МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра «Прикладная математика - 2»

В.И. Новосельцева, Н.Л. Павлова

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебное пособие

МОСКВА - 2006

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ
(МИИТ)

Кафедра «Прикладная математика - 2»

В.И. Новосельцева, Н.Л. Павлова

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Рекомендовано редакционно-издательским советом
университета в качестве учебного пособия
для студентов 1 курса
экономических специальностей

МОСКВА – 2006

УДК – 512.64
Н-76

Новосельцева В.И, Павлова Н.Л. Линейная алгебра. Учебное пособие.- М.:МИИТ, 2006.-125стр.

Учебное пособие содержит изложение теоретических вопросов по линейной алгебре, решение примеров и варианты индивидуальных заданий.

Рецензенты: Зав. кафедрой «Вычислительная математика» МИИТа доцент Деснянский В.Н., профессор МГУ Шмелькин А.Л.

Вера Ивановна Новосельцева
Наталья Леонидовна Павлова
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
Учебное пособие

Подписано в печать Формат Изд.№
Заказ № Усл.п.л. Тираж

127994 Москва, ул. Образцова,15
Типография МИИТа

Оглавление

1.1. Основные понятия и операции над матрицами

Математики называют матрицей (дословный перевод – таблица) совокупность чисел, расположенных в виде прямоугольника. Матрица может быть из любого количества строк и столбцов и этим количеством строк и столбцов определяются ее размеры. Если говорят, что размер матрицы 4х2, то это означает, что в ней 4 строки и 2 столбца, т.е. всего 8 чисел. Примеры различных матриц

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 8 & 1 \\ -2 & 12 & 2 & 21 \end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad D=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

E - единичная матриц , а D - диагональная.

Определенное число, входящее в матрицу, называют ее элементом. Все элементы матрицы обозначают одной буквой, около которой ставят два индекса, первый из которых указывает номер строки, а второй – номер столбца. Например, x_{23} означает, что речь идет о числе, расположенном в строке номер 2 и столбце номер 3. В матрице А элемент x_{23} равен 0, а в матрице Р - x_{23} равен 2. Выберем для обозначения любого номера столбца матрицы букву *j*. Тогда x_{1j} обозначает любой элемент матрицы, находящийся в первой строке и в каком либо столбце. Для обозначения номера строки выберем букву *i*. Тогда x_{i2} обозначает элемент матрицы, находящийся в какой либо строке и во втором столбце. Запись x_{ij} обозначает элемент матрицы, находящийся в строке с номером i и столбце с номером j.

Квадратной матрицей называют ту матрицу, в которой количество столбцов равно количеству строк. Среди матриц А, В, С, Р, приведенных выше, матрица А, D и Е являются квадратными матрицами. Квадратная матрица имеет главную диагональ, проходящую от левого верхнего к правому нижнему углу матрицы.

Пример: Элементы 1, 5, 9 составляют главную диагональ матрицы:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Элемент x_{11}=1 и является диагональным элементом, x_{22}=5, x_{33}=9. Таким образом, элементы диагонали имеют индексы, совпадающие по величине. Любой элемент диагонали обозначают символом x_{ii}. Элементы матрицы, стоящие в какой – либо строке (или столбце) называют вектором. В предыдущем примере векторами являются строки (1 2 3), (4 5 6), (7 8 9) или столбцы

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

матрицы М.

Перемещение элементов матрицы таким образом, что строки становятся столбцами, а столбцы – строками, причем элементы первой строки становятся элементами первого столбца, второй строки – второго столбца и т.д., называется транспонированием.

Пример: Задана матрица A=$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Транспонируем эту матрицу и получаем $A^T=\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

Если B=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, то $B^T=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Суммой двух матриц A+B называем матрицу C, элементы которой получены по правилу $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Пример: Пусть A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & -5 \end{pmatrix}$, вычислить

A+B=C=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Элементы матрицы C в соответствии с определением вычисляются по формулам:

$c_{11}=a_{11}+b_{11}=1+(-1)=0$ $c_{12}=a_{12}+b_{12}=0+1=1$ $c_{22}=a_{22}+b_{22}=(-4)+4=0$,

$c_{13}=a_{13}+b_{13}=2+(-1)=1$ $c_{21}=a_{21}+b_{21}=-3+3=0$ $c_{23}=a_{23}+b_{23}=5+(-5)=0$.

Перечислим без доказательств свойства суммы матриц:

1. A+B=B+A.
2. (A+B) +C +A +(B + C).
3. Если матрицу, все элементы которой равны нулю, обозначить N , тогда A + N =A.
4. Операция суммирования определена лишь для тех матриц, у которых одинаковое число строк и столбцов.

Умножение матрицы A на число λ называем матрицу B, все элементы которой вычисляются по правилу $b_{ij}=\lambda\cdot a_{ij}$.

Для матрицы A=$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ и числа λ=2 вычислить B=λA.

$$B=\lambda\cdot A=2A=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Справедливы следующие свойства операции умножения матрицы на число:

1. 1·A=A 2. (λμ)A=λ(μA)=μ(λA)
3. (λ+μ)·A=λA+μA. 4. λ(A+B)=λA+λB
5.0·A=N 6.λN=N.

Операция умножения матрицы A на число λ определена для матрицы любой конфигурации.

Произведением матриц A·B называется матрица C, каждый элемент которой вычисляется по формуле $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{ik}b_{ki}+\ldots$. Это означает, что для того чтобы получить элемент c_{ij}, стоящий в строке с номером *i* и столбце с номером *j*, надо каждый элемент строки матрицы A с номером *i* умножить на соответствующий элемент матрицы B из столбца с номером *j* и все полученные произведения сложить.

Перемножить две матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$ $и$ $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, в соответствии с правилами получим:

$$A\cdot B=C=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix},$$

$$c_{11}=a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}=2\cdot 1+(-1)\cdot 0=2$$

$$c_{12}=a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22}=2\cdot 2+(-1)\cdot 1=3$$

$$c_{21}=a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21}=3\cdot 1+(-2)\cdot 0=3$$

$$c_{22}=a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}=3\cdot 2+(-2)\cdot 1=4$$

Из указанного правила следует, что невозможно перемножить матрицы А и В произвольной конфигурации. Операция умножения возможна для матриц А и В, у которых число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В. Перечислим основные свойства операции умножения матриц:

1. AB≠ BA 2. A(BC)=(AB)C 3. AN=N

5. Если обозначить Е – матрицу, у которой $e_{ii}=1,\quad e_{ij}(i\neq j)=0$, то ЕА= А. Матрица Е называется единичной матрицей.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Составить матрицу размерности 4х2 и 4х4. Выписать диагональные элементы квадратной матрицы. Указать x_{32} в матрицах.

Решение: Обозначим через А- матрицу размерности 4х2.

Пусть A=$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\\ -3 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}$.Обозначим через В матрицу размерности 4х4. Пусть B=$\begin{pmatrix}3 & -3 & 4 & 5\\ 6 & 6 & -7 & 7\\ 8 & -8 & -9 & -9\\ 1 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$. Матрица

В – квадратная матрица, элементы диагонали: $a_{11}=3,\quad a_{22}=6,\quad a_{33}=-9,\quad a_{44}=0.$ Элемент $a_{32}=4,\quad элемент\quad b_{32}=-8$.

2. Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 5\end{pmatrix}.$$

.

Указать матрицы, для которых возможно произвести сложение и вычислить сумму матриц. Указать матрицы, для которых возможно произвести умножение и вычислить произведение.

Решение: АВ, ВА, АД, ВД·С – возможные произведения, составленные из предложенных матриц. Вычислим

АВ=

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1+(-1)\cdot 0 & 2\cdot 2+(-1)\cdot 1\\ 3\cdot 1+(-2)\cdot 0 & 3\cdot 2+(-2)\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}.$$

BA=
$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 2+2\cdot 3 & 1\cdot(-1)+2\cdot(-2)\\ 0\cdot 2+1\cdot 3 & 0\cdot(-1)+1\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -5\\ 3 & -2\end{pmatrix}.$$

AD=$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 2 & 1 & -7\end{pmatrix}$.

BD=$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3 & 11\\ 2 & 1 & 5\end{pmatrix}$.

DC=$\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ 7 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

Складывать можно матрицы A и B. Вычислим сумму:
$$A + B = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1 & -1+2\\ 3+0 & -2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}.$$

3. Найти матрицу X , для которой 3A–4X=$2\left(BC\right)^T$, если
A=
$$\begin{pmatrix}-3 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -2 & 1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\\ -2 & 2\end{pmatrix}$$
.

Решение: вычислим
BC=$\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\\ -2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 6 & 5\\ -1 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$. Транспонируем полученную матрицу.
$$\left(BC\right)^T=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 6 & 5\\ -1 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}5 & 6 & -1 & -1\\ 3 & 5 & -1 & -2\end{pmatrix}$$ и вычислим
$$2\left(BC\right)^T=2\begin{pmatrix}5 & 6 & -1 & -1\\ 3 & 5 & -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 12 & -2 & -2\\ 6 & 10 & -2 & -4\end{pmatrix}.$$
Из уравнения следует, что
$$4X=3A-2(BC)^T=3\begin{pmatrix}-3 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -2 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10 & 12 & -2 & -2\\ 6 & 10 & -2 & -4\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}-9 & 0 & 3 & 3\\ 6 & 6 & -6 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10 & 12 & -2 & -2\\ 6 & 10 & -2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-19 & -12 & 5 & 5\\ 0 & -4 & -4 & 7\end{pmatrix}$$

Откуда $X=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}-19 & -12 & 5 & 5\\ 0 & -4 & -4 & 7\end{pmatrix}$.

Упражнения для самостоятельного решения

1. Указать размерность матриц, написать значение элементов матриц: $a_{21,}b_{13},c_{32}$.

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\3&-2\\4&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&0&-2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}5&2&-3&-3\\-7&-2&4&2\\-1&2&1&1\\2&-2&-3&4\end{pmatrix}.$$

2. Из предложенных матриц выбрать те, которые можно сложить и провести суммирование. Выбрать матрицы, которые можно перемножить и произвести умножение. Вычислить матрицу 2А-В.

$$A=\begin{pmatrix}1&3&-1\\2&2&5\\4&-1&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&4&-5\\6&4&5\\11&3&6\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-2&0&1\\2&2&2\end{pmatrix}.$$

3. Из предложенных матриц выбрать те, которые можно сложить и произвести суммирование. Выбрать матрицы, которые можно перемножить и произвести умножение.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&3\\3&2\\1&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-2&0\\0&-2\\-1&0\end{pmatrix}.$$

4. Из предложенных матриц выбрать те, которые можно сложить и произвести сложение, выбрать те, которые можно перемножить и произвести перемножение.

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1&6&1\end{pmatrix}.$$

5. Для данных матриц А, В и С проверить выполнение свойств:

1) $(A+B)^T = A^T + B^T$,

2) $(AB)C = A(BC)$, *если* $A=\begin{pmatrix}3&2\\4&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&0\\-3&2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3&1\\3&-1\end{pmatrix}$.

6. Для заданных матриц А, В и С проверить выполнение свойств:

1) $(A+B)+C = A+(B+C)$

2) $(AB)^T = B^T A^T$, *если* $A=\begin{pmatrix}0&3\\4&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1\\3&-1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3&2\\0&4\end{pmatrix}$.

7. Для заданных матриц А, В и С проверить выполнение свойств

1) $A(B+C)=AB+AC$ 2) $(A+B)^T = A^T + B^T$, *если* $A=\begin{pmatrix}3&0\\-1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-4\\0&3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&-1\\2&5\end{pmatrix}$.

8. Произвести указанные действия, найти

$$(3AB)^T - C,\quad \textit{если}\ A=\begin{pmatrix}-1&2&-1&-1\\3&1&1&2\\0&1&2&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&2\\0&-1\\-1&2\\-1&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-3&6&1\\7&-9&2\end{pmatrix}.$$

9. Произвести указанные действия

$$(-1)C^T + (AB),\quad \textit{если}\ A=\begin{pmatrix}-1&2\\1&0\\1&1\\-1&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}6&-3&1&0\\7&2&9&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}7&6&13&-13\\7&-2&1&1\\17&1&-8&-10\\2&0&1&-1\end{pmatrix}.$$

.

10. Произвести указанные действия, вычислив

(CA)$\cdot$(BC), если $C=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$.

1.2. Определитель квадратной матрицы

Каждой квадратной матрице можно поставить в соответствие число, вычисляемое по определенному правилу. Если матрица $A=(a_{ij})_{nn}, n=2,$ то ее определителем называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

(1.2.1.)

Например, для матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ определитель

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1\cdot4+3\cdot2=10$$

Рассмотрим квадратную матрицу третьего порядка.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}.$$

Определителем матрицы третьего порядка называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta_{3a}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Пример. Вычислить определитель третьего порядка

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 2\\ -2 & 3 & 4\end{vmatrix}.$$

Решение.

$$\Delta_3=2\cdot1\cdot4+(-1)\cdot2(-2)+1\cdot3\cdot3-(-2)1\cdot3-2\cdot2\cdot3-(-1)\cdot1\cdot4=19.$$

Чтобы получить правило для вычисления определителя любого порядка, введем понятие минора M_{ij} и алгебраического дополнения элемента a_{ij} квадратной матрицы $A=(a_{ij})_{nn}$. Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-ого порядка называется определитель n-2-го порядка. Полученный из матрицы А вычеркиванием I-й строки и *j*-ого столбца. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-ого порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, то есть $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Пример. Дана матрица третьего порядка

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 1\\ -2 & 5 & 3\end{pmatrix}.$$

Найти миноры M_{11}, M_{12} и алгебраические дополнения A_{11}, A_{12}.

Решение. Вычеркивая первую строку и первый столбец, получим минор $M_{11}=\begin{vmatrix}4 & 1\\ 5 & 3\end{vmatrix}=12-5=7.$ Вычеркивая первую строку и второй столбец, найдем минор $M_{12}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ -2 & 3\end{vmatrix}=11.$ Тогда

$A_{11}=(-1)^2M_{11}=7,\quad A_{12}=(-1)^3M_{12}=-11.$

Ответ. $M_{11}=7,\quad A_{11}=7,\quad M_{12}=11,\quad A_{12}=-11.$

За правило вычисления определителя n-ого порядка примем утверждение следующей теоремы.

Теорема Лапласа. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения.

$$\Delta=\begin{vmatrix}a & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm}\end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},$$ где

i=1,2,…,n.

Эта формула называется разложением определителя по элементам I-й строки. Аналогично имеет место разложение по элементам j-ого столбца.

$\Delta=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{mj}A_{mj}$, где *j*=1,2,…,n. Убедимся в справедливости теоремы на примере определителя третьего порядка, разложив его по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}(-1)^2M_{11}+a_{12}(-1)^3M_{12}+a_{13}(-1)^4M_{13}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-$$

$$a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})=a_{11}a_{22}a_{33}-$$

$$a_{11}a_{32}a_{23}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Полученный ответ совпадает с определением Δ_3.

Пример. Вычислить определитель квадратной матрицы третьего порядка. $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & -2 & 5\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}.$

Решение. Разложим определитель по элементам первой строки $\Delta_3=2A_{11}+0A_{12}-1A_{13}=2\begin{vmatrix}-2 & 5\\ 3 & 4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-57.$

Пример. Вычислить определитель матрицы четвертого порядка. $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2 & 5\\ 0 & 2 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 6\end{pmatrix}.$

Решение. Раскроем определитель данной матрицы по элементам первого столбца

$$\Delta_4=3A_{11}+0A_{21}+0A_{31}+0A_{41}=3(-1)^2\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 5\end{vmatrix}=3\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}1 & 6\\ 0 & 5\end{vmatrix}=3\cdot 2\cdot 1\cdot 5=30.$$

Заметим, что определитель равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали. И вообще, если квадратная матрица имеет под главной диагональю или над ней элементы равные нулю, то ее определитель равен произведению чисел главной диагонали

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

Рассмотрим свойства определителей, которые можно доказать с помощью теоремы Лапласа.

1. При транспонировании матрицы ее определитель не меняется. Из этого свойства следует, что все свойства, сформулированные относительно строк, справедливы и относительно столбцов.
2. Если все элементы какой-либо строки имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3. При перестановке двух строк матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.

4. Определитель, имеющий нулевую строку, равен нулю.

5. Если определитель имеет две одинаковые строки, то он равен нулю.

6. Если определитель имеет две пропорциональные строки, то он равен нулю.

7. Если все элементы какой-либо строки представляют сумму двух слагаемых, то определитель можно представить как сумму двух определителей: у первого в соответствующей строке стоят первые слагаемые, а у второго – вторые, остальные элементы те же, что и у данного определителя:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}+\beta_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha_{21}+\beta_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha_{31}+\beta_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & a_{12} & a_{14} \\ \alpha_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \beta_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \beta_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки матрицы прибавить элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.
9. Сумма произведений элементов какой-либо строки матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки этой матрицы равна нулю.
10. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей. $\Delta(AB) = \Delta(A)\Delta(B)$, где A,B- матрицы n-го порядка. То есть если даже AB$\neq BA$, $\Delta(AB) = \Delta(BA)$.

Приведенные свойства определителей используются при их вычислении.

Пример. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Р*ешение*. Выполним преобразования, которые по свойству 8 не изменят величины определителя: первую строку прибавим ко второй, и, умноженную на 2, вычтем из последней

строки: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} = -102.$

Определитель третьего порядка можно вычислить по определению или продолжить применение свойства 8: третью строку, умноженную на 4, вычитаем из первой строки, умноженную на 3 вычтем из второй, получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 17 & 17 \\ 0 & 14 & 8 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 17 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 34 \cdot (-3) = -102.$$

Примеры для самостоятельной работы

Вычислить определители:

1. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & -9 & 10 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 & -3 \\ -5 & -9 & -15 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & -1 \\ 4 & 9 & 8 & -4 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 4 & 9 & -1 & 2 \\ -4 & -4 & 0 & -2 \\ 8 & 13 & 4 & 6 \\ 5 & 10 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$

1.3. Обратная матрица

Обратной матрицей называют такую матрицу, для которой выполняется условие $A \cdot A^{-1} = E$ *и* $A^{-1} \cdot A = E$. Тогда A^{-1} обозначает обратную матрицу. A^{-1} существует тогда, когда det(A)≠0. Δ=det(A)-определитель квадратной матрицы A. Для вычисления обратной матрицы без доказательства приводим формулу:

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T$, где A_{ij} - алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A.

Рассмотрим квадратную матрицу размерности 3x3: $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, на примере которой объясним построение обратной матрицы. Вычислим det(A) с помощью любого известного правила, получим det(A)=1.

Вычислим алгебраические дополнения каждого элемента матрицы: $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$

т.е. алгебраическое дополнение является произведением (-1) в степени, равной сумме индексов элемента, на определитель той матрицы, которая останется, если вычеркнуть из заданной матрицы A первую строку и первый столбец. По этому правилу

$$A_{129\text{-}1}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1,\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-1,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-3 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-3\ ,A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2,\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}-3 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-3.$$

Теперь вычислим A^{-1} в соответствии с формулой

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -2\\ -1 & -1 & -3\\ -1 & -2 & -3\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -2\\ -2 & -3 & -3\end{pmatrix}.$$

Проверим наши вычисления, используя определение обратной матрицы, т.е. $A\cdot A^{-1}=E$:

$$\begin{pmatrix}-3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -2\\ -2 & -3 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Обратная матрица вычислена верно.

Самостоятельно получите обратную матрицу к матрице $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ и проверьте свои расчеты. Ниже приведено решение этой задачи.

Решение: Вычислим определитель матрицы А: detA=2.

Так как det(A)≠0, то вычислим алгебраические дополнения каждого элемента матрицы А

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix}=-1,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=2,\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-3,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}4 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix}=3,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-4,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & -1\end{vmatrix}=7,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}4 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=2,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2,\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2.$$

Построим A^{-1} в соответствии с теоремой о существовании обратной матрицы

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}^T=\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ 3 & -4 & 7\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix}^T=\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\\ 2 & -4 & -2\\ -3 & 7 & 2\end{pmatrix}$$

.

Проверим полученную матрицу. По определению $AA^{-1}=E$. Умножим А на полученную матрицу A^{-1}:

$$\begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\\ 2 & -4 & -2\\ -3 & 7 & 2\end{pmatrix}=\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

1.4. Решение простейших матричных уравнений

Пусть требуется решить уравнение AX=B , где A, B, X – матрицы. Если A такая, что det(A)≠0 , то у нее существует A^{-1}. Тогда произведем тождественное преобразование уравнения, умножив левую и правую часть на матрицу A^{-1}. Каждый раз размещаем множитель A^{-1} слева от сомножителей. Получим $A^{-1}\cdot(A\cdot X)=A^{-1}\cdot B$. По определению матрицы $A^{-1}\cdot A=E$, а E·X=X. Таким образом, левая часть уравнения преобразуется следующим образом: $(A^{-1}\cdot A)\cdot X=E\cdot X=X=A^{-1}\cdot B$. Неизвестная матрица найдена X= $A^{-1}B$. Аналогично решается уравнение X·A=B. Приведем окончательный ответ X=B· A^{-1}. Для решения уравнения A·X·B=C придется дважды домножать уравнение, размещая множитель A^{-1} слева от группы матриц, а множитель B^{-1} справа, что приводит к следующим преобразованиям :

$$A^{-1}(A\cdot X\cdot B)B^{-1}=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1},$$

$$(A^{-1}\cdot A)\cdot X\cdot(B\cdot B^{-1})=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1},$$

$$E\cdot X\cdot E=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1},$$

$$X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}.$$

Такое решение возможно, если det(A)≠0 и det(B)≠0.

Пример. Решить уравнение $A{\cdot}X{\cdot}B{=}C$, если

A= $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

Решение. $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. Вычислим определитель матрицы *A: det(A)=-2, det(B)=–2.*

Сформируем обратную матрицу к A и B:

$$\tfrac{1}{-2}\begin{pmatrix}1 & -5\\ -1 & 3\end{pmatrix}^{T}=A^{-1}\qquad \tfrac{1}{-2}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 0\end{pmatrix}^{T}=B^{-1}.$$

Теперь матрица X вычисляется по формуле:

$$X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}=\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -5 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\tfrac{1}{-2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\tfrac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -2\\ 3 & -1\end{pmatrix}=\tfrac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -11 & 7\end{pmatrix}$$

.

Проверка решения: подставим найденную матрицу X в исходное уравнение

$$\tfrac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -11 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\tfrac{1}{4}\begin{pmatrix}-8 & 4\\ -6 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\tfrac{1}{4}\begin{pmatrix}8 & -4\\ 4 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

,

следовательно $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

Упражнения для самостоятельного решения

Построить обратную матрицу для следующих матриц:

1. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}$. Ответ A^{-1}= $\begin{pmatrix}2 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Ответ A^{-1}= $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 2 & -4\\ 0 & 1 & -1\\ -2 & -3 & 7\end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix}7 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$. Ответ A^{-1}= $-\dfrac{1}{24}\begin{pmatrix}-3 & 3 & 0\\ 0 & -8 & -8\\ -3 & -13 & 8\end{pmatrix}$.

4. Решить матричное уравнение *AXB=C*, если $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

5. Решить матричное уравнение $AX=B$, если $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

6. Решить матричное уравнение $XA=B$, если $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

1.5. Ранг матрицы

Пусть задана произвольная матрица

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Из элементов матрицы, расположенных на пересечении некоторых k строк и k столбцов, можно образовать определитель k-го порядка, который называется минором k-го порядка этой матрицы. Например, $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}a_{13} & a_{14}\\ a_{33} & a_{34}\end{vmatrix}$ – миноры второго порядка, $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ – минор третьего порядка. Очевидно, что порядок образуемого минора меньше или равен наименьшему из чисел m, n.

Пример. Дана матрица A=$\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Написать минор самого большого порядка.

Решение. Самый большой порядок минора для данной матрицы к=3. Одним из миноров 3-го порядка является минор $\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 4 & -1\end{vmatrix}$, образованный элементами первых трех строк. Вообще же можно написать 4 минора 3-го порядка, последовательно вычеркивая по одной строке.

Определение. Если в матрице среди миноров порядка r имеется хотя бы один, отличный от нуля , а все миноры порядка k>r равны нулю, то число r называется рангом матрицы. Если матрица квадратнаяи ее детерминант не равен нулю, то ранг матрицы равен ее порядку. Например , пусть A-матрица 3-го порядка: A=$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

Det(A)=$\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix} = -6 \neq 0.$ По определению ранг r=3.

Пример. Определить ранг матрицы A=$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 2 & 3 & 1 & 0\\ 2 & 0 & -2 & 4\end{pmatrix}$.

Решение. Очевидно, что в качестве минора 2-ого порядка, отличного от нуля, можно взять минор $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Все миноры 3-его порядка равны нулю, так как третья строка пропорциональна первой. Значит r=2.

Вычисление ранга матрицы непосредственно по определению является громоздким и поэтому рассмотрим прием, основанный на элементарных преобразованиях матрицы.

Элементарными преобразованиями матрицы называют следующие операции:

1. Умножение всех элементов некоторой строки (столбца) матрицы на число $\lambda \neq 0$.
2. Прибавление к элементам некоторой строки (столбца) матрицы соответствующих элементов другой строки (столбца) , умноженных на одно и то же число λ.
3. Перемена местами строк (столбцов) матрицы.

Матрицы, полученные одна из другой при помощи конечного числа элементарных преобразований, называются эквивалентными. Для эквивалентных матриц выполняется теорема, которую приводим без доказательства.

Теорема. Эквивалентные матрицы имеют один и тот же ранг.

Построение эквивалентных матриц и применение этой теоремы позволяет использовать для вычисления ранга матрицы следующее правило: с помощью элементарных преобразований привести исходную матрицу к треугольному виду, число ненулевых строк которой будет равно рангу данной матрицы. *Пример*. Найти ранг матрицы

A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. *Решение*. Умножим первую строку на два и вычтем из второй строки, затем умножим первую строку на три и вычтем из третьей строки, получим эквивалентную матрицу , в которой из третьей строки вычтем вторую: A~$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$~$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Ранг последней матрицы, а, значит и данной, равен 2.

Пример. Найти ранг матрицы A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Первую строку прибавим ко второй строке, умножив на 3 вычтем из третьей строки, умножив на 2, вычтем из четвертой строки. Получим следующую матрицу, эквивалентную данной: A~$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. В этой матрице вторую строку умножим на 3 и вычтем из третьей: A~$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -14 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Из последней матрицы ясно, что минор третьего порядка $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -14 \end{vmatrix} = -14 \neq 0.$

Все же миноры четвертого порядка равны 0, поэтому ранг данной матрицы равен 3.

Упражнения для самостоятельного решения

Найти ранги следующих матриц:

A=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 10 \end{pmatrix},\ Д=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Решение систем линейных уравнений

Система линейных уравнений – это система вида:

$$a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \cdots + a_{1m}\cdot x_m = b_1$$
$$a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \cdots + a_{2n}\cdot x_n = b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \cdots + a_{mn}\cdot x_n = b_m$$

(2.1)

где m уравнений с n неизвестными x_i, a_{ij} – числа – коэффициенты при неизвестных, b_i – числа, называемые свободными членами.

Решением системы уравнений (2.1) называется совокупность таких чисел $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2, \cdots$, $x_n = \alpha_n$, которые обращают все уравнения системы в тождества.

Если система линейных уравнений имеет хотя бы одно решение, то она называется совместной. В противном случае она называется несовместной.

Совместная система, имеющая единственной решение, называется определенной, а система, имеющая более одного решения, неопределенной. Две системы линейных уравнений называются эквивалентными, если они имеют одни и те же решения. Запишем систему (2.1) в матричной форме. Для этого введем обозначения

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тогда система (2.1) , учитывая правила умножения матриц, примет вид: A·X=B.

2.1. Формулы Крамера

Рассмотрим частный случай системы (2.1) , когда матрица A- квадратная, то есть число уравнений равно числу неизвестных (m=n). Если det(A)≠0, то существует обратная матрица A^{-1} и решение системы может быть найдено в матричной форме:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

2.1.1

Запишем равенство (2.1.1) в развернутом виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \det A \neq 0,$$

2.1.2

Здесь A_{ij} - алгебраические дополнения к элементам матрицы a_{ij}. Из (2.1.2) следует

$$x_1 = \frac{1}{\det A} \cdot (A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n) = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Вводя общепринятые обозначения Δ=detA- определитель системы, $\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, записываем кратко формулу для вычисления $x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}$. Аналогично для любой неизвестной $x_к$ имеем

$$x_k = \frac{1}{\det A}(A_{1k}b_1 + A_{2k}b_2 + \cdots + A_{nk}b_n) = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

где столбец свободных членов стоит вместо *к*-ого столбца матрицы системы. Таким образом, формулы Крамера в краткой записи имеют вид $x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta}$ (2.1.3)

Правило решения линейной системы по формулам Крамера состоит в следующем:

1. Вычислим определитель системы Δ, и если $\Delta \neq 0$, то переходим к вычислению определителей $\Delta x_к$.
2. Каждый определитель Δx_i $(i = 1,2,...,n)$ образуется путем замены к-ого столбца матрицы системы столбцом правых частей.
3. Применяя формулы (2.1.3.) получим решение.

Пример. Найти решение системы $\begin{matrix} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5 \end{matrix}$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2\left\|\begin{matrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{matrix}\right\| - (-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -15.$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -15.$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 15.$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \tfrac{-15}{-15} = 1, \qquad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \tfrac{15}{-15} = -1, \qquad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \tfrac{0}{-15} = 0.$$

Замечание. При увеличении числа уравнений и неизвестных решение системы уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы становятся трудоемкими и не применяются. Более удобным является метод Гаусса, использующий элементарные преобразования в матрицах.

2.2. Метод Гаусса

Метод Гаусса - это метод последовательных исключений неизвестных с помощью элементарных преобразований системы, состоящий в следующих операциях:

1. Умножение на число $\lambda \neq 0$ обеих частей какого-либо уравнения.
2. Прибавление к обеим частям какого либо уравнения соответствующих частей любого другого уравнения, умноженного на одно и то же число.
3. Перестановка уравнений местами.

Такие элементарные преобразования не изменяют решений системы, линейная система переходит в систему, эквивалентную первоначальной системе.

Для простоты рассмотрим сначала систему n уравнений с n неизвестными с невырожденной матрицей системы, т.е. $\det(A) \neq 0$, и система имеет единственное решение.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &= в_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &= в_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mm}x_m &= в_m \end{aligned}$$

(2.2.1)

Пусть для определенности коэффициент $a_{11} \neq 0$. Умножим первое уравнение на число $\lambda = -\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$ и прибавим его почленно к каждому уравнению с номерами i = 2, 3, …, n. Получим эквивалентную систему , в которой x_1 будет только в первом уравнении.

В качестве второго уравнения возьмем то, в котором коэффициент при x_2 не равен нулю и поступая аналогично, исключим x_2 из всех уравнений с номерами i = 3, 4, …, n.

Продолжая процесс, после n-1 шагов получим систему вида:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1N}x_n &= b_1 \\
\alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n &= \beta_2 \\
\alpha_{33}x_3 + \cdots + \alpha_{3n}x_n &= \beta_3 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots& \\
\alpha_{nn}x_n &= \beta_n
\end{aligned}
$$

(2.2.2)

матрица которой имеет треугольный вид:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2m} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{mm} \end{pmatrix}.$$

(2.2.3)

Заметим, что в этой квадратной матрице элементы, стоящие на главной диагонали не равны нулю, $\det(A) = a_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot \cdots \cdot \alpha_{nn} \neq 0,$ и ранг матрицы r=n.

Из системы (2.2.2) последовательно находятся все неизвестные, начиная с $x_n = \dfrac{\beta_n}{\alpha_{nn}}.$

Алгоритм метода Гаусса удобно применять, выполняя элементарные преобразования над матрицей системы с приписанным справа столбцом правых частей (так называемая расширенная матрица). Расширенная матрица приводится к треугольному виду, а затем легко найти все неизвестные.

Пример. Найти решение системы методом Гаусса:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\
x_1 + 2x_2 - x_3 &= -5 \\
4x_1 + 4x_2 + x_3 &= -2
\end{aligned}
$$

. Составим расширенную матрицу системы

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -5 \\ 4 & 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. В этой матрице первую строку вычтем из второй и, умноженную на 4, вычтем из третьей. Получим эквивалентную матрицу, определяющую эквивалентную систему уравнений

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ - матрица приняла треугольный вид.

Последняя строка матрицы определяет уравнение $-3x_3 = -6 \;\Rightarrow x_3 = 2.$ Вторая строка определяет уравнение $x_2 - 2x_3 = -6.$ Подставляя в него $x_3 = 2,$ найдем $x_2 = -6 + 4 = -2.$ Первая строка матрицы означает первое уравнение $x_1 + x_2 + x_3 = 1.$ Подставляя в него $x_3 = 2,\ \ x_2 = -2,$ найдем $x_1 = 1 - 2 + 2 = 1.$ Таким образом, решение системы $x_1 = 1,\ \ x_2 = -2,\ \ x_3 = 2.$

Пример. Найти решение методом Гаусса:

$$
\begin{array}{lllll}
x_1 + & x_2 + & 2x_3 + & 3x_4 & = 1 \\
3x_1 - & x_2 - & x_3 - & 3x_4 & = -4 \\
2x_1 + & 3x_2 - & x_3 - & x_4 & = -6 \\
x_1 + & 2x_2 + & 3x_3 - & x_4 & = -4
\end{array}
$$

Выпишем расширенную матрицу и будем приводить ее к треугольному виду.

$$C=\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\\3&-1&-1&-2&-4\\2&3&-1&-1&-6\\1&2&3&-1&-4\end{pmatrix}.$$ Первую строку, умноженную на 3, вычтем из второй строки, умноженную на 2 из третьей строки, первую строку вычтем из последней строки. Получим матрицу $C_1 \Leftrightarrow C$.

$$C_1=\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\\0&-4&-7&-11&-7\\0&1&-5&-7&-8\\0&1&1&-4&-5\end{pmatrix}.$$ В матрице C_1 вторую строку умножим на –1 и переставим местами вторую и третью строки. Матрица $C_2 \Leftrightarrow C_1$.

$$C_2=\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\\0&1&-5&-7&-8\\0&4&7&11&7\\0&1&1&-4&-5\end{pmatrix}.$$ В матрице C_2 вторую строку, умноженную на 4, вычтем из третьей строки, вторую строку вычтем из четвертой. $C_3 \Leftrightarrow C_2$.

$$C_3=\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\\0&1&-5&-7&-8\\0&0&27&39&39\\0&0&6&3&3\end{pmatrix}$$ В матрице C_3 третью строку разделим на 3, четвертую строку на 6 и переставим местами. Матрица $C_4 \Leftrightarrow C_3$.

$$C_4=\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\\0&1&-5&-7&-8\\0&0&1&0.5&0.5\\0&0&9&13&13\end{pmatrix}.$$ В матрице C_4 третью строку умножим на 9 и вычтем из четвертой строки. Матрица $C_5 \Leftrightarrow C_4$.

$$C_5=\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\\0&1&-5&-7&-8\\0&0&1&0.5&0.5\\0&0&0&\frac{17}{2}&\frac{17}{2}\end{pmatrix}.$$ В матрице C_5 последнюю строку разделим на $\frac{17}{2}$. *Матрица* $C_6 \Leftrightarrow C_5$.

$$C_6=\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\\0&1&-5&-7&-8\\0&0&1&0.5&0.5\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}.$$ Матрица C_6 определяет систему уравнений, эквивалентную исходной системе:

$$\begin{array}{rrrrcr}x_1+&x_2+&2x_3+&3x_4&=&1\\&x_2-&5x_3-&7x_4&=&-8\\&&x_3+&\frac{1}{2}x_4&=&\frac{1}{2}\\&&&x_4&=&1\end{array}$$

В этой системе $x_4=1$, подставим его в третье уравнение. $x_3+\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow x_3=0$. Далее $x_3=0$, $x_4=1$ подставим во второе уравнение: $x_2-7=-8 \Rightarrow x_2=-1$. Подставим в первое уравнение $x_2=-1$, $x_3=0$, $x_4=1$: $x_1-1+3=1 \Rightarrow x_1=-1$.

Получили решение $x_1 = -1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 1.$ Для проверки правильности решения подставим его в исходную систему:

$$\begin{array}{cccccc} -1 & -1 & +20 & +3 & = & 1 \\ -3 & +1 & +0 & -2 & = & -4 \\ -2 & -3 & +0 & -1 & = & -6 \\ -1 & -2 & +0 & -1 & = & -4 \end{array}$$

Очевидно, что решение найдено правильно.

2.3. Исследование произвольных линейных систем уравнений

В предыдущем параграфе мы рассмотрели системы, в которых число неизвестных равно числу уравнений, $\det(A) \neq 0$,и системы имели единственное решение. Пусть теперь система имеет произвольный вид (2.1), где $m \neq n$. Главный вопрос для этой системы – вопрос о ее совместности, то есть о существовании хотя бы одного решения. По этому поводу имеется теорема Кронекера-Капелли.

Теорема. Для того, чтобы система линейных уравнений (2.1) была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранги матрицы системы и ее расширенной матрицы были равны.

Необходимость. Пусть система совместная, то есть существует решение

$$x_1 = \alpha_1, \quad x_2 = \alpha_2, \ldots \quad , x_n = \alpha_n.$$

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}\alpha_1 + & a_{12}\alpha_2 + & \cdots + & a_{1n}\alpha_n & = & b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + & a_{22}\alpha_2 + & \cdots + & a_{2n}\alpha_n & = & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & = & \cdots \\ a_{m1}\alpha_1 + & a_{m2}\alpha_2 + & \cdots + & a_{mn}\alpha_n & = & b_m \end{array}$$

Расширенная матрица системы

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

В матрице С из последнего столбца вычтем первый, умноженный на α_1, второй, умноженный на $\alpha_2,\ldots,n-й$ столбец, умноженный на α_n,

Получим матрицу

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{pmatrix}.$$

Элементарные преобразования не изменяют ранг матрицы и если ранг исходной матрицы r(C)=r, то ранг r (C_1) тоже равен r.

Достаточность. Пусть ранг системы r (A) равен рангу расширенной матрицы r (C), r (A)=r (C)=r. По определению ранга матрицы существует минор порядка r, отличный от нуля. Пусть для определенности минор имеет вид $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$

Систему уравнений (2.1) перепишем в виде

$$\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r & = & b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r & = & b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{2n}x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r & = & b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n \end{array}$$

(2.3.1)

Остальные уравнения системы (2.1) являются линейной комбинацией этих первых уравнений. Неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ могут принимать различные значения, их называют свободными. При каждом фиксированном значении свободных неизвестных можно вычислить соответствующие неизвестные $x_1, x_2, ..., x_r$, которые называются базисными или основными. Тем самым система имеет бесчисленное множество решений и следовательно совместна. Если решая (2.3.1), выразить все основные неизвестные через свободные, то получим общее решение. На практике исследование системы на совместность проводится с помощью метода Гаусса.

Пример. Исследовать на совместность систему, написать общее решение.

Решение.

$$\begin{array}{lcl} x_1 + 5x_2 + 4x_3 - x_4 & = & 2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 & = & 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 & = & 5 \end{array}.$$

Составим расширенную матрицу системы

$C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Первую строку, умноженную на 2, вычтем из второй, умноженную на 3 вычтем из третьей.

$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -11 & -9 & 4 & -1 \\ 0 & -11 & -9 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. В матрице C_1 вторую строку вычтем из третьей, получим:

$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -11 & -9 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Из матрицы C_2 следует, что ранг матрицы системы и расширенной матрицы одинаков и равен 2 , так как минор $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -11 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$, а все миноры третьего порядка равны нулю. Матрица C_2 определяет систему

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 2 - 4x_3 + x_4 \\ -11x_2 = -1 + 9x_3 - 4x_4 \end{cases}$$

$$x_{211} = \frac{1}{11} - \frac{9}{11}x_3 + \frac{4}{11}x_4, \quad x_1 = 2 - 4x_3 - 5x_2 = 2 - 4x_3 + x_4 - \frac{5}{11} + \frac{45}{11}x_3 - \frac{20}{11}x_4 = \frac{17}{11} + \frac{1}{11}x_3 - \frac{9}{11}x_4.$$

Таким образом, имеем множество решений данной системы

$$x_1 = \frac{17}{11} + \frac{1}{11}x_3 - \frac{9}{11}x_4$$
$$x_2 = \frac{1}{11} - \frac{9}{11}x_3 + \frac{4}{11}x_4$$
- общее решение. Система совместна.

Здесь x_3, x_4 свободные, им можно придавать различные значения и в зависимости от этого получать значения базисных переменных x_1, x_2.

Пример. Исследовать систему на совместность

Решение.

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 &= -4 \\ 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= 5 \end{aligned}.$$

Расширенная матрица системы имеет следующий вид:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -4 & 1 & -2 & -4 \\ 4 & -5 & 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$
.Переставим третью строку на место первой строки.

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & -5 & 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$
.Первую строку, умноженную на 3, вычтем из второй строки; умноженную на 2, вычтем из 3; умноженную на 4, вычтем из четвертой строки..

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 11 & -1 & 5 & 14 \\ 0 & 11 & -1 & 5 & 14 \\ 0 & 11 & -1 & 5 & 21 \end{pmatrix}$$
. Вторую строку вычтем из третьей и четвертой строк и затем переставим местами третью и четвертую строки.

$$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 11 & -1 & 5 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
. Из матрицы C_3 следует, что ранг матрицы системы (без учета столбца свободных членов) равен 2, а ранг расширенной матрицы равен 3 . Поэтому система несовместна.

Упражнения для самостоятельного решения.

Решить системы по формулам Крамера:

1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$.

Написать решение системы алгебраических уравнений по формулам Крамера:

2. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$.

Написать решение системы алгебраических уравнений по формулам Крамера:

$$3.\ \begin{cases} x_1+x_2+x_3 &= 1 \\ 3x_1-x_2+x_3 &= -5. \\ 2x_1-x_2+x_3 &= -4 \end{cases}$$

Решить систему методом Гаусса:

$$4.\ \begin{matrix} 5x_1+3x_2+2x_3 &= 4 \\ 3x_1+7x_2-2x_3+3x_4 &= 9 \\ 2x_1-3x_2+3x_3+x_4 &= -6 \\ x_1+x_3-2x_4 &= 1 \end{matrix}.$$

Исследовать на совместность, найти общее решение и одно частное решение следующих систем уравнений:

$$1.\ \begin{matrix} 22x_1+3x_2-2x_3+4x_4 &= 15 \\ 8x_1+x_2-x_3+x_4 &= 6 \\ 10x_1+2x_2+x_3+5x_4 &= 3 \\ 14x_1+2x_2-x_3+3x_4 &= 9 \end{matrix}.$$

$$2.\ \begin{matrix} x_1-3x_2+2x_3+x_4 &= 3 \\ 2x_1+x_2+x_3-2x_4 &= 2. \\ 3x_1-2x_2+3x_3-x_4 &= 4 \end{matrix}$$

$$3.\ \begin{matrix} 2x_1+x_2-x_3-x_4+3x_5 &= 3 \\ 5x_1+4x_2-4x_3-4x_4+15x_5 &= 9. \\ 3x_1+2x_2-2x_3-2x_4+7x_5 &= 5 \end{matrix}$$

3.1. Линейные векторные пространства

Определение 1. Упорядоченная совокупность из n действительных чисел называется n- мерным вектором и обозначается в виде строки $X=(x_1,\ \ x_2,\ \ \cdots\ \ x_n)$ или в виде столбца $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Числа $x_1,\ \ x_{2,}\ \ \cdots,\ \ x_n$ называются компонентами вектора.

Определение 2. Два n-мерных вектора $X=(x_1\ \ x_2\ \ \cdots\ \ x_n)$ и $Y=(y_1\ \ y_2\ \ \cdots\ \ y_n)$ называются равными, если у них соответствующие компоненты равны: $x_1=y_1,\ \ x_2=y_2,\ \ \cdots;\ \ x_n=y_n$.

Определение 3. Нулевым вектором будем называть такой вектор 0 у которого все компоненты равны нулю.

Линейные операции над n-мерными векторами – это умножение вектора на действительное число и сложение векторов. При умножении вектора X на число α все компоненты вектора умножаются на это число: $\alpha X=(\alpha x_1\ \ \alpha x_2\ \ \cdots\ \ \alpha x_n)$.

При сложении двух векторов складываются соответствующие компоненты:

$$X+Y=(x_1+y_1\ \ \ x_2+y_2\ \ \ \cdots\ \ \ x_n+y_n).$$

Определение 4. Линейным векторным пространством R_n называется множество всех n-мерных векторов, для которых определимы операции умножения на число и сложение и при этом выполняется следующее:

для $\forall X\ \in\ R_n$ и числа α вектор $\alpha X\in R_n$;

для $\forall X,Y\ \in\ R_n$ существует вектор $Z=X+Y\ \in\ R_n$.

Кроме того, операции сложения векторов и умножения вектора на число удовлетворяют следующим аксиомам:

1) $X+Y=Y+X$, 2) $(X+Y)+Z=X+(Y+Z)$, 3) $0\in R_n$,

4) $\exists\ (-X)$, $X+(-X)=0$, 5) $1\cdot X=X$, 6) α,β – *числа* $\alpha(\beta X)=(\alpha\beta)X$,

7) $(\alpha+\beta)X=\alpha X+\beta X$, 8) $\alpha(X+Y)=\alpha X+\alpha Y$.

.

3.2. Линейная зависимость и независимость векторов

Пусть имеются n-мерные векторы $a_1, a_2, ..., a_л \in R_n$ и числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. Будем говорить, что вектор b является линейной комбинацией векторов $a_1, a_2, ..., a_k$, если $b=\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+...+\alpha_k a_k$. В результате составления линейной комбинации векторов можно получить нулевой вектор. Существуют такие совокупности векторов, линейные комбинации которых в нулевой вектор не превращаются ни при каких наборах чисел, одновременно не равных нулю. В зависимости от этого вводятся понятия линейной зависимости и линейной независимости векторов.

Определение. Векторы $a_1, a_2, ..., a_k \in R_n$ называются линейно зависимыми, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$, не равные нулю одновременно, что выполняется $\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+...+\alpha_k a_k=0$. Векторы $a_1, a_2, ..., a_k \in R_n$ называются линейно независимыми, если линейная комбинация $\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+...+\alpha_k a_k\neq 0$ ни при каких числах α_i, кроме случая, когда все числа $\alpha_i=0$ одновременно.

Пример. Рассмотрим R_2 – пространство двумерных векторов. Геометрически R_2 – множество всех векторов на плоскости. Пусть плоскость фиксируется системой координат Х0У i, j – единичные векторы, направленные по осям координат. Тогда $i=(1,0)$, $j=(0,1)$ – линейно независимые векторы, так как $\alpha_1 i+\alpha_2 j\neq 0$ ни при каких числах α_1, α_2 (кроме случая $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$ одновременно). Заметим, что матрица А, составленная из компонентов векторов i, j, имеет определитель не равный нулю: $\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$. Любые два неколлинеарных вектора на плоскости линейно независимы, например, если $a=(2,3)$, $b=(1,4)$, то $\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix}=5\neq 0$.

Рассмотрим любые два коллинеарных вектора a_1, b_1. Как известно из векторной алгебры, существует единственное число α, при котором выполняется $b_1=\alpha a_1 \Rightarrow \alpha a_1-b_1=0$. Линейная комбинация обращается в 0. Ясно, что компоненты векторов пропорциональны и если $a_1=(3,5)$, *то* $в_1=(3\alpha,5\alpha)$, $\alpha\neq 0$ и тогда $\begin{vmatrix}3 & 5\\ 3\alpha & 5\alpha\end{vmatrix}=0$.

Пример. Являются ли векторы $a_1=(1,-1,2)$, $a_2=(2,3,1)$, $a_3=(4,1,5)$ линейно зависимы?

Решение. Составим линейную комбинацию данных векторов: $\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\alpha_3 a_3=0$, в которой числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ нужно определить. Для этого перейдем к линейным комбинациям соответствующих компонентов:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 &= 0, \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 &= 0, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

Имеем однородную линейную систему уравнений, которая имеет единственное нулевое решение $\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0$, если определитель системы не равен нулю (легко проверить по правилу Крамера), другими словами ранг r матрицы системы равен трем. В этом случае векторы $a_1, \quad a_2, \quad a_3$ линейно независимы. Для линейной зависимости должно существовать хотя бы одно ненулевое решение системы уравнений, тогда ранг r матрицы меньше трех. Выпишем матрицу А системы и вычислим ранг, приведя ее к ступенчатому виду. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Обратим внимание на то, что в матрице А компоненты векторов расположены в виде столбцов. Хотя как известно величина ранга не меняется при транспонировании. Прибавим элементы первой строки к элементам второй строки и, умноженные на два, вычтем из третьей строки. Получим в результате матрицу $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$. В матрице A_1 вторую строку разделим на 5, а третью на (-3). Тогда будем иметь матрицу $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Вычтем из третьей строки элементы второй строки, получим ступенчатую матрицу $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Отсюда видно, что ранг матрицы равен двум. Данные векторы линейно зависимы. Можно найти ненулевые значения $\alpha_1, \quad \alpha_2, \alpha_3$, составив систему уравнений по последней матрице:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 &= -4\alpha_3 \\ \alpha_2 &= -\alpha_{33} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha_1 - 2\alpha_2 &= -4\alpha_3 \\ \alpha_2 &= -\alpha_3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha_1 &= -2\alpha_3 \\ \alpha_2 &= -\alpha_3 \end{aligned}.$$

Вместо α_3 можно подставить любое число не равное нулю. Например, если принять $\alpha_3 = 1$, то $\alpha_2 = -1$, $\alpha_1 = -2$. Тогда имеем $-2a - a_2 + a_3 = 0$ или $a_3 = 2a_1 + a_2$. Согласно определению векторы $a_1, \quad a_2, \quad a_3$ линейно зависимы.

Рассмотрим в общем виде критерий линейной зависимости и независимости системы векторов из пространства R_n. Пусть $y_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}), \ y_2 = (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}), \ldots y_k = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn})$ элементы пространства R_n. Составим матрицу, столбцами которой являются компоненты векторов

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix}.$$

Векторы $e_1 = (1,0), \quad e_2 = (0,1)$ из пространства R_2 линейно независимые, так как ранг матрицы $\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$ равен двум. В пространстве R_3 векторы

$e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ линейно независимые. И вообще в пространстве R_3 любые три некомпланарных вектора линейно независимы.

Заметим, что если среди множества векторов присутствует нулевой вектор, то такая система векторов всегда линейно зависима. Этот факт легко проверить, составив линейную комбинацию таким образом, чтобы все ненулевые векторы умножались на нулевые коэффициенты, а нулевой вектор умножался на число не равное нулю. В результате получим линейную комбинацию векторов, равную нулю.

Отметим также следующий факт: если множество векторов содержит линейно зависимую подсистему векторов, то само будет линейно зависимым. Это легко доказать ,составив линейную комбинацию векторов таким образом, что векторы подсистемы войдут с ненулевыми коэффициентами, а остальные векторы умножатся на нулевые коэффициенты. Тем самым линейная комбинация всех векторов, входящих в данное множество, обратится в нуль. Если же исходная система векторов будет тоже линейно независима. Критерием линейной зависимости совокупности векторов из пространства R_n является следующая теорема:

Теорема. Чтобы система векторов $y_1, y_2, ..., y_k$ была линейно независимой необходимо и достаточно, чтобы один из векторов выражался в виде линейной комбинации через остальные векторы.

А*) Необходимость.* Пусть векторы $y_{1,} y_2, ..., y_k$ линейно независимы. Тогда по определению существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$, не все равные нулю одновременно, что выполняется равенство $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_k y_k = 0$. Пусть для определенности $\alpha_1 \neq 0$. Очевидно , что получим соотношение $y_1 = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1} y_2 - ... - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} y_k$. Это равенство означает, что вектор y_1 является линейной комбинацией векторов $y_2, y_3, ..., y_k$.

Б*) Достаточность.* Предположим, что $y_1 = \beta_2 y_2 + \beta_3 y_3 + ... + \beta_k y_k$, где $\beta_2, \beta_3, ..., \beta_k -$ действительные числа. Из этого разложения непосредственно следует линейная зависимость всей системы векторов, так как выполняется равенство $y_1 - \beta_2 y_2 - ... - \beta_k y_k = 0$.

Алгоритм решения вопроса о линейной зависимости или независимости системы векторов: пусть даны векторы $a_ё, a_2, ..., a_л$.

1) Составить линейную комбинацию векторов $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_к a_к = 0$, которая в координатной форме представляя собой однородную систему линейных уравнений относительно неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_к$.

2)Записать матрицу, располагая векторы столбцами.

3) Методом Гаусса привести матрицу к ступенчатому виду.

4) Сделать вывод о ранге матрицы и существовании ненулевых решений однородной системы уравнений:

а) если ранг равен числу векторов и система имеет только нулевое решение, то система векторов линейно независима.

б) если ранг меньше числа векторов и система имеет ненулевые решения, то векторы линейно зависимы.

Пример. Является ли данная система векторов линейно зависимой?

$a_1 = (1,3,-5)$ $a_2 = (-8,-4,12)$ $a_3 = (6,3,-9)$.

Решение. Линейная комбинация векторов имеет следующий вид $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0$. Запишем матрицу и преобразуем ее методом Гаусса

$$\begin{pmatrix} 1 & -8 & 6 \\ 3 & -4 & 3 \\ -5 & 12 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -8 & 6 \\ 3 & -4 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ 0 & -4 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r = 2.$$

Система векторов линейно зависима. Составим систему уравнений по последней матрице

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & = & 0 \\ -4\alpha_2 & = & -3\alpha_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 & = & 0 \\ \alpha_2 & = & \frac{3}{4}\alpha_3 \end{bmatrix}, \ \text{при} \ \alpha_3 = 4 \ \ \text{имеем} \ \alpha_1 = 0, \ \ \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 4.$$

Векторы линейно зависимы и $3a_2 + 4a_3 = 0$.

Упражнения для самостоятельного решения

Является ли система векторов линейно зависимой или независимой?

3.2. $a_1 = (2,-1,3), \quad a_2 = (-3,5,2), \quad a_3 = (0,2,-4)$.

3.3 $a_1 = (2,-3,0,1), \quad a_2 = (1,4,-2,3), \quad a_3 = (5,2,-1,2)$.

3.4. $a_1 = (2,-5,1,0), \quad a_2 = (1,3,1,-2), \quad a_3 = (4,1,3,-4)$.

3.3 Размерность и базис пространства векторов

Рассмотрим линейное пространство R_n n- мерных векторов. Если существует в R_n система n линейно независимых векторов и при этом любые n+1 векторов линейно зависимы, то число n называется размерностью пространства. Базисом линейного векторного пространства R_n, имеющего размерность n, называется совокупность n линейно независимых векторов.

Например, размерность пространства всех векторов, лежащих в плоскости, равна двум, а базисом является любая совокупность двух линейно независимых векторов. Два вектора $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ образуют базис. Любые три вектора на плоскости линейно зависимы.

В пространстве R_3 трехмерных векторов любая совокупность трех линейно независимых векторов образует базис, а любые четыре вектора линейно зависимы. Таким образом, в пространстве R_n имеющем размерность n ,существует бесчисленное количество базисов. Все базисы содержат одинаковое количество векторов, равное размерности пространства.

Теорема о единственности разложения вектора по базису. Любой вектор $x \in R_n$, не входящий в число базисных, может быть представлен единственным образом в виде линейной комбинации базисных векторов.

Доказательство. Пусть векторы $e_1, e_2, ..., e_n$ образуют базис и вектор X не входит в их число. Из условия теоремы следует, что векторы $e_{1,}, e_2, ..., e_n$ линейно независимы и размерность пространства n, тогда любые n+1 векторов линейно зависимы. Это означает, что существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1}$, одновременно не равные нулю такие, что $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n + \alpha_{n+1} X = 0$. Число $\alpha_{n+1} \neq 0$ иначе векторы $e_1, e_2, ..., e_n$ были бы линейно зависимы. Поскольку $\alpha_{n+1} \neq 0$ то разделив на него последнее равенство получим, что $X = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}} e_1 - \dfrac{\alpha_2}{\alpha_{n+1}} e_2 - ... - \dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} e_n$, то есть X записан в виде линейной комбинации базисных векторов. Такое представление X будет единственным, так если предположить, что найдется другое представление вектора $X = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + ... + \beta_n e_n$, то разность $X - X = (\beta_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}})e_1 + ... + (\beta_n - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}})e_n = 0.$ Векторы $e_1, e_2, ..., e_n$ линейно независимы, следовательно $\beta_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}},\ \beta_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_{n+1}}, .., \beta_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}.$ Это и доказывает единственность разложения.

Пример. Даны векторы $e_1(1,2,3),\ \ e_2 = (-1,0,2),\ \ e_3 = (0,0,1),\ \ e_4 = (1,0,-1).$ Проверить образуют ли векторы базис в пространстве R_3 и найти разложение e_4 по базису.

Решение. Чтобы векторы e_1, e_2, e_3 составили базис пространства R_3, они должны быть линейно независимы, то есть ранг матрицы, составленной из компонентов векторов, должен равняться трем. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Определитель этой квадратной матрицы равен двум. Поэтому ранг $r(A) = 3.$ Следовательно, векторы e_1, e_2, e_3 линейно независимы и образуют базис в R_3. Существует единственный набор чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ такой, что $e_4 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$. От векторного равенства перейдем к равенствам над соответствующими компонентами, получим систему уравнений $\begin{array}{rcl} \alpha_1 - \alpha_2 & = & 1 \\ 2\alpha_1 & = & 0 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 & = & -1 \end{array}$. Решая эту систему, найдем что $\alpha_1 = 0,\ \ \alpha_2 = -1,\ \ \alpha_3 = 1.$ Значит $e_4 = -e_2 + e_3$. Заметим, что вектор e_4 в первоначальном базисе задан компонентами (1,0,-1), а в базисе (e_1, e_2, e_3) этот же вектор определен другими компонентами (0,-1,1).

3.4 Ранг системы векторов

Пусть имеется система m векторов n-мерного векторного пространства $\begin{array}{rcl} a_1 & = & (a_{11}, a_{12}, ... a_{1n}) \\ a_2 & = & (a_{21}, a_{22}, ... a_{2n}) \\ ... & ... & .... \\ a_m & = & (a_{m1}, a_{m2}, ... a_{mn}) \end{array}$.

Определение. Рангом r системы векторов называется максимальное число линейно независимых векторов системы.

Любая линейно независимая часть системы, состоящая из r векторов, является ее базисом. Ранг системы векторов равен рангу матрицы, составленной из координат этих векторов. (Доказательство этого утверждения см. в работе Ф.И. Карпелевич, Л.Е.Садовский "Элементы линейной алгебры и линейного программирования").

Составим эту матрицу, располагая координаты строчками (или столбцами) A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ и пусть ранг матрицы A равен r. Если ранг r равен числу m содержащихся в системе векторов, то система векторов линейно независима. Если r<m, то система линейно

зависима, то есть любой вектор из системы линейно выражается через базисные векторы.

Пример. Дана система векторов четырехмерного пространства $a_1 = (2,1,-1,0)$, $a_2 = (3,2,-1,2)$, $a_3 = (1,0,-1,-2)$. Требуется определить является ли данная система линейно зависимой и, если да, то найти зависимость.

Решение. Составим матрицу из координат векторов
A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Находим ранг матрицы А. Для этого переставим строки в матрице А., получим $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. В матрице A_1, умножив первую строку на два, вычтем из второй и, умножив на три, вычтем из третьей. Получим матрицу $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$. В матрице A_2 третью строку разделим на два. Получим матрицу: $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. В матрице A_3 вторую строку вычтем из третьей, получим матрицу:
$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. В матрице A_4 исключим последнюю строку, получим матрицу: $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Ранг матрицы A_5 равен двум, так как минор второго порядка $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ и минора более высокого порядка, отличного от нуля, в этой матрице нет.

Преобразования, которые применялись к матрицам, не изменяют их ранга, то есть все матрицы в примере имеют один и тот же ранг. Таким образом, ранг матрицы системы векторов равен двум, а это означает, что данная система векторов линейно зависима. В этой системе любые два вектора линейно независимы и образуют базис, а третий можно выразить в виде линейной комбинации через выбранные два вектора.

Линейная зависимость трех векторов означает, что существует три числа, одновременно не равные нулю, такие, что выполняется соотношение $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$. Если предположить, что $\lambda_1 \neq 0$, *то* $a_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} a_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} a_3$. Тем самым вектор a_1 выражен через a_2 *и* a_3. Найдем численные значения коэффициентов. Сначала для краткости введем переобозначения $\kappa_2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, $\kappa_3 = -\frac{\lambda_3}{\lambda_1}$. Тогда $a_1 = \kappa_2 a_2 + \kappa_3 a_3$. Векторное равенство переносится на все компоненты вектора. Поэтому получаем систему уравнений относительно κ_2, κ_3 $\begin{array}{rcl} 3\kappa_2+\kappa_3 & = & 2 \\ 2\kappa_2+0\kappa_3 & = & 1 \\ -\kappa_2-\kappa_3 & = & -1 \\ 2\kappa_2-2\kappa_3 & = & 0 \end{array}$. Очевидно, что $\kappa_2=\frac{1}{2}, \kappa_3=\frac{1}{2}$. Таким образом $a_1=\frac{1}{2}a_2+a\frac{1}{2}a_3$. Из последнего равенства ясно, что можно a_2 выразить через a_2 и a_3 :$a_2=2a_1-a_3$. Вектор a_3 через a_1 и a_2: $a_3 = 2a_1 - a_2$.

Пример. Дана система пяти трехмерных векторов. Требуется определить ранг системы векторов и разложить вектор a_1 по новому базису.

$$a_1=(2,3,-4), a_2=(1,0,3), a_3=(2,-1,2), a_4=(0,2,+1), a_5=(4,0,3).$$

Решение. Составим матрицу из компонент данных векторов. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & +1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Определим ранг этой матрицы.

Так как порядок самого большого минора, который можно составить из элементов матрицы А равен трем, то ранг равен трем и система векторов линейно зависима. По условию задачи требуется разложить вектор a_1 по линей но независимым векторам. Для определения множества линейно независимых векторов рассмотрим минор из элементов векторов, не содержащих вектор a_1. Например рассмотрим минор

$$M=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & +1 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-1-4+12=7\neq 0.$$

Так как минор составлен из элементов векторов a_2 ,a_3 ,a_4, то эти векторы линейно независимы и образуют базис. Напомним, что базисом в трехмерном пространстве является любой набор из трех линейно независимых векторов. Любой другой вектор может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векторов. Поэтому вектор $a_1=\alpha a_2+\beta a_3+\gamma a_4$, где α ,β , γ- числа, которые требуется определить. Из векторного равенства получим соответствующие соотношения, связывающие компоненты векторов $\begin{array}{rcl} \alpha+2\beta & = & 2 \\ --\beta+2\gamma & = & 3 \\ 3\alpha+2\beta+\gamma & = & -4 \end{array}$. Полученную систему уравнений можно решить любым известным способом. Предлагается этот этап выполнить самостоятельно, а в итоге получим $\alpha=-\frac{32}{7}$, $\beta=\frac{23}{7}$, $\gamma=\frac{22}{7}$.

Замечание. Вектор a_5 не принял участия в решении , однако, если бы мы взяли в матрице А минор $M=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & +1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}=-18\neq 0,$ то базисными были бы векторы a_2 ,a_4 , a_5 . Тогда вектор a_1 записали бы в виде $a_1=\mu a_2+\nu a_4+\eta a_5$, числа μ ,ν ,η определились бы аналогичным способом.

Задачи для самостоятельного решения

Найти ранг и базис системы векторов и один из векторов, не входящий в базис, разложить по базису.

3.4.3.

$$a_1=(5,-1,2),\quad a_2=(-3,2,-1),\quad a_3=(1,0,2),\vdots a_4=(0,1,4),\quad a_5=(-2,2,1).$$

3.4.4.
$a_1 = (0,1,-1,2), \quad a_2 = (-1,2,3,1), \quad a_3 = (3,0,-1,2), \quad a_4 = (2,3,1,5).$
3.4.5.
$a_1 = (1,-2,1,1), \quad a_2 = (1,0,2,3), \quad a_3 = (-1,2,0,3), \quad a_4 = (2,-4,3,6), \quad a_5 = (1,-2,2,5).$

3.5. Пространство решений однородной системы уравнений

Однородной системой линейных алгебраических уравнений называется система вида

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & = & 0 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & 9 \end{array}.$$

В общем случае $m \neq n$. Эта система уравнений всегда совместна, так как имеет очевидное нулевое решение $x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \ldots, x_n = 0.$ Поставим задачу отыскания ненулевых решений такой системы. В матричной форме система примет вид A·X=0, где A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cancel{a}_{11n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ матрица системы уравнений, X=$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - матрица неизвестных. Если матрица A квадратная (m=n) , и ранг матрица r=n, то система уравнений имеет единственное нулевое решение. Поэтому для существования ненулевого решения предположим, что r<m<=n. Тогда существует минор M_r матрицы A порядка r, не равный нулю, пусть для определенности это будет минор

$$M_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Исходная система уравнений может быть записана в виде

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r & = & -a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ \cdots & = & \cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r & = & -a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n \end{array}.$$

Данная система, очевидно, эквивалентна предыдущей. Назовем $x_1, x_2, \ldots, x_r -$ основными неизвестными, $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n -$ свободными неизвестными. Свободным неизвестным можно придавать любые числовые значения, кроме случая одновременного равенства всех свободных неизвестных нулю. Следовательно последняя система имеет бесчисленное множество решений.

Множество решений однородной системы уравнений образует линейное векторное пространство. Действительно, если вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является решением однородной системы уравнений, то вектор $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$ также является решением, что легко проверить, подставив компоненты вектора αx в систему.

Если векторы $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ являются решениями, то их сумма $z = x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$ является решением данной однородной системы уравнений, что проверяется подстановкой компонентов вектора z в систему уравнений.

Найдем теперь размерность и базис пространства решений однородной системы уравнений. Количество свободных неизвестных равно n-r, придавая поочередно каждой свободной неизвестной значение, равное единице, а остальные приравнивая нулю, можно получить n-r векторов решений: при $x_{r+1}=1,\ \ x_{r+2},=x_{r+3}=...=x_n=0,$ решая систему, получим вектор $e_1=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r,1,0,...,0)$. При $x_{r+2}=1,\ \ x_{r+1}=x_{r+3}=...=x_n=0$ получим вектор решения $e_2=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_r,0,1,0,...,0)$ и так далее. Аналогично при $x_{r+1}=x_{r+2}=...=x_{n-1}=0,\ \ x_n=1$ решение будет $e_{n-r}=(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_r,0,0,...,1)$. Векторы $e_1,e_2,...,e_{n-1}$ линейно независимы, так как матрица С, составленная из компонентов этих векторов имеет ранг, равный к=n-r, то есть равен числу векторов. Матрица

$$C=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_r & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_r & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_r & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Векторы e_1, e_2,…..,e_k называются фундаментальной системой решений, они образуют базис пространства решений, размерность которого равна k = n – r . Любое другое решение будет линейной комбинацией базисных векторов. Поэтому можно записать общее решение однородной системы в виде $X_{00}=c_1e_1+c_2e_2+....+c_\kappa e_\kappa$, где c_1, c_2, ……,$c_к$- произвольные действительные числа, одновременно не равные нулю.

Пример. Найти фундаментальную систему решений и размерность пространства решений однородной системы уравнений

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5 &= 0 \\ 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4+x_5 &= 0. \\ 3x_1+4x_2+5x_3+x_4+2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Решение. Сначала найдем ранг матрицы А системы уравнений $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Умножим первую строку на два и вычтем из второй строки, затем умножим первую строку на три и вычтем из третьей строки, получим матрицу $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -9 \\ 0 & -2 & -4 & -11 & -13 \end{pmatrix}$. В матрице A_1 вторую строку умножим на (-2) и прибавим к третьей строке, получим матрицу A_2, в которой элементы второй строки запишем с противоположным знаком. Получим матрицу $A_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$. В матрице A_2 третью строку разделим на (-5) и запишем матрицу $A_3=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Очевидно, что в A_3 базисный минор, составленный из элементов первого, второго и четвертого столбцов , третьего порядка и равен

$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Следовательно ранг матрицы А системы уравнений равен трем, ранг меньше числа неизвестных, что доказывает существование бесчисленного множества решений данной системы уравнений. За основные неизвестные возьмем x_1, x_2, x_4, а за свободные x_3, x_5. По последней матрице A_3 запишем систему уравнений в виде

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_4 &= -3x_3 - 5x_5 \\ x_2 + 3x_4 &= -2x_3 - 9x_5 \\ x_4 &= -x_5 \end{aligned}.$$

1) Пусть $x_3=1$, $x_5=0$. Получим систему уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_4 &= -3 \\ x_2 + 3x_4 &= -2 \\ x_4 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= -3 \\ x_2 &= -2 \\ x_4 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= -2 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

. Вектор решения $e_1=(1,-2,1,0,0)$.

2) Пусть $x_3=0$, $x_5=1$, тогда система уравнений примет вид

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_4 &= -5 \\ x_2 + 3x_4 &= -9 \\ x_4 &= -1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= -1 \\ x_2 &= -6 \\ x_4 &= -1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 11 \\ x_2 &= -6 \\ x_4 &= -1 \end{aligned}$$

. Вектор решения $e_2=(11,-6,0,-1,1)$. Векторы e_1, e_2 – фундаментальная система решений, образует базис пространства решений, размерность которого два. Пространство решений можно записать в виде общего решения $X_{00} = c_1e_1 + c_2e_2$, где c_1 и c_2 - произвольные числа, одновременно не равные нулю.

Задачи для самостоятельного решения

Найти фундаментальную систему решений и размерность пространства решений однородной системы уравнений:

1) $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 4x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$ 2) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_5 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 3x_4 - 2x_5 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 5x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}.$

3.6. Общее решение неоднородной системы линейных алгебраических уравнений

Исследование произвольных систем линейных уравнений рассмотрено в параграфе 5. Предположим, что система (2.1.) совместна и ранг матрицы А системы меньше числа неизвестных, то есть система имеет бесчисленное множество решений. Для краткости изложения систему (2.1.) запишем в матричной форме АХ=В. Соответствующее однородное уравнение АХ=0 имеет линейное векторное пространство решений $X_{00} = c_1e_1 + c_2e_2 + ... + c_кe_к$, которое можно назвать общим решением однородной системы уравнений. $e_2, \ldots, e_к$ – фундаментальная система решений, $c_1, c_2, \ldots, c_к$ – произвольные числа, к- размерность пространства. Обозначим $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{n*})$ - одно фиксированное решение системы AX=B. Легко доказать, что множество решений системы AX=B является суммой частного решения X^* неоднородной системы и общего решения X_{00} однородной системы, то есть

$$X_{0н} = X^* + X_{00}$$

(3.6.1.)

Действительно, подставим $X_{0н}$ в уравнение AX=B и , пользуясь свойствами матриц, получим $AX_{0н} = A(X^* + X_{00}) = AX^* + AX_{00} = B$ так как $AX^* = B,\quad AX_{00} = 0.$ Любое решение неоднородной системы принадлежит своему множеству решений, выражаемому формулой (3.6.1.). Поэтому $X_{0н}$ называется общим решением линейной неоднородной системы уравнений, имеющей бесчисленное множество решений.

План построения общего решения неоднородной системы уравнений:

1. Исследовать систему уравнений на совместность по теореме Кронекера – Капелли.
2. Если ранг меньше числа неизвестных n, обозначить основные (базисные) и свободные неизвестные.
3. Выразить основные неизвестные через свободные.
4. Все свободные неизвестные приравнять нулю и, решая систему, найти вектор X^*
5. Для соответствующей однородной системы уравнений найти фундаментальную систему решений $e_1, e_2 \ldots, e_к$ и записать X_{00}.
6. Записать ответ в виде $X_{0н} = X^* + X_{00}$.

Пример. Найти общее решение системы уравнений. $\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & 5 \end{array}$

Решение.

1 .Запишем расширенную матрицу системы $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Очевидно ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы одинаковые, то есть r=2. Система совместна и имеет бесчисленное множество решений.

2. Пусть базисный минор $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, следовательно, основными неизвестными будут x_1, x_2, а свободными – x_3, x_4 .

3. По преобразованной матрице запишем эквивалентную систему уравнений $\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 & = & 1 - x_3 + x_4 \\ 3x_2 & = & 4 - 2x_3 - 5x_4 \end{array}$

4. Пусть $x_3=0$, $x_4=0$. Тогда имеем систему $\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 & = & 1 \\ 3x_2 & = & 4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 & = & 1 \\ x_2 & = & \frac{4}{3} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{7}{3} \\ x_2 & = & \frac{4}{3} \end{array}$.Таким образом, $X^*=(\frac{7}{3},\ \frac{4}{3},\ 0,\ 0)$

5. Запишем однородную систему уравнений в виде $\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 & = & -x_3 + x_4 \\ 3x_2 & = & -2x_3 - 5x_4 \end{array}$.

6. а) Пусть $x_3=1$, $x_4=0$, тогда $\begin{matrix} x_1 - x_2 = -1 \\ 3x_2 = -2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_1 = -\frac{5}{3} \\ x_2 = -\frac{2}{3} \end{matrix}$

$e_1 = (-\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, \quad 0, \quad 1)$.

б) Пусть $x_3=0$, $x_4=1$, тогда

$$\begin{matrix} x_1 - x_2 = 1 \\ 3x_2 = -5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = \frac{-2}{3} \\ x_2 = \frac{-5}{3} \end{matrix} \quad e_2 = (\tfrac{-2}{3}, \ \tfrac{-5}{3}, 0, 1)$$

Таким образом, $X_{00} = C_1 e_1 + C_2 e_2$.

6. Ответ. Общее решение

$$X_{0н} = X^* + X_{00}, \quad X^* = (\tfrac{7}{3}, \ \tfrac{4}{3}, \ 0, \ 0), \quad e_1 = (-\tfrac{5}{3}, \ -\tfrac{2}{3}, \ 1, \ 0), \quad e_2 = (-\tfrac{2}{3}, \ -\tfrac{5}{3}, \ 0, \ 1).$$

3.8. Евклидово пространство

В линейных пространствах R_2 и R_3 существует понятие длины вектора и угла между векторами. Обе эти характеристики взаимного расположения векторов определяются величиной скалярного произведения. В произвольном векторном пространстве удобно сначала ввести скалярное произведение двух элементов этого пространства, а затем уже определить длину вектора и угол между векторами.

Скалярным произведением двух векторов $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ называют число, полученное следующим образом: $(XY)=x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$. Скалярное произведение подчиняется определенным законам (аксиомам):

1) $(XY)=(YX)$,

2) $((X+Z)Y)=(XY)+(ZY)$,

3) $((\alpha X)Y)=\alpha(XY)=(X(\alpha Y))$,

4) $(XX)>=0$, если $X \neq \vec{0}$,

5) $(XX)=0$, если $X=0$.

Линейное пространство, в котором определено скалярное произведение, называют евклидовым пространством. Евклидово пространство обозначают символом E, если известна его размерность, то E_n. Длина вектора X (или норма) обозначается $|X| = \sqrt{(XX)}$. Угол между векторами определится по формуле $\cos\varphi = \dfrac{(XY)}{|X||Y|}$ $(0 \le \varphi \le \pi)$. Те векторы, у которых скалярное произведение равно нулю, называются ортогональными векторами. Для любого пространства, в котором введено скалярное произведение, справедлива теорема: если векторы X,Y ортогональны, то $|X+Y|^2 = ((X+Y)(X+Y)) = (XX)+(XY)+(YX)+(YY)$. Произведение $(XY)=(YX)=0$, так как векторы ортогональны следовательно, $|X+Y|^2 = |X|^2 + |Y|^2$.

Для элементов эвклидова пространства справедливо также неравенство Коши-Буняковского: $|(XY)| \le |X||Y|$. Докажем это неравенство. Возьмем любое неравное нулю число α и составим элемент $X-\alpha Y$. Тогда $((X-\alpha Y)(X-\alpha Y))>=0$ по аксиоме 4. С другой стороны по аксиомам 1-3 это выражение можно записать иным образом $(XX)-2\alpha(XY)+\alpha^2(YY)>=0$. Относительно α последнее выражение является квадратным трехчленом, значения которого больше нуля или равны нулю для любого значения аргумента. В этом случае дискриминант квадратного трехчлена должен быть неположительным, т.е. $4(XY)^2 - 4(XX)(YY) \le 0$ *или* $|(XY)| \le |X||Y|$, что и требовалось доказать. В пространстве E_n для любых $X,Y \in R_n$ справедливо неравенство треугольника

$|X+Y| \le |X| + |Y|$. Для доказательства этого неравенства воспользуемся неравенством Коши–Буняковского.

$$|X+Y|^2 = ((X+Y)(X+Y)) = |X|^2 + 2(XY) + |Y|^2 \le |X|^2 + 2|X||Y| + |Y|^2 = (|X|+|Y|)^2$$

отсюда $|X+Y| \le |X| + |Y|$. Очевидно, что нулевой вектор ортогонален любому другому. Если два ненулевых вектора ортогональны, то угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$.

Векторы $e_1, e_2, \ldots e_n$ образуют ортонормированны базис, если они попарно ортогональны и норма каждого равна единице, т.е.

$$(e_i e_j) = 0 \quad при \quad i \ne j \quad и \quad (e_i e_i) = 1 \quad при \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

Во всяком n - мерном евклидовом пространстве ортонормированный базис не единственный. Примером ортонормированного базиса может служить декартов прямоугольный базис евклидова пространства всех свободных векторов $e_1 = (1,0,\ldots,0), \quad e_2 = (0,1,\ldots,0), \quad \ldots, e_n = (0,0,\ldots,1)$.

Ортонормированный базис – это особо удобный базис пространства. Особая роль этих базисов в том, что если произвольные векторы пространства X и Y определены в таком базисе, то их скалярное произведение равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов $(xy) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$. Координаты произвольного вектора X относительно ортонормированного базиса равны скалярным произведениям этого вектора на соответствующие базисные векторы. Таким образом, в евклидовом пространстве ортонормированный базис обладает свойствами, аналогичными свойствам декартового прямоугольного базиса.

Пример. Проверить, что векторы $e_1=(1,-1,0)$, $e_2=(2,2,1)$, $e_3=(1,1,-4)$ образуют ортонормированный базис и для вектора X=(2,5,3) найти разложение по этому базису.

Решение. Проверим, составляют ли векторы e_1, e_2, e_3 базис в R_3. Для этого проверим линейную независимость векторов. Составим определитель из компонентов векторов и вычислим его $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -18 \ne 0.$

Следовательно векторы составляют базис в пространстве R_3. Проверим ортогональность векторов с помощью скалярного произведения:

$$e_1e_2 = 2-2+0 = 0 \Rightarrow e_1,\ e_2 - \textit{ортогональны}$$

$$e_1e_3 = 1-1-0 = 0 \Rightarrow e_1,\ e_2 - \textit{ортогональны}$$

$$e_2e_3 = 2+2-4 = 0 \Rightarrow e_2,\ e_3 - \textit{ортогональны}$$

Таким образом векторы попарно ортогональны и составляют базис. Составим теперь ортонормированный базис:

$$e_1^* = \frac{e_1}{|e_1|} = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$$

$$e_2^* = \frac{e_2}{|e_2|} = (\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3})$$

$$e_3^* = \frac{e_3}{|e_3|} = (\tfrac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}}).$$

Векторы e_1^*, e_2^*, e_3^* ортогональны и имеют единичную длину, то есть составляют ортонормированный базис и координаты вектора X относительно этого базиса равны скалярным произведениям X на соответствующие базисные

векторы.
$$Xe_1^* = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{\sqrt{2}}$$
$$Xe_2^* = \frac{4}{3} + \frac{10}{3} + 1 = \frac{17}{3}$$
$$Xe_3^* = \frac{2}{3\sqrt{2}} + \frac{5}{3\sqrt{2}} - \frac{12}{3\sqrt{2}} = -\frac{2}{3\sqrt{2}}$$

Ответ. Вектор X=$-\frac{3}{\sqrt{2}}e_1^* + \frac{17}{3}e_2^* - \frac{2}{3\sqrt{2}}e_3^*$.

Замечание. Если данный базис не является ортогональным, то разложение по нему осуществляется по правилу, которое изложено в параграфе 3.3.

Упражнения для самостоятельного решения

Проверить составляют ли векторы ортогональный базис и разложить вектор X по этому базису.

1) $\begin{array}{lcl} e_1 & = & (2,0,-2) \\ e_2 & = & (1,-2,1) \\ e_3 & = & (1,1,1) \\ x & = & (3,-2,5) \end{array}$ 2) $\begin{array}{lcl} e_1 & = & (1,2,5) \\ e_2 & = & (2,-3,-1) \\ e_3 & = & (2,-3,-2) \\ x & = & (3,-1,1) \end{array}$

4. Линейные преобразования и линейные операторы

4.1. Матрица линейного преобразования

Рассмотрим два линейных векторных пространства $R_n -$ размерности n и R_m размерности m. Пусть задана матрица чисел

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если записать матричное равенство

$$Y=Ax \tag{4.1.1}$$

где x=(x_1, x_2, …,x_n)∈ R_n, $y=(y_1,y_2,...,y_m)\in R_m$, то говорят, что задано линейное преобразование векторов. Матрица A называется линейным оператором, задающим отображение пространства R_n *в* R_m.

Выражение (4.1.1) через компоненты векторов имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \vdots$$

4.1.2.)

Очевидно, что из (4.1.2) следует

$$\begin{cases} y_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots & = & \cdots\cdots\cdots \\ y_n & = & a_{n1}x_n + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

(4.1.3)

Если матрица квадратная и невырожденная, то есть det (A)≠ 0, то вектор y=(y_1,y_2,…,y_n) будет принадлежать тому же пространству R_n. Тогда говорят, что оператор A отображает пространство R_n в себя. Такие операторы будем использовать в дальнейшем при изложении темы. Линейные операторы удовлетворяют следующим соотношениям

1) A(x+y)=A(x)+A(y)
2) A(λx)=λA(x), где x,y $\in R_n$, λ- действительное число.
3) (A+B)x=A(x)+B(x)
4) (AB)x=A(B(x)), где матрицы A, B квадратные и одной и той же размерности. Существует нулевой оператор 0, переводящий все векторы пространства $R_т$ в нулевые векторы 0x=0 и тождественный оператор E, оставляющий вектор неизменным, т.е. Ex=x.

Пример. В пространстве R_3 в базисе $e_1,e_2.e_3$ линейный оператор задан матрицей A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. Найти образ вектора x=$e_1-2e_2$+3$e_3$.

Решение. По формулам ( ), ( ) имеем$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 17 \end{pmatrix}$.

Ответ. У=10e_1 +7e_2 +17e_3.

4.2. Изменение матрицы линейного преобразования при переходе к новому базису

В параграфе 3.7. мы рассмотрели пересчет координат фиксированного вектора при переходе к новому базису, ввели понятие матрицы перехода . Теперь пусть в старом базисе e_1. e_2….,$e_п$ имеется линейное преобразование в матричной форме

Q=AP

(4.2.1)

Где Q – матрица-столбец, составленная из компонент вектора q=(q_1, q_2, …q_n) и P-матрица-столбец, составленная из компонент вектора p=(p_1,p_2….,$p_т$). A-матрица преобразования векторов

A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$. При переходе к новому базису $e_1', e_2', ..., e_n'$ те же векторы p,q будут иметь новые координаты p=$\begin{pmatrix} p_1' & p_2' & \cdots & p_m' \end{pmatrix}$ и $q = (q_1', q_2', .., q_n')$.

Преобразование имеет вид:

$$Q' = A'P'$$

(4.2.2)

Найдем матрицу A´ из следующих соображений. По формуле () имеем:

P=CP´

(4.2.3)

Q=CQ´

(4.2.4)

Здесь C- матрица перехода. В равенство (4.2.1) подставим (4.2.3) и (4.2.4), получим:

CQ´=ACP´

(4.2.5)

Умножим равенство (4.2.5) слева на матрицу C^{-1}, обратную матрице перехода $C^{-1}CQ'=C^{-1}ACP'$.
Так как $C^{-1}C=E$- единичная матрица, то получаем:

$$Q'=C^{-1}ACP' \qquad (4.2.6)$$

Это и есть линейное преобразование векторов в новом базисе. Матрица линейного оператора в новом базисе вычисляется по формуле:

$$A'=C^{-1}AC \qquad (4.2.7)$$

Заметим, что из матричной формулы (4.2.7) следует числовое равенство Det(A´)=det(A), то есть величина определителя матрицы оператора не зависит от выбора базиса. Действительно, используя свойства определителя, получаем

$$|A'|=|C^{-1}AC|=|C^{-1}||A||C|=|C^{-1}||C||A|=|C^{-1}C||A|=|E||A|=|A|.$$

.

Пример. В базисе e_1, e_2 преобразование имеет матрицу $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}$. Найти матрицу этого преобразования в новом базисе e_1', e_2', *если* $e_1'=e_1-e_2$, $e_2'=3e_1+2e_2$.

Решение. Составим матрицу перехода к новому базису, располагая координаты векторов $e_1'=(1,-1)$, $e_2'=(3,2)$ по столбцам, $C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$. Вычислим обратную матрицу

$C^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.1 Матрица оператора A в новом базисе будет получена по формуле (4.2.7)

$A'=C^{-1}AC=$

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-7 & 2\\ 4 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-9 & -17\\ -2 & 24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-9}{5} & -\frac{17}{5}\\ -\frac{2}{5} & \frac{24}{5}\end{pmatrix}$$

Ответ. Матрица оператора в новом базисе равна $\begin{pmatrix}-\frac{9}{5} & -\frac{17}{5}\\ -\frac{2}{5} & \frac{24}{5}\end{pmatrix}$.

4.3. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Определение. Ненулевой вектор X называется собственным вектором линейного оператора A , если найдется такое действительное число λ , что $A\cdot X=\lambda X$. Число λ называется собственным значением оператора (матрицы) A.

Из определения следует, что собственный вектор после действия на него оператором A, переходит в тот же вектор, умноженный на число, то есть в вектор коллинеарный самому себе. Из матричного равенства $A\cdot X=\lambda\cdot X$ следуют равенства, связывающие компоненты вектора $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & \lambda x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = & \ldots. \\ a_{n1}x_n + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = & \lambda x_n \end{cases}$$

(4.3.1)

Перепишем систему уравнений (4.3.1) в виде

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = & 0 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n & = & 0 \end{cases}$$

(4.3.2) или (A-λE)X=0

Система (4.3.2) однородная и для существования ненулевых решений такой системы необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы равнялся нулю.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots. & \ldots. & \ldots. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots. & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

(4.3.3)

Уравнение (4.3.3) называется характеристическим уравнением оператора (матрицы) А. Левая часть этого уравнения является многочленом степени n относительно собственного значения λ. Этот многочлен называется характеристическим многочленом линейного оператора (матрицы) А. Характеристический многочлен не зависит от выбора базиса. Это свойство многочлена имеет место потому, что величина определителя матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса

Пример. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Составим характеристическое уравнение (4.3.3)

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

Корни этого квадратного уравнения $\lambda_1=2$ и $\lambda_2=3$ являются собственными значениями матрицы. Для каждого собственного значения найдем соответствующее множество собственных векторов.

А) Подставим $\lambda=\lambda_1=2$ в систему уравнений (4.3.2), получим

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 & = & 0 \\ -x_1 + 2x_2 & = & 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2x_2.$$

Придавая $x_2=C$ любые числовые значения ($x_2 \neq 0$), получим множество коллинеарных векторов $e_1=(2C,C)$, $C \neq 0$.

Б) Аналогично для $\lambda=\lambda_2=3$ найдем систему уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 & = & 0 \\ -x_1 + x_2 & = & 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2$$

. Обозначим $e_2=(C,C)$,$C \neq 0$.

Собственные векторы имеют важное свойство: если собственные значения попарно различны, тогда системы соответствующих собственных векторов линейно независимы и образуют базис векторного пространства. Матрица линейного оператора в базисе из собственных векторов, соответствующих различным собственным значениям, имеет диагональный вид:

$$A^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Пример. Привести матрицу A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ к диагональному виду.

Решение. Для данной матрицы в предыдущем примере найдены собственные значения и собственные векторы. Пусть C=!, тогда векторы e_1^1=(2,1) и e_2^1=(1, 1) образуют базис как два линейно независимых вектора в пространстве R_2. Найдем матрицу A^1 в выбранном базисе по формуле $A^1 = C^{-1}$ A C. Матрица перехода C=$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и обратная к ней C^{-1}=$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Значит

$$A^1=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ. A^1=$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ имеет диагональный вид, на диагонали расположены собственные значения данной матрицы.

Пример. Привести к диагональному виду матриц

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем собственные значения матрицы А. Для этого составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -3 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая любым способом определитель, получим уравнение третьей степени (2-λ) $(\lambda-3)^2$=0, которое имеет собственные значения λ_1=2, $\lambda_2=\lambda_3$=3. Так как среди корней характеристического уравнения имеются кранные корни, то нельзя выбрать базис из собственных векторов и матрица А не приводится к диагональному виду.

Упражнения для самостоятельного решения

Задача 1. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A=$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Привести матрицу к диагональному виду A=$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Задача 3. Дана матрица A=$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.Найти матрицу C, приводящую данную матрицу к диагональному виду, и матрицу B= C^{-1} A C.

4.4. Ортогональные и симметрические матрицы линейных преобразований

Матрица А является симметрической, если она не меняется при транспонировании, то есть A= A^T. Например, следующие матрицы симметрические

$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4 & 0 & 9 \\ -1 & 9 & 7 \end{pmatrix}$. Свойства симметрических матриц:

1) Собственные значения симметрической матрицы – действительные числа.
2) Любая симметрическая матрица имеет по крайней мере один набор попарно перпендикулярных собственных векторов.
3) Симметрическая матрица может быть приведена к диагональному виду.

Матрица Q называется ортогональной, если при транспонировании она совпадает со своей обратной матрицей, то есть $Q^{-1}=Q^T$.

Свойства ортогональных матриц Q:

1) Если матрица ортогональная, то Q^{-1} также ортогональная
2) Столбцы матрицы Q образуют ортонормированную систему векторов
3) Для каждой симметрической матрицы A_C существует такая ортогональная матрица Q, что матрица $Q^{-1}A_CQ$ является диагональной.

На основании перечисленных свойств симметрических и ортогональных матриц (преобразований) можно составить план приведения симметрической матрицы к диагональному виду:

1. Найти собственные значения матрицы.
2. Сформировать базис из ортогональных собственных векторов.
3. Составить матрицу перехода C к базису из собственных векторов.
4. Столбцы матрицы C подвергнуть нормализации (т.е. каждый собственный вектор разделить на его длину), в результате получится матрица Q.
5. Транспонируя матрицу Q, получим обратную матрицу Q^{-1}.
6. Вычислим произведение $\acute{A}=Q^{-1}A_CQ$ $\acute{A}$ –диагональная матрица.

Пример. Привести симметрическую матрицу A к диагональному виду с помощью ортогональной матрицы Q, если A=$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Составим характеристическое уравнение det(A-λE)=0

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 5\lambda^2 - 9\lambda + 45 = 0.$$

Корни характеристического уравнения $\lambda_1=-3,\quad \lambda_2=3,\quad \lambda_3=5$ – действительные и различные числа. Определим собственные векторы. В систему уравнений

$$\begin{cases} (3-\lambda)x_1 - 2x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ -2x_1 - (1+\lambda)x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + (3-\lambda)x_3 & = & 0 \end{cases}$$

подставим собственные значения.

1)$\lambda=\lambda_1=-3$ получим

$$\begin{cases}6x_1-2x_2+2x_3 &= 0\\ -2x_1+2x_2+2x_3 &= 0\\ 2x_1+2x_2+6x_3 &= 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1-x_2-x_3 &= 0\\ x_2+2x_3 &= 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1-x_2 &= x_3\\ x_2 &= -2x_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1 &= -x_3\\ x_2 &= -2x_3\end{cases}$$

x_3 - любое число, и не равно нулю. Пусть $x_3=-1$., тогда имеем собственный вектор $e_1=(1, 2, -1)$.

3) Возьмем $\lambda=\lambda_2=3$.

$$\begin{cases}-2x_2+2x_3 &= 0\\ -2x_1-4x_2+2x_3 &= 0\\ 2x_1+2x_2 &= 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2 &= x_3\\ x_1 &= -x_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1 &= -x_3\\ x_2 &= x_3\end{cases}.$$

Пусть x_3 =1. Второй собственный вектор $e_2=(-1, 1, 1)$.

Подставим $\lambda=\lambda_3=5$.

$$\begin{cases}-2x_1-2x_2+2x_3 &= 0\\ -2x_1-6x_2+2x_3 &= 0\\ 2x_1+2x_2-2x_3 &= 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2-x_3 &= 0\\ x_2 &= 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1 &= x_3\\ x_2 &= 0\end{cases}.$$

Если $x_3=1$, то $e_3=(1, 0, 1)$. Полученные собственные векторы попарно ортогональны:

$e_1e_2=0,\quad e_1e_3=0,\quad e_2e_3=0$. Имеем ортогональный базис

$e_1=(1,2,-1),\quad e_2=(-1,1,1)\quad e_3=(1,0,1)$. Матрица перехода к этому базису $C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Можно было бы найти C^{-1} и

тогда диагональная матрица $A'=C^{-1}AC$. Однако быстрее нормировать базис, разделив каждый вектор на его длину и составить матрицу Q. Действительно

$e_1^*=(1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})\quad e_2^*=(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}),\quad e_3^*=(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$.

- это ортонормированный базис. Матрица

$$Q=\begin{Bmatrix}1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2}\\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0\\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2}\end{Bmatrix}$$ - ортогональная матрица.

По свойству $Q^T=Q^{-1}$ запишем обратную матрицу

$Q^{-1}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$. Вычислив произведение трех

матриц, получим диагональную матрицу $\dot{A}'=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$.

Рассмотрим теперь пример, в котором собственные числа не все различны.

Пример. Привести к диагональному виду матрицу А, определяющую линейное преобразование в ортогональном базисе: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -4\\ 2 & -2 & -2\\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

Решение. Составим характеристическое уравнение.

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & -4\\ 2 & -2-\lambda & -2\\ -4 & -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow \lambda^3-27\lambda-54=0.$$

(*)

Решая уравнение, найдем собственные значения $\lambda_1=-3,\quad \lambda_2=-3,\quad \lambda_3=6.$ Для нахождения собственных векторов в систему уравнений

$$(A-\lambda E)X=\begin{cases}(1-\lambda)x_1+2x_2-4x_3 & = & 0\\ 2x_1+(-2-\lambda)x_2-2x_3 & = & 0\\ -4x_1-2x_2+(1-\lambda)x_3 & = & 0\end{cases}$$ подставим сначала двукратный корень λ=λ_1=λ_2=-3. Получим следующую систему $$\begin{cases}4x_1+2x_2-4x_3 & = & 0\\ 2x_1+x_2-2x_3 & = & 0,\\ -4x_1-2x_2+4x_3 & = & 0\end{cases}$$ которая сводится к одному уравнению:

$$2x_1+x_2-2x_3=0 \qquad (**)$$

Из последнего уравнения можно сделать вывод, считая его скалярным произведением, что все собственные векторы e_1, e_2 , соответствующие кратному собственному значению λ=-3, лежат в одной плоскости и ортогональны вектору e=(2,1,-2), координаты которого есть коэффициенты уравнения (**). Следовательно вектор e принадлежит множеству собственных векторов, соответствующих λ_3=6. Этот факт можно проверить следующим образом: подставим λ_3=6 в систему (*), а затем подставим туда координаты вектора e. Получим $$\begin{cases}-5x_1+2x_2-4x_3 & = & 0\\ 2x_1-8x_2-2x_3 & = & 0.\\ -4x_1-2x_2-5x_3 & = & 0\end{cases}$$ При x_1=2 x_2=1, x_3=-2: -10+2+8=0 4-8+4=0, -8-2+10=0. Поэтому e_3=e=(2, 1, -2). Теперь, пользуясь уравнением (**), подберем решение x_1=1, x_2=2, x_3=2 и обозначим собственный вектор e_2=(1, 2, 2). Чтобы найти еще один собственный вектор из бесчисленного множества векторов, соответствующих λ=-3, примем во внимание, что искомый вектор должен быть ортогонален векторам e_2 и e_3 . Следовательно, его можно вычислить как векторное произведение, т.е. $e_1=[e_3,e_2]$. В координатной форме это выглядит следующим образом $$e_1=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=6i-6j+3k,\quad e_1=(6,-6,3).$$ Таким образом, новый ортогональный базис из собственных векторов: e_1=(6,-6,3), e_2=(1,2,2), e_3=(2,1,-2). Разделим каждый вектор на его длину $|e_1|=9,\quad |e_2|=3,\quad |e_3|=3,$ и получим ортонормированный базис $e_{10}=(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}),\quad e_{20}=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}),\quad e_{30}=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$. Ортогональная матрица: $$Q=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}.$$

Обратная матрица: $Q^{-1}=Q^{T}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}.$

Диагональная матрица, определяющая преобразование в новом ортонормированном базисе. Найдется по формуле:

$$A'=Q^{-1}AQ=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -4\\ 2 & -2 & -2\\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}.$$

Ответ: $A'=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}.$

Если собственные значения симметрической матрицы в трехмерном линейном пространстве все одинаковы $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda$, то матрица определяет преобразование подобия с коэффициентом λ. В этом случае все векторы пространства являются собственными векторами. В качестве нового базиса можно взять любую тройку единичных попарно ортогональных векторов, например e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1).

5. Квадратичные формы

5.1. Матрица квадратичной формы

Определение. Квадратичной формой Ĺ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) от n переменных называется сумма, каждый член которой является или квадратом одной из переменных или произведением двух разных переменных, взятых с некоторыми коэффициентами – действительными числами.

$L(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum\sum a_{ij}x_i x_j$. Мы будем рассматривать квадратичные формы с двумя переменными $L(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$
(5.1.1)
и с тремя
$$L(x_1,x_2,x_3)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$
(5.1.2)
Квадратичные формы можно записать в матричной форме, введя в рассмотрение матрицу А квадратичной формы. Для (5.1.1) матрица А имеет вид $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Для (5.1.2) матрица А равна

А=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. То есть матрица квадратичной формы является симметрической матрицей. Для переменных вводится матрица-столбец Х и транспонированная X^T - матрица – строка. Тогда квадратичная форма может быть записана в виде произведения трех матриц

$$L = X^T AX \qquad (5.1.3)$$

Пример. Дана квадратичная форма $L(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$. Записать ее в матричной форме.

Решение. Матрица квадратичной формы составляется следующим образом: элементы главной диагонали равны коэффициентам при квадратах переменных, остальные элементы равны половине коэффициента при произведении x_1x_2:

A=$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. Матрица Х=$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $X^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}$. Таким образом,

$L(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 - 4x_1x_3 + x_2^2 + 6x_3^2$.

$L(x_1, x_2) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Пример. Написать матрицу квадратичной формы

Решение. На главной диагонали располагаем элементы при квадратах переменных a_{11}=3, a_{22}=1, a_{33}=6, остальные элементы a_{12}=a_{21}=5/2, a_{13}=a_{31}=-2, a_{23}=a_{32}=0. Следовательно,

$$А=\begin{pmatrix} 3 & 2.5 & -2 \\ 2.5 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы квадратичной формы называют рангом квадратичной формы. Если ранг совпадает с числом переменных квадратичной формы, то ее называют невырожденной. Если ранг меньше, то квадратичная форма – вырожденная.

Пример. Является ли невырожденной квадратичная форма $L(x_1,x_2,x_3) = x^2_1+4x_1x_3$?

Решение. Составим матрицу квадратичной формы $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Найдем ранг матрицы А. Так как величина ранга не зависит от элементарных преобразований матрицы, то отбрасывая нулевую строку, найдем минор второго порядка $M_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2,$ то есть ранг меньше трех переменных, входящих в квадратичную форму. Следовательно, данная квадратичная форма вырожденная.

5.2. Канонический вид квадратичной формы

В квадратичной форме $L = X^T AX$ можно выполнить линейное преобразование переменных $X = CY, \quad X = (x_1, x_2,..., x_n), \quad Y = (y_1, y_2,..., y_n)^T, \quad C = (c_{ij})_{nn}$ – невырожденная квадратная матрица n-ого порядка. Учитывая линейное преобразование переменных, получим равенство:

$$L = X^T AX = (CY)^T A(CY) = Y^T C^T ACY = Y^T (C^T AC)Y \qquad (5.2.1)$$

Здесь использовано свойство $(CY)^T = Y^T C^T$. Новая матрица квадратичной формы

$$A^* = C^T AC \qquad (5.2.2)$$

Первоначальная квадратичная форма и полученная из нее (5.2.1) с помощью невырожденного линейного преобразования называются эквивалентными квадратичными формами.

Пример. Дана квадратичная форма $L(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$. Найти эквивалентную квадратичную форму $L(y_1,y_2)$, используя линейное преобразование переменных $x_1=y_1-2y_2$, $x_2=y_1+y_2$.

Решение. По условию матрица данной квадратичной формы $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Заданное линейное преобразование в матричной форме $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

Матрица $C=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Теперь по формуле (5.2.2) новая матрица получается

$$A^* = C^T AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ. Квадратичная форма, эквивалентная данной $L(y_1, y_2) = 6y_1^2 + 3y_2^2$.

Определение. Квадратичная форма имеет канонический вид, если все коэффициенты $a_{ij} = 0 \quad i \neq j$, т.е. $L = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{nn}x_n^2$ и ее матрица является диагональной. В примере 5.2.1 после линейного преобразования квадратичная форма приняла канонический вид. Справедливо следующее утверждение: любая квадратичная форма с помощью невырожденного линейного преобразования переменных может быть приведена к каноническому виду. Возможны два способа приведения квадратичных форм к каноническому виду.

Первый способ. Идея метода состоит в том, что путем тождественных преобразований в квадратичной форме последовательно выделяются полные квадраты по всем переменным.

Пример. Привести к каноническому виду квадратичную форму $L = 2x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2$.

Решение. Выделим полный квадрат по переменной x_1:

$$L = 2(x_1^2 - 3x_1x_2 + \tfrac{9}{4}x_2^2) - \tfrac{9}{2}x_2^2 + 3x_2^2 = 2(x_1 - \tfrac{3}{2}x_2)^2 - \tfrac{3}{2}x_2^2.$$

Введем новые переменные $y_1 = x_1 - \tfrac{3}{2}x_2, y_2 = x_2$. Тогда получим канонический вид $L = 2y_1^2 - \tfrac{3}{2}y_2^2$.

Пример. Привести к каноническому виду квадратичную форму $L = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$.

Решение. Сначала сгруппируем все слагаемые, содержащие x_1, и затем дополним их до полного квадрата:

$$L = (x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3) + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3 = (x_1^2 + 4x_1(x_2 + x_3) + 4(x_2 + x_3)^2) - 4(x_2 + x_3)^2$$
$$+ 3x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3 = (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 4(x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2) + 3x_2^2 + 5x_3 + 6x_2x_3.$$

Теперь полный квадрат по x_1 оставляем неизменным, а среди оставшихся слагаемых объединяем все члены, содержащие x_2, и выделяем полный квадрат:

$$L = (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2) + 2x_3^2 = (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 2x_3^2$$

обозначим $y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3$, $y_2 = x_2 + x_3$, $y_3 = x_3$, в результате получаем канонический вид $L = y_1^2 - y_2^2 + 2y_3^2$.

Второй способ. Матрица квадратичной формы всегда симметрическая, поэтому она имеет действительные собственные значения и сводится к диагональному виду с помощью линейного ортогонального преобразования X=mY, где Q – ортогональная матрица (см. пример в 4.4.1)

Если квадратичная форма зависит от двух переменных $L = L(x_1, x_2)$ и λ_1, λ_2 собственные значения ее матрицы , то канонический вид квадратичной формы $L = \lambda_1 y_1^1 + \lambda_2 y_2^2$.

Если Ĺ=Ĺ(x_1, x_2, x_3) и ее матрица имеет собственные значения λ_1, λ_2, λ_3 , то кононический вид в новых переменных $L = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$. Чтобы найти линейное преобразование перемнных, приводящих квадратичную форму к каноническому виду, нужно найти собственные векторы, нормировать их и записать матрицу Q.

Пример. Привести к каноническому виду квадратичную форму $L = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2$.

Решение. Матрица данной квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3-\lambda)^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0.$$

Собственные значения $\lambda_{11} = 1, \lambda_2 = 5$. Квадратичная форма в новом базисе из собственных векторов имеет канонический вид $L = y_1^2 + 5y_2^2$. Найдем собственные векторы. Для этого в систему уравнений вида (4.3.2) $\begin{cases} (3-\lambda)x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + (3-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$, подставим собственные значения.

А)При $\lambda = \lambda_1 = 1$ получим $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2$. Пусть $x_2 = 1$ и $x_1 = 1$. Тогда $e_1 = (1,1)$.

Б)При $\lambda=\lambda_2=5$ система имеет вид $\begin{cases} -2x_1-2x_2 &= 0 \\ -2x_1-2x_2 &= 0 \end{cases}$. Таким образом, $x_1=-x_2$ и за второй собственный вектор можно взять $e_2=(-1,1)$. Очевидно, что $e_1e_2=0$ – векторы ортогональны. Нормируя e_1, e_2, запишем ортонормированный базис

$e_{10}=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\quad e_{20}=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$. Матрица $Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Следовательно преобразование координат получено. $x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}y_1-\frac{1}{\sqrt{2}}y_2, \quad x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_2$. Заметим, что в случае ортогональных преобразований легко получить обратное преобразование переменных, воспользовавшись свойством $Q^{-1}=Q^T$. Обратная матрица равна $Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $Y=Q^{-1}X$.

Поэтому выполняются соотношения $y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2, \quad y_2=\frac{-1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2$.

Ответ. Канонический вид $L=y_1^2+5y_2^2, \quad y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2, \quad y_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2$.

Пример. Привести квадратичную форму к каноническому виду и найти ортогональное преобразование переменных, если $L=3x_1^2-x_2^2+3x_3^2+6x_1x_2-2x_1x_3+6x_2x_3$.

Решение. Матрица квадратичной формы A=$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Характеристическое уравнение

$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 & -1 \\ 3 & -1-\lambda & 3 \\ -1 & 3 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda^3-5\lambda^2-16\lambda+80$, корни которого $\lambda_1=5$, $\lambda_2=-4$, $\lambda_3=4$. Тогда канонический вид квадратичной формы $L=5y_1^2-4y_2^2+4y_3^2$. Заметим,. что нумерация собственных значений произвольная. Например, если взять $\lambda_1=-4, \lambda_2=4, \quad \lambda_3=5,$ то канонический вид будет $L=-4y_1^2+4y_2^2+5y_3^2$. Для каждого такого варианта обозначений меняется соответственно расположение (нумерация) базисных собственных векторов (то есть система координат), а смысл квадратичной формы не меняется. Найдем теперь ортонормированный базис и преобразование переменных. Составим систему уравнений

$\begin{cases} (3-\lambda)x_1+3x_2-x_3 &= 0 \\ 3x_1+(-1-\lambda)x_2+3x_3 &= 0 \\ -x_1+3x_2+(3-\lambda)x_3 &= 0 \end{cases}$, в которую последовательно подставим собственные значения.

А) При $\lambda=5$ система примет вид $\begin{cases} -2x_1+3x_2-x_3 &= 0 \\ 3x_1-6x_2+3x_3 &= 0 \\ -x_1+3x_2-2x_3 &= 0 \end{cases}$

Выпишем матрицу системы и подвергнем ее элементарным преобразованиям

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r=2$$

Получим систему эквивалентную исходной

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 = -2x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}.$$

Если x_3=C – любое число, не равное нулю, то множество собственных векторов (C,C,C). Пусть C=1, тогда e_1=(1,1,1).

Б) При λ=-4 имеем систему $\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$

Преобразуем матрицу системы $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 24 & 48 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow r = 2$

По последней матрице запишем систему уравнений $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 7x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$ При x_3=C,где C не равно нулю, множество собственных векторов (C, -2C, C). Возьмем C=1, тогда e_2=(1, -2, 1).

И) при λ=4 получим систему уравнений $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$. Здесь первое и третье уравнения одинаковые, поэтому запишем матрицу системы в виде $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r = 2$. Откуда следует, что $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$. Если x_3=C, где C не равно нулю, то множество собственных векторов (-C, 0, C). Пусть C=1, тогда e_3=(-1,0,1). Получим собственные векторы e_1=(1,1,1), e_2=(1,-2,1), e_3=(-1, 0, 1). Легко увидеть, что они попарно ортогональны. Запишем ортонормированный базис

$e_{10} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}),\quad e_{20} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}),\quad e_{30} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}).$

Ортогональная матрица Q=$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Транспонируя матрицу Q, получим матрицу:

$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. И так как $Y = Q^{-1}X$, записываем ортогональное преобразование переменных

$$\begin{aligned} y_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \tfrac{1}{\sqrt{3}}x_2 + \tfrac{1}{\sqrt{3}}x_3 \\ y_2 &= \tfrac{1}{\sqrt{6}}x_1 - \tfrac{1}{\sqrt{6}}x_2 + \tfrac{1}{\sqrt{6}}x_3 \\ y_3 &= -\tfrac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}x_3 \end{aligned}$$

(*)

Ответ. Квадратичная форма имеет канонический вид $L = 5y_1^2 - 4y_2^2 + 4y_3^2$ в базисе из собственных векторов и может быть получена с помощью преобразования координат в виде (*).

Отметим некоторые свойства квадратичных форм:

1. Канонический вид квадратичной формы не определяется однозначно, так как зависит от выбора системы координат (базисных векторов).

2. В каноническом виде число слагаемых с положительными (отрицательными) коэффициентами не зависит от способа приведения формы к каноническому виду.
3. Ранг матрицы квадратичной формы не меняется при линейных преобразованиях переменных. Ранг всегда равен количеству ненулевых коэффициентов в канонической форме.
4. Квадратичная форма называется положительно (отрицательно) определенной, если при всех значениях переменных, из которых хотя бы одно отлично от нуля, выполняется $L(x_1, x_2, ..., x_n) \rhd 0 \quad (L(x_1, x_2, ..., x_n) \lhd 0)$.

Например, $L = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2$ –положительно определенная форма, а $L = -x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$ – отрицательно определенная.

5. Если все собственные значения матрицы квадратичной формы положительны, то $L(x_1, x_2, ..., x_n) \rhd 0$ положительно определена. Если все собственные значения отрицательны, то $L(x_1, x_2, ..., x_n) \lhd 0$ - отрицательно определенная форма.

5. Знакоопределенность квадратичной формы может быть установлена с помощью критерия Сильвестра: если все главные миноры матрицы квадратичной формы положительны, то квадратичная форма положительно определена. Если все главные миноры матрицы нечетного порядка положительны, то квадратичная форма отрицательно определена.

Продемонстрируем на примере перечисленные свойства.

Пример. Дана квадратичная форма $L = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2$. Ее канонический вид $L = y_1^2 + 5y_2^2$ получен с помощью собственных значений λ_1=1 ,λ_2=5. Приведем теперь эту форму к каноническому виду по первому способу с помощью выделения полных квадратов.

$$L = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 = 3(x_1^2 - \tfrac{4}{3}x_1x_2 + \tfrac{4}{9}x_2^2) - 3\tfrac{4}{9}x_2^2 + 3x_2^2$$

$$= 3(x_1 - \tfrac{2}{3}x_2)^2 - \tfrac{4}{3}x_2^2 + 3x_2^2 =$$

$$3(x_1 - \tfrac{2}{3}x_2)^2 + \tfrac{5}{3}x_2^2.$$

Таким образом

$$L = 3z_1^2 + \tfrac{5}{3}z_2^{2,} \qquad z_1 = x_1 - \tfrac{2}{3}x_2, \qquad z_2 = x_2.$$

Канонический вид квадратичной формы зависит от выбора линейного преобразования переменных, то есть от выбора системы координат. Если, например, взять L=1, то уравнения $y_1^2 + 5y_2^2 = 1 \;\; и \;\; 3z_1^2 + \frac{5}{3}z_2^2 = 1$ являются уравнениями одного и того же эллипса в разных системах координат

Пример. В предыдущем примере мы обратили внимание на то, что канонический вид квадратичной формы можно записать разными способами:

$$L = 5y_1^2 - 4y_2^2 + 4y_3^2 \;\; или \; l = -4y_1^2 + 4y_2^2 + 5y_3^2 \;\; или \; L = -4y_1^2 + 5y_2^2 + 4y_3^2.$$

Во всех этих записях число слагаемых с положительными и отрицательными коэффициентами одно и то же.

Пример. Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму $L = 3x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3$.

Решение. Составим матрицу данной квадратичной формы A=$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и вычислим главные угловые миноры M$_1$=3>0,

$M_2=$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \triangleright 0, \qquad M_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3-1-1=1 \triangleright 0$$

Следовательно, по критерию Сильвестра квадратичная форма положительно определенная.

В заключение рассмотрим экономический смысл понятий собственного значения и собственного вектора. Предположим, что на некотором предприятии в начале года заменяют 20 % оборудования, проработавшего два года, и все оборудование, проработавшее три года. То оборудование, которое было в эксплуатации один год, не заменяется. Для анализа и прогнозирования экономических параметров работы предприятия надо знать устойчивое, т.е. не изменяющееся из года в год, распределение количества единиц работающего оборудования. Введем следующие обозначения: u_{it} – количество единиц оборудования, проработавшего i лет к началу года t, тогда $u_{1t} = 0 \cdot u_{1,t-1} + 0{,}2 \cdot u_{2,t-1} + u_{3,t-1}$. Это равенство означает, что не заменяется новое оборудование прошлого года, заменяется 20 % оборудования, проработавшего два года к началу предыдущего года и все оборудование, проработавшее три года к началу предыдущего года. $u_{2t} = u_{1,t-1} + 0 \cdot u_{2,t-1} + 0 \cdot u_{3,t-1}$. Это равенство означает, что два года проработает то оборудование, которое к началу предыдущего года эксплуатировалось один год. $u_{3t} = 0 \cdot u_{1,t-1} + 0{,}8 \cdot u_{2,t-1} + 0 \cdot u_{3,t-1}$, т.е. три года эксплуатируют то оборудование, которое к началу года проработало два сезона и не было заменено. Введем матрицы

$$u_{t,} = \begin{pmatrix} u_{1,t} \\ u_{2,t} \\ u_{3,t} \end{pmatrix} \quad и \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \end{pmatrix},$$ тогда все предыдущие рассуждения описываются уравнением $Au_{t-1} = u_t$. Если нас интересует устойчивое распределение, то $u_{t-1} = u_t$ и приходится решать уравнение $Au_t = u_t$. Если справедливо предположение о том, что оборудование заменяется пропорционально количеству единиц техники, находящейся на предприятии, то приходится искать распределение, которое является решением уравнения $Au_t = \lambda u_t$. Задача отыскания таких λ, при которых существует ненулевое решение уравнения $Au_t = \lambda u_t$ и приводит к понятию собственного вектора и собственного значения оператора.

Упражнения для самостоятельного решения

Задача 1. Привести к каноническому виду квадратичную форму L=x^2-y^2-4xy путем выделения полного квадрата. Какую кривую определяет уравнение L(x,y)=1?

Задача 2. Привести к каноническому виду квадратичную форму, выделяя полные квадраты, L=$x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$.

Задача 3. Привести к каноническому виду квадратичную форму с помощью ортогонального преобразования переменных $L = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_2x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

Индивидуальные задания для студентов по теме « Линейная алгебра».

1. Вычислить, используя свойства определителя.

Вар	Определитель	Вар	Определитель	Вар	Определитель
1	$\begin{vmatrix} -4 & 4 & -3 & -2 \\ -5 & 4 & -3 & -3 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & -4 & -8 \end{vmatrix}$	2	$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$	3	$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 9 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \\ -4 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$
4	$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ -5 & 2 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$	5	$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ -5 & 2 & 1 & -2 \\ -6 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$	6	$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 10 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \\ -5 & 3 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$
7	$\begin{vmatrix} 6 & -8 & 3 & 2 \\ -5 & 1 & 0 & -4 \\ 7 & -3 & 1 & 5 \\ -3 & -6 & 2 & -6 \end{vmatrix}$	8	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 10 \\ -4 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ -3 & 5 & 3 & 6 \end{vmatrix}$	9	$\begin{vmatrix} 7 & 4 & -2 & 10 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \\ 6 & 2 & 1 & 9 \\ -5 & 1 & -3 & -6 \end{vmatrix}$
10	$\begin{vmatrix} 6 & -2 & -2 & 3 \\ -7 & 1 & 0 & -6 \\ 1 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$	11	$\begin{vmatrix} 7 & -2 & -3 & 3 \\ -7 & 1 & 0 & -6 \\ 1 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & -0 \end{vmatrix}$	12	$\begin{vmatrix} 2 & -4 & -7 & -8 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & -9 & 1 & -15 \\ -2 & 4 & -8 & 5 \end{vmatrix}$
13	$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -4 & -3 \\ -5 & 1 & 0 & -4 \\ 2 & -6 & 1 & -3 \\ -7 & 2 & -5 & -9 \end{vmatrix}$	14	$\begin{vmatrix} 4 & -3 & -4 & -2 \\ -5 & 1 & 0 & -4 \\ 2 & -6 & 1 & -3 \\ -7 & 2 & -5 & -9 \end{vmatrix}$	15	$\begin{vmatrix} 7 & -3 & -4 & 1 \\ -5 & 1 & 0 & -4 \\ 4 & -6 & 1 & -1 \\ -7 & 2 & -4 & -9 \end{vmatrix}$
16	$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 8 & 15 \\ -5 & 1 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 7 & 3 \end{vmatrix}$	17	$\begin{vmatrix} 6 & -1 & 4 & 10 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -10 & 3 & 1 & -6 \\ -2 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$	18	$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -10 & 3 & 1 & -6 \\ -5 & -5 & 3 & -6 \end{vmatrix}$
19	$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 & 2 \\ -8 & 1 & 0 & -7 \\ -6 & 4 & 1 & -1 \\ -2 & -8 & 0 & -9 \end{vmatrix}$	20	$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 9 & 16 \\ -7 & 1 & 0 & -3 \\ -3 & 5 & 1 & 3 \\ -6 & -4 & 8 & -1 \end{vmatrix}$	21	$\begin{vmatrix} 6 & -6 & -4 & -3 \\ -7 & 1 & 0 & -6 \\ -11 & -8 & 1 & -18 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \end{vmatrix}$
22	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 \\ 10 & 1 & 0 & -9 \\ 7 & 4 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 4 & -3 \end{vmatrix}$	23	$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -3 & 8 \\ -10 & 1 & 0 & -9 \\ -7 & 4 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -4 & -4 \end{vmatrix}$	24	$\begin{vmatrix} -3 & -1 & 4 & 1 \\ -10 & 1 & 0 & -9 \\ -9 & 5 & 1 & -3 \\ -8 & -7 & 3 & -11 \end{vmatrix}$
25	$\begin{vmatrix} -1 & -3 & 8 & 5 \\ -12 & 1 & 0 & -11 \\ -5 & 3 & 1 & -1 \\ -9 & -7 & 7 & -8 \end{vmatrix}$	26	$\begin{vmatrix} 6 & 7 & 7 & 21 \\ -10 & 1 & 0 & -9 \\ -8 & 8 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 6 & 3 \end{vmatrix}$	27	$\begin{vmatrix} 6 & -2 & 7 & 12 \\ -17 & 1 & 0 & -16 \\ -5 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -6 & 6 & 2 \end{vmatrix}$
28	$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 & 15 \\ -16 & 1 & 0 & -15 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ -8 & -1 & 7 & -1 \end{vmatrix}$	29	$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 10 & 18 \\ -13 & 1 & 0 & -12 \\ -7 & 7 & 1 & 1 \\ -5 & -5 & 9 & 0 \end{vmatrix}$	30	$\begin{vmatrix} 2 & 9 & 8 & 20 \\ -20 & 1 & 0 & -19 \\ -11 & 9 & 1 & -1 \\ -7 & -1 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

2. Решить по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы

Вар	Система уравнений	Вар	Система уравнений
1	$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -7 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$	2	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$
3	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$	4	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$	6	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}$	8	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$	10	$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$
11	$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$	12	$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = -5 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$

13	$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3 = 4 \\ 3x_1-x_2+x_3 = 3 \\ x_1+3x_2+2x_3 = 2 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 2x_1+x_3 = 5 \\ 3x_1-x_2-x_3 = -2 \\ x_1+2x_2 = 5 \end{cases}$
15	$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3 = 6 \\ x_1-2x_2-2x_3 = -3 \\ 4x_1+x_2-6x_3 = 1 \end{cases}$	16	$\begin{cases} 5x_1+2x_2-5x_3 = 0 \\ x_1-3x_2+2x_3 = 3 \\ 3x_1+x_2-x_3 = 2 \end{cases}$
17	$\begin{cases} 3x_1-x_2-2x_3 = 1 \\ x_1+x_2-5x_3 = 0 \\ 2x_1+3x_2-10x_3 = 3 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 5x_1-x_2-3x_3 = 0 \\ x_1+2x_2+2x_3 = 3 \\ 2x_1-2x_2+x_3 = 6 \end{cases}$
19	$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3 = 0 \\ 2x_1+5x_2+3x_3 = 1 \\ 3x_1-x_2-2x_3 = -5 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 4x_1+7x_2+3x_3 = 1 \\ x_1-2x_2-x_3 = 2 \\ 2x_1+x_2-x_3 = 3 \end{cases}$
21	$\begin{cases} 2x_1+x_2-4x_3 = 0 \\ x_1-3x_2+x_3 = 3 \\ 3x_1-x_2-5x_3 = 1 \end{cases}$	22	$\begin{cases} 5x_1-2x_2-x_3 = -4 \\ 2x_1+3x_2-x_3 = 1 \\ x_1-4x_2+2x_3 = 0 \end{cases}$
23	$\begin{cases} x_2-x_3 = 2 \\ 3x_1-x_2-2x_3 = 1 \\ x_1+2x_2-5x_3 = 3 \end{cases}$	24	$\begin{cases} 2x_1+2x_2-3x_3 = 4 \\ x_1-x_2+5x_3 = 0 \\ 3x_1-2x_2+x_3 = 1 \end{cases}$
25	$\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3 = 0 \\ 5x_1-2x_2+x_3 = 2 \\ 3x_1+x_2-4x_3 = 1 \end{cases}$	26	$\begin{cases} 2x_1-x_2+7x_3 = 0 \\ x_1+3x_2-5x_3 = 7 \\ x_1-x_2+4x_3 = -1 \end{cases}$
27	$\begin{cases} 7x_1-2x_2-3x_3 = 1 \\ x_1+3x_2+x_3 = 3 \\ 2x_1-x_2-x_3 = 0 \end{cases}$	28	$\begin{cases} 3x_1-x_2-5x_3 = 0 \\ x_1+2x_2+2x_3 = -1 \\ 2x_1+x_2+x_3 = 1 \end{cases}$
29	$\begin{cases} 5x_1-2x_2+x_3 = 0 \\ 2x_1+2x_2+3x_3 = 3 \\ x_1+x_2+4x_3 = -1 \end{cases}$	30	$\begin{cases} x_1+3x_2-3x_3 = 0 \\ 5x_1-x_2-14x_3 = 1 \\ x_1+5x_2-2x_3 = 1 \end{cases}$

3. Выбрать пары матриц, которые можно перемножить, и выполнить умножение.

Вар.	**Матрицы**
1	$A=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&2&2&-2\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-1&1&0&1\end{pmatrix}$
2	$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&2&2&-2\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3&3\\-1&1\end{pmatrix}$
3	$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\1&0&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&2&2&-2\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$
4	$A=\begin{pmatrix}0&1&2&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&2&2&-2\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$
5	$A=\begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\0&2&0&-2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-1&-1\\3&-3\end{pmatrix}$
6	$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\0&2&0&-2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}0&2\\2&0\\0&2\end{pmatrix}$
7	$A=\begin{pmatrix}1&0&2&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\0&0&2&2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3\\-3\\0\\1\end{pmatrix}$

8	$A=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&3&3&-3\\1&0&2&1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-2&2&0&2\end{pmatrix}$
9	$A=\begin{pmatrix}3&0\\1&2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&0&1&-1\\0&2&0&-2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-1&-1\\2&2\end{pmatrix}$
10	$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\-1&1&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\0&2&0&2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$
11	$A=\begin{pmatrix}1&0&2&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\0&0&2&2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3\\-3\\0\\1\end{pmatrix}$
12	$A=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&3&0&-3\\1&1&2&1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-2&2&0&2\end{pmatrix}$
13	$A=\begin{pmatrix}2&2\\3&2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&3&1&3\\0&1&3&0\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-1&-1\\2&2\end{pmatrix}$
14	$A=\begin{pmatrix}-2&1&3\\0&1&0\\-1&1&4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&4&1&4\\0&1&4&0\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}0&1\\4&0\\0&1\end{pmatrix}$
15	$A=\begin{pmatrix}1&0&2&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\0&0&2&2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3\\-3\\0\\1\end{pmatrix}$

16	$A=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\6\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&3&1&6\\0&1&6&0\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-2&2&0&6\end{pmatrix}$
17	$A=\begin{pmatrix}0&1\\7&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&0&1&7\\0&2&7&1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-1&1\\7&7\end{pmatrix}$
18	$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&8\\-1&1&-1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&1&0&8\\0&2&0&9\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}0&\text{ё}1\\-1&8\\-8&1\end{pmatrix}$
19	$A=\begin{pmatrix}1&0&9&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&9&1&9\\0&2&0&2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}9\\-9\\0\\1\end{pmatrix}$
20	$A=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&2&0&1\\2&0&1&0\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-3&3&0&2\end{pmatrix}$
21	$A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&2&1&0\\2&1&0&1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-2&-1\\2&2\end{pmatrix}$
22	$A=\begin{pmatrix}2&2&2\\0&1&1\\-2&2&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&2&2&-2\\0&1&0&1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}0&2\\-2&2\\0&-1\end{pmatrix}$
23	$A=\begin{pmatrix}3&2&1&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&3&2&3\\0&2&3&0\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}2\\-3\\-3\\2\end{pmatrix}$

24	$A=\begin{pmatrix}2\\4\\0\\2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&4&0&-4\\2&2&4&2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-2&4&0&2\end{pmatrix}$
25	$A=\begin{pmatrix}0&2\\5&2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&2&5&5\\0&-2&0&5\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-2&2\\5&5\end{pmatrix}$
26	$A=\begin{pmatrix}2&2&2\\0&2&6\\-6&6&-1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&2&0&6\\2&6&2&6\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}0&1\\-2&6\\6&2\end{pmatrix}$
27	$A=\begin{pmatrix}1&0&2&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\0&0&2&2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3\\-3\\0\\1\end{pmatrix}$
28	$A=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\8\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&2&0&8\\2&8&0&8\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-2&3&0&8\end{pmatrix}$
29	$A=\begin{pmatrix}2&9\\1&2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&2&9&0\\2&9&9&2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-2&-1\\-1&-9\end{pmatrix}$
30	$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&3&0\\0&3&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&1&1&-3\\0&3&0&3\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}0&3\\-3&0\\0&1\end{pmatrix}$

4. Решить матричное уравнение.

Вар.	Уравнение
1	$X\cdot\begin{pmatrix}2&-1\\1&3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\1&-1\end{pmatrix}^T+3X\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}$
2	$2\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&2\\1&-1\end{pmatrix}\cdot X=3\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}^T-\begin{pmatrix}6&5\\-1&-1\end{pmatrix}\cdot X$
3	$\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}^T-X\cdot\begin{pmatrix}2&2\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\1&3\end{pmatrix}^T+X\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\left(\begin{pmatrix}2&2\\-1&1\end{pmatrix}^T-3\begin{pmatrix}2&2\\2&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}6&5\\-1&1\end{pmatrix}$
5	$X\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}-X\begin{pmatrix}1&7\\4&2\end{pmatrix}$
6	$X\cdot\begin{pmatrix}3&-2\\2&3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\1&-1\end{pmatrix}^T+2X\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}$
7	$6\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7&7\\5&-5\end{pmatrix}\cdot X=5\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}^T-\begin{pmatrix}4&5\\-2&-2\end{pmatrix}\cdot X$
8	$6\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}^T-X\cdot\begin{pmatrix}3&3\\-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2\\2&4\end{pmatrix}^T+X\begin{pmatrix}0&0\\5&7\end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix}7&6\\6&6\end{pmatrix}\cdot X\cdot\left(\begin{pmatrix}3&3\\-2&2\end{pmatrix}^T-4\begin{pmatrix}2&2\\2&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}8&7\\-3&3\end{pmatrix}$
10	$X\cdot\begin{pmatrix}0&7\\0&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&3\\-4&-4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2&2\\-3&0\end{pmatrix}-X\begin{pmatrix}2&7\\4&2\end{pmatrix}$
11	$X\cdot\begin{pmatrix}9&-8\\1&3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}0&5\\0&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\5&-5\end{pmatrix}^T+3X\cdot\begin{pmatrix}2&2\\0&-1\end{pmatrix}$

12	$5\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10&9\\8&7\end{pmatrix}\cdot X=5\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}^T-\begin{pmatrix}5&6\\1&1\end{pmatrix}\cdot X$
13	$5\begin{pmatrix}2&2\\0&-2\end{pmatrix}^T-X\cdot\begin{pmatrix}7&7\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-5\\5&9\end{pmatrix}^T+X\begin{pmatrix}0&0\\10&-9\end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix}6&5\\5&5\end{pmatrix}\cdot X\cdot(\begin{pmatrix}3&3\\-4&4\end{pmatrix}^T-5\begin{pmatrix}10&9\\6&0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}9&8\\7&-7\end{pmatrix}$
15	$X\cdot\begin{pmatrix}0&6\\0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&3\\-4&-4\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}5&5\\-5&0\end{pmatrix}-X\begin{pmatrix}2&9\\6&4\end{pmatrix}$
16	$X\cdot\begin{pmatrix}10&-9\\7&8\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0&6\\0&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-2&2\end{pmatrix}^T+2X\cdot\begin{pmatrix}4&4\\0&-4\end{pmatrix}$
17	$7\begin{pmatrix}1&0\\3&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&5\\1&-1\end{pmatrix}\cdot X=3\begin{pmatrix}4&0\\4&-4\end{pmatrix}^T-\begin{pmatrix}9&8\\-7&-7\end{pmatrix}\cdot X$
18	$6\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}^T-X\cdot\begin{pmatrix}5&-5\\-4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-6\\6&9\end{pmatrix}^T+X\begin{pmatrix}0&0\\8&9\end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}\cdot X\cdot(\begin{pmatrix}6&6\\-7&7\end{pmatrix}^T-4\begin{pmatrix}8&8\\8&7\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}1&1\\-6&5\end{pmatrix}$
20	$X\cdot\begin{pmatrix}0&5\\0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&6\\-5&-5\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}-X\begin{pmatrix}2&7\\9&8\end{pmatrix}$
21	$X\cdot\begin{pmatrix}10&-9\\9&7\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0&8\\0&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\1&-1\end{pmatrix}^T+3X\cdot\begin{pmatrix}0&2\\2&-3\end{pmatrix}$
22	$3\begin{pmatrix}4&0\\5&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&3\\6&-6\end{pmatrix}\cdot X=4\begin{pmatrix}5&0\\5&-5\end{pmatrix}^T-\begin{pmatrix}6&5\\-1&-1\end{pmatrix}\cdot X$
23	$4\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}^T-X\cdot\begin{pmatrix}6&6\\-5&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-1\\1&3\end{pmatrix}^T+X\begin{pmatrix}0&0\\5&4\end{pmatrix}$
24	$\begin{pmatrix}3&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot X\cdot(\begin{pmatrix}3&3\\2&-2\end{pmatrix}^T-6\begin{pmatrix}0&2\\2&2\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}1&-1\\7&6\end{pmatrix}$
25	$X\cdot\begin{pmatrix}0&6\\0&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-3&-3\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}3&3\\-3&0\end{pmatrix}-X\begin{pmatrix}7&3\\4&8\end{pmatrix}$
26	$X\cdot\begin{pmatrix}6&-5\\5&9\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0&6\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4\\2&-2\end{pmatrix}^T+2X\cdot\begin{pmatrix}3&3\\0&-3\end{pmatrix}$
27	$4\begin{pmatrix}1&0\\4&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&2\\1&-1\end{pmatrix}\cdot X=3\begin{pmatrix}2&0\\2&-2\end{pmatrix}^T-\begin{pmatrix}17&5\\-11&-11\end{pmatrix}\cdot X$
28	$5\begin{pmatrix}0&12\\0&-12\end{pmatrix}^T-X\cdot\begin{pmatrix}10&11\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22&-1\\1&3\end{pmatrix}^T+X\begin{pmatrix}0&0\\21&22\end{pmatrix}$
29	$\begin{pmatrix}12&9\\9&9\end{pmatrix}\cdot X\cdot(\begin{pmatrix}10&10\\-1&-1\end{pmatrix}^T-3\begin{pmatrix}6&6\\6&0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}16&51\\-1&1\end{pmatrix}$
30	$X\cdot\begin{pmatrix}0&11\\0&21\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\-3&6\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}10&7\\-7&0\end{pmatrix}-X\begin{pmatrix}21&7\\42&12\end{pmatrix}$

5.Найти ранг матрицы

Вар.	Матрица	Вар.	Матрица
1	$\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&-1&5\\4&1&4\\0&3&-2\end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix}0&4&10&1\\4&-1&2&0\\10&-3&7&1\\1&2&3&-1\end{pmatrix}$

3	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 8 & 6 & 9 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} 3 & -7 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 & 2 \\ -7 & -5 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

15	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \\ 7 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -8 & 1 \\ 0 & 7 & -7 & 0 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 5 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$
23	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ -7 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

27	$\begin{pmatrix} -1 & -9 & 6 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$
29	$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -1 & -7 \end{pmatrix}$

6. Найти решение системы уравнений методом Гаусса.

Вар	Система	Вар	Система
1	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$	2	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$
3	$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$	4	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases}$
5	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$	6	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$	8	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -1 \end{cases}$	10	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$	12	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$	14	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$	16	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$
17	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -2 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$
19	$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -3 \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 8 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

21	$\begin{cases} 5x+3x_2+3x_3+x_4 = 4 \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4 = -1 \\ x_1+3x_2-4x_3-2x_4 = 1 \\ x_2+2x_3+x_4 = 0 \end{cases}$	22	$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_4 = 5 \\ 5x_1-x_2-x_3+2x_4 = 2 \\ 2x_1+3x_3+x_4 = -2 \\ x_1+x_2-2x_3-3x_4 = 1 \end{cases}$
23	$\begin{cases} 2x_1+2x_2-3x_3+x_4 = 1 \\ x_1-x_2+2x_3+3x_4 = 5 \\ 2x_2+x_3+2x_4 = 1 \\ 3x+2x_2+x_3-x_4 = 0 \end{cases}$	24	$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+x_4 = 3 \\ x_1+x_2-x_3+2x_4 = 2 \\ 4x_2-5x_3+4x_4 = 3 \\ 3x_1-x_2+3x_3+6x_4 = 0 \end{cases}$
25	$\begin{cases} x_2+2x_3+5x_4 = 4 \\ 3x_1-x_2+x_3-x_4 = -2 \\ 2x_1+x_2+3x_3-x_4 = 1 \\ x_1-x_2-4x_3+2x_4 = 3 \end{cases}$	26	$\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+x_4 = 0 \\ 3x_1-x_2+-2x_3+2x_4 = 2 \\ x_2+3x_3+4x_4 = -1 \\ x_1+2x_3+3x_4 = 1 \end{cases}$
27	$\begin{cases} 3x_1+3x_2-x_3+2x_4 = 4 \\ x_1+x_2+5x_3+3x_4 = 6 \\ x_1-x_2+3x_3-x_4 = 0 \\ 5x_2+x_3+2x_4 = -1 \end{cases}$	28	$\begin{cases} 5x_1-2x_2+x_3+2x_4 = 0 \\ x_1+2x_2-2x_3+4x_4 = -1 \\ 3x_1+x_2-3x_3+x_4 = 1 \\ x_1-x_2+2x_3-2x_4 = 3 \end{cases}$
29	$\begin{cases} 4x_1+2x_2+3x_3+3x_4 = 0 \\ 3x_1+x_2+x_3-2x_4 = 2 \\ x_1+3x_2-3x_3+x_4 = 1 \\ 2x_1-x_2+3x_3-x_4 = 0 \end{cases}$	30	$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3 = 5 \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4 = -3 \\ x_1-x_2+3x_3+5x_4 = 3 \\ x_1+3x_2+x_3-x_4 = 1 \end{cases}$

7. Исследовать систему на совместность, написать множество решений.

Вар.	Система	Вар.	Система
1	$\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+x_4 = 1 \\ 2x_1-x_2+2x_3-x_4 = -2 \\ 5x_1+x_2+3x_3-x_4 = -3 \end{cases}$	2	$\begin{cases} 5x_1-x_2+4x_3+6x_4 = 2 \\ 2x_1+x_2-x_3+5x_4 = 3 \\ 3x_1-x_2+5x_3+x_4 = 1 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+4x_4 = 0 \\ x_1-x_2+5x_3-x_4 = 1 \\ 4x_1+x_2+9x_3+2x_4 = 2 \end{cases}$	4	$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3-x_4 = 4 \\ x_1+x_2-x_3+3x_4 = 2 \\ 2x_1+4x_2-5x_3+10x_4 = 2 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 2x_1-6x_2+2x_3-x_4 = 4 \\ x_1-3x_2+x_3-x_4 = 2 \\ x_1+x_2+3x_3+2x_4 = 1 \end{cases}$	6	$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3+4x_4 = 5 \\ x_1+x_2+x_3-3x_4 = 1 \\ 5x_1+4x_2+x_3-2x_4 = 7 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3-2x_4 = 2 \\ x_1+2x_2+2x_3-x_4 = 3 \\ 2x_1-3x_2-x_3-x_4 = -1 \end{cases}$	8	$\begin{cases} x_1+3x_2-4x_3+5x_4 = 6 \\ 3x_1+2x_2-x_3+6x_4 = 7 \\ 2x_1-x_2+3x_3+x_4 = 1 \end{cases}$
9	$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3 = 1 \\ 2x_1-x_2-x_3 = 0 \\ 3x_1+2x_2+x_3 = 2 \\ 6x_1-x_2+3x_3 = 3 \end{cases}$	10	$\begin{cases} x_1-x_2+3x_3 = 1 \\ 2x_1+x_2+x_3 = 0 \\ 4x_1-x_2+7x_3 = 2 \\ 5x_1+x_2+5x_3 = 1 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4 = 0 \\ x_1+2x_2-x_3+3x_4 = 2 \\ 3x_1-4x_2+3x_3+x_4 = 2 \end{cases}$	12	$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-4x_4 = 3 \\ x_1-x_2+2x_3-x_4 = 1 \\ 2x_1+7x_2+7x_3-11x_4 = 8 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 3x_1-2x_2-x_3+x_4 = 2 \\ 4x_1-x_2-3x_3+3x_4 = 1 \\ x_1+x_2-2x_3+2x_4 = -1 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+3x_4 = 1 \\ 4x_1-4x_2+x_3+7x_4 = 7 \\ x_1-x_2+x_3+2x_4 = 3 \end{cases}$
15	$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4 = 3 \\ x+2x_2+x_3+2x_4 = -12 \\ 2x_1+4x_2-4x_3+x_4 = 0 \end{cases}$	16	$\begin{cases} -x_1+3x_2-x_3+x_4 = 0 \\ 2x_1-x_2+x_3+2x_4 = 1 \\ 3x_1+x_2+x_3+5x_4 = 2 \end{cases}$
17	$\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3 = 1 \\ x_1+x_2-2x_3 = 0 \\ 4x_1-x_2-x_3 = 1 \\ 8x_1-2x_2-2x_3 = 2 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 3x_1-4x_2+x_3 = 3 \\ x_1-x_2+2x_3 = 2 \\ 2x_1-3x_2-x_3 = 1 \\ -x_1+2x_2+3x_3 = 1 \end{cases}$

19	$\begin{cases} 5x_1+x_2-2x_3+5x_4 = 6 \\ x_1+x_2-2x_3+3x_4 = 2 \\ 3x_1-x_2+2x_3-x_4 = 1 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-x_4 = 5 \\ -3x_1-2x_2+x_3-2x_4 = 2 \\ 5x_1+x_2+2x_3+x_4 = 3 \end{cases}$
21	$\begin{cases} x_1+4x_2-2x_3+3x_4 = -2 \\ x_1-x_2+3x_3-2x_4 = 3 \\ 2x_1+3x_2+x_3-x_4 = 1 \end{cases}$	22	$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+2x_4 = 5 \\ -x_1-2x_2+3x_3+x_4 = 2 \\ x_1-x_2+2x_3+3x_4 = 7 \end{cases}$
23	$\begin{cases} x_1-+3x_2 = 1 \\ -x_1+2x_2-x_3 = 0 \\ 3x_1-x_2+2x_3 = 1 \\ 2x_1+x_2+x_3 = 1 \end{cases}$	24	$\begin{cases} 3x_1+4x_3 = 3 \\ x_1-x_2+3x_3 = 1 \\ 2x_1+x_2+x_3 = 2 \\ -x_1-2x_2+2x_3 = -1 \end{cases}$
25	$\begin{cases} x_1-3x_2+x_3 = 1 \\ -x_1+2x_2-x_3+2x_4 = 0 \\ x_1-4x_2+x_3+2x_4 = 2 \end{cases}$	26	$\begin{cases} 6x_1-x_2+5x_3-7x_4 = 3 \\ 4x_1-3x_2+x_3-x_4 = 1 \\ x_1+x_2+2x_3-3x_4 = 2 \end{cases}$
27	$\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3+5x_4 = -1 \\ -x_1-x_2+3x_3+4x_4 = -3 \\ 2x_1-x_2+x_3+x_4 = 2 \end{cases}$	28	$\begin{cases} x_1+3x_2-4x_3 = -2 \\ x_1-2x_2+x_3 = 3 \\ 2x_1+x_2-3x_3 = 1 \\ 3x_1-x_2-2x_3 = 4 \end{cases}$
29	$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-3x_4 = 1 \\ 3x_1-x_2+2x_3-x_4 = 4 \\ 2x_1+x_2-x_3+x_4 = 3 \end{cases}$	30	$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+x_4 = 2 \\ -x_1+x_2-2x_3+3x_4 = 1 \\ 3x_1-x_2+4x_3+5x_4 = 5 \end{cases}$

8. Проверить, образуют ли векторы e_1, e_2, e_3 ортогональный базис, и найти разложение вектора X по этому базису.

Вар	Векторы	Вар	Векторы
1	e_1=(1, 1, 0), e_2=(3, -3, 4), e_3=(-2, 2, 3), X=(1, 2, 3).	2	e_1=(1, -1, 1), e_2=(3, 3, 0), e_3=(1, -1, -2), X=(-1, -2, -3).
3	e_1=(2, 1, -2), e_2=(-1, 4, 1), e_3=(1, 0, 1), X=(1, 2, 3).	**4**	e_1=(1, -2, 0), e_2=(0, 0, 4), e_3=(2, 1, 0), X=(-1, -2, 0).
5	e_1=(2, 3, 5), e_2=(2, -3, 1), e_3=(-9, -4, 6), X=(1, 2, 3).	6	e_1=(1, 4, 3), e_2=(2, 1, 5), e_3=(3, 4, 2), X=(6, 9, 10).
7	e_1=(3, 1, 2), e_2=(4, 5, 3), e_3=(2, 2, 4), X=(1, 2, 3).	8	e_1=(1, 3, 2), e_2=(1, 1, 1), e_3=(2, 5, 2), X=(2, 14, 5).
9	e_1=(1, 2, 4), e_2=(1, -1, 1), e_3=(1, 1, 4), X=(1, -5, -2).	10	e_1=(1, 2, 4), e_2=(3, 6, 8), e_3=(2, 1, -1), X=(4, 2, 2).
11	e_1=(2, 3, 4), e_2=(4, 6, -1), e_3=(1, 2, -3), X=(4, 4, 1).	12	e_1=(2, 3, 4), e_2=(4, 6, -1), e_3=(1, 2, -3), X=(4, 4, 1).
13	e_1=(-1, 2, -3), e_2=(2, -1, 2), e_3=(-1, 2, -2), X=(4, 1, 4).	14	e_1=(2, -2, 1), e_2=(-1, 3, 1), e_3=(4, -1, -2), X=(-1, 11, 7).
15	e_1=(-3, 2, 1), e_2=(3, -2, 1), e_3=(-3, 2, -1), X=(-6, 12, -4).	16	e_1=(-2, 1, 0), e_2=(2, -2, 3), e_3=(1, 4, 2), X=(13, 4, 15).
17	e_1=(-1, 2, -3), e_2=(2, -1, 2), e_3=(3, 4, -2), X=(4, 1, 4).	18	e_1=(2, -2, 1), e_2=(-1, 3, 1), e_3=(4, -1, -2), X=(-1, 11, 7).
19	e_1=(-1, 1, 3), e_2=(-1, 2, 4), e_3=(-1, 4, -1), X=(-8, 14, 9).	20	e_1=(1, 3, 4), e_2=(-2, 2, -3), e_3=(3, -1, 2), X=(2, -6, -7).
21	e_1=(1, 1, -2), e_2=(3, -1, 1), e_3=(1, -1, 2), X=(9, 1, -5).	22	e_1=(0, -2, 1), e_2=(2, -2, -1), e_3=(-2, 3, 2), X=(-4, -23, 1).
23	e_1=(3, 2, -1), e_2=(1, -1, 1), e_3=(2, 4, 1), X=(-4, -3, 1).	24	e_1=(4, -2, 0), e_2=(-1, 2, -2), e_3=(2, 3, 1), X=(10, 14, 0).
25	e_1=(3, -2, -1), e_2=(4, 2, 1), e_3=(1, -1, 3), X=(9, 4, -5).	26	e_1=(2, 0, -3), e_2=(5, -1, 2), e_3=(1, -1, 2), X=(-1, 3, -9).
27	E_1=(-6, -3, -2), e_2=(5, -1, 2), e_3=(1, 2, -1), X=(-8, -1, 3).	28	e_1=(2, 1, 1), e_2=(-2, 3, 2), e_3=(1, 1, -2), X=(14, 0, 7).
29	e_1=(1, 1,-2), e_2=(3, -1, 1), e_3=(1, -1, 2), X=(9, 1, -5).	30	e_1=(1, 3, 4), e_2=(-2, 2, -3), e_3=(3, -1, 2), X=(2, -6, -7).

9. Определить, является ли система векторов линейно зависимой.

Вар.	Векторы	Вар	Векторы
1	X_1=(-1, 1,1), X_2=(4, 1,-2), X_3=(0, -1, 2).	2	X_1=(1,-1, 2), X_2=(3, -1, -8), X_3=(-1, 0,5).
3	X_1=(2, 1,0), X_2=(-5, 0, 5), X_3=(1, 4, 3)	4	X_1=(5, 3, 0), X_2=(-1, -6, -1), X_3=(0,-1, 1)
5	X_1=(5, -6,1), X_2=(3,-5, -3), X_3=(0, -1, 3)	6	X_1=(6, 3, 1), X_2=(0, -3, 0), X_3=(-3, -2, 0)
7	X_1=(-6 -2, 1), X_2=(3, -2, 1), X_3=(0, 0, 3)	8	X_1=(3,-1 ,2), X_2=(-2,2 ,-3), X_3=(1,3,4).

9	X_1=(5,-1 ,1), X_2=(5,3 ,2), X_3=(9,-1 ,2).	10	X_1=(2,5 ,2), X_2=(1,1 ,1), X_3=(1,3 ,2).
11	X_1=(1,1 ,0), X_2=(-1,2 ,0), X_3=(0,3 ,-3).	12	X_1=(-1,2 ,-1), X_2=(0,2 ,-1), X_3=(1,2 ,2).
13	X_1=(2,0 ,-1), X_2=(3,1,-3), X_3=(1,-1 ,0).	14	X_1=(0,2 ,-1), X_2=(3,1 ,2), X_3=(1,2 ,1).
15	X_1=(-2,-7,6), X_2=(-4,4 ,4), X_3=(0,-2 ,3)	16	X_1=(1,-2 ,3), X_2=(5,-3 ,4), X_3=(2,1 ,-2)
17	X_1=(-7,0 ,7), X_2=(1,3 ,1), X_3=(-2,1 ,-1)	18	X_1=(1,-1 ,0), X_2=(0,2 ,-1), X_3=(0,2 ,0).
19	X_1=(8,0,-3), X_2=(-1,-1 ,2), X_3=(7,-1,-1)	20	X_1=(1,-1 ,2), X_2=(4,-7 ,12), X_3=(-1,3,1)
21	X_1=(1,2 ,1), X_2=(2,-1 ,-1), X_3=(1,1 ,2).	22	X_1=(-3,-1 ,3), X_2=(1,1 ,-1), X_3=(-2,-1,2)
23	X_1=(1,-1 ,4), X_2=(3,3 ,-6), X_3=(2,1 ,-1)	24	X_1=(-1,-2 ,1), X_2=(4,-1 ,1), X_3=(2,0 ,2)
25	X_1=(-3,-4 ,-7), X_2=(1,-2 ,3), X_3=(2,2 ,2)	26	X_1=(0,-2 ,8), X_2=(-1,2 ,-1), X_3=(3,2 ,-1)
27	X_1=(1,3 ,3), X_2=(2,3 ,-2), X_3=(0,-8 ,-1)	28	X_1=(10,15 ,2), X_2=(9,10 ,12), X_3=(2,4,4)
29	X_1=(2,3 ,2), X_2=(2,2 ,3), X_3=(-4,-3 ,-7)	30	X_1=(1,3 ,3), X_2=(2,4 ,1), X_3=(1,2 ,3).

10. Найти фундаментальную систему решений системы уравнений

Вар.	Система уравнений	Вар	Система уравнений
1	$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3+x_4-3x_5 = 0 \\ x_1+4x_2-7x_3+0x_4+7x_5 = 0 \\ 3x_1-0x_2-x_3+2x_4+x_5 = 0 \\ 5x_1-4x_2+5x_3+4x_4-5x_5 = 0 \end{cases}$	**2**	$\begin{cases} 2x_1-0x_2-x_3+3x_4+2x_5 = 0 \\ 3x_1+x_2-4x_3+8x_4+x_5 = 0 \\ x_1-x_2+2x_3-2x_4+3x_5 = 0 \\ 5x_1-x_2+0x_3+4x_4+7x_5 = 0 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 3x_1-x_2+0x_3+x_4+2x_5 = 0 \\ x_1+3x_2+x_3+x_4-3x_5 = 0 \\ 4x_1+2x_2+x_3+0x_4-x_5 = 0 \\ -2x_1+4x_2+x_3-2x_4-5x_5 = 0 \end{cases}$	4	$\begin{cases} 4x_1-2x_2+x_3+0x_4+2x_5 = 0 \\ -x_1+2x_2+x_3-x_4-3x_5 = 0 \\ 3x_1-0x_2+2x_3-x_4-x_5 = 0 \\ -2x_1-2x_2-3x_3+2x_4-0x_5 = 0 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 5x_1+2x_2-x_3+0x_4-x_5 = 0 \\ x_1-0x_2-x_3+6x_4+3x_5 = 0 \\ 2x_1+x_2-0x_3-3x_4-2x_5 = 0 \\ 3x_1+x_2-x_3+3x_4+x_5 = 0 \end{cases}$	6	$\begin{cases} 0x_1+x_2-3x_3+x_4+4x_5 = 0 \\ x_1+3x_2+2x_3-5x_4+x_5 = 0 \\ 3x_1+2x_2-5x_3-2x_4+5x_5 = 0 \\ 2x_1-3x_2-4x_3+2x_4-0x_5 = 0 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3+3x_4-4x_5 = 0 \\ 2x_1+2x_2-2x_3+4x_4-x_5 = 0 \\ 4x_1-0x_2-x_3+7x_4-5x_5 = 0 \\ 0x_1+4x_2-3x_3+x_4+3x_5 = 0 \end{cases}$	8	$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4-4x_5 = 0 \\ 5x_1-x_2+3x_3+x_4+0x_5 = 0 \\ 4x_1-3x_2+3x_3+4x_4-7x_5 = 0 \\ 2x_1+3x_2-2x_3+0x_4+3x_5 = 0 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 2x_1+x_2+0x_3-x_4-2x_5 = 0 \\ 3x_1-4x_2+4x_3+3x_4+x_5 = 0 \\ x_1-5x_2+4x_3+4x_4+3x_5 = 0 \\ 5x_1-3x_2+4x_3+2x_4-x_5 = 0 \end{cases}$	10	$\begin{cases} 3x_1+2x_2-2x_3+3x_4+4x_5 = 0 \\ -x_1+3x_2+2x_3+0x_4-x_5 = 0 \\ 3x_1+5x_2+x_3+x_4+4x_5 = 0 \\ x_1-0x_2+x_3-2x_4+x_5 = 0 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 2x_1-5x_2+x_3+2x_4+3x_5 = 0 \\ x_1+0x_2-3x_3+x_4+2x_5 = 0 \\ 2x_1-3x_2+5x_3-4x_4-5x_5 = 0 \\ 0x_1+x_2-2x_3-3x_4-4x_5 = 0 \end{cases}$	12	$\begin{cases} 4x_1-0x_2+2x_3+6x_4-4x_5 = 0 \\ 2x_1-0x_2+x_3+3x_4-2x_5 = 0 \\ 4x_1-2x_2-x_3-6x_4+3x_5 = 0 \\ 6x_1-2x_2+0x_3-3x_4+x_5 = 0 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 3x_1+6x_2-5x_3+x_4+2x_5 = 0 \\ x_1-2x_2+3x_3-x_4+0x_5 = 0 \\ 2x_1+8x_2-8x_3+2x_4+2x_5 = 0 \\ 4x_1+4x_2-2x_3+0x_4+2x_5 = 0 \end{cases}$	14	$\begin{cases} x_1-3x_2+0x_3+2x_4+x_5 = 0 \\ -x_1-4x_2-2x_3+x_4+9x_5 = 0 \\ 5x_1-0x_2-2x_3+x_4+3x_5 = 0 \\ 7x_1+x_2+0x_3+2x_4-5x_5 = 0 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 5x_1-0x_2+x_3-x_4+2x_5 = 0 \\ 2x_1+2x_2-0x_3-3x_4-x_5 = 0 \\ -x_1+4x_2-x_3-5x_4-4x_5 = 0 \\ 3x_1-2x_2+x_3+2x_4+3x_5 = 0 \end{cases}$	16	$\begin{cases} 4x_1-2x_2+3x_3-x_4+2x_5 = 0 \\ x_1-x_2+3x_3+0x_4+x_5 = 0 \\ 3x_1-x_2-0x_3-x_4+x_5 = 0 \\ x_1-x_2+3x_3+0x_4+x_5 = 0 \end{cases}$
17	$\begin{cases} 7x_1+5x_2-3x_3+x_4+2x_5 = 0 \\ 2x_1+4x_2-x_3-2x_4-2x_5 = 0 \\ 5x_1+x_2-2x_3+3x_4+4x_5 = 0 \\ 3x_1-3x_2-x_3+5x_4+6x_5 = 0 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3+5x_4+6x_5 = 0 \\ 3x_1-x_2-2x_3+5x_4+4x_5 = 0 \\ x_1+2x_2-3x_3+0x_4-2x_5 = 0 \\ 4x_1+x_2-5x_3+5x_4+2x_5 = 0 \end{cases}$

19	$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 6x_4 + 7x_5 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 0x_4 + 3x_5 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ -x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 5x_4 - 3x_5 = 0 \\ 5x_1 - 0x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$
21	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 0x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_1 - 0x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 - 3x_5 = 0 \\ 5x_1 - 4x_2 + x_3 + 0x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$	22	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 0 \\ -3x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 0x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$
23	$\begin{cases} 6x_1 - 7x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$	24	$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$
25	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 0x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 0x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 5x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$	26	$\begin{cases} 2x_1 - 0x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 0x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 0x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$
27	$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 0x_4 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$	28	$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 0x_4 + 3x_5 = 0 \\ -x_1 - 5x_2 + 6x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0 \\ -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$
29	$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 7x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 - 0x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$	30	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 - x_4 - 4x_5 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

11. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

Вар	Матрица	Вар	Матрица
1	$\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} -4 & 10 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 11 & -12 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 2 & 0,5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$
23	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

27	$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$
29	$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

12. Привести квадратичную форму L(x,y) к каноническому виду , нарисовать кривую,. определяемую уравнением L(x,y)=1.

Вар	Квадр. форма L(x,y)	Вар.	Квадрат. форма L(x,y)
1		2	$Х^2$ -10ХУ +4$У^2$
3	$Х^2$ + 4ХУ +5$У^2$	4	$Х^2$ -8ХУ +$У^2$
5	5$Х^2$ + 16ХУ +16$У^2$	6	16$Х^2$ -16ХУ +5$У^2$
7	5$Х^2$ - 4ХУ +$У^2$	8	$Х^2$ -8ХУ +$У^2$
9	$Х^2$ -6ХУ -$У^2$	10	2$Х^2$ + 8ХУ +9$У^2$
11	$Х^2$ + 8ХУ +$У^2$	12	4$Х^2$ + 8ХУ +5$У^2$
13	-$Х^2$ + 6ХУ +$У^2$	14	9$Х^2$ + 12ХУ +5$У^2$
15	$Х^2$ - 4ХУ +5$У^2$	16	4$Х^2$ + 4ХУ +2$У^2$
17	$Х^2$ - 4ХУ +6$У^2$	18	-$Х^2$ -6ХУ +$У^2$
19	5$Х^2$ -12ХУ +9$У^2$	20	$Х^2$ + 10ХУ +4$У^2$
21	$Х^2$ + 8ХУ +$У^2$	22	$Х^2$ + 6ХУ -$У^2$
23	5$Х^2$ + 4ХУ +$У^2$	24	2$Х^2$ - 4ХУ -7$У^2$
25	9$Х^2$ + 6ХУ +5$У^2$	26	2$Х^2$ -4ХУ +4$У^2$
27	5$Х^2$ -8ХУ+4$У^2$	28	4$Х^2$ + 16ХУ +17$У^2$
29	5$Х^2$ + 6ХУ +9$У^2$	30	17$Х^2$ + 16ХУ +4$У^2$

Литература.

1. Блох Э.Л., Лощинский Л.И., Турин В.Я. Основы линейной алгебры и некоторые ее приложения. М., 1971.
2. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. М. 1971.
3. Ефимов Н.В. Квадратичные формы и матрицы М. 1967.
4. Ермаков В.И. и др. Сборник задач по высшей математике для экономистов. М. 2002.
5. Карпелевич Ф.И., Садовский Л.Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. М. 1963.
6. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. М. 2000.
7. Кремер Н.Ш. и др. Высшая математика для экономистов. М. 1997.
8. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М. 1963.
9. Новосельцева В.И., Павлова Н.Л. Индивидуальные задания по теме « Линейная алгебра» МИИТ, М. 1994.
10. Новосельцева В.И., Павлова Н.Л. Методические указания для выполнения индивидуальных заданий по теме « Линейная алгебра» для студентов ИЭФ. МИИТ, М. 1996.