$ |
| 29 | $5X^2 + 6XУ + 9У^2$ | 30 | $17X^2 + 16XУ + 4У^2$ |

**Для заметок**

## Литература


1. Блох Э.Л., Лощинский Л.И., Турин В.Я. Основы линейной алгебры и некоторые ее приложения. М., 1971.
2. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. М. 1971.
3. Ефимов Н.В. Квадратичные формы и матрицы М. 1967.
4. Ермаков В.И. и др. Общий курс высшей метематики для экономистов. М. 2002.
5. Карпелевич Ф.И., Садовский Л.Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. М. 1963.
6. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. М. 2000.
7. Кремер Н.Ш. и др. Высшая математика для экономистов. М. 1997.
8. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М. 1963.
9. Новосельцева В.И., Павлова Н.Л. Индивидуальные задания по теме « Линейная алгебра» МИИТ, М. 1994.
10. Новосельцева В.И., Павлова Н.Л. Методические указания для выполнения индивидуальных заданий по теме « Линейная алгебра» для студентов ИЭФ. МИИТ, М. 1996.
11. Новосельцева В. И., Павлова Н. Л. «Линейная алгебра» Учебное пособие. М.: МИИТ, 2006.