МГУПС-МИИТ

Институт Экономики и Финансов

Кафедра математики ИЭФ

Двойной интеграл: приложения

Дистанционный интерактивный обучающий комплекс для студентов МИИТ

В. Г. Кановей[1]

2016-11-17

[1]ИППИ РАН и кафедра математики ИЭФ МГУПС-МИИТ.

Целью настоящего обучающего комплекса является выработка у студентов МИИТ навыков работы с приложениями двойного интеграла, а также навыков численного интегрирования. Обучающий комплекс состоит из двух частей.

1. Обучающая часть, содержащая таблицы элементарных интегралов и производных, а также два примера на приложения двойного интеграла.
2. 32 варианта индивидуальных заданий для студентов, из которых
   - вариант 0 с ответами дается как образец оформления работы;
   - варианты 1 – 31 предназначены для самостоятельной работы студентов — каждый вариант содержит 2 отдельные (и не повторяющиеся между вариантами) задачи, для которых просчитаны ответы;
   - дополнительно для преподавателя дается сводка всех ответов по каждому варианту.

Эти части сведены в три файла формата pdf, а именно:

1) файл для преподавателя di-full.pdf, содержащий части 1, 2, 3 с ответами по всем вариантам;
2) файл для студентов di-stud.pdf, содержащий части 1 и 2 и часть 3 со всеми вариантами, но без ответов (кроме варианта 0, который приведен с ответами);
3) краткий файл для преподавателя di-svodka.pdf, содержащий часть 3 с ответами ко всем вариантам — его при необходимости можно распечатать для использования при проверке решенных заданий в аудитории традиционного типа вне доступа к компьютеру.

Особенностями настоящего обучающего комплекса является применение ориентированных на пользователя (студента) современных компьютерных технологий, таких, как:

- технологии power point / beamer в частях 1 и 2 комплекса, обеспечивающие современный стиль презентации как в варианте самостоятельной работы студента на компьютере, так и в варианте аудиторного занятия с проектором;
- технологии hyperref для облегчения просмотра пособия;

– интерактивные технологии заполняемых форм JavaScript для тестирования на тренажере и самостоятельной проверки студентами на компьютере результатов своих вычислений.

Дополнительным эффектом обучающего комплекса является отработка навыков работы с заполняемыми формами для проверки результатов, в частности, практика приведения математических данных (формулы, числа) к форме, принятой в языках программирования.

Самостоятельная работа с пособием и выполнение варианта предполагают доступ студента к современному компьютеру, содержащему стандартный инженерный калькулятор (или иную вычислительную программу) и программу Adobe Reader для чтения файлов формата pdf и заполнения форм для проверки результатов (имеется в бесплатном доступе для загрузки и установки).

Таблица 1 (интегралы)

В следующей таблице u может обозначать как независимую переменную x так и функцию от x. Если u обозначает функцию $u = u(x)$ от x, то $\boxed{du = u' \cdot dx}$.

1.	$\int u^n\,du$	$=$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + C$	(при $n \neq -1$)
1а.	$\int du$	$=$	$u + C$	(случай $n = 0$)
1б.	$\int u\,du$	$=$	$\frac{u^2}{2} + C$	(случай $n = 1$)
1в.	$\int u^2\,du$	$=$	$\frac{u^3}{3} + C$	(случай $n = 2$)
1г.	$\int \sqrt{u}\,du$	$=$	$\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{u^{3/2}}{3/2} + C$	$(n = \frac{1}{2},\quad u^{\frac{1}{2}} = \sqrt{u})$
1д.	$\int \sqrt[3]{u}\,du$	$=$	$\frac{u^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{u^{4/3}}{4/3} + C$	$(n = \frac{1}{3},\quad u^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{u})$
1е.	$\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du$	$=$	$\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = 2\sqrt{u} + C$	$(n = -\frac{1}{2},\ u^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{u}})$
2.	$\int \frac{1}{u+a}\,du$	$=$	$\ln\lvert u + a\rvert + C$	(a – любая постоянная)
3.	$\int e^u\,du$	$=$	$e^u + C$	
4.	$\int \sin u\,du$	$=$	$-\cos u + C$	
5.	$\int \cos u\,du$	$=$	$\sin u + C$	
6а.	$\int \frac{1}{u^2+1}\,du$	$=$	$\operatorname{arctg} u + C$	
6б.	$\int \frac{1}{u^2+a^2}\,du$	$=$	$\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C$	
7а.	$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$	$=$	$\arcsin u + C$	
7б.	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du$	$=$	$\arcsin\frac{u}{a} + C$	
8.	$\int \frac{1}{\cos^2 u}\,du$	$=$	$\operatorname{tg} u + C$	
9.	$\int \frac{1}{\sin^2 u}\,du$	$=$	$-\operatorname{ctg} u + C$	

Таблица 2

1. $\displaystyle\int \sin px\,dx = -\frac{1}{p}\cos px + C$
2. $\displaystyle\int \cos px\,dx = \frac{1}{p}\sin px + C$
3. $\displaystyle\int x\sin px\,dx = -\frac{x}{p}\cos px + \frac{1}{p^2}\sin px + C$
4. $\displaystyle\int x\cos px\,dx = \frac{x}{p}\sin px + \frac{1}{p^2}\cos px + C$
5. $\displaystyle\int x^2\sin px\,dx = -\frac{x^2}{p}\cos px + \frac{2x}{p^2}\sin px + \frac{2}{p^3}\cos px + C$
6. $\displaystyle\int x^2\cos px\,dx = \frac{x^2}{p}\sin px + \frac{2x}{p^2}\cos px - \frac{2}{p^3}\sin px + C$
7. $\displaystyle\int e^{px}\,dx = \frac{1}{p}e^{px} + C$
8. $\displaystyle\int x\,e^{px}\,dx = \frac{x}{p}e^{px} - \frac{1}{p^2}e^{px} + C$
9. $\displaystyle\int x^2\,e^{px}\,dx = \frac{x^2}{p}e^{px} - \frac{2x}{p^2}e^{px} + \frac{2}{p^3}e^{px} + C$

Таблица 3 (производные)

№	Простая функция		Сложная функция	
	функция	производная	функция	производная
1	$y = C$	$y' = 0$		
2	$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	$y = u^n$	$y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
3	$y = x$	$y' = 1$		
4	$y = x^2$	$y' = 2\,x$	$y = u^2$	$y' = 2 \cdot u \cdot u'$
5	$y = x^3$	$y' = 3\,x^2$	$y = u^3$	$y' = 3 \cdot u^2 \cdot u'$
6	$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$	$y = \frac{1}{u}$	$y' = -\frac{u'}{u^2}$
7	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
8	$y = \sqrt[3]{x}$	$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$y = \sqrt[3]{u}$	$y' = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$
9	$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \sin u$	$y' = \cos u \cdot u'$
10	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$y = \cos u$	$y' = -\sin u \cdot u'$
11	$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = \operatorname{tg} u$	$y' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
12	$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^u$	$y' = e^u \cdot u'$
13	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	$y = a^u$	$y' = a^u \ln a \cdot u'$
14	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$
15	$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arcsin u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
16	$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos u$	$y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
17	$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = \operatorname{arctg} u$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$
18			$y = u + v$	$y' = u' + v'$
19			$y = u - v$	$y' = u' - v'$
20			$y = uv$	$y' = u'\,v + v'\,u$
21	$y = Cx$	$y' = C$	$y = Cu$	$y' = Cu'$
22			$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'\,v - v'\,u}{v^2}$
23			$y = u^v$	$y' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'$

Правило П1 (Площадь)

Площадь плоской области G вычисляется по формуле:

$$S = \iint_G dx\,dy.$$

Правило П2 (Центр тяжести)

Координаты центра тяжести $C(x_C, y_C)$ однородной плоской области G вычисляется по формулам:

$$x_C = \frac{1}{S} \cdot \iint\limits_G x\,dx\,dy\,, \quad y_C = \frac{1}{S} \cdot \iint\limits_G y\,dx\,dy.$$

Правило П3 (Центр тяжести неоднородной области)

Координаты центра тяжести $C(x_C, y_C)$ неоднородной плоской области G с плотностью $r(x, y)$ вычисляется по формулам:

$$x_C = \frac{1}{M} \cdot \iint\limits_G x\,r(x,y)\,dx\,dy\,, \quad y_C = \frac{1}{M} \cdot \iint\limits_G y\,r(x,y)\,dx\,dy\,,$$

где $M = \iint\limits_G r(x, y)\,dx\,dy$ — масса области.

Правило П4 (Моменты инерции)

Моменты инерции I_{OX} и I_{OY} однородной плоской области G относительно осей координат вычисляется по формулам:

$$I_{\mathrm{OX}} = \iint\limits_G y^2\,dx\,dy\,, \quad I_{\mathrm{OY}} = \iint\limits_G x^2\,dx\,dy.$$

Правило П5 (Моменты инерции неоднородной области)

Моменты инерции I_{OX} и I_{OY} неоднородной плоской области G с плотностью $r(x, y)$ относительно осей координат вычисляется по формулам:

$$I_{\mathrm{OX}} = \iint\limits_G y^2\,r(x,y)\,dx\,dy\,, \quad I_{\mathrm{OY}} = \iint\limits_G x^2\,r(x,y)\,dx\,dy.$$

Для вычислений по формулам § 1 применяется следующее правило

Правило П6 (Переход от двойного интеграла к повторному)

Двойной интеграл вычисляется по формулам перехода к повторному интегралу:

$$\underbrace{\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy}_{\text{двойной интеграл}} = \underbrace{\int_{x_{\text{лев}}}^{x_{\text{прав}}} \left(\int_{y_{\text{низ}}(x)}^{y_{\text{верх}}(x)} f(x,y)\,dy \right) dx}_{\text{повторный интеграл}},$$

где:

$$\left.\begin{array}{lcr} x_{\text{лев}} & - & \text{левая граница области } G \\ x_{\text{прав}} & - & \text{правая граница области } G \end{array}\right\} \text{числа}$$

$$\left.\begin{array}{lcr} y_{\text{низ}}(x) & - & \text{нижняя граница области } G \\ y_{\text{верх}}(x) & - & \text{верхняя граница области } G \end{array}\right\} \text{функции (могут быть числа)}$$

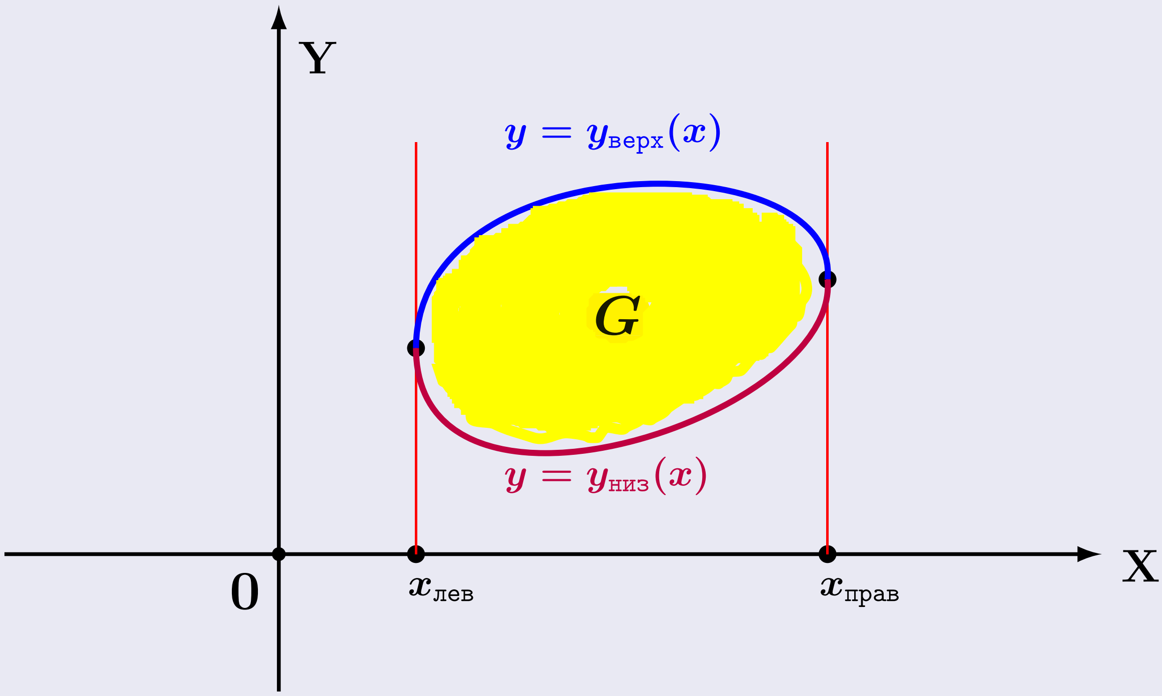

Рис. 1: Переход от двойного интеграла к повторному.

Повторное интегрирование производится при помощи таблицы 1 и правил интегрирования сложных функций.

Пример П1

Область ограничена линиями:

$$\begin{aligned} y &= (-2)\cdot x + (1), \\ y &= 1\cdot x^2 + (1), \\ x &= x_{max} = 2. \end{aligned}$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь, координаты центра тяжести, и моменты инерции относительно осей координат.

Решение

Шаг 1: построение линий. Находим пересечение двух первых линий.

$$1\cdot x^2 + (1) = (-2)\cdot x + (1)$$

$$1\cdot x^2 - (-2)\cdot x + ((1) - (1)) = 0$$

$$1\cdot x^2 + (2.0)\cdot x + (0.0) = 0$$

$D = (2.0)^2 - 4\cdot(1)\cdot(0.0) = 4.000$.

$$x_1 = \frac{-(2.0) - \sqrt{4.000}}{2\cdot(1)} = -2.00\ ; \qquad x_2 = \frac{-(2.0) + \sqrt{4.000}}{2\cdot(1)} = -0\ .$$

$\boldsymbol{y = (-2)\cdot x + (1)}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_1 - 1 = -3.0$ до $x_{\max} + 1 = 2 + 1 = 3.0$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = (-2)\cdot x + (1)$	**7**	**5**	**3**	**1**	**−1**	**−3**	**−5**

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

Решение (продолжение)

Шаг 1: продолжение.
$\boldsymbol{y = 1 \cdot x^2 + (1)}$ — парабола, для ее построения табулируем:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 1 \cdot x^2 + (1)$	**10**	**5**	**2**	**1**	**2**	**5**	**10**

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим параболу по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{x = 2}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(2, 0)$ (**на чертеже черным**).

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$\begin{aligned} x_{\text{лев}} &= -0 && - \text{ левая граница;} \\ x_{\text{прав}} &= 2 && - \text{ правая;} \\ y_{\text{низ}}(x) &= (-2) \cdot x + (1) && - \text{ нижняя;} \\ y_{\text{верх}}(x) &= 1 \cdot x^2 + (1) && - \text{ верхняя.} \end{aligned}$$

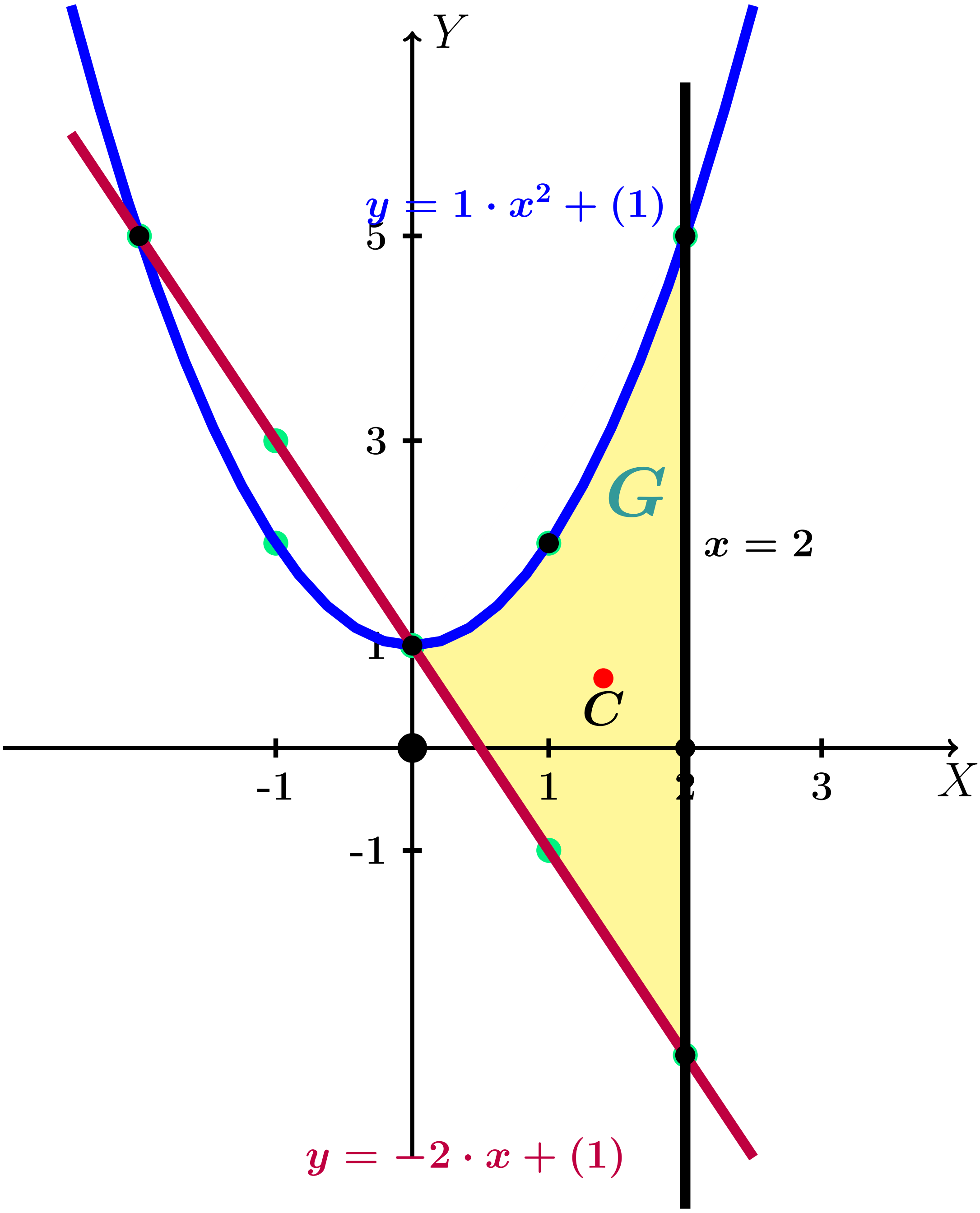

Рис.: Чертеж к примеру 1: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П 1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П 6:

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-0}^{2}\left(\int_{(-2)\cdot x+(1)}^{1\cdot x^2+(1)} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл}} = \int_{-0}^{2}\left(y\Big|_{y=(-2)\cdot x+(1)}^{y=1\cdot x^2+(1)}\right) dx =$$

$$= \int_{-0}^{2}\left((1\cdot x^2+(1)) - ((-2)\cdot x+(1))\right) dx =$$

$$= \int_{-0}^{2}(1\cdot x^2+(2.0)\cdot x+(0.0))dx \;=\; \left(\frac{1\cdot x^3}{3}+\frac{(2.0)\cdot x^2}{2}+(0.0)\cdot x\right)\Big|_{-0}^{2} =$$

$$= \left(\frac{1\cdot 2^3}{3}+\frac{(2.0)\cdot 2^2}{2}+(0.0)\cdot 2\right) - \left(\frac{1\cdot -0^3}{3}+\frac{(2.0)\cdot -0^2}{2}+(0.0)\cdot -0\right) =$$

$$= 6.667 - (0.000) = \boxed{\mathbf{6.667}}\,.$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2:

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_{-0}^{2} x\left(\int_{(-2)\cdot x+(1)}^{1\cdot x^2+(1)} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-0}^{2} x\left(y\Big|_{y=(-2)\cdot x+(1)}^{y=1\cdot x^2+(1)}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-0}^{2} x\left((1\cdot x^2+(1)) - ((-2)\cdot x+(1))\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-0}^{2} x(1\cdot x^2+(2.0)\cdot x+(0.0))dx = \frac{1}{S}\int_{-0}^{2}(1\cdot x^3+(2.0)\cdot x^2+(0.0)\cdot x)dx$$

$$= \frac{1}{S}\left(\frac{1\cdot x^4}{4}+\frac{(2.0)\cdot x^3}{3}+\frac{(0.0)\cdot x^2}{2}\right)\Big|_{-0}^{2} =$$

$$= \frac{1}{S}\left[\left(\frac{1\cdot 2^4}{4}+\frac{(2.0)\cdot 2^3}{3}+\frac{(0.0)\cdot 2^2}{2}\right)-\left(\frac{1\cdot -0^4}{4}+\frac{(2.0)\cdot -0^3}{3}+\frac{(0.0)\cdot -0^2}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{6.667}(9.333-(0.000)) = \mathbf{1.400}\,.$$

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_{-0}^{2}\left(\int_{(-2)\cdot x+(1)}^{1\cdot x^2+(1)} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-0}^{2}\left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=(-2)\cdot x+(1)}^{y=1\cdot x^2+(1)}\right)dx = \frac{1}{2S}\int_{-0}^{2}\left[(1\cdot x^2+(1))^2 \;-\; ((-2)\cdot x+(1))^2\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int_{-0}^{2}\left[(1^2x^4+(1)^2+2(1)(1)x^2) - ((-2)^2x^2+(1)^2+2(-2)(1)x)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int_{-0}^{2}\left[(1)x^4+(-2)x^2+(4)x+(0)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\frac{1\cdot x^5}{5}+\frac{(-2)\cdot x^3}{3}+\frac{(4)\cdot x^2}{2}+(0)\cdot x\right)\Big|_{-0}^{2} =$$

$$= \frac{1}{2S}\left[\left(\frac{1\cdot 2^5}{5}+\frac{(-2)\cdot 2^3}{3}+\frac{(4)\cdot 2^2}{2}+(0)\cdot 2\right)-\left(\frac{1\cdot -0^5}{5}+\frac{(-2)\cdot -0^3}{3}+\frac{(4)\cdot -0^2}{2}+(0)\cdot\right.\right.$$

$$= \frac{1}{13.333}(9.067-(0.000)) = \mathbf{0.680}\,.$$

Наносим центр тяжести $C(1.400, 0.680)$ на чертеж к примеру 65.

Решение (окончание)

Шаг 5: находим моменты инерции относительно осей координат по формулам Правила П4:

$$I_{\mathrm{OY}} = \iint_G x^2\,dx\,dy = \int_{-0}^{2} x^2 \left(\int_{(-2)\cdot x+(1)}^{1\cdot x^2+(1)} dy\right) dx = \int_{-0}^{2} x^2 \left(y\Big|_{y=(-2)\cdot x+(1)}^{y=1\cdot x^2+(1)} \right) dx =$$

$$= \int_{-0}^{2} x^2 \left((1\cdot x^2+(1)) - ((-2)\cdot x+(1))\right) dx =$$

$$= \int_{-0}^{2} x^2(1\cdot x^2+(2.0)\cdot x+(0.0))dx = \int_{-0}^{2}(1\cdot x^4+(2.0)\cdot x^3+(0.0)\cdot x^2)dx$$

$$\left(\frac{1\cdot x^5}{5}+\frac{(2.0)\cdot x^4}{4}+\frac{(0.0)\cdot x^3}{3}\right)\Big|_{-0}^{2} =$$

$$\left[\left(\frac{1\cdot 2^5}{5}+\frac{(2.0)\cdot 2^4}{4}+\frac{(0.0)\cdot 2^3}{3}\right)-\left(\frac{1\cdot -0^5}{5}+\frac{(2.0)\cdot -0^4}{4}+\frac{(0.0)\cdot -0^3}{3}\right)\right] =$$

$$(14.400-(0.000)) = \mathbf{14.400}\,.$$

$$I_{\mathrm{OX}} = \iint_G y^2\,dx\,dy = \int_{-0}^{2}\left(\int_{(-2)\cdot x+(1)}^{1\cdot x^2+(1)} y^2\,dy\right)dx =$$

$$= \int_{-0}^{2}\left(\frac{y^3}{3}\Big|_{y=(-2)\cdot x+(1)}^{y=1\cdot x^2+(1)}\right)dx = \frac{1}{3}\int_{-0}^{2}\left[\left(1\cdot x^2+(1)\right)^3 - \left((-2)\cdot x+(1)\right)^3\right]dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-0}^{2}\left[\left(1^3x^6+3\cdot(1)^2x^4\cdot(1)+3\cdot(1)x^2\cdot(1)^2+(1)^3\right) -\right.$$

$$\left. -\left((-2)^3x^3+3\cdot(-2)^2x^2\cdot(1)+3\cdot(-2)x\cdot(1)^2+(1)^3\right)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-0}^{2}\left[(1)x^6+(3)x^4+(8)x^3+(-9)x^2+(6)x+(0)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1\cdot x^7}{7}+\frac{(3)\cdot x^5}{5}+\frac{(8)\cdot x^4}{4}+\frac{(-9)\cdot x^3}{3}+\frac{(6)\cdot x^2}{2}+(0)\cdot x\right)\Big|_{-0}^{2} =$$

$$\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1\cdot(2)^7}{7}+\frac{(3)\cdot(2)^5}{5}+\frac{(8)\cdot(2)^4}{4}+\frac{(-9)\cdot(2)^3}{3}+\frac{(6)\cdot(2)^2}{2}+(0)\cdot(2)\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1\cdot(-0)^7}{7}+\frac{(3)\cdot(-0)^5}{5}+\frac{(8)\cdot(-0)^4}{4}+\frac{(-9)\cdot(-0)^3}{3}+\frac{(6)\cdot(-0)^2}{2}+(0)\cdot(-0)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\cdot(57.486-(0.000)) = \mathbf{19.162}\,.$$

Ответ

$\boldsymbol{S = 6.667}$

$\boldsymbol{x_C = 1.400}$

$\boldsymbol{y_C = 0.680}$

$\boldsymbol{I_{\mathrm{OY}} = 14.400}$

$\boldsymbol{I_{\mathrm{OX}} = 19.162}$

Выборочная проверка

S (формат 1.23): введи 6.667 Клик

x_C (формат 1.23): введи 1.400 Клик

y_C (формат 1.23): введи 0.680 Клик

I_{OY} (формат 1.23): введи 14.400 Клик

I_{OX} (формат 1.23): введи 19.162 Клик

Пример П2

Область ограничена линиями:

$$x = x_{max} = 3,$$
$$x = x_{min} = -2,$$
$$y = 0,$$
$$y = e^{-1.0x},$$
$$y = 1 + 0.3 \cdot x.$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь и координаты центра тяжести области (моменты инерции не вычислять).

Решение

Шаг 1: построение линий.

$\boldsymbol{y = 1 + 0.3 \cdot x}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_{\min} - 1 = -2 - 1 = -3$ до 1:

x	-3	-2	-1	0	1
$y = 1 + 0.3 \cdot x$	**0,1**	**0,4**	**0,7**	**1**	**1,3**

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

$\boldsymbol{y = e^{-1.0x}}$ — экспонента, для ее построения табулируем:

x	-1	0	1	2	3	4
$y = e^{-1.0x}$	**2,7**	**1**	**0,4**	**0,1**	**0**	**0**

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим экспоненту по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{y = 0}$ — горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = 3}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(3, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = -2}$ — вертикальная прямая, проходящая через т. $(-2, 0)$ (**черным**).

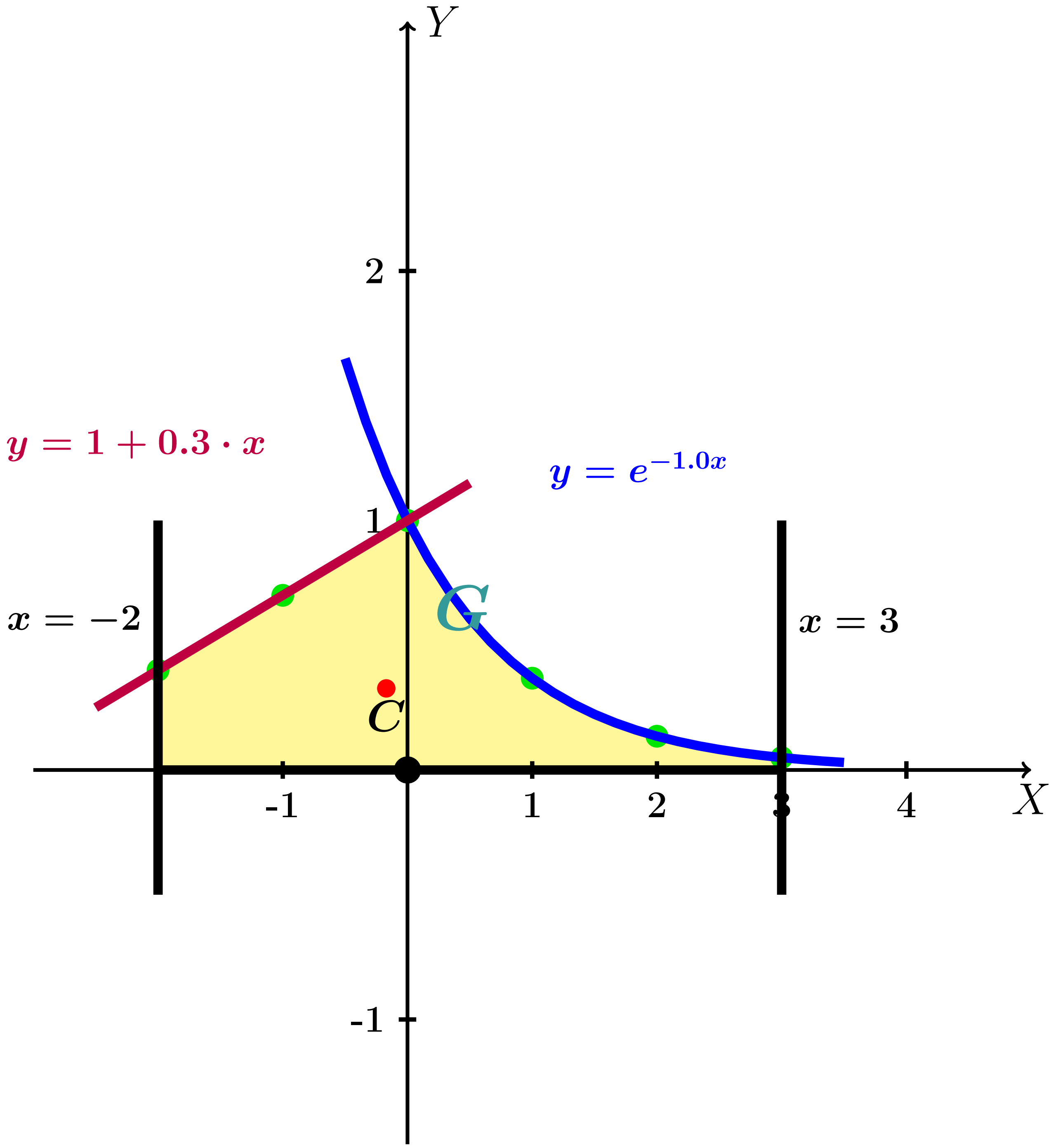

Рис.: Чертеж к примеру 2: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$
\begin{aligned}
x_{\text{лев}} &= -2 && \text{— левая граница;}\\
x_{\text{прав}} &= 3 && \text{— правая;}\\
y_{\text{низ}}(x) &= 0 && \text{— нижняя;}\\
y_{\text{верх}}(x) &= \begin{cases} 1+0.3\cdot x & \text{при } -2\le x\le 0\\ e^{-1.0x} & \text{при } 0\le x\le 3\end{cases} && \text{— верхняя (из 2х частей).}
\end{aligned}
$$

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6 с разбиением области интегрирования на две части согласно форме верхней границы. Для интегрирования экспоненты используется формула 7 таблицы 2.

$$
S=\iint_G dx\,dy=\underbrace{\int_{-2}^{0}\left(\int_0^{1+0.3\cdot x}dy\right)dx}_{\text{повторный интеграл левый}}+\underbrace{\int_0^3\left(\int_0^{e^{-1.0x}}dy\right)dx}_{\text{повторный интеграл правый}}=
$$

$$
=\int_{-2}^{0}\left(y\Big|_{y=0}^{y=1+0.3\cdot x}\right)dx+\int_0^3\left(y\Big|_{y=0}^{y=e^{-1.0x}}\right)dx=
$$

$$
=\int_{-2}^{0}((1+0.3\cdot x)-(0))\,dx+\int_0^3\left((e^{-1.0\cdot x})-(0)\right)dx=
$$

$$
=\int_{-2}^{0}(1+0.3\cdot x)dx+\int_0^3 e^{-1.0\cdot x}\,dx=
$$

$$
=\left(1\cdot x+\frac{0.3\cdot x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{0}+\left(\frac{e^{-1.0\cdot x}}{-1.0}\right)\Big|_0^3=
$$

$$
=\left[\left(1\cdot 0+\frac{0.3\cdot 0^2}{2}\right)-\left(1\cdot(-2)+\frac{0.3\cdot(-2)^2}{2}\right)\right]+\left[\frac{e^{-1.0\cdot(3)}}{-1.0}-\frac{e^{-1.0\cdot 0}}{-1.0}\right]=
$$

$$
=1.400+(0.950)=\mathbf{2.350}\,.
$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2.
Для интегрирования экспоненты используются формулы 7,8 таблицы 2.

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0} x\left(\int_0^{1+0.3\cdot x} dy\right)\,dx + \frac{1}{S}\int_0^3 x\left(\int_0^{e^{-1.0x}} dy\right)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0} x\left(y\Big|_{y=0}^{y=1+0.3\cdot x}\right)\,dx + \frac{1}{S}\int_0^3 x\left(y\Big|_{y=0}^{y=e^{-1.0x}}\right)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0} x\left(1+0.3\cdot x - 0\right)\,dx + \frac{1}{S}\int_0^3 x\left(e^{-1.0x} - 0\right)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0} \left(1\cdot x + 0.3\cdot x^2\right)\,dx + \frac{1}{S}\int_0^3 x\,e^{-1.0x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\left(\frac{1\cdot x^2}{2} + \frac{0.3\cdot x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{0} + \frac{1}{S}\left(\frac{x\,e^{-1.0x}}{-1.0} - \frac{e^{-1.0x}}{(-1.0)^2}\right)\Big|_0^3 =$$

$$= \frac{1}{S}\left[\left(\frac{1\cdot 0^2}{2} + \frac{0.3\cdot 0^3}{3} - \frac{1\cdot(-2)^2}{2} - \frac{0.3\cdot(-2)^3}{3}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{(3)\cdot e^{-1.0\cdot(3)}}{-1.0} - \frac{e^{-1.0\cdot(3)}}{(-1.0)^2} - \frac{0\cdot e^{-1.00}}{-1.0} + \frac{e^{-1.00}}{(-1.0)^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2.350}(-1.200 + 0.801) = \mathbf{-0.170}\,.$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0}\left(\int_0^{1+0.3\cdot x} y\,dy\right)\,dx + \frac{1}{S}\int_0^3\left(\int_0^{e^{-1.0x}} y\,dy\right)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0}\left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=1+0.3\cdot x}\right)\,dx + \frac{1}{S}\int_0^3\left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=e^{-1.0x}}\right)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int_{-2}^{0}\left((1+0.3\cdot x)^2 - 0^2\right)\,dx + \frac{1}{2S}\int_0^3\left((e^{-1.0x})^2 - 0^2\right)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int_{-2}^{0}(1+0.3\cdot x)^2\,dx + \frac{1}{2S}\int_0^3 e^{-2\cdot 1.0\cdot x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int_{-2}^{0}\left(1+(0.6)\cdot x+(0.09)\cdot x^2\right)\,dx + \frac{1}{2S}\int_0^3 e^{-2.0\cdot x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(1\cdot x + \frac{(0.6)\cdot x^2}{2} + \frac{(0.09)\cdot x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{0} + \frac{1}{2S}\left(\frac{e^{-2.0\cdot x}}{-2.0}\right)\Big|_0^3 =$$

$$= \frac{1}{2S}\left[\left(1\cdot 0 + \frac{(0.6)\cdot 0^2}{2} + \frac{(0.09)\cdot 0^3}{3} - 1\cdot(-2) - \frac{(0.6)\cdot(-2)^2}{2} - \frac{(0.09)\cdot(-2)^3}{3}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{e^{-2.0\cdot(3)}}{-2.0} - \frac{e^{-2.0\cdot 0}}{-2.0}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 2.350}\cdot(1.040 + 0.499) = \mathbf{0.327}\,.$$

Наносим центр тяжести $C(-0.170, 0.327)$ на чертеж к примеру 2.

Ответ

$\boldsymbol{S = 2.350}$

$\boldsymbol{x_C = -0.170}$

$\boldsymbol{y_C = 0.327}$

Выборочная проверка

S (формат 1.23): введи 2.350 Клик

x_C (формат 1.23): введи -0.170 Клик

y_C (формат 1.23): введи 0.327 Клик

§ 3. Задания для студентов. Указания

1 Студент должен использовать современный компьютер с программами Acrobat или Reader для чтения файлов PDF.

2 Студент должен иметь калькулятор для инженерных рассчетов, либо как программу в компьютере либо как отдельное устройство. Если имеется доступ к интернету, то вычисления можно производить прямо в окошке поиска Google.

3 Проработать теоретический материал § 1 и разобрать решения примеров.

4 Разобрать вариант 0, дающий правильное оформление решения. При этом ознакомиться и освоить интерактивный метод проверки результатов.

5 Найти свой вариант.

6 Решить свой вариант.

7 Результаты оформляются, беря за образец вариант 0.

8 Те результаты, для которых имеется возможность интерактивной проверки, должны быть проверены.

9 **Каждый лист своего варианта с результатами проверки следует распечатать так, чтобы были видны отметки ВЕРНО или НЕВЕРНО, после чего заполнить пустые места по результатам решения.**

10 Дополнительно для сдачи работы, студент должен иметь при себе промежуточные вычисления по произвольной форме.

11 Вычисления производятся как минимум с 3 знаками после десятичной точки. Окончательные результаты представляются с двумя знаками.

12 Результаты для интерактивной проверки нецелых чисел представляются с двумя знаками после десятичной точки.

Задача 1

Область ограничена линиями:

$$y = (-5)\cdot x + (-3),$$
$$y = 1\cdot x^2 + (1),$$
$$x = x_{\max} = 3.$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь, координаты центра тяжести, и моменты инерции относительно осей координат.

Решение (по образцу примера П1)

Шаг 1: построение линий. Находим пересечение двух первых линий.

$$1\cdot x^2 + (1) = (-5)\cdot x + (-3)$$
$$1\cdot x^2 - (-5)\cdot x + ((1) - (-3)) = 0$$
$$1\cdot x^2 + (5)\cdot x + (4) = 0$$

$D = (5)^2 - 4\cdot(1)\cdot(4) = 9.000$.

$$x_1 = \frac{-(5) - \sqrt{9.000}}{2\cdot(1)} = -4.00\ ; \qquad x_2 = \frac{-(5) + \sqrt{9.000}}{2\cdot(1)} = -1\ .$$

$\boldsymbol{y = (-5)\cdot x + (-3)}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_1 - 1 = -5.0$ до $x_{\max} + 1 = 3 + 1 = 4.0$:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = (-5)\cdot x + (-3)$	**22**	**17**	**12**	**7**	**2**	**−3**	**−8**	**−13**	**−18**	**−23**

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

Решение (продолжение)

Шаг 1: продолжение.

$\boldsymbol{y = 1 \cdot x^2 + (1)}$ — парабола, для ее построения табулируем:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 1 \cdot x^2 + (1)$	**26**	**17**	**10**	**5**	**2**	**1**	**2**	**5**	**10**	**17**

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим параболу по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{x = 3}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(3, 0)$ (**на чертеже черным**).

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$
\begin{array}{lcll}
x_{\text{лев}} & = & -1 & - \text{ левая граница;} \\
x_{\text{прав}} & = & 3 & - \text{ правая;} \\
y_{\text{низ}}(x) & = & (-5) \cdot x + (-3) & - \text{ нижняя;} \\
y_{\text{верх}}(x) & = & 1 \cdot x^2 + (1) & - \text{ верхняя.}
\end{array}
$$

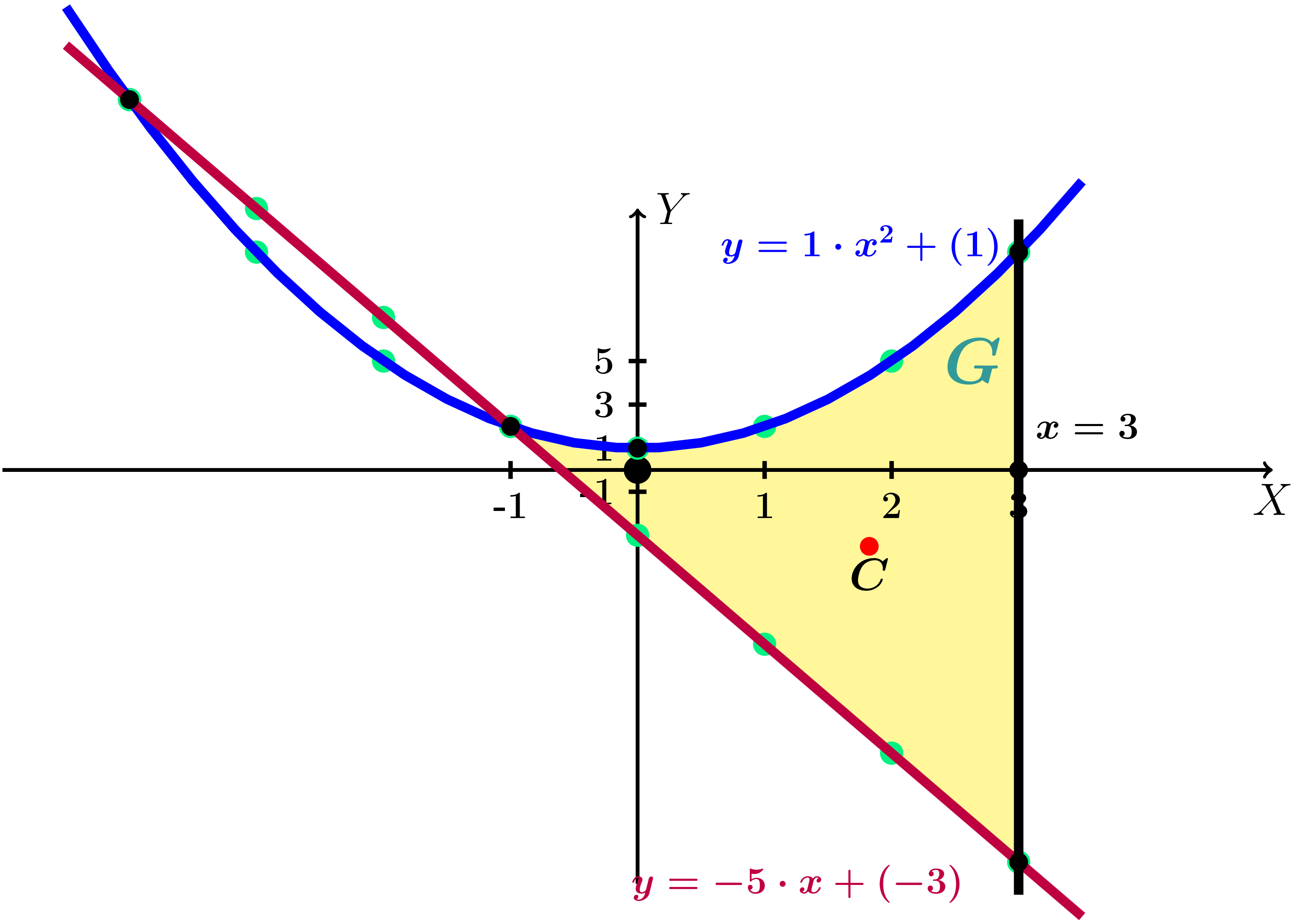

Рис.: Чертеж к задаче 1: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6:

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-1}^{3}\left(\int_{(-5)\cdot x+(-3)}^{1\cdot x^2+(1)} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл}} =$$

$$= \int_{-1}^{3}\left(y\Big|_{y=(-5)\cdot x+(-3)}^{y=1\cdot x^2+(1)}\right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{3}\left((1\cdot x^2+(1)) - ((-5)\cdot x+(-3))\right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{3}(1\cdot x^2+(5)\cdot x+(4))dx =$$

$$= \left(\frac{1\cdot x^3}{3}+\frac{(5)\cdot x^2}{2}+(4)\cdot x\right)\Bigg|_{-1}^{3} =$$

$$= \left(\frac{1\cdot 3^3}{3}+\frac{(5)\cdot 3^2}{2}+(4)\cdot 3\right) - \left(\frac{1\cdot(-1)^3}{3}+\frac{(5)\cdot(-1)^2}{2}+(4)\cdot(-1)\right) =$$

$$= 43.500 - (-1.833) = \mathbf{45.333}\ .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2:

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_{-1}^{3} x\left(\int_{(-5)\cdot x+(-3)}^{1\cdot x^2+(1)} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{3} x\left(y\Big|_{y=(-5)\cdot x+(-3)}^{y=1\cdot x^2+(1)}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{3} x\left((1\cdot x^2+(1)) - ((-5)\cdot x+(-3))\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{3} x(1\cdot x^2+(5)\cdot x+(4))dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{3} (1\cdot x^3+(5)\cdot x^2+(4)\cdot x)dx$$

$$= \frac{1}{S}\left(\frac{1\cdot x^4}{4}+\frac{(5)\cdot x^3}{3}+\frac{(4)\cdot x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{3} =$$

$$= \frac{1}{S}\left[\left(\frac{1\cdot 3^4}{4}+\frac{(5)\cdot 3^3}{3}+\frac{(4)\cdot 3^2}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1\cdot(-1)^4}{4}+\frac{(5)\cdot(-1)^3}{3}+\frac{(4)\cdot(-1)^2}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{45.333}\cdot\left(83.250 - (0.583)\right) = \mathbf{1.824}\,.$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_{-1}^{3}\left(\int_{(-5)\cdot x+(-3)}^{1\cdot x^2+(1)} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{3}\left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=(-5)\cdot x+(-3)}^{y=1\cdot x^2+(1)}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int_{-1}^{3}\Big[\big(1\cdot x^2+(1)\big)^2 \;-\; \big((-5)\cdot x+(-3)\big)^2\Big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int_{-1}^{3}\left[\left(1^2x^4+(1)^2+2(1)(1)x^2\right) - \left((-5)^2x^2+(-3)^2+2(-5)(-3)x\right)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int_{-1}^{3}\left[(1)x^4+(-23)x^2+(-30)x+(-8)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\frac{1\cdot x^5}{5}+\frac{(-23)\cdot x^3}{3}+\frac{(-30)\cdot x^2}{2}+(-8)\cdot x\right)\Big|_{-1}^{3} =$$

$$= \frac{1}{2S}\Bigg[\left(\frac{1\cdot 3^5}{5}+\frac{(-23)\cdot 3^3}{3}+\frac{(-30)\cdot 3^2}{2}+(-8)\cdot 3\right) -$$
$$- \left(\frac{1\cdot(-1)^5}{5}+\frac{(-23)\cdot(-1)^3}{3}+\frac{(-30)\cdot(-1)^2}{2}+(-8)\cdot(-1)\right)\Bigg] =$$

$$= \frac{1}{90.667}\cdot\big(-317.400-(0.467)\big) = \mathbf{-3.506}\,.$$

Наносим центр тяжести $C(1.824, -3.506)$ на чертеж к задаче 1.

Решение (продолжение)

Шаг 5: находим моменты инерции относительно осей координат по формулам Правила П 4:

$$I_{\mathrm{OY}} = \iint_G x^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{3} x^2 \left(\int_{(-5)\cdot x+(-3)}^{1\cdot x^2+(1)} dy \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{3} x^2 \left(y \Big|_{y=(-5)\cdot x+(-3)}^{y=1\cdot x^2+(1)} \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{3} x^2 \left((1\cdot x^2+(1)) - ((-5)\cdot x + (-3)) \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{3} x^2 \big(1\cdot x^2 + (5)\cdot x + (4)\big) dx =$$

$$= \int_{-1}^{3} \big(1\cdot x^4 + (5)\cdot x^3 + (4)\cdot x^2\big) dx =$$

$$= \left(\frac{1\cdot x^5}{5} + \frac{(5)\cdot x^4}{4} + \frac{(4)\cdot x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^{3} =$$

$$= \left[\left(\frac{1\cdot 3^5}{5} + \frac{(5)\cdot 3^4}{4} + \frac{(4)\cdot 3^3}{3} \right) - \left(\frac{1\cdot(-1)^5}{5} + \frac{(5)\cdot(-1)^4}{4} + \frac{(4)\cdot(-1)^3}{3} \right) \right] =$$

$$= 185.850 - (-0.283) = \mathbf{186.133}\,.$$

Решение (продолжение)

Шаг 5: продолжение.

$$I_{\text{OX}} = \iint_G y^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{3}\left(\int_{(-5)\cdot x+(-3)}^{1\cdot x^2+(1)} y^2\,dy\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{3}\left(\frac{y^3}{3}\Big|_{y=(-5)\cdot x+(-3)}^{y=1\cdot x^2+(1)}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-1}^{3}\left[\left(1\cdot x^2+(1)\right)^3 - \left((-5)\cdot x+(-3)\right)^3\right]dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-1}^{3}\left[\left(1^3x^6+3\cdot(1)^2x^4\cdot(1)+3\cdot(1)x^2\cdot(1)^2+(1)^3\right)-\right.$$

$$\left.-\left((-5)^3x^3+3\cdot(-5)^2x^2\cdot(-3)+3\cdot(-5)x\cdot(-3)^2+(-3)^3\right)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-1}^{3}\left[(1)x^6+(3)x^4+(125)x^3+(228)x^2+(135)x+(28)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1\cdot x^7}{7}+\frac{(3)\cdot x^5}{5}+\frac{(125)\cdot x^4}{4}+\frac{(228)\cdot x^3}{3}+\frac{(135)\cdot x^2}{2}+(28)\cdot x\right)\Big|_{-1}^{3} =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1\cdot(3)^7}{7}+\frac{(3)\cdot(3)^5}{5}+\frac{(125)\cdot(3)^4}{4}+\frac{(228)\cdot(3)^3}{3}+\frac{(135)\cdot(3)^2}{2}+(28)\cdot(3)\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1\cdot(-1)^7}{7}+\frac{(3)\cdot(-1)^5}{5}+\frac{(125)\cdot(-1)^4}{4}+\frac{(228)\cdot(-1)^3}{3}+\frac{(135)\cdot(-1)^2}{2}+(28)\cdot(-1)\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(5732.979-(-5.993)\right) = \mathbf{1912.990}\ .$$

Ответ

$\boldsymbol{S = 45.333}$

$\boldsymbol{x_C = 1.824}$

$\boldsymbol{y_C = -3.506}$

$\boldsymbol{I_{\mathrm{OY}} = 186.133}$

$\boldsymbol{I_{\mathrm{OX}} = 1912.990}$

Выборочная проверка вариант 0 задача 1

S (формат 1.23): введи	45.333	Клик	
x_C (формат 1.23): введи	1.824	Клик	
y_C (формат 1.23): введи	-3.506	Клик	
I_{OY} (формат 1.23): введи	186.133	Клик	
I_{OX} (формат 1.23): введи	1912.990	Клик	

Задача 2

Область ограничена линиями:

$$\begin{aligned} x &= x_{\max} = 3, \\ x &= x_{\min} = -2, \\ y &= 0, \\ y &= e^{-0.4x}, \\ y &= 1 + 0.2 \cdot x. \end{aligned}$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь и координаты центра тяжести области (моменты инерции не вычислять).

Решение (по образцу примера П2)

Шаг 1: построение линий.

$\boldsymbol{y = 1 + 0.2 \cdot x}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_{\min} - 1 = -2 - 1 = -3$ до 1:

x	-3	-2	-1	0	1
$y = 1 + 0.2 \cdot x$	0,4	0,6	0,8	1	1,2

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

$\boldsymbol{y = e^{-0.4x}}$ — экспонента, для ее построения табулируем:

x	-1	0	1	2	3	4
$y = e^{-0.4x}$	1,5	1	0,7	0,4	0,3	0,2

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим экспоненту по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{y = 0}$ — горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = 3}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(3, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = -2}$ — вертикальная прямая, проходящая через т. $(-2, 0)$ (**черным**).

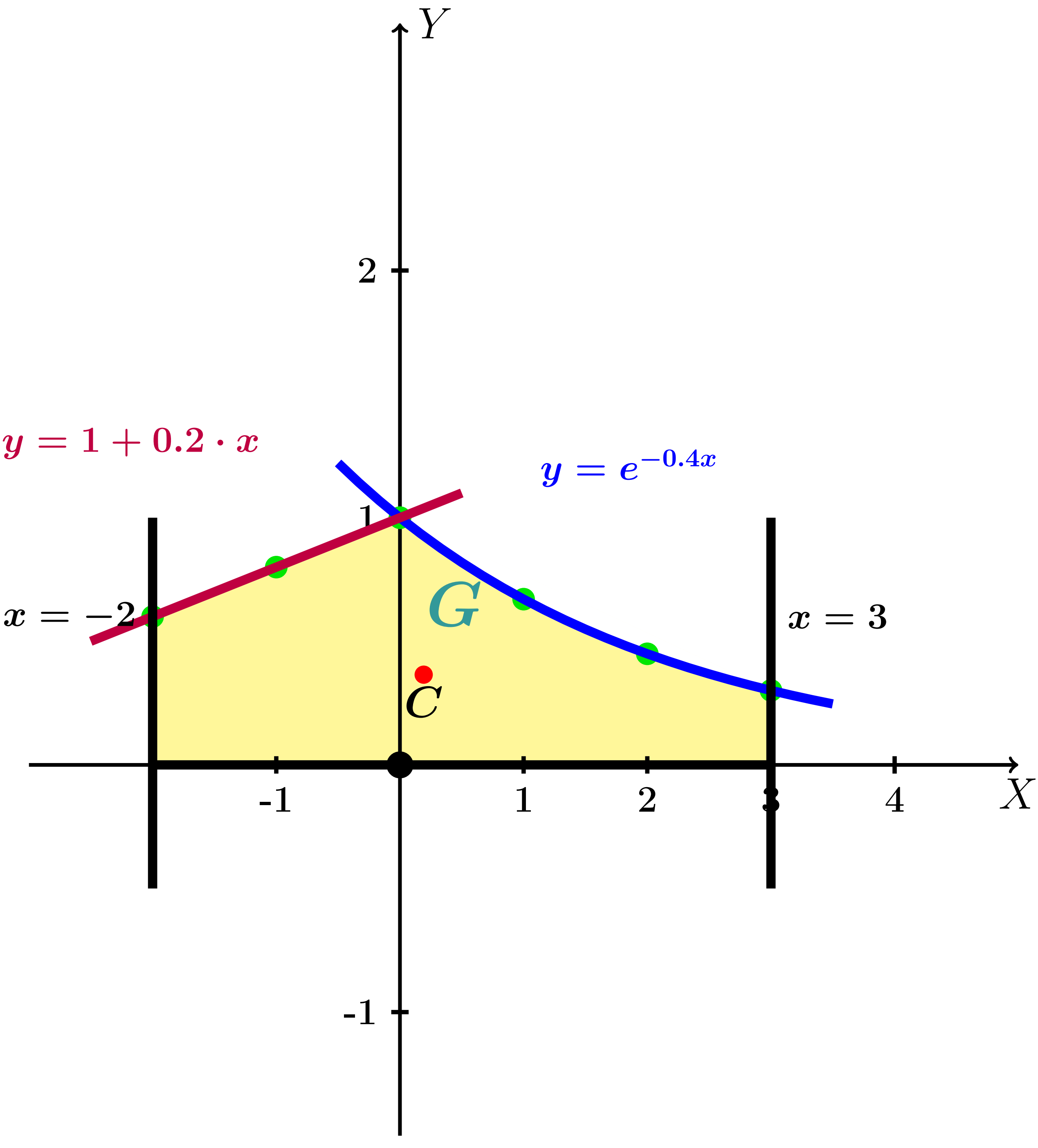

Рис.: Чертеж к задаче 2: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$\begin{array}{lll} x_{\text{лев}} & = -2 & \text{— левая граница;} \\ x_{\text{прав}} & = 3 & \text{— правая;} \\ y_{\text{низ}}(x) & = 0 & \text{— нижняя;} \\ y_{\text{верх}}(x) & = \begin{cases} 1+0.2\cdot x & \text{при } -2 \le x \le 0 \\ e^{-0.4x} & \text{при } 0 \le x \le 3 \end{cases} & \text{— верхняя (из 2х частей).} \end{array}$$

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6 с разбиением области интегрирования на две части согласно форме верхней границы. Для интегрирования экспоненты используется формула 7 таблицы 2.

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-2}^{0}\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} dy\right)dx}_{\text{повторный интеграл левый}} + \underbrace{\int_0^3\left(\int_0^{e^{-0.4x}} dy\right)dx}_{\text{повторный интеграл правый}} =$$

$$= \int_{-2}^{0}\left(y\Big|_{y=0}^{y=1+0.2\cdot x}\right)dx + \int_0^3\left(y\Big|_{y=0}^{y=e^{-0.4x}}\right)dx =$$

$$= \int_{-2}^{0}((1+0.2\cdot x)-(0))\,dx + \int_0^3\left((e^{-0.4\cdot x})-(0)\right)dx =$$

$$= \int_{-2}^{0}(1+0.2\cdot x)dx + \int_0^3 e^{-0.4\cdot x}\,dx =$$

$$= \left(1\cdot x + \frac{0.2\cdot x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{0} + \left(\frac{e^{-0.4\cdot x}}{-0.4}\right)\Big|_0^3 =$$

$$= \left[\left(1\cdot 0 + \frac{0.2\cdot 0^2}{2}\right) - \left(1\cdot(-2) + \frac{0.2\cdot(-2)^2}{2}\right)\right] + \left[\frac{e^{-0.4\cdot(3)}}{-0.4} - \frac{e^{-0.4\cdot 0}}{-0.4}\right] =$$

$$= 1.600 + (1.747) = \mathbf{3.347}\ .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2. Для интегрирования экспоненты используются формулы 7,8 таблицы 2.

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0} x\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} dy\right) dx + \frac{1}{S}\int_0^3 x\left(\int_0^{e^{-0.4x}} dy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0} x\left(y\Big|_{y=0}^{y=1+0.2\cdot x}\right) dx + \frac{1}{S}\int_0^3 x\left(y\Big|_{y=0}^{y=e^{-0.4x}}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0} x\,(1+0.2\cdot x-0)\;dx + \frac{1}{S}\int_0^3 x\left(e^{-0.4x}-0\right)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0} \left(1\cdot x+0.2\cdot x^2\right)\,dx + \frac{1}{S}\int_0^3 x\,e^{-0.4x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\left(\frac{1\cdot x^2}{2}+\frac{0.2\cdot x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{0} + \frac{1}{S}\left(\frac{x\,e^{-0.4x}}{-0.4}-\frac{e^{-0.4x}}{(-0.4)^2}\right)\Big|_0^3 =$$

$$= \frac{1}{S}\left[\left(\frac{1\cdot 0^2}{2}+\frac{0.2\cdot 0^3}{3}-\frac{1\cdot(-2)^2}{2}-\frac{0.2\cdot(-2)^3}{3}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{(3)\cdot e^{-0.4\cdot(3)}}{-0.4}-\frac{e^{-0.4\cdot(3)}}{(-0.4)^2}-\frac{0\cdot e^{-0.40}}{-0.4}+\frac{e^{-0.40}}{(-0.4)^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3.347}\cdot(-1.467+2.109) = \mathbf{0.192}\;.$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0}\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} y\,dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^3\left(\int_0^{e^{-0.4x}} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0}\left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=1+0.2\cdot x}\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^3\left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=e^{-0.4x}}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int_{-2}^{0}\left((1+0.2\cdot x)^2 - 0^2\right)dx + \frac{1}{2S}\int_0^3\left((e^{-0.4x})^2 - 0^2\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int_{-2}^{0}(1+0.2\cdot x)^2\,dx + \frac{1}{2S}\int_0^3 e^{-2\cdot 0.4\cdot x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int_{-2}^{0}\left(1+(0.4)\cdot x+(0.04)\cdot x^2\right)dx + \frac{1}{2S}\int_0^3 e^{-0.8\cdot x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(1\cdot x+\frac{(0.4)\cdot x^2}{2}+\frac{(0.04)\cdot x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{0} + \frac{1}{2S}\left(\frac{e^{-0.8\cdot x}}{-0.8}\right)\Big|_0^3 =$$

$$= \frac{1}{2S}\left[\left(1\cdot 0+\frac{(0.4)\cdot 0^2}{2}+\frac{(0.04)\cdot 0^3}{3}-1\cdot(-2)-\frac{(0.4)\cdot(-2)^2}{2}-\frac{(0.04)\cdot(-2)^3}{3}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{e^{-0.8\cdot(3)}}{-0.8}-\frac{e^{-0.8\cdot 0}}{-0.8}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 3.347}\cdot(1.307+(1.137)) = \mathbf{0.365}\,.$$

Наносим центр тяжести $C(0.192, 0.365)$ на чертеж к задаче 2.

Ответ

$\boldsymbol{S = 3.347}$

$\boldsymbol{x_C = 0.192}$

$\boldsymbol{y_C = 0.365}$

Выборочная проверка вариант 0 задача 2

S (формат 1.23): введи 3.347 Клик

x_C (формат 1.23): введи 0.192 Клик

y_C (формат 1.23): введи 0.365 Клик

Задача 1.

$S = 45.333$

$x_C = 1.824$

$y_C = -3.506$

$I_{\text{OY}} = 186.133$

$I_{\text{OX}} = 1912.990$

Задача 2.

$S = 3.347$

$x_C = 0.192$

$y_C = 0.365$

Задача 1

Область ограничена линиями:

$$
\begin{aligned}
y &= (-5)\cdot x + (-3),\\
y &= 1\cdot x^2 + (1),\\
x &= x_{\max} = 4.
\end{aligned}
$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь, координаты центра тяжести, и моменты инерции относительно осей координат.

Решение (по образцу примера П1)

Шаг 1: построение линий. Находим пересечение двух первых линий.

$$1\cdot x^2 + (1) = (-5)\cdot x + (-3)$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$D = \qquad = \qquad .$

$x_1 = \qquad = \qquad ; \qquad x_2 = \qquad = \qquad .$

$\boldsymbol{y = (-5)\cdot x + (-3)}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_1 - 1 = \qquad$ до $x_{\max} + 1 = \qquad$:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = (-5)\cdot x + (-3)$	22	17	12	7	2	−3	−8	−13	−18	−23	−28

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

Решение (продолжение)

Шаг 1: продолжение.

$\boldsymbol{y = 1 \cdot x^2 + (1)}$ — парабола, для ее построения табулируем:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = 1 \cdot x^2 + (1)$	26	17	10	5	2	1	2	5	10	17	26

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим параболу по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{x = 4}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(4, 0)$ (**на чертеже черным**).

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$\begin{aligned} x_{\text{лев}} &= && \text{– левая граница;} \\ x_{\text{прав}} &= && \text{– правая;} \\ y_{\text{низ}}(x) &= && \text{– нижняя;} \\ y_{\text{верх}}(x) &= && \text{– верхняя.} \end{aligned}$$

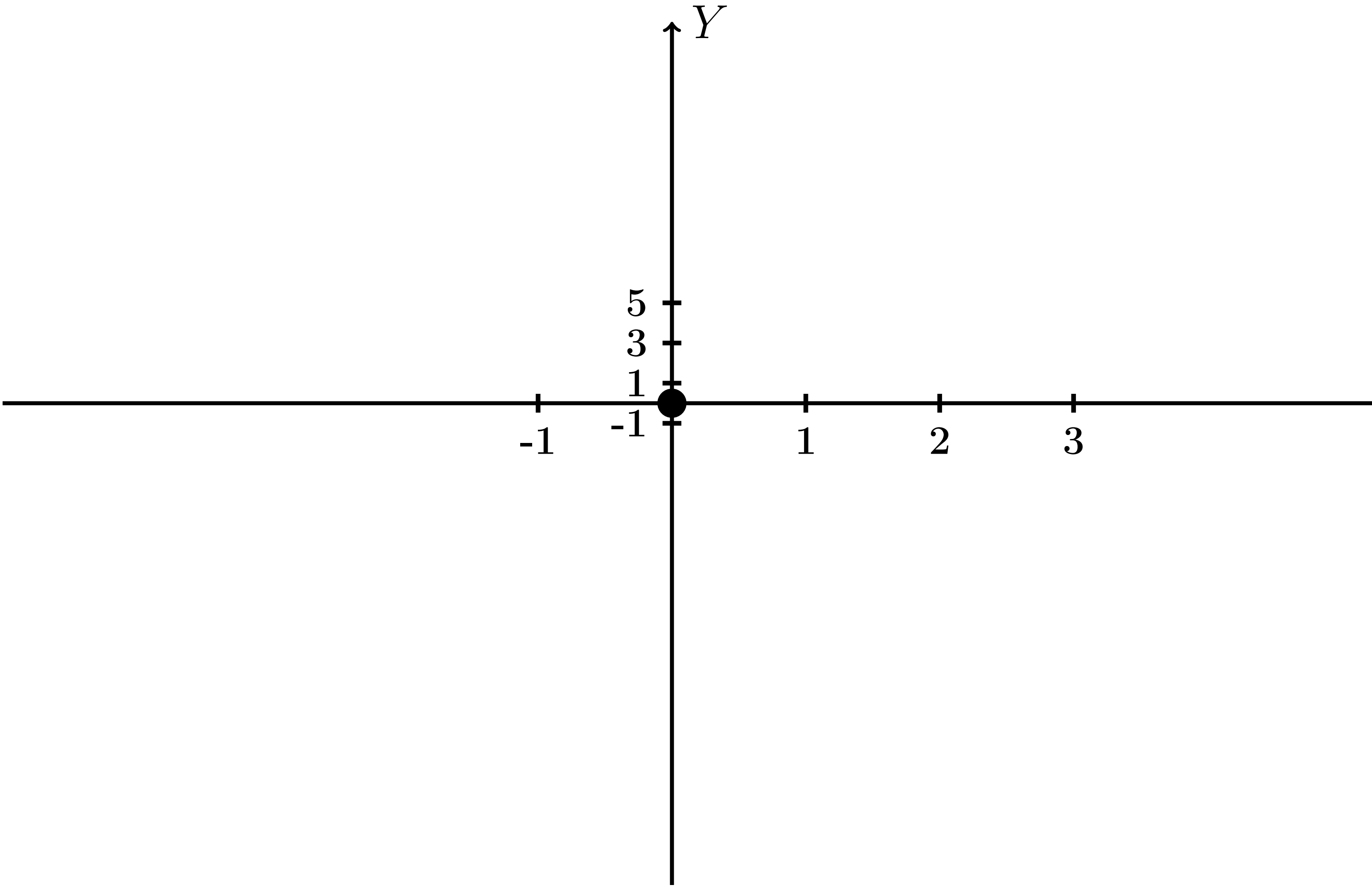

Рис.: Чертеж к задаче 1: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П 1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П 6:

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-1}^{4}\left(\int_{(-5)\cdot x+(-3)}^{1\cdot x^2+(1)} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл}} =$$

$$= \int_{-1}^{4}\left(y\Big|_{y=}^{y=}\qquad\qquad\right) dx =$$

$$= \int \left(\qquad\qquad - \qquad\qquad\right) dx =$$

$$= \int \qquad\qquad\qquad dx =$$

$$= \left(\qquad\qquad\qquad\right)\Big| \quad =$$

$$= \left(\qquad\qquad\qquad\right) - \left(\qquad\qquad\qquad\right) =$$

$$= \qquad - \qquad\qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2:

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_{-1}^{4} x\left(\int_{(-5)\cdot x+(-3)}^{1\cdot x^2+(1)} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=}^{y=} \quad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\quad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x(\quad)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad dx$$

$$= \frac{1}{S}\left(\quad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\quad \Big) - $$

$$- \Big(\quad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad}\cdot(\quad - \quad) = \quad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_{-1}^{4}\left(\int_{(-5)\cdot x+(-3)}^{1\cdot x^2+(1)} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\bigg|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[(\qquad\qquad)^2 - (\qquad\qquad)^2\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[(\qquad\qquad) - (\qquad\qquad)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[\qquad\qquad\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\qquad\qquad\right)\bigg| \quad =$$

$$= \frac{1}{2S}\left[\left(\qquad\qquad\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\qquad\qquad\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\qquad} \cdot (\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Наносим центр тяжести $C(2.553, -3.526)$ на чертеж к задаче 1.

Решение (продолжение)

Шаг 5: находим моменты инерции относительно осей координат по формулам Правила П 4:

$$I_{OY} = \iint_G x^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{4} x^2 \left(\int_{(-5)\cdot x+(-3)}^{1\cdot x^2+(1)} dy \right) dx =$$

$$= \int \quad x^2 \left(y \Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right) dx =$$

$$= \int \quad x^2 \, (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) \, dx =$$

$$= \int \quad x^2 (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) dx =$$

$$= \int \quad (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) dx =$$

$$= \left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right) \Big| \quad =$$

$$= \Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) - \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) \Big] =$$

$$= \qquad\quad - \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 5: продолжение.

$$I_{\mathrm{OX}} = \iint_G y^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{4}\left(\int_{(-5)\cdot x+(-3)}^{1\cdot x^2+(1)} y^2\,dy\right)dx =$$

$$= \int \left(\frac{y^3}{3}\Big|_{y=}^{y=}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \left[(\quad)^3 - (\quad)^3\right] dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \left[(\quad) - \right.$$

$$\left. - (\quad)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \left[\quad\right] dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\quad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{3}\left[(\quad) - \right.$$

$$\left. - (\quad)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot(\quad - \quad) = \quad .$$

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OY}} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OX}} =$

Выборочная проверка вариант 1 задача 1

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

I_{OY} (формат 1.23): введи Клик

I_{OX} (формат 1.23): введи Клик

Задача 2

Область ограничена линиями:

$$
\begin{aligned}
x &= x_{\max} = 4,\\
x &= x_{\min} = -2,\\
y &= 0,\\
y &= e^{-0.4x},\\
y &= 1 + 0.2 \cdot x.
\end{aligned}
$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь и координаты центра тяжести области (моменты инерции не вычислять).

Решение (по образцу примера П2)

Шаг 1: построение линий.

$\boldsymbol{y = 1 + 0.2 \cdot x}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_{\min} - 1 = -2 - 1 = -3$ до 1:

x	-3	-2	-1	0	1
$y = 1 + 0.2 \cdot x$	0,4	0,6	0,8	1	1,2

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

$\boldsymbol{y = e^{-0.4x}}$ — экспонента, для ее построения табулируем:

x	-1	0	1	2	3	4	5
$y = e^{-0.4x}$	1,5	1	0,7	0,4	0,3	0,2	0,1

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим экспоненту по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{y = 0}$ — горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = 4}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(4, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = -2}$ — вертикальная прямая, проходящая через т. $(-2, 0)$ (**черным**).

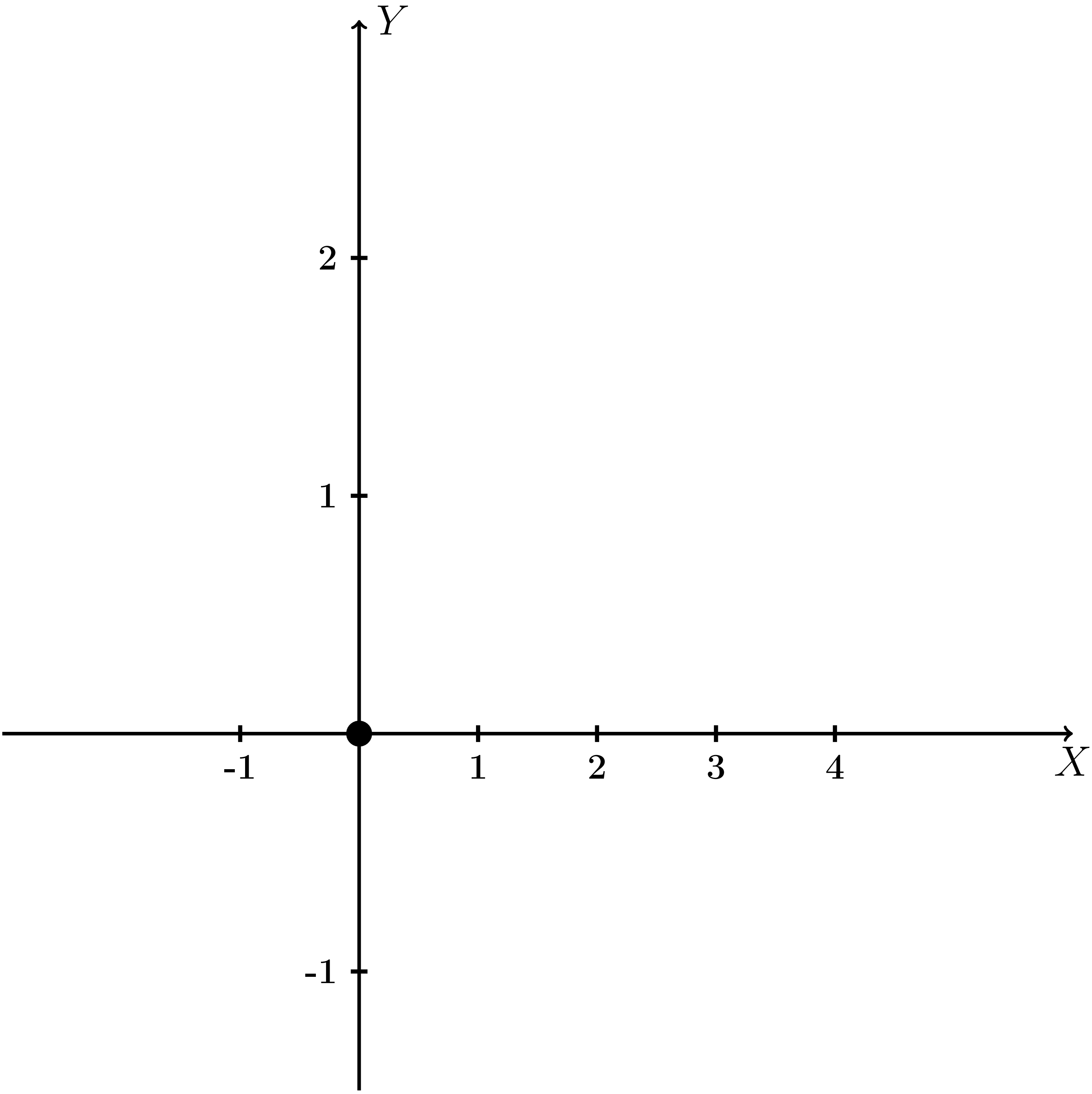

Рис.: Чертеж к задаче 2: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$\begin{array}{lll} x_{\text{лев}} & = & \quad\quad\quad - \text{ левая граница;} \\ x_{\text{прав}} & = & \quad\quad\quad - \text{ правая;} \\ y_{\text{низ}}(x) & = 0 & \quad\quad\quad - \text{ нижняя;} \\ y_{\text{верх}}(x) & = \begin{cases} \quad\quad \text{при} \\ \quad\quad \text{при} \end{cases} & \quad\quad\quad - \text{ верхняя (из 2х частей).} \end{array}$$

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6 с разбиением области интегрирования на две части согласно форме верхней границы. Для интегрирования экспоненты используется формула 7 таблицы 2.

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-2}^{0}\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} dy\right)dx}_{\text{повторный интеграл левый}} + \underbrace{\int_0^4\left(\int_0^{e^{-0.4x}} dy\right)dx}_{\text{повторный интеграл правый}} =$$

$$= \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx + \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx =$$

$$= \int \left(\quad\quad \right) dx + \int \left(\quad\quad \right) dx =$$

$$= \int \left(\quad\quad \right) dx + \int \quad dx =$$

$$= \left(\quad\quad \right)\Big| + \left(\quad\quad \right)\Big| =$$

$$= \left[\left(\quad\quad \right) - \left(\quad\quad \right)\right] + \left[\quad - \quad \right] =$$

$$= \quad + \quad = \quad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2.
Для интегрирования экспоненты используются формулы 7,8 таблицы 2.

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0} x\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} dy\right) dx + \frac{1}{S}\int_0^4 x\left(\int_0^{e^{-0.4x}} dy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad\right) dx + \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad (\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \quad + \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad \Big) +$$

$$+ \Big(\qquad\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad} \cdot (\qquad + \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0}\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} y\,dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^4\left(\int_0^{e^{-0.4x}} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\bigg|_{y=0}^{y=}\right)dx + \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\bigg|_{y=0}^{y=}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int (\quad)\,dx + \frac{1}{2S}\int (\quad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad dx + \frac{1}{2S}\int \quad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int (\quad)\,dx + \frac{1}{2S}\int \quad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\quad\right)\Big| + \frac{1}{2S}\left(\quad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\left[\left(\quad\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\quad\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot}\cdot(\quad + \quad) = \quad.$$

Наносим центр тяжести $C(\quad,\quad)$ на чертеж к задаче 2.

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

Выборочная проверка вариант 1 задача 2

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

Задача 1.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

$I_{\mathrm{OY}} =$

$I_{\mathrm{OX}} =$

Задача 2.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Задача 1

Область ограничена линиями:

$$\begin{aligned} y &= (-4)\cdot x + (-2), \\ y &= 1\cdot x^2 + (1), \\ x &= x_{\max} = 3. \end{aligned}$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь, координаты центра тяжести, и моменты инерции относительно осей координат.

Решение (по образцу примера П1)

Шаг 1: построение линий. Находим пересечение двух первых линий.

$$1\cdot x^2 + (1) = (-4)\cdot x + (-2)$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$D = \qquad = \qquad .$

$x_1 = \qquad = \qquad ; \qquad x_2 = \qquad = \qquad .$

$\boldsymbol{y = (-4)\cdot x + (-2)}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_1 - 1 = \qquad$ до $x_{\max} + 1 = \qquad$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = (-4)\cdot x + (-2)$	14	10	6	2	−2	−6	−10	−14	−18

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

Решение (продолжение)

Шаг 1: продолжение.

$\boldsymbol{y = 1 \cdot x^2 + (1)}$ — парабола, для ее построения табулируем:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 1 \cdot x^2 + (1)$	17	10	5	2	1	2	5	10	17

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим параболу по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{x = 3}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(3, 0)$ (**на чертеже черным**).

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$x_{\text{лев}} \quad = \quad$ – левая граница;

$x_{\text{прав}} \quad = \quad$ – правая;

$y_{\text{низ}}(x) \quad = \quad$ – нижняя;

$y_{\text{верх}}(x) \quad = \quad$ – верхняя.

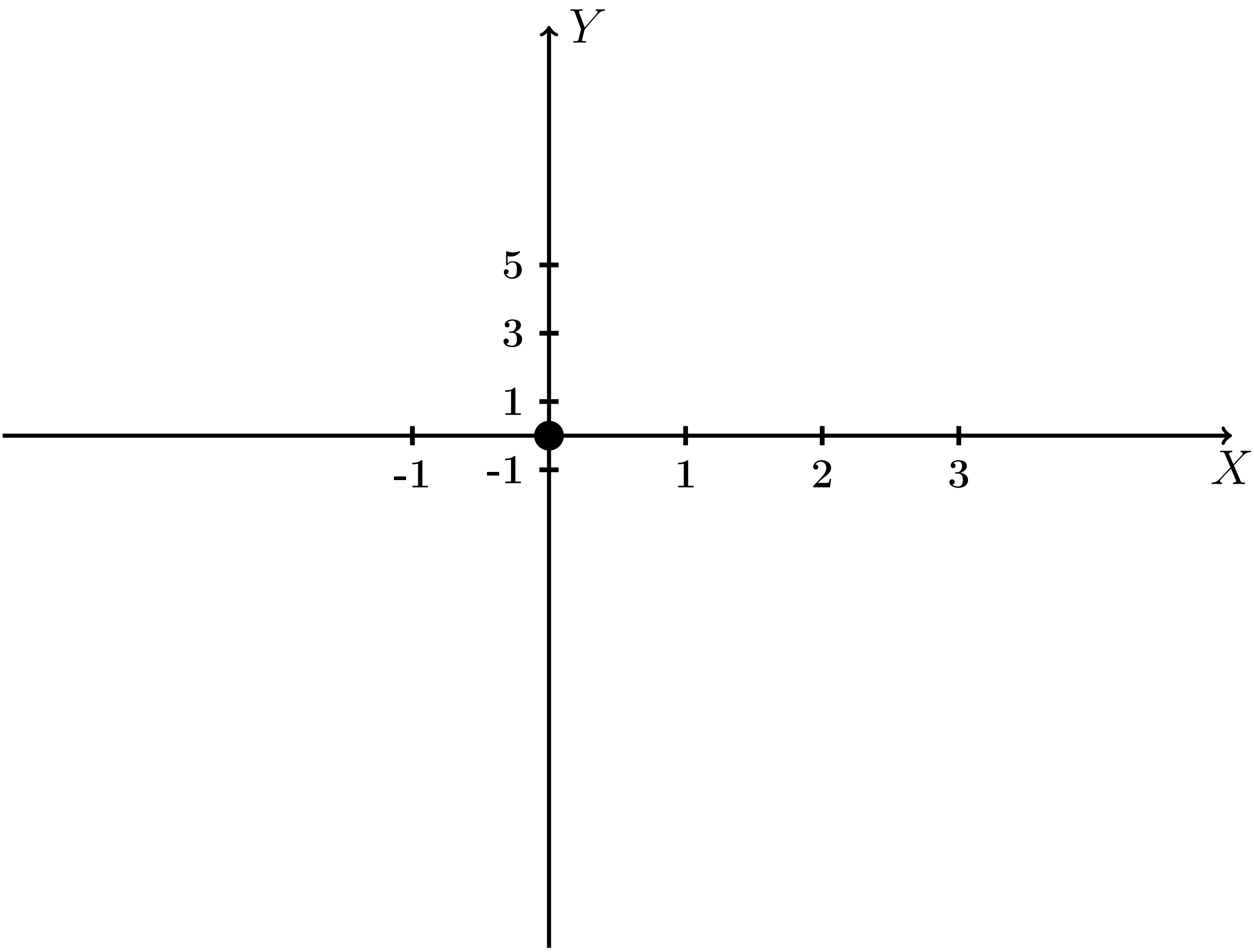

Рис.: Чертеж к задаче 1: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6:

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-1}^{3} \left(\int_{(-4)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(1)} dy \right) dx}_{\text{повторный интеграл}} =$$

$$= \int_{-1}^{3} \left(y \Big|_{y=}^{y=} \right) dx =$$

$$= \int \left(\qquad - \qquad \right) dx =$$

$$= \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad \right) \Big| =$$

$$= \left(\qquad \right) - \left(\qquad \right) =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2:

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_{-1}^{3} x\left(\int_{(-4)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(1)} dy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x(\qquad\qquad)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \qquad\qquad dx$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad \Big) -$$

$$- \Big(\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad}\cdot(\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_{-1}^{3}\left(\int_{(-4)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(1)} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad \left[(\qquad\qquad)^2 - (\qquad\qquad\qquad)^2\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad [(\qquad\qquad\qquad\qquad) - (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad [\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\Big) -$$

$$-\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad}\cdot(\qquad\qquad - \qquad\qquad) = \qquad\qquad .$$

Наносим центр тяжести $C(1.857, -2.114)$ на чертеж к задаче 1.

Решение (продолжение)

Шаг 5: находим моменты инерции относительно осей координат по формулам Правила П4:

$$I_{\mathrm{OY}} = \iint_G x^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{3} x^2 \left(\int_{(-4)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(1)} dy\right) dx =$$

$$= \int x^2 \left(y\Big|_{y=}^{y=}\qquad\right) dx =$$

$$= \int x^2 (\qquad) \, dx =$$

$$= \int x^2 (\qquad) dx =$$

$$= \int (\qquad) dx =$$

$$= \left(\qquad\right)\Big| =$$

$$= \left[\left(\qquad\right) - \left(\qquad\right)\right] =$$

$$= \quad - \quad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 5: продолжение.

$$I_{\text{OX}} = \iint_G y^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{3}\left(\int_{(-4)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(1)} y^2\,dy\right)dx =$$

$$= \int \left(\frac{y^3}{3}\Big|_{y=}^{y=}\qquad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \Big[(\qquad)^3 - (\qquad)^3\Big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \Big[(\qquad) -$$

$$-(\qquad)\Big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \Big[\qquad\Big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\Big(\qquad\Big)\Big| =$$

$$= \frac{1}{3}\Big[\Big(\qquad\Big) -$$

$$-\Big(\qquad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot(\qquad - \qquad) = \qquad.$$

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OY}} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OX}} =$

Выборочная проверка вариант 2 задача 1

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

I_{OY} (формат 1.23): введи Клик

I_{OX} (формат 1.23): введи Клик

Задача 2

Область ограничена линиями:

$$
\begin{aligned}
x &= x_{\max} = 3,\\
x &= x_{\min} = -1,\\
y &= 0,\\
y &= e^{-0.4x},\\
y &= 1 + 0.2 \cdot x.
\end{aligned}
$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь и координаты центра тяжести области (моменты инерции не вычислять).

Решение (по образцу примера П2)

Шаг 1: построение линий.

$\boldsymbol{y = 1 + 0.2 \cdot x}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_{\min} - 1 = -1 - 1 = -2$ до 1:

x	-2	-1	0	1
$y = 1 + 0.2 \cdot x$	0,6	0,8	1	1,2

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

$\boldsymbol{y = e^{-0.4x}}$ — экспонента, для ее построения табулируем:

x	-1	0	1	2	3	4
$y = e^{-0.4x}$	1,5	1	0,7	0,4	0,3	0,2

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим экспоненту по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{y = 0}$ — горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = 3}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(3, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = -1}$ — вертикальная прямая, проходящая через т. $(-1, 0)$ (**черным**).

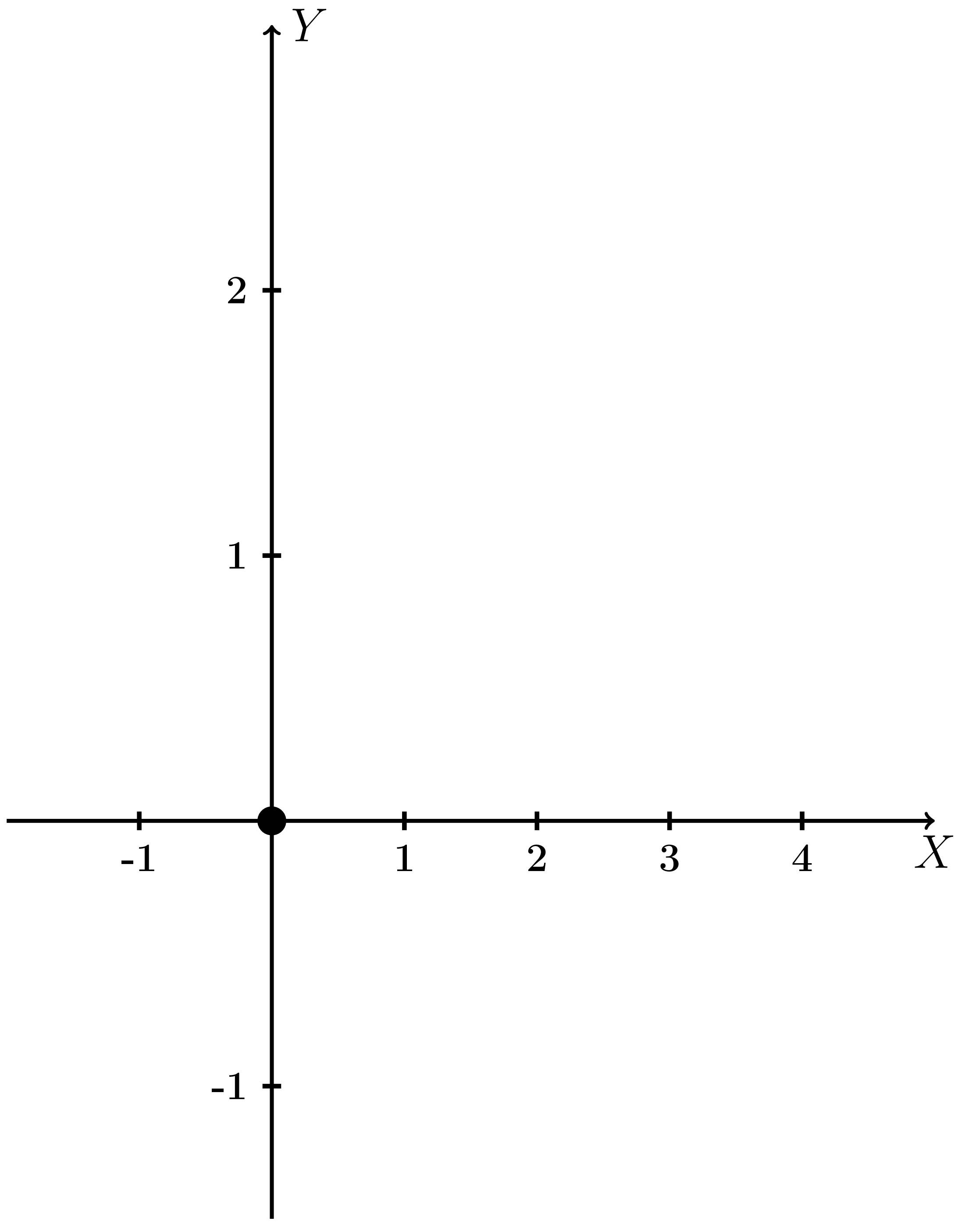

Рис.: Чертеж к задаче 2: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$x_{\text{лев}} = \qquad \text{— левая граница;}$$
$$x_{\text{прав}} = \qquad \text{— правая;}$$
$$y_{\text{низ}}(x) = 0 \qquad \text{— нижняя;}$$
$$y_{\text{верх}}(x) = \begin{cases} & \text{при} \\ & \text{при} \end{cases} \qquad \text{— верхняя (из 2х частей).}$$

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6 с разбиением области интегрирования на две части согласно форме верхней границы. Для интегрирования экспоненты используется формула 7 таблицы 2.

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-1}^{0}\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} dy\right)dx}_{\text{повторный интеграл левый}} + \underbrace{\int_0^3\left(\int_0^{e^{-0.4x}} dy\right)dx}_{\text{повторный интеграл правый}} =$$

$$= \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=}\right)dx + \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=}\right)dx =$$

$$= \int (\qquad)\,dx + \int (\qquad)\,dx =$$

$$= \int (\qquad)dx + \int \qquad dx =$$

$$= (\qquad)\Big| + (\qquad)\Big| =$$

$$= [(\qquad) - (\qquad)] + [\qquad - \qquad] =$$

$$= \qquad + \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2. Для интегрирования экспоненты используются формулы 7,8 таблицы 2.

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{0} x\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^3 x\left(\int_0^{e^{-0.4x}} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \quad\right)dx + \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \quad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\quad)\,dx + \frac{1}{S}\int \quad x\,(\quad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad (\quad)\,dx + \frac{1}{S}\int \quad dx =$$

$$= \frac{1}{S}\left(\quad \right)\Big| + \frac{1}{S}\left(\quad \right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\quad \Big) +$$

$$+ \Big(\quad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad}\cdot(\quad + \quad) = \quad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{0}\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} y\,dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^{3}\left(\int_0^{e^{-0.4x}} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=} \qquad\right)dx + \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=} \qquad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \qquad\qquad\qquad dx + \frac{1}{2S}\int \qquad\qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad\qquad\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{2S}\int \qquad\qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right)\Big| \quad + \frac{1}{2S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) +$$

$$+ \Big(\qquad\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot \qquad} \cdot (\qquad + \qquad) = \qquad .$$

Наносим центр тяжести $C(\qquad , \qquad)$ на чертеж к задаче 2.

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

Выборочная проверка вариант 2 задача 2

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

Задача 1.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

$I_{\mathrm{OY}} =$

$I_{\mathrm{OX}} =$

Задача 2.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Задача 1

Область ограничена линиями:

$$y = (-4) \cdot x + (-2),$$
$$y = 1 \cdot x^2 + (1),$$
$$x = x_{\max} = 4.$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь, координаты центра тяжести, и моменты инерции относительно осей координат.

Решение (по образцу примера П1)

Шаг 1: построение линий. Находим пересечение двух первых линий.

$$1 \cdot x^2 + (1) = (-4) \cdot x + (-2)$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$D = \qquad = \qquad .$

$x_1 = \qquad = \qquad ; \qquad x_2 = \qquad = \qquad .$

$\boldsymbol{y = (-4) \cdot x + (-2)}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_1 - 1 = \qquad$ до $x_{\max} + 1 = \qquad$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = (-4) \cdot x + (-2)$	14	10	6	2	−2	−6	−10	−14	−18	−22

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

Решение (продолжение)

Шаг 1: продолжение.

$\boldsymbol{y = 1 \cdot x^2 + (1)}$ — парабола, для ее построения табулируем:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = 1 \cdot x^2 + (1)$	17	10	5	2	1	2	5	10	17	26

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим параболу по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{x = 4}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(4, 0)$ (**на чертеже черным**).

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$
\begin{aligned}
x_{\text{лев}} &= && \text{— левая граница;}\\
x_{\text{прав}} &= && \text{— правая;}\\
y_{\text{низ}}(x) &= && \text{— нижняя;}\\
y_{\text{верх}}(x) &= && \text{— верхняя.}
\end{aligned}
$$

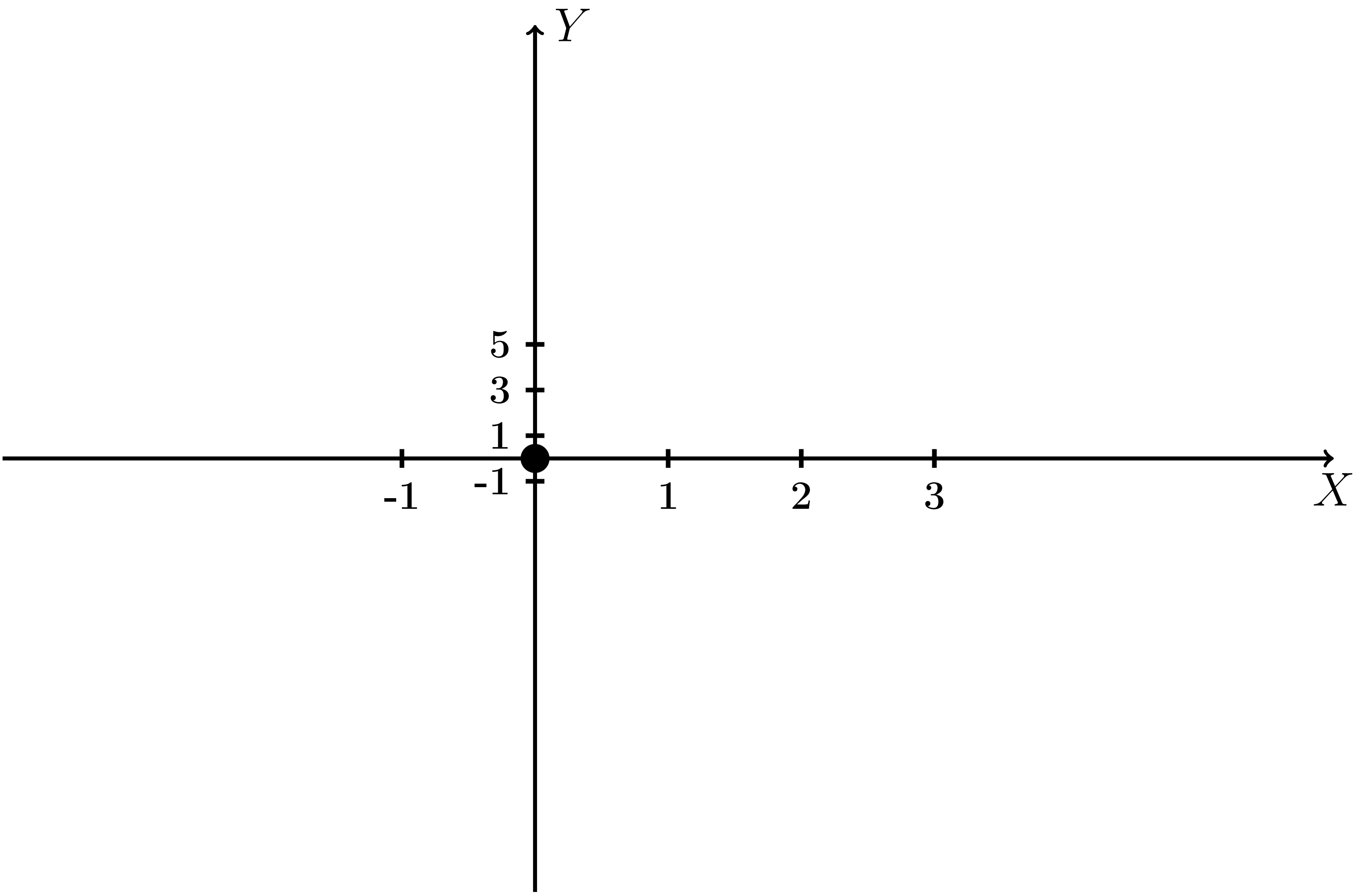

Рис.: Чертеж к задаче 1: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6:

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-1}^{4}\left(\int_{(-4)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(1)} dy\right)dx}_{\text{повторный интеграл}} =$$

$$= \int_{-1}^{4}\left(y\Big|_{y=}^{y=}\qquad\right)dx =$$

$$= \int\ \left(\qquad - \qquad\right)dx =$$

$$= \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad\right)\Big| \ =$$

$$= \left(\qquad\right) - \left(\qquad\right) =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2:

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_{-1}^{4} x\left(\int_{(-4)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(1)} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=}^{y=} \quad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\quad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x(\quad)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad dx$$

$$= \frac{1}{S}\left(\quad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\quad \Big) -$$

$$- \Big(\quad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad}\cdot(\quad - \quad) = \quad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_{-1}^{4}\left(\int_{(-4)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(1)} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[(\qquad\qquad)^2 - (\qquad\qquad)^2\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad [(\qquad\qquad) - (\qquad\qquad)]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad [\qquad\qquad]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\qquad\qquad\right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\qquad\qquad\Big) -$$

$$- \Big(\qquad\qquad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad} \cdot (\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Наносим центр тяжести $C(2.594, -1.750)$ на чертеж к задаче 1.

Решение (продолжение)

Шаг 5: находим моменты инерции относительно осей координат по формулам Правила П 4:

$$I_{OY} = \iint_G x^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{4} x^2 \left(\int_{(-4)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(1)} dy \right) dx =$$

$$= \int \quad x^2 \left(y \Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right) dx =$$

$$= \int \quad x^2 \,(\qquad\qquad\qquad\qquad) \, dx =$$

$$= \int \quad x^2 (\qquad\qquad\qquad\qquad) dx =$$

$$= \int \quad (\qquad\qquad\qquad\qquad) dx =$$

$$= \left(\qquad\qquad\qquad \right) \Big| \quad =$$

$$= \Big[\Big(\qquad\qquad\qquad \Big) - \Big(\qquad\qquad\qquad \Big) \Big] =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 5: продолжение.

$$I_{\text{OX}} = \iint_G y^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{4} \left(\int_{(-4)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(1)} y^2\,dy \right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{y^3}{3} \Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \Big[(\qquad)^3 - (\qquad)^3 \Big] dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \big[(\qquad) -$$

$$- (\qquad) \big] dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \big[\qquad \big] dx =$$

$$= \frac{1}{3} \Big(\qquad \Big) \Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{3} \Big[\Big(\qquad \Big) -$$

$$- \Big(\qquad \Big) \Big] =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OY}} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OX}} =$

Выборочная проверка вариант 3 задача 1

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

I_{OY} (формат 1.23): введи Клик

I_{OX} (формат 1.23): введи Клик

Задача 2

Область ограничена линиями:

$$
\begin{aligned}
x &= x_{\max} = 4,\\
x &= x_{\min} = -1,\\
y &= 0,\\
y &= e^{-0.4x},\\
y &= 1 + 0.2 \cdot x.
\end{aligned}
$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь и координаты центра тяжести области (моменты инерции не вычислять).

Решение (по образцу примера П2)

Шаг 1: построение линий.

$\boldsymbol{y = 1 + 0.2 \cdot x}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_{\min} - 1 = -1 - 1 = -2$ до 1:

x	-2	-1	0	1
$y = 1 + 0.2 \cdot x$	0,6	0,8	1	1,2

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

$\boldsymbol{y = e^{-0.4x}}$ — экспонента, для ее построения табулируем:

x	-1	0	1	2	3	4	5
$y = e^{-0.4x}$	1,5	1	0,7	0,4	0,3	0,2	0,1

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим экспоненту по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{y = 0}$ — горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = 4}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(4, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = -1}$ — вертикальная прямая, проходящая через т. $(-1, 0)$ (**черным**).

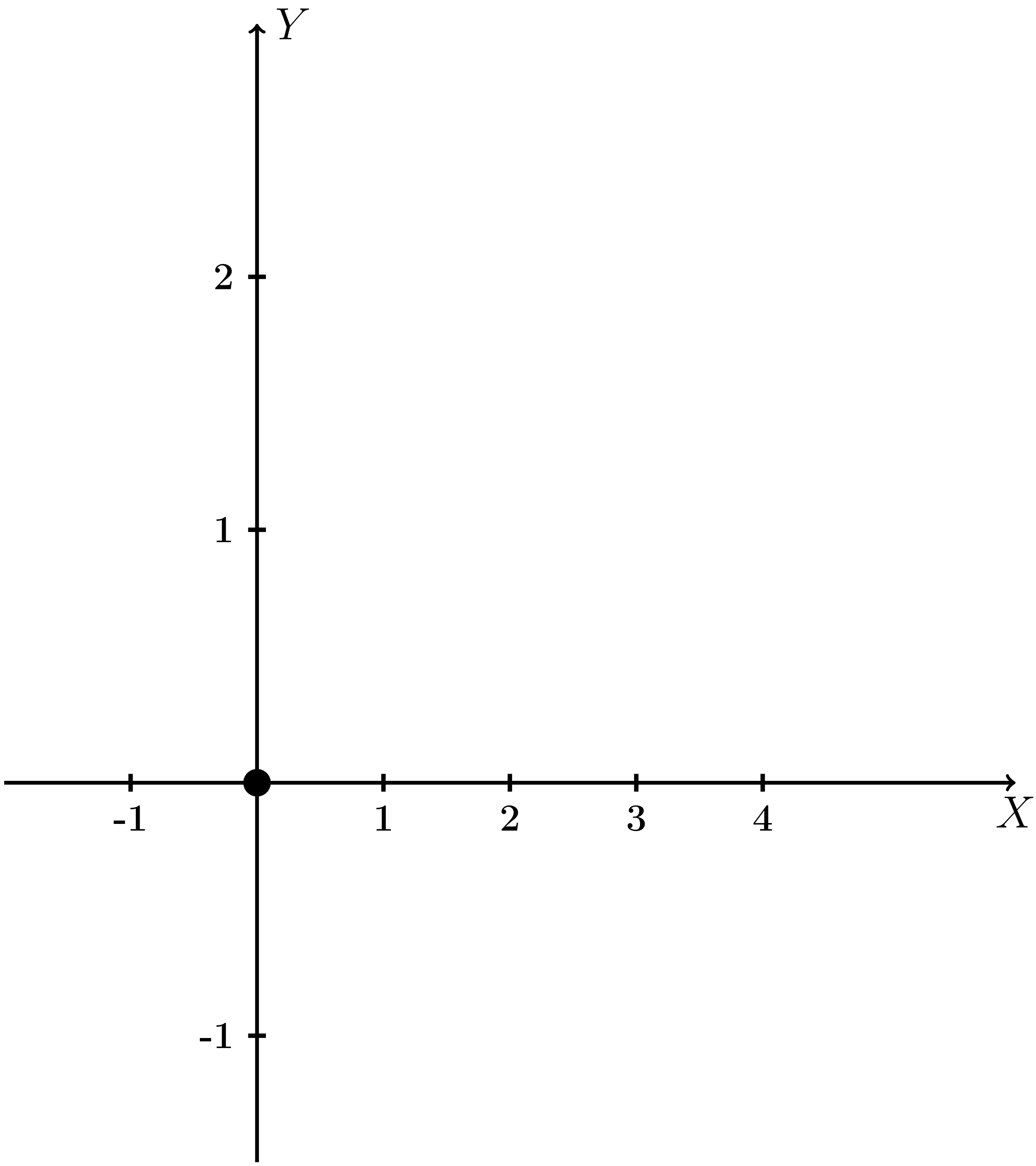

Рис.: Чертеж к задаче 2: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$x_{\text{лев}} =$ — левая граница;

$x_{\text{прав}} =$ — правая;

$y_{\text{низ}}(x) = 0$ — нижняя;

$y_{\text{верх}}(x) = \begin{cases} \quad \text{при} \\ \quad \text{при} \end{cases}$ — верхняя (из 2х частей).

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6 с разбиением области интегрирования на две части согласно форме верхней границы. Для интегрирования экспоненты используется формула 7 таблицы 2.

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-1}^{0}\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл левый}} + \underbrace{\int_0^4\left(\int_0^{e^{-0.4x}} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл правый}} =$$

$$= \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx + \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx =$$

$$= \int (\qquad) \, dx + \int (\qquad) \, dx =$$

$$= \int (\qquad) dx + \int \qquad dx =$$

$$= (\qquad) \Big| + (\qquad) \Big| =$$

$$= [(\qquad) - (\qquad)] + [\quad - \quad] =$$

$$= \quad + \quad = \quad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2. Для интегрирования экспоненты используются формулы 7,8 таблицы 2.

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{0} x\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^4 x\left(\int_0^{e^{-0.4x}} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \quad \right)dx + \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \quad \right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad (\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad \right)\Big| \quad + \frac{1}{S}\left(\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad \Big) +$$

$$+\Big(\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad}\cdot(\qquad + \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{0}\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} y\,dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^4\left(\int_0^{e^{-0.4x}} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=}\right)dx + \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int (\quad)\,dx + \frac{1}{2S}\int (\quad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad dx + \frac{1}{2S}\int \quad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int (\quad)\,dx + \frac{1}{2S}\int \quad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\quad\right)\Big| + \frac{1}{2S}\left(\quad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\left(\quad\right) +$$

$$+\left(\quad\right)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot}\cdot(\quad + \quad) = \quad .$$

Наносим центр тяжести $C(\quad,\quad)$ на чертеж к задаче 2.

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

Выборочная проверка вариант 3 задача 2

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

Задача 1.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

$I_{\mathrm{OY}} =$

$I_{\mathrm{OX}} =$

Задача 2.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Задача 1

Область ограничена линиями:

$$\begin{aligned} y &= (-3)\cdot x + (5), \\ y &= 1\cdot x^2 + (1), \\ x &= x_{\max} = 3. \end{aligned}$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь, координаты центра тяжести, и моменты инерции относительно осей координат.

Решение (по образцу примера П1)

Шаг 1: построение линий. Находим пересечение двух первых линий.

$$1\cdot x^2 + (1) = (-3)\cdot x + (5)$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$D = \qquad = \qquad .$

$x_1 = \qquad = \qquad ; \qquad x_2 = \qquad = \qquad .$

$\boldsymbol{y = (-3)\cdot x + (5)}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_1 - 1 =$ до $x_{\max} + 1 =$:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = (-3)\cdot x + (5)$	20	17	14	11	8	5	2	-1	-4	-7

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

Решение (продолжение)

Шаг 1: продолжение.

$\boldsymbol{y = 1 \cdot x^2 + (1)}$ — парабола, для ее построения табулируем:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 1 \cdot x^2 + (1)$	26	17	10	5	2	1	2	5	10	17

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим параболу по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{x = 3}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(3, 0)$ (**на чертеже черным**).

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$x_{\text{лев}} \quad = \qquad$ – левая граница;

$x_{\text{прав}} \quad = \qquad$ – правая;

$y_{\text{низ}}(x) \quad = \qquad$ – нижняя;

$y_{\text{верх}}(x) \quad = \qquad$ – верхняя.

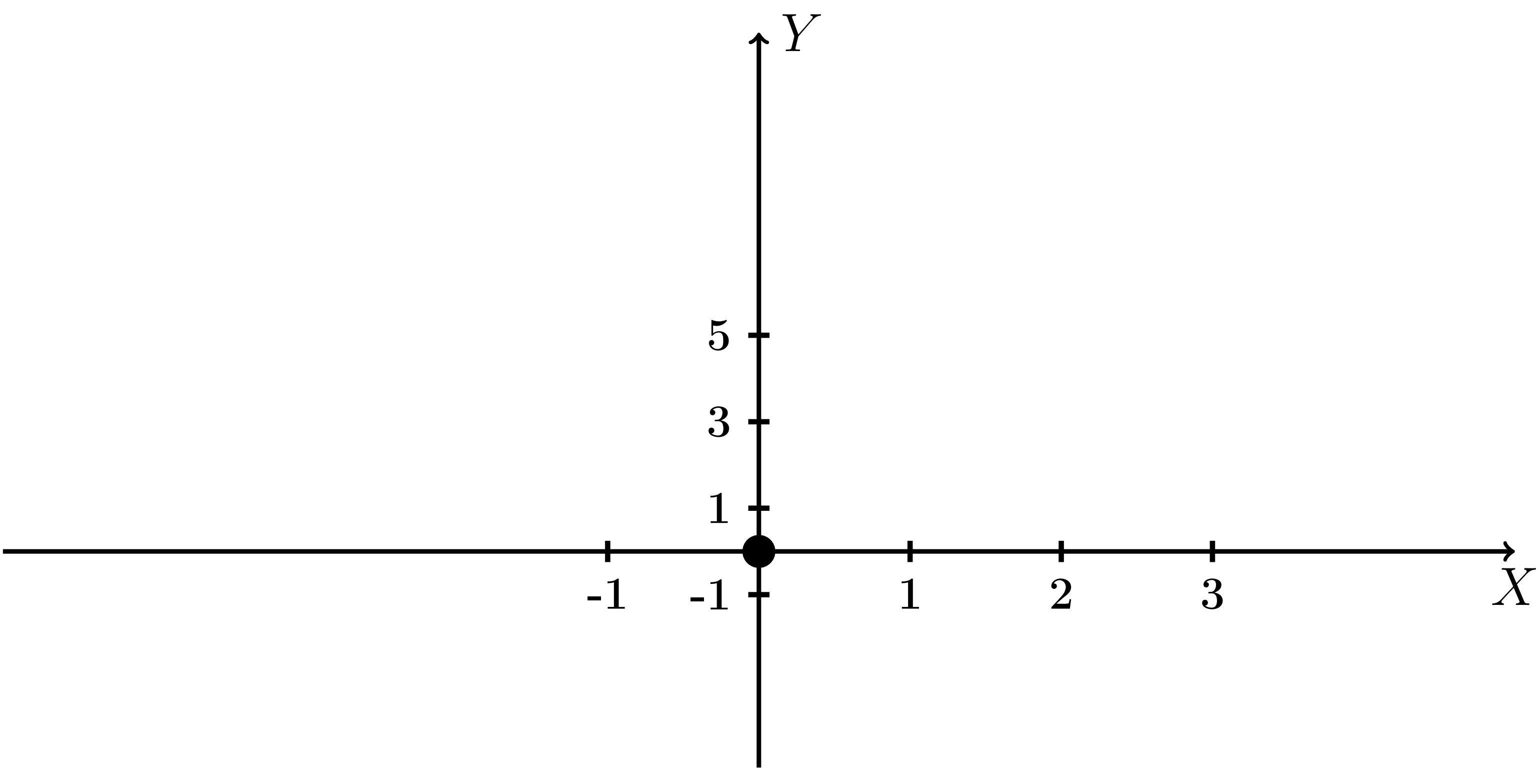

Рис.: Чертеж к задаче 1: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6:

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_1^3 \left(\int_{(-3)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(1)} dy \right) dx}_{\text{повторный интеграл}} =$$

$$= \int_1^3 \left(y \Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \int \left(\qquad - \qquad \right) dx =$$

$$= \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad \right) \Big| =$$

$$= \left(\qquad \right) - \left(\qquad \right) =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2:

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_1^3 x\left(\int_{(-3)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(1)} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad dx$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right)\Big| \;=$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) -$$

$$- \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad} \cdot (\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_1^3 \left(\int_{(-3)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(1)} y\,dy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \Big[(\qquad)^2 - (\qquad)^2\Big]\, dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \Big[(\qquad) - (\qquad)\Big]\, dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \Big[\qquad \Big]\, dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big(\qquad \Big)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\qquad \Big) -$$

$$- \Big(\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad} \cdot (\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Наносим центр тяжести $C(2.368, 2.358)$ на чертеж к задаче 1.

Решение (продолжение)

Шаг 5: находим моменты инерции относительно осей координат по формулам Правила П 4:

$$I_{\mathrm{OY}} = \iint_G x^2\,dx\,dy = \int_1^3 x^2 \left(\int_{(-3)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(1)} dy\right) dx =$$

$$= \int x^2 \left(y\Big|_{y=}^{y=}\right) dx =$$

$$= \int x^2 (\qquad) dx =$$

$$= \int x^2 (\qquad) dx =$$

$$= \int (\qquad) dx =$$

$$= \left(\qquad\right)\Big| =$$

$$= \left[\left(\qquad\right) - \left(\qquad\right)\right] =$$

$$= \quad - \quad = \quad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 5: продолжение.

$$I_{\text{OX}} = \iint_G y^2\,dx\,dy = \int_1^3 \left(\int_{(-3)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(1)} y^2\,dy \right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{y^3}{3} \Big|_{y=}^{y=} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \left[(\quad)^3 - (\quad)^3 \right] dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \left[(\quad) - \right.$$

$$\left. - (\quad) \right] dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int [\quad]\, dx =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\quad \right) \Big| =$$

$$= \frac{1}{3} \left[\left(\quad \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\quad \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (\quad - \quad) = \quad .$$

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

$\boldsymbol{I}_{\mathrm{OY}} =$

$\boldsymbol{I}_{\mathrm{OX}} =$

Выборочная проверка вариант 4 задача 1

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

I_{OY} (формат 1.23): введи Клик

I_{OX} (формат 1.23): введи Клик

Задача 2

Область ограничена линиями:

$$
\begin{aligned}
x &= x_{\max} = 3,\\
x &= x_{\min} = -2,\\
y &= 0,\\
y &= e^{-0.4x},\\
y &= 1 + 0.4 \cdot x.
\end{aligned}
$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь и координаты центра тяжести области (моменты инерции не вычислять).

Решение (по образцу примера П2)

Шаг 1: построение линий.

$\boldsymbol{y = 1 + 0.4 \cdot x}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_{\min} - 1 = -2 - 1 = -3$ до 1:

x	-3	-2	-1	0	1
$y = 1 + 0.4 \cdot x$	−0,2	0,2	0,6	1	1,4

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

$\boldsymbol{y = e^{-0.4x}}$ — экспонента, для ее построения табулируем:

x	-1	0	1	2	3	4
$y = e^{-0.4x}$	1,5	1	0,7	0,4	0,3	0,2

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим экспоненту по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{y = 0}$ — горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = 3}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(3, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = -2}$ — вертикальная прямая, проходящая через т. $(-2, 0)$ (**черным**).

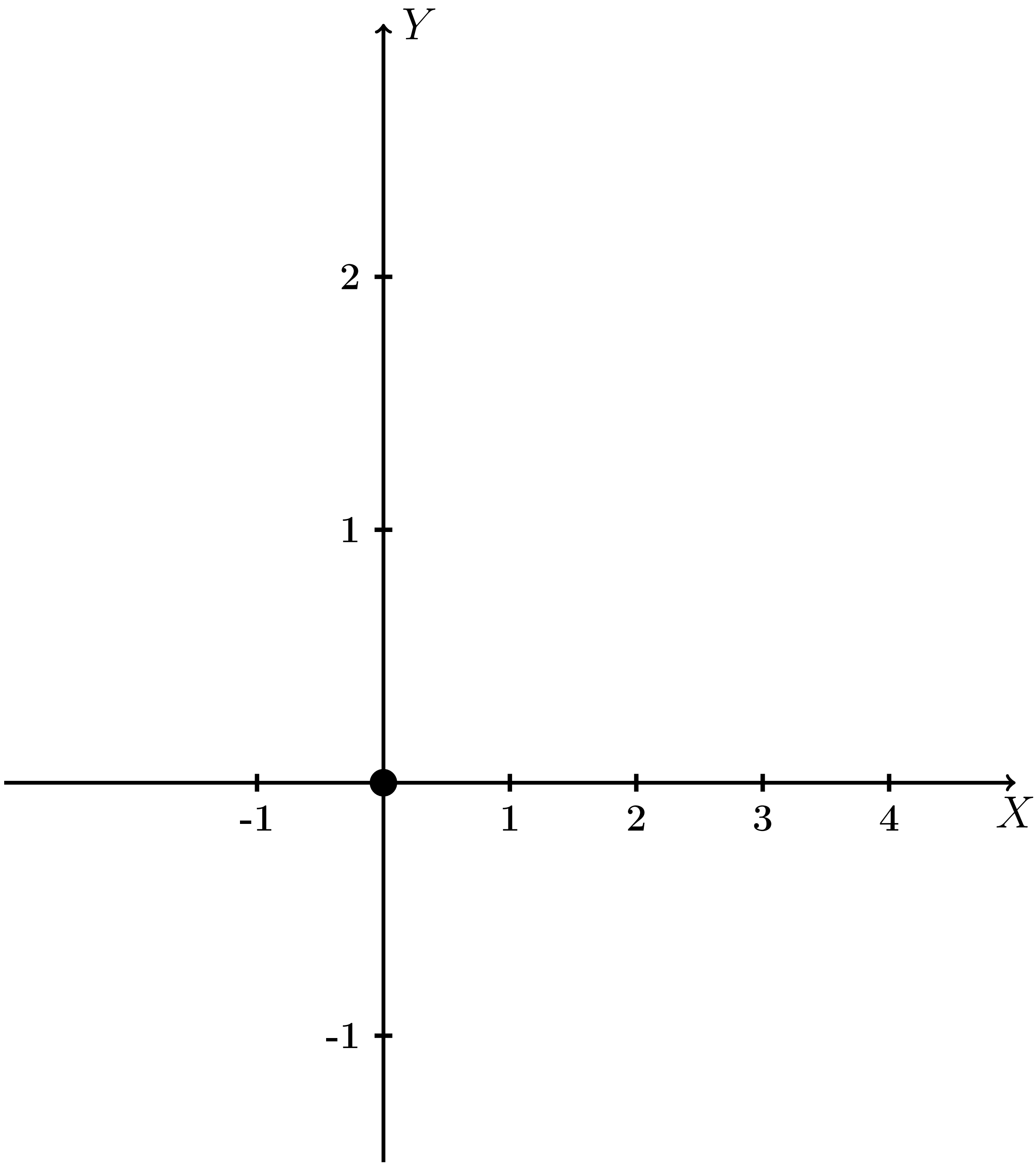

Рис.: Чертеж к задаче 2: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$\begin{aligned} x_{\text{лев}} &= && \text{— левая граница;}\\ x_{\text{прав}} &= && \text{— правая;}\\ y_{\text{низ}}(x) &= 0 && \text{— нижняя;}\\ y_{\text{верх}}(x) &= \begin{cases} & \text{при} \\ & \text{при} \end{cases} && \text{— верхняя (из 2х частей).} \end{aligned}$$

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6 с разбиением области интегрирования на две части согласно форме верхней границы. Для интегрирования экспоненты используется формула 7 таблицы 2.

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-2}^{0}\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} dy\right)dx}_{\text{повторный интеграл левый}} + \underbrace{\int_0^3\left(\int_0^{e^{-0.4x}} dy\right)dx}_{\text{повторный интеграл правый}} =$$

$$= \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx + \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx =$$

$$= \int (\qquad) \, dx + \int (\qquad) \, dx =$$

$$= \int (\qquad) dx + \int \qquad dx =$$

$$= (\qquad)\Big| + (\qquad)\Big| =$$

$$= [(\qquad) - (\qquad)] + [\qquad - \qquad] =$$

$$= \qquad + \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2. Для интегрирования экспоненты используются формулы 7,8 таблицы 2.

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0} x\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} dy\right) dx + \frac{1}{S}\int_0^3 x\left(\int_0^{e^{-0.4x}} dy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad\right) dx + \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad) \,dx + \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad)\, dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad (\qquad\qquad) \,dx + \frac{1}{S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \quad + \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad \Big) +$$

$$+ \Big(\qquad\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad} \cdot (\qquad + \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0}\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} y\,dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^3\left(\int_0^{e^{-0.4x}} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\bigg|_{y=0}^{y=} \quad\right)dx + \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\bigg|_{y=0}^{y=} \quad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad) \, dx + \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \qquad dx + \frac{1}{2S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad) \, dx + \frac{1}{2S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\qquad \right)\Big| \quad + \frac{1}{2S}\left(\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\qquad \Big) +$$

$$+ \Big(\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot} \cdot (\qquad + \qquad) = \qquad .$$

Наносим центр тяжести $C(\quad , \quad)$ на чертеж к задаче 2.

Ответ

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Выборочная проверка вариант 4 задача 2

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

Задача 1.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

$I_{\mathrm{OY}} =$

$I_{\mathrm{OX}} =$

Задача 2.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Задача 1

Область ограничена линиями:

$$y = (-3)\cdot x + (5),$$
$$y = 1\cdot x^2 + (1),$$
$$x = x_{\max} = 4.$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь, координаты центра тяжести, и моменты инерции относительно осей координат.

Решение (по образцу примера П1)

Шаг 1: построение линий. Находим пересечение двух первых линий.

$$1\cdot x^2 + (1) = (-3)\cdot x + (5)$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$D =$ $=$.

$x_1 =$ $=$; $x_2 =$ $=$.

$\boldsymbol{y = (-3)\cdot x + (5)}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_1 - 1 =$ до $x_{\max} + 1 =$:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = (-3)\cdot x + (5)$	20	17	14	11	8	5	2	−1	−4	−7	−10

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

Решение (продолжение)

Шаг 1: продолжение.

$\boldsymbol{y = 1 \cdot x^2 + (1)}$ — парабола, для ее построения табулируем:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = 1 \cdot x^2 + (1)$	26	17	10	5	2	1	2	5	10	17	26

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим параболу по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{x = 4}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(4, 0)$ (**на чертеже черным**).

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$x_{\text{лев}} \quad = \qquad$ – левая граница;

$x_{\text{прав}} \quad = \qquad$ – правая;

$y_{\text{низ}}(x) \quad = \qquad$ – нижняя;

$y_{\text{верх}}(x) \quad = \qquad$ – верхняя.

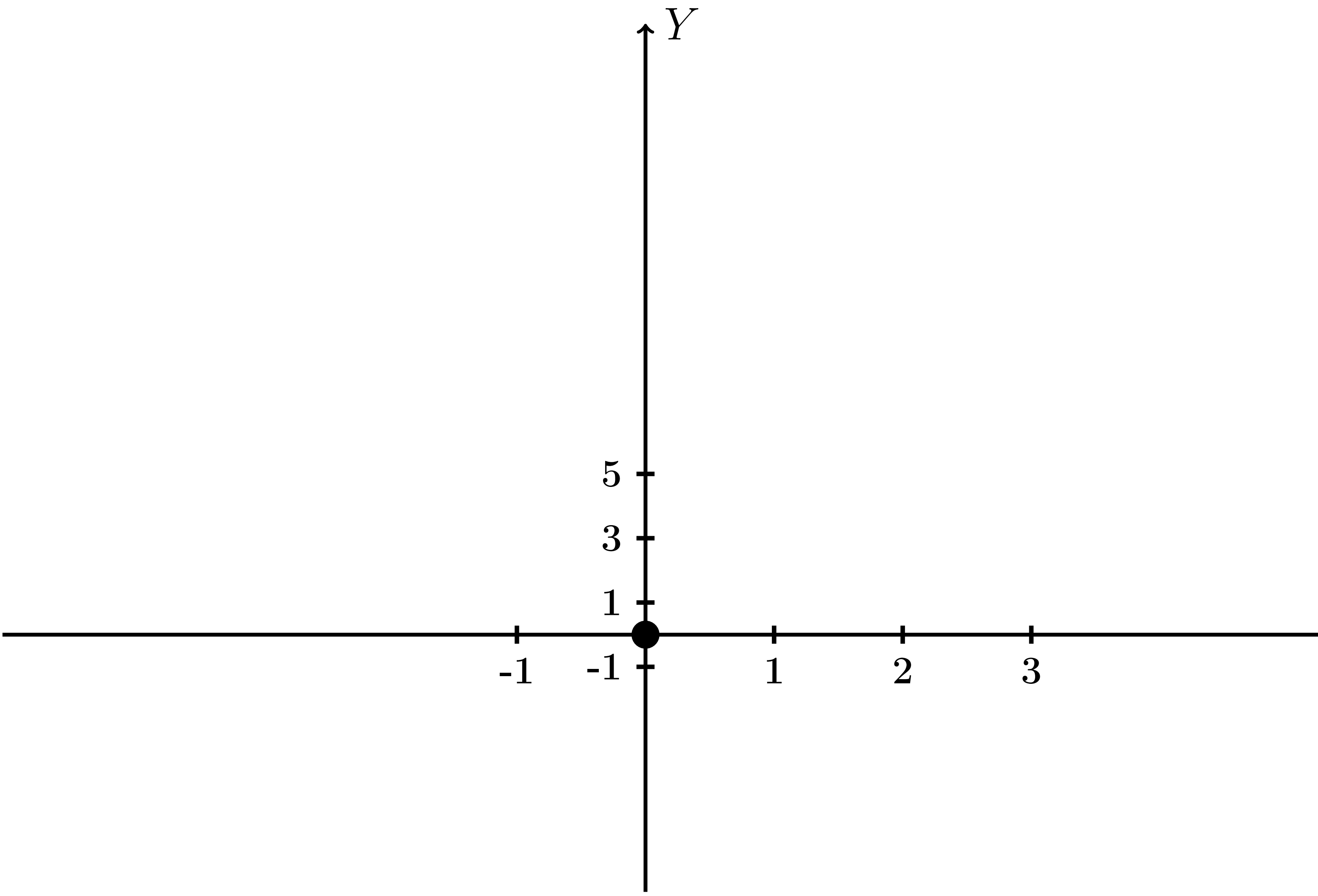

Рис.: Чертеж к задаче 1: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6:

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_1^4 \left(\int_{(-3)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(1)} dy \right) dx}_{\text{повторный интеграл}} =$$

$$= \int_1^4 \left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \int \left(\qquad - \qquad \right) dx =$$

$$= \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad \right)\Big| =$$

$$= \left(\qquad \right) - \left(\qquad \right) =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П 2:

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_1^4 x\left(\int_{(-3)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(1)} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad dx$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right)\Big| \;=$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) -$$

$$- \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad} \cdot (\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_1^4 \left(\int_{(-3)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(1)} y\,dy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=}^{y=}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[\left(\quad\right)^2 - \left(\quad\right)^2\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[\left(\quad\right) - \left(\quad\right)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[\quad\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\quad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\left[\left(\quad\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\quad\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\quad}\cdot\left(\quad - \quad\right) = \quad .$$

Наносим центр тяжести $C(3.071, 3.343)$ на чертеж к задаче 1.

Решение (продолжение)

Шаг 5: находим моменты инерции относительно осей координат по формулам Правила П4:

$$I_{\mathrm{OY}} = \iint_G x^2\,dx\,dy = \int_1^4 x^2 \left(\int_{(-3)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(1)} dy \right) dx =$$

$$= \int x^2 \left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \int x^2 \left(\qquad \right) dx =$$

$$= \int x^2 \left(\qquad \right) dx =$$

$$= \int \left(\qquad \right) dx =$$

$$= \left(\qquad \right)\Big| =$$

$$= \left[\left(\qquad \right) - \left(\qquad \right) \right] =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 5: продолжение.

$$I_{\mathrm{OX}} = \iint_G y^2\,dx\,dy = \int_1^4 \left(\int_{(-3)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(1)} y^2\,dy \right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{y^3}{3} \Big|_{y=}^{y=} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \left[\left(\quad \right)^3 - \left(\quad \right)^3 \right] dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \left[\left(\quad \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\quad \right) \right] dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \left[\quad \right] dx =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\quad \right) \Big| =$$

$$= \frac{1}{3} \left[\left(\quad \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\quad \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(\quad - \quad \right) = \quad .$$

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OY}} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OX}} =$

Выборочная проверка вариант 5 задача 1

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

I_{OY} (формат 1.23): введи Клик

I_{OX} (формат 1.23): введи Клик

Задача 2

Область ограничена линиями:

$$
\begin{aligned}
x &= x_{\max} = 4,\\
x &= x_{\min} = -2,\\
y &= 0,\\
y &= e^{-0.4x},\\
y &= 1 + 0.4\cdot x.
\end{aligned}
$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь и координаты центра тяжести области (моменты инерции не вычислять).

Решение (по образцу примера П2)

Шаг 1: построение линий.

$\boldsymbol{y = 1 + 0.4\cdot x}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_{\min} - 1 = -2 - 1 = -3$ до 1:

x	-3	-2	-1	0	1
$y = 1 + 0.4\cdot x$	$-0{,}2$	$0{,}2$	$0{,}6$	1	$1{,}4$

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

$\boldsymbol{y = e^{-0.4x}}$ — экспонента, для ее построения табулируем:

x	-1	0	1	2	3	4	5
$y = e^{-0.4x}$	$1{,}5$	1	$0{,}7$	$0{,}4$	$0{,}3$	$0{,}2$	$0{,}1$

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим экспоненту по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{y = 0}$ — горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = 4}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(4, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = -2}$ — вертикальная прямая, проходящая через т. $(-2, 0)$ (**черным**).

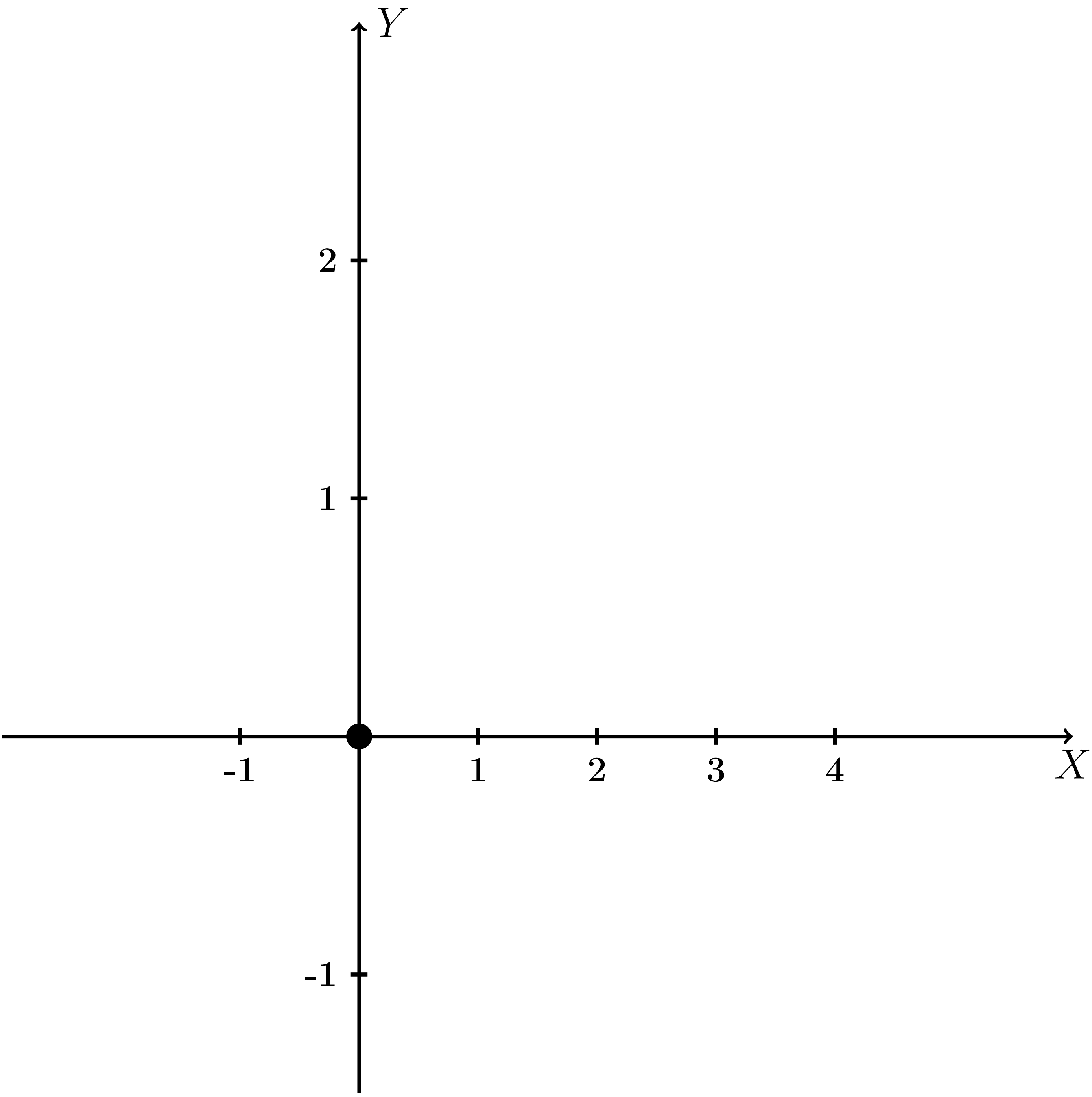

Рис.: Чертеж к задаче 2: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$\begin{aligned}
x_{\text{лев}} &= & &\text{— левая граница;}\\
x_{\text{прав}} &= & &\text{— правая;}\\
y_{\text{низ}}(x) &= 0 & &\text{— нижняя;}\\
y_{\text{верх}}(x) &= \begin{cases} & \text{при}\\ & \text{при}\end{cases} & &\text{— верхняя (из 2х частей).}
\end{aligned}$$

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6 с разбиением области интегрирования на две части согласно форме верхней границы. Для интегрирования экспоненты используется формула 7 таблицы 2.

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-2}^{0}\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл левый}} + \underbrace{\int_0^4\left(\int_0^{e^{-0.4x}} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл правый}} =$$

$$= \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx + \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx =$$

$$= \int (\qquad) \, dx + \int (\qquad) \, dx =$$

$$= \int (\qquad) dx + \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad \right)\Big| + \left(\qquad \right)\Big| =$$

$$= \left[\left(\qquad \right) - \left(\qquad \right) \right] + \left[\qquad - \qquad \right] =$$

$$= \qquad + \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2. Для интегрирования экспоненты используются формулы 7,8 таблицы 2.

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0} x\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} dy\right) dx + \frac{1}{S}\int_0^4 x\left(\int_0^{e^{-0.4x}} dy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \quad\right) dx + \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \quad\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad (\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad\right)\Big| \quad + \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad\right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad\Big) +$$

$$+\Big(\qquad\qquad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad}\cdot(\qquad + \qquad) = \qquad.$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0}\left(\int_{0}^{1+0.4\cdot x} y\,dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_{0}^{4}\left(\int_{0}^{e^{-0.4x}} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \qquad \left(\left.\frac{y^2}{2}\right|_{y=0}^{y=} \qquad \right)dx + \frac{1}{S}\int \qquad \left(\left.\frac{y^2}{2}\right|_{y=0}^{y=} \qquad \right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad\qquad\qquad) \, dx + \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad\qquad\qquad) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \qquad\qquad\qquad dx + \frac{1}{2S}\int \qquad\qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad\qquad\qquad\qquad) \, dx + \frac{1}{2S}\int \qquad\qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right)\Big| \quad + \frac{1}{2S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{2S}\Bigg[\Bigg(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Bigg) +$$

$$+ \Bigg(\qquad\qquad\qquad \Bigg)\Bigg] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot \qquad} \cdot (\qquad + \qquad) = \qquad .$$

Наносим центр тяжести $C(\qquad , \qquad)$ на чертеж к задаче 2.

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

Выборочная проверка вариант 5 задача 2

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

Задача 1.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

$I_{\mathrm{OY}} =$

$I_{\mathrm{OX}} =$

Задача 2.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Задача 1

Область ограничена линиями:

$$y = (-2)\cdot x + (4),$$
$$y = 1\cdot x^2 + (1),$$
$$x = x_{\max} = 3.$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь, координаты центра тяжести, и моменты инерции относительно осей координат.

Решение (по образцу примера П1)

Шаг 1: построение линий. Находим пересечение двух первых линий.

$$1\cdot x^2 + (1) = (-2)\cdot x + (4)$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$D = \qquad = \qquad .$

$x_1 = \qquad = \qquad ; \qquad x_2 = \qquad = \qquad .$

$\boldsymbol{y = (-2)\cdot x + (4)}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_1 - 1 =$ до $x_{\max} + 1 =$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = (-2)\cdot x + (4)$	12	10	8	6	4	2	0	-2	-4

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

Вариант 6 задача 1, продолжение

Решение (продолжение)

Шаг 1: продолжение.

$\boldsymbol{y = 1 \cdot x^2 + (1)}$ — парабола, для ее построения табулируем:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 1 \cdot x^2 + (1)$	17	10	5	2	1	2	5	10	17

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим параболу по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{x = 3}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(3, 0)$ (**на чертеже черным**).

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$x_{\text{лев}}$ = – левая граница;

$x_{\text{прав}}$ = – правая;

$y_{\text{низ}}(x)$ = – нижняя;

$y_{\text{верх}}(x)$ = – верхняя.

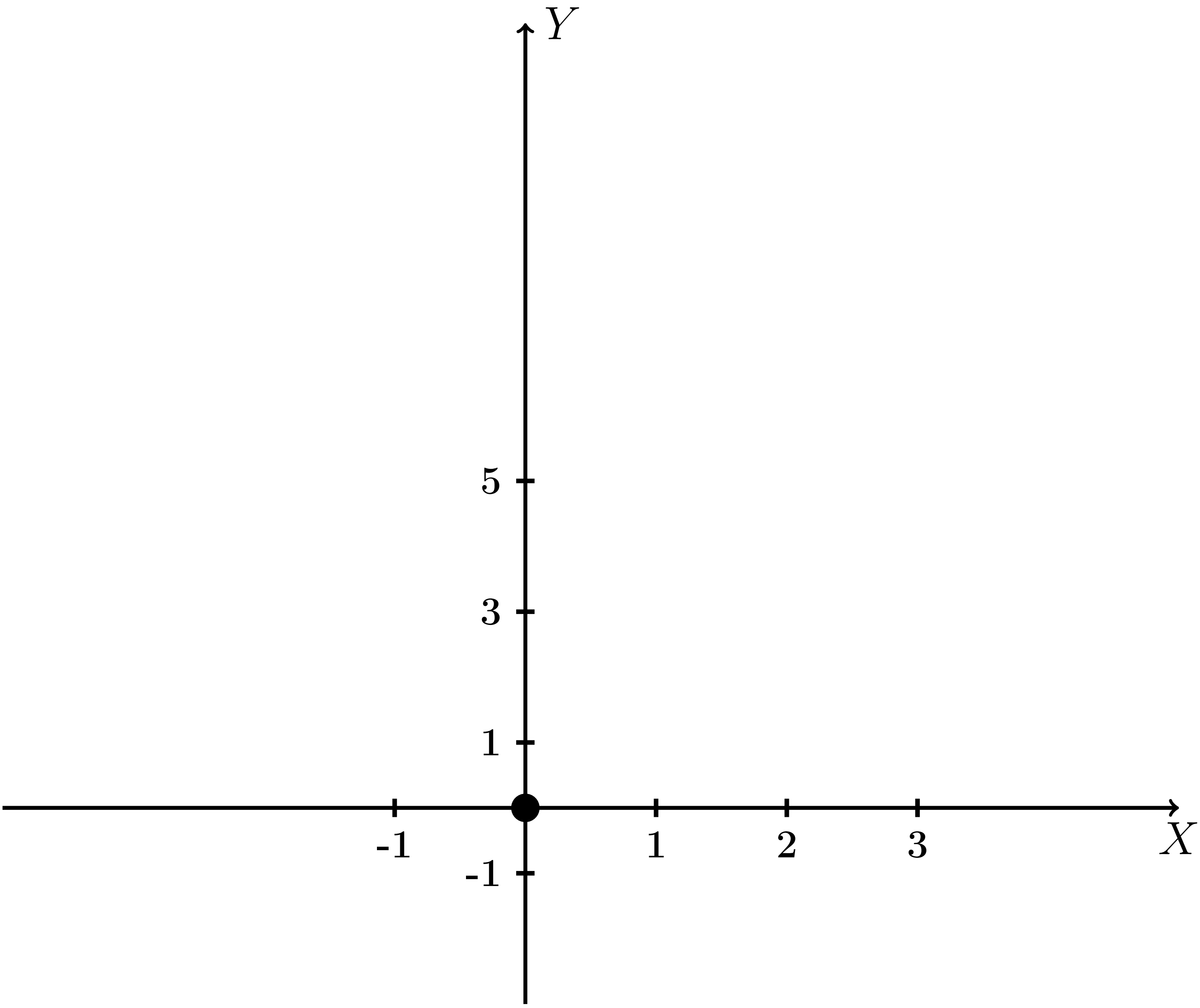

Рис.: Чертеж к задаче 1: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6:

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_1^3 \left(\int_{(-2)\cdot x+(4)}^{1\cdot x^2+(1)} dy \right) dx}_{\text{повторный интеграл}} =$$

$$= \int_1^3 \left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \int \left(\qquad - \qquad \right) dx =$$

$$= \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad \right)\Big| =$$

$$= \left(\qquad \right) - \left(\qquad \right) =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2:

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_1^3 x\left(\int_{(-2)\cdot x+(4)}^{1\cdot x^2+(1)} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int x\left(y\Big|_{y=}^{y=}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int x\,(\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int x(\qquad)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \qquad dx$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\Big) -$$

$$-\Big(\qquad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad}\cdot(\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_1^3 \left(\int_{(-2)\cdot x+(4)}^{1\cdot x^2+(1)} y\,dy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\bigg|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[\left(\qquad \right)^2 - \left(\qquad \right)^2\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[\left(\qquad \right) - \left(\qquad \right)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[\qquad \right] dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\qquad \right)\bigg| =$$

$$= \frac{1}{2S}\left[\left(\qquad \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\qquad \right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\qquad} \cdot \left(\qquad - \qquad \right) = \qquad .$$

Наносим центр тяжести $C(2.375, 3.050)$ на чертеж к задаче 1.

Решение (продолжение)

Шаг 5: находим моменты инерции относительно осей координат по формулам Правила П 4:

$$I_{\text{OY}} = \iint_G x^2\,dx\,dy = \int_1^3 x^2 \left(\int_{(-2)\cdot x+(4)}^{1\cdot x^2+(1)} dy \right) dx =$$

$$= \int \quad x^2 \left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right) dx =$$

$$= \int \quad x^2 \left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right) dx =$$

$$= \int \quad x^2 (\qquad\qquad\qquad\qquad) dx =$$

$$= \int \quad (\qquad\qquad\qquad\qquad) dx =$$

$$= \left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right) \Big| \quad =$$

$$= \left[\left(\qquad\qquad\qquad \right) - \left(\qquad\qquad\qquad \right) \right] =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 5: продолжение.

$$I_{\text{OX}} = \iint_G y^2\,dx\,dy = \int_1^3 \left(\int_{(-2)\cdot x+(4)}^{1\cdot x^2+(1)} y^2\,dy \right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{y^3}{3} \Big|_{y=}^{y=} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \left[(\quad)^3 - (\quad)^3 \right] dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \left[(\quad) - \right.$$

$$\left. - (\quad) \right] dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \left[\quad \right] dx =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\quad \right) \Big| =$$

$$= \frac{1}{3} \left[\left(\quad \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\quad \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (\quad - \quad) = \quad .$$

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

$\boldsymbol{I}_{\mathrm{OY}} =$

$\boldsymbol{I}_{\mathrm{OX}} =$

Выборочная проверка вариант 6 задача 1

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

I_{OY} (формат 1.23): введи Клик

I_{OX} (формат 1.23): введи Клик

Задача 2

Область ограничена линиями:

$$\begin{aligned} x &= x_{\max} = 3, \\ x &= x_{\min} = -1, \\ y &= 0, \\ y &= e^{-0.4x}, \\ y &= 1 + 0.4 \cdot x. \end{aligned}$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь и координаты центра тяжести области (моменты инерции не вычислять).

Решение (по образцу примера П2)

Шаг 1: построение линий.

$\boldsymbol{y = 1 + 0.4 \cdot x}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_{\min} - 1 = -1 - 1 = -2$ до 1:

x	-2	-1	0	1
$y = 1 + 0.4 \cdot x$	0,2	0,6	1	1,4

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

$\boldsymbol{y = e^{-0.4x}}$ — экспонента, для ее построения табулируем:

x	-1	0	1	2	3	4
$y = e^{-0.4x}$	1,5	1	0,7	0,4	0,3	0,2

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим экспоненту по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{y = 0}$ — горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = 3}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(3, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = -1}$ — вертикальная прямая, проходящая через т. $(-1, 0)$ (**черным**).

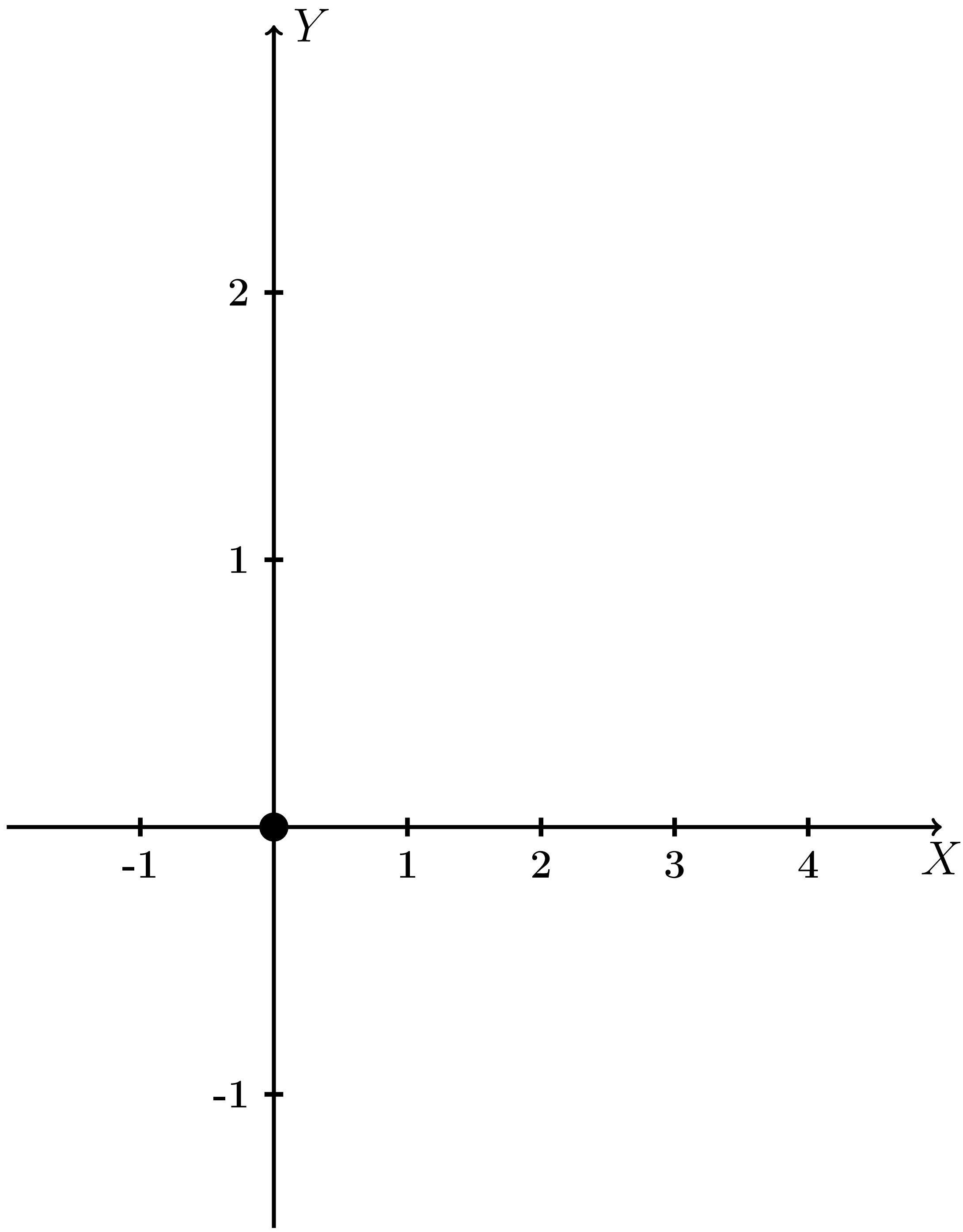

Рис.: Чертеж к задаче 2: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$
\begin{array}{lll}
x_{\text{лев}} & = & & \text{— левая граница;} \\
x_{\text{прав}} & = & & \text{— правая;} \\
y_{\text{низ}}(x) & = & 0 & \text{— нижняя;} \\
y_{\text{верх}}(x) & = & \begin{cases} \quad \text{при} \\ \quad \text{при} \end{cases} & \text{— верхняя (из 2х частей).}
\end{array}
$$

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6 с разбиением области интегрирования на две части согласно форме верхней границы. Для интегрирования экспоненты используется формула 7 таблицы 2.

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-1}^{0}\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} dy\right)dx}_{\text{повторный интеграл левый}} + \underbrace{\int_0^3\left(\int_0^{e^{-0.4x}} dy\right)dx}_{\text{повторный интеграл правый}} =$$

$$= \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx + \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx =$$

$$= \int \quad (\qquad) \, dx + \int \quad (\qquad) \, dx =$$

$$= \int \quad (\qquad) dx + \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad \right)\Big| \; + \left(\qquad \right)\Big| \; =$$

$$= \left[\left(\qquad \right) - \left(\qquad \right) \right] + \left[\qquad - \qquad \right] =$$

$$= \qquad + \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2.
Для интегрирования экспоненты используются формулы 7,8 таблицы 2.

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{0} x\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^3 x\left(\int_0^{e^{-0.4x}} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int x\left(y\Big|_{y=0}^{y=}\right)dx + \frac{1}{S}\int x\left(y\Big|_{y=0}^{y=}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int x\,(\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int x\,(\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int (\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\right)\Big| + \frac{1}{S}\left(\qquad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\Big) +$$

$$+ \Big(\qquad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad}\cdot(\qquad + \qquad) = \qquad.$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{0}\left(\int_{0}^{1+0.4\cdot x} y\,dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_{0}^{3}\left(\int_{0}^{e^{-0.4x}} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=} \qquad \right)dx + \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=} \qquad \right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad\qquad\qquad) \, dx + \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad\qquad) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \qquad\qquad\qquad dx + \frac{1}{2S}\int \qquad\qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad\qquad\qquad\qquad) \, dx + \frac{1}{2S}\int \qquad\qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right)\Big| \quad + \frac{1}{2S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \; =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) +$$

$$+ \Big(\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot \qquad} \cdot (\qquad + \qquad) = \qquad .$$

Наносим центр тяжести $C(\qquad , \qquad)$ на чертеж к задаче 2.

Ответ

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Выборочная проверка вариант 6 задача 2

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

Задача 1.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

$I_{\text{OY}} =$

$I_{\text{OX}} =$

Задача 2.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Задача 1

Область ограничена линиями:

$$y = (-2)\cdot x + (4),$$
$$y = 1\cdot x^2 + (1),$$
$$x = x_{\max} = 4.$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь, координаты центра тяжести, и моменты инерции относительно осей координат.

Решение (по образцу примера П1)

Шаг 1: построение линий. Находим пересечение двух первых линий.

$$1\cdot x^2 + (1) = (-2)\cdot x + (4)$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$D = \quad = \quad .$

$x_1 = \quad = \quad ; \qquad x_2 = \quad = \quad .$

$\boldsymbol{y = (-2)\cdot x + (4)}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_1 - 1 =$ до $x_{\max} + 1 =$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = (-2)\cdot x + (4)$	12	10	8	6	4	2	0	-2	-4	-6

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

Решение (продолжение)

Шаг 1: продолжение.

$\boldsymbol{y = 1 \cdot x^2 + (1)}$ — парабола, для ее построения табулируем:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = 1 \cdot x^2 + (1)$	17	10	5	2	1	2	5	10	17	26

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим параболу по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{x = 4}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(4, 0)$ (**на чертеже черным**).

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$
\begin{aligned}
x_{\text{лев}} &= && \text{— левая граница;}\\
x_{\text{прав}} &= && \text{— правая;}\\
y_{\text{низ}}(x) &= && \text{— нижняя;}\\
y_{\text{верх}}(x) &= && \text{— верхняя.}
\end{aligned}
$$

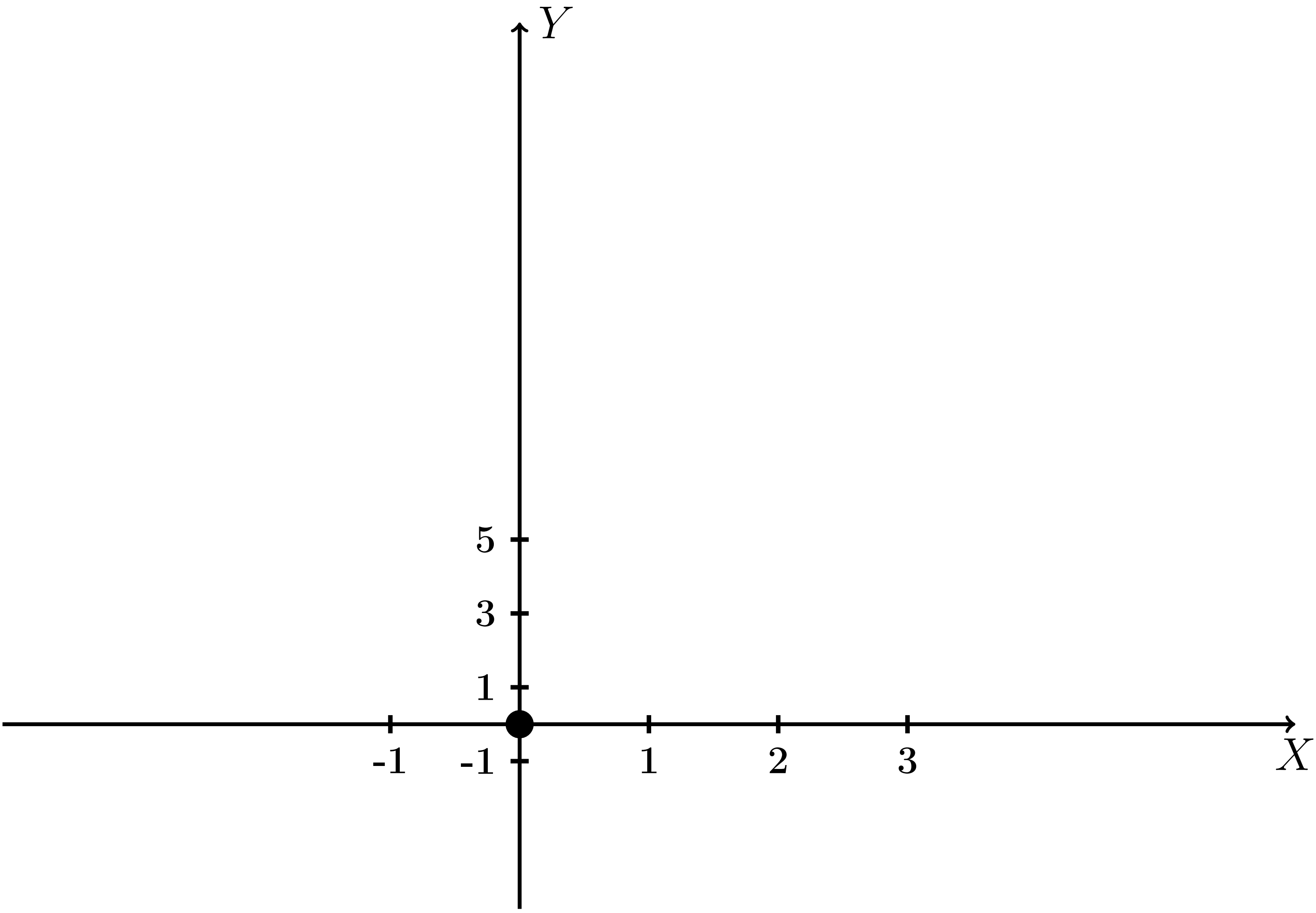

Рис.: Чертеж к задаче 1: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П 1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П 6:

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_1^4 \left(\int_{(-2)\cdot x+(4)}^{1\cdot x^2+(1)} dy \right) dx}_{\text{повторный интеграл}} =$$

$$= \int_1^4 \left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \int \Big(\qquad - \qquad \Big)\, dx =$$

$$= \int \qquad dx =$$

$$= \Big(\qquad \Big)\Big| =$$

$$= \Big(\qquad \Big) - \Big(\qquad \Big) =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2:

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_1^4 x\left(\int_{(-2)\cdot x+(4)}^{1\cdot x^2+(1)} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad dx$$

$$= \frac{1}{S}\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)\Big| \;=$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) -$$

$$- \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad} \cdot (\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_1^4 \left(\int_{(-2)\cdot x+(4)}^{1\cdot x^2+(1)} y\,dy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[\left(\qquad\qquad \right)^2 - \left(\qquad\qquad \right)^2\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[\left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right) - \left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right] dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) -$$

$$- \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad} \cdot \left(\qquad - \qquad \right) = \qquad .$$

Наносим центр тяжести $C(3.083, 4.400)$ на чертеж к задаче 1.

Решение (продолжение)

Шаг 5: находим моменты инерции относительно осей координат по формулам Правила П4:

$$I_{\mathrm{OY}} = \iint_G x^2\,dx\,dy = \int_1^4 x^2 \left(\int_{(-2)\cdot x+(4)}^{1\cdot x^2+(1)} dy \right) dx =$$

$$= \int \quad x^2 \left(y \Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \int \quad x^2 \, (\qquad\qquad) \, dx =$$

$$= \int \quad x^2 (\qquad\qquad) dx =$$

$$= \int \quad (\qquad\qquad) dx =$$

$$= \left(\qquad\qquad \right) \Big| \; =$$

$$= \left[\left(\qquad\qquad \right) - \left(\qquad\qquad \right) \right] =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 5: продолжение.

$$I_{\mathrm{OX}} = \iint_G y^2\,dx\,dy = \int_1^4 \left(\int_{(-2)\cdot x+(4)}^{1\cdot x^2+(1)} y^2\,dy\right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{y^3}{3}\Big|_{y=}^{y=}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \Big[(\quad)^3 - (\quad)^3\Big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \big[(\quad) -$$

$$- (\quad)\big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \big[\quad\big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\quad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{3}\Big[\Big(\quad\Big) -$$

$$- \Big(\quad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot(\quad - \quad) = \quad.$$

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

$\boldsymbol{I}_{\mathrm{OY}} =$

$\boldsymbol{I}_{\mathrm{OX}} =$

Выборочная проверка вариант 7 задача 1

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

I_{OY} (формат 1.23): введи Клик

I_{OX} (формат 1.23): введи Клик

Задача 2

Область ограничена линиями:

$$
\begin{aligned}
x &= x_{\max} = 4, \\
x &= x_{\min} = -1, \\
y &= 0, \\
y &= e^{-0.4x}, \\
y &= 1 + 0.4 \cdot x.
\end{aligned}
$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь и координаты центра тяжести области (моменты инерции не вычислять).

Решение (по образцу примера П2)

Шаг 1: построение линий.

$\boldsymbol{y = 1 + 0.4 \cdot x}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_{\min} - 1 = -1 - 1 = -2$ до 1:

x	-2	-1	0	1
$y = 1 + 0.4 \cdot x$	0,2	0,6	1	1,4

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

$\boldsymbol{y = e^{-0.4x}}$ — экспонента, для ее построения табулируем:

x	-1	0	1	2	3	4	5
$y = e^{-0.4x}$	1,5	1	0,7	0,4	0,3	0,2	0,1

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим экспоненту по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{y = 0}$ — горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = 4}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(4, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = -1}$ — вертикальная прямая, проходящая через т. $(-1, 0)$ (**черным**).

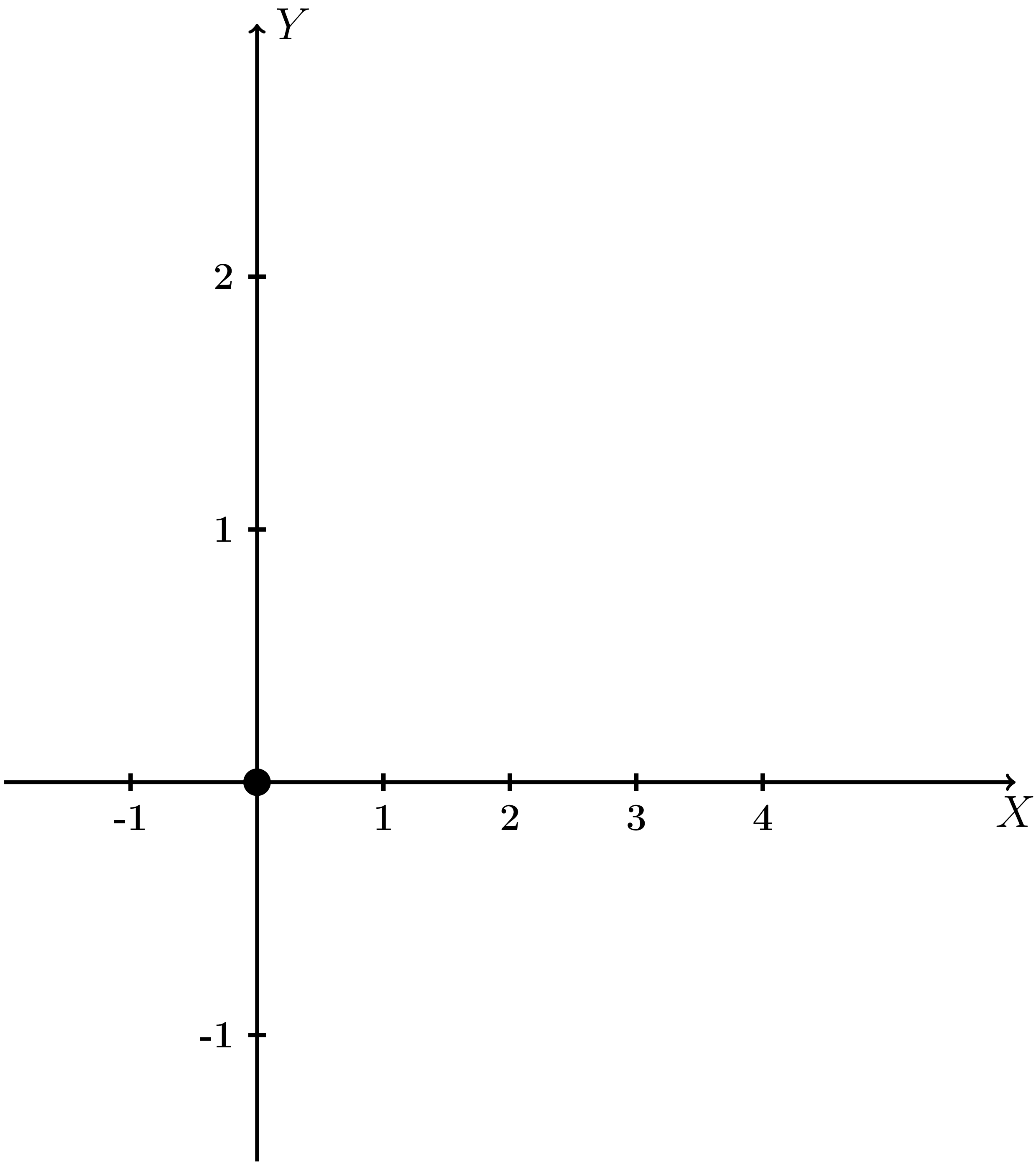

Рис.: Чертеж к задаче 2: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$
\begin{array}{lll}
x_{\text{лев}} & = & \quad - \text{ левая граница;} \\
x_{\text{прав}} & = & \quad - \text{ правая;} \\
y_{\text{низ}}(x) & = 0 & \quad - \text{ нижняя;} \\
y_{\text{верх}}(x) & = \begin{cases} & \text{при} \\ & \text{при} \end{cases} & \quad - \text{ верхняя (из 2х частей).}
\end{array}
$$

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6 с разбиением области интегрирования на две части согласно форме верхней границы. Для интегрирования экспоненты используется формула 7 таблицы 2.

$$
S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-1}^{0}\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} dy\right)dx}_{\text{повторный интеграл левый}} + \underbrace{\int_0^4\left(\int_0^{e^{-0.4x}} dy\right)dx}_{\text{повторный интеграл правый}} =
$$

$$
= \int \quad \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \quad\right)dx + \int \quad \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \quad\right)dx =
$$

$$
= \int \quad (\qquad\qquad) \, dx + \int \quad (\qquad\qquad) \, dx =
$$

$$
= \int \quad (\qquad) dx + \int \qquad dx =
$$

$$
= \left(\qquad \right)\Big| \; + \left(\qquad \right)\Big| =
$$

$$
= \left[\left(\qquad \right) - \left(\qquad \right)\right] + \left[\qquad - \qquad \right] =
$$

$$
= \qquad + \qquad = \qquad .
$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2.
Для интегрирования экспоненты используются формулы 7,8 таблицы 2.

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{0} x\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^4 x\left(\int_0^{e^{-0.4x}} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad\right)dx + \frac{1}{S}\int \; x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \; x\,(\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad (\qquad\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \qquad\qquad dx =$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad\qquad\right)\Big| \; + \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad\qquad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\Big) +$$

$$+\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad}\cdot(\qquad + \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{0}\left(\int_{0}^{1+0.4\cdot x} y\,dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_{0}^{4}\left(\int_{0}^{e^{-0.4x}} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=}\right)dx + \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int (\quad)\,dx + \frac{1}{2S}\int (\quad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad dx + \frac{1}{2S}\int \quad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int (\quad)\,dx + \frac{1}{2S}\int \quad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\quad\right)\Big| + \frac{1}{2S}\left(\quad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\quad\Big) +$$

$$+\Big(\quad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot}\cdot(\quad + \quad) = \quad.$$

Наносим центр тяжести $C(\quad,\quad)$ на чертеж к задаче 2.

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

Выборочная проверка вариант 7 задача 2

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

Задача 1.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

$I_{\mathrm{OY}} =$

$I_{\mathrm{OX}} =$

Задача 2.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Задача 1

Область ограничена линиями:

$$
\begin{aligned}
y &= (-5)\cdot x + (-2),\\
y &= 1\cdot x^2 + (2),\\
x &= x_{\max} = 3.
\end{aligned}
$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь, координаты центра тяжести, и моменты инерции относительно осей координат.

Решение (по образцу примера П1)

Шаг 1: построение линий. Находим пересечение двух первых линий.

$$1\cdot x^2 + (2) = (-5)\cdot x + (-2)$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$D = \qquad = \qquad .$

$x_1 = \qquad = \qquad ; \qquad x_2 = \qquad = \qquad .$

$\boldsymbol{y = (-5)\cdot x + (-2)}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_1 - 1 = \qquad$ до $x_{\max} + 1 = \qquad$:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = (-5)\cdot x + (-2)$	23	18	13	8	3	-2	-7	-12	-17	-22

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

Решение (продолжение)

Шаг 1: продолжение.

$\boldsymbol{y = 1 \cdot x^2 + (2)}$ — парабола, для ее построения табулируем:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 1 \cdot x^2 + (2)$	27	18	11	6	3	2	3	6	11	18

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим параболу по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{x = 3}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(3, 0)$ (**на чертеже черным**).

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$
\begin{aligned}
x_{\text{лев}} &= && \text{— левая граница;} \\
x_{\text{прав}} &= && \text{— правая;} \\
y_{\text{низ}}(x) &= && \text{— нижняя;} \\
y_{\text{верх}}(x) &= && \text{— верхняя.}
\end{aligned}
$$

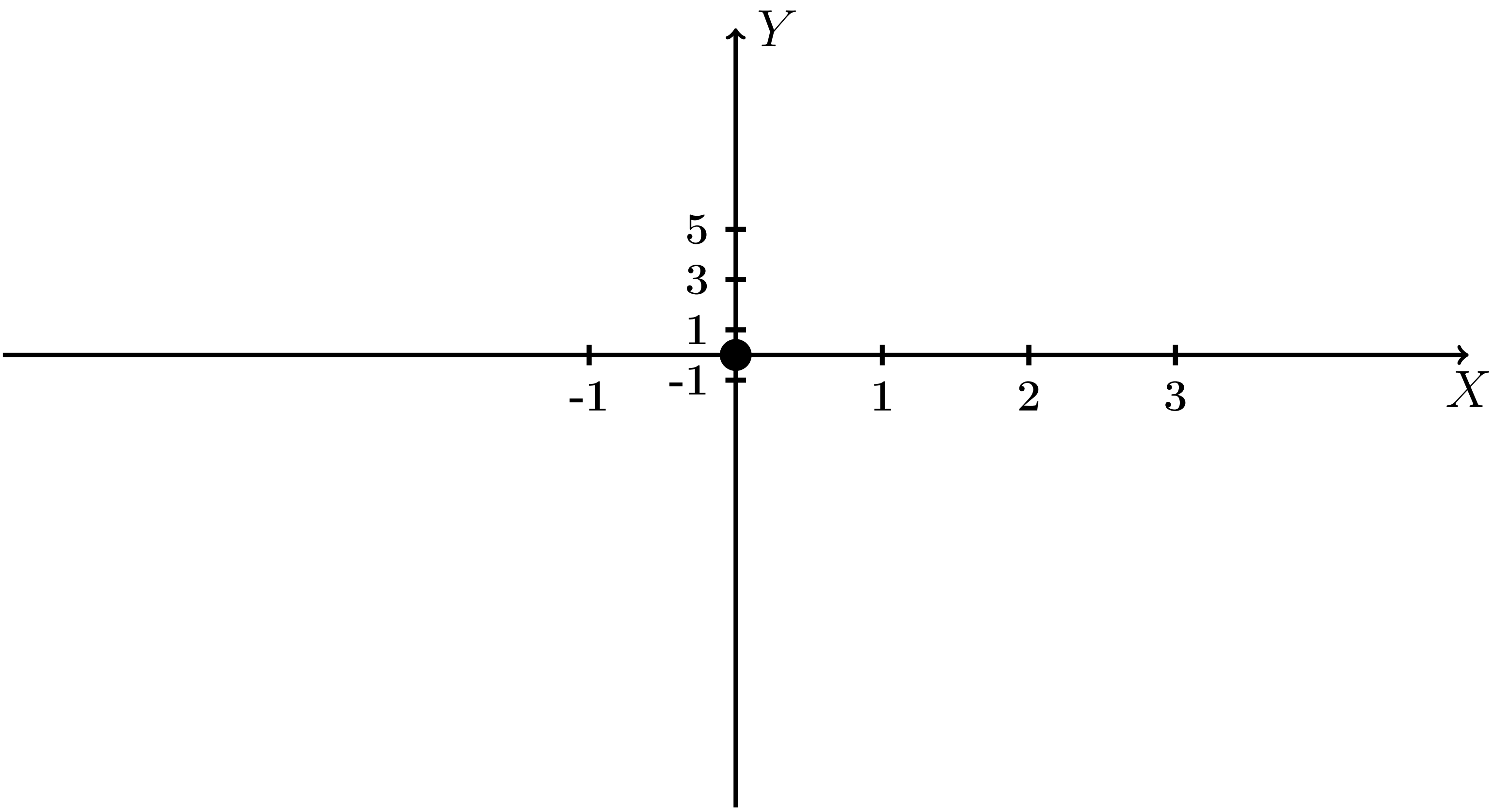

Рис.: Чертеж к задаче 1: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П 1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П 6:

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-1}^{3} \left(\int_{(-5)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(2)} dy \right) dx}_{\text{повторный интеграл}} =$$

$$= \int_{-1}^{3} \left(y \Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \int \left(\qquad - \qquad \right) dx =$$

$$= \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad \right) \Big| \quad =$$

$$= \left(\qquad \right) - \left(\qquad \right) =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2:

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_{-1}^{3} x\left(\int_{(-5)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(2)} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad \right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x(\qquad\qquad)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \qquad\qquad dx$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad \Big) -$$

$$- \Big(\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad}\cdot(\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_{-1}^{3}\left(\int_{(-5)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(2)} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=}^{y=}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[(\quad)^2 - (\quad)^2\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[(\quad) - (\quad)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[\quad\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\quad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\quad\Big) -$$

$$- \Big(\quad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad}\cdot(\quad - \quad) = \quad .$$

Наносим центр тяжести $C(1.824, -2.506)$ на чертеж к задаче 1.

Решение (продолжение)

Шаг 5: находим моменты инерции относительно осей координат по формулам Правила П4:

$$I_{\mathrm{OY}} = \iint_G x^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{3} x^2 \left(\int_{(-5)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(2)} dy \right) dx =$$

$$= \int x^2 \left(y \Big|_{y=}^{y=} \right) dx =$$

$$= \int x^2 (\quad) \, dx =$$

$$= \int x^2 (\quad) dx =$$

$$= \int (\quad) dx =$$

$$= (\quad) \Big| =$$

$$= \left[(\quad) - (\quad) \right] =$$

$$= \quad - \quad = \quad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 5: продолжение.

$$I_{\mathrm{OX}} = \iint_G y^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{3} \left(\int_{(-5)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(2)} y^2\,dy \right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{y^3}{3} \Big|_{y=}^{y=} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \left[\left(\quad \right)^3 - \left(\quad \right)^3 \right] dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \left[\left(\quad \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\quad \right) \right] dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \left[\quad \right] dx =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\quad \right) \Big| =$$

$$= \frac{1}{3} \left[\left(\quad \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\quad \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(\quad - \quad \right) = \quad .$$

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OY}} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OX}} =$

Выборочная проверка вариант 8 задача 1

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

I_{OY} (формат 1.23): введи Клик

I_{OX} (формат 1.23): введи Клик

Задача 2

Область ограничена линиями:

$$
\begin{aligned}
x &= x_{\max} = 3, \\
x &= x_{\min} = -2, \\
y &= 0, \\
y &= e^{-0.7x}, \\
y &= 1 + 0.2 \cdot x.
\end{aligned}
$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь и координаты центра тяжести области (моменты инерции не вычислять).

Решение (по образцу примера П2)

Шаг 1: построение линий.

$\boldsymbol{y = 1 + 0.2 \cdot x}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_{\min} - 1 = -2 - 1 = -3$ до 1:

x	-3	-2	-1	0	1
$y = 1 + 0.2 \cdot x$	0,4	0,6	0,8	1	1,2

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

$\boldsymbol{y = e^{-0.7x}}$ — экспонента, для ее построения табулируем:

x	-1	0	1	2	3	4
$y = e^{-0.7x}$	2	1	0,5	0,2	0,1	0,1

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим экспоненту по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{y = 0}$ — горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = 3}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(3, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = -2}$ — вертикальная прямая, проходящая через т. $(-2, 0)$ (**черным**).

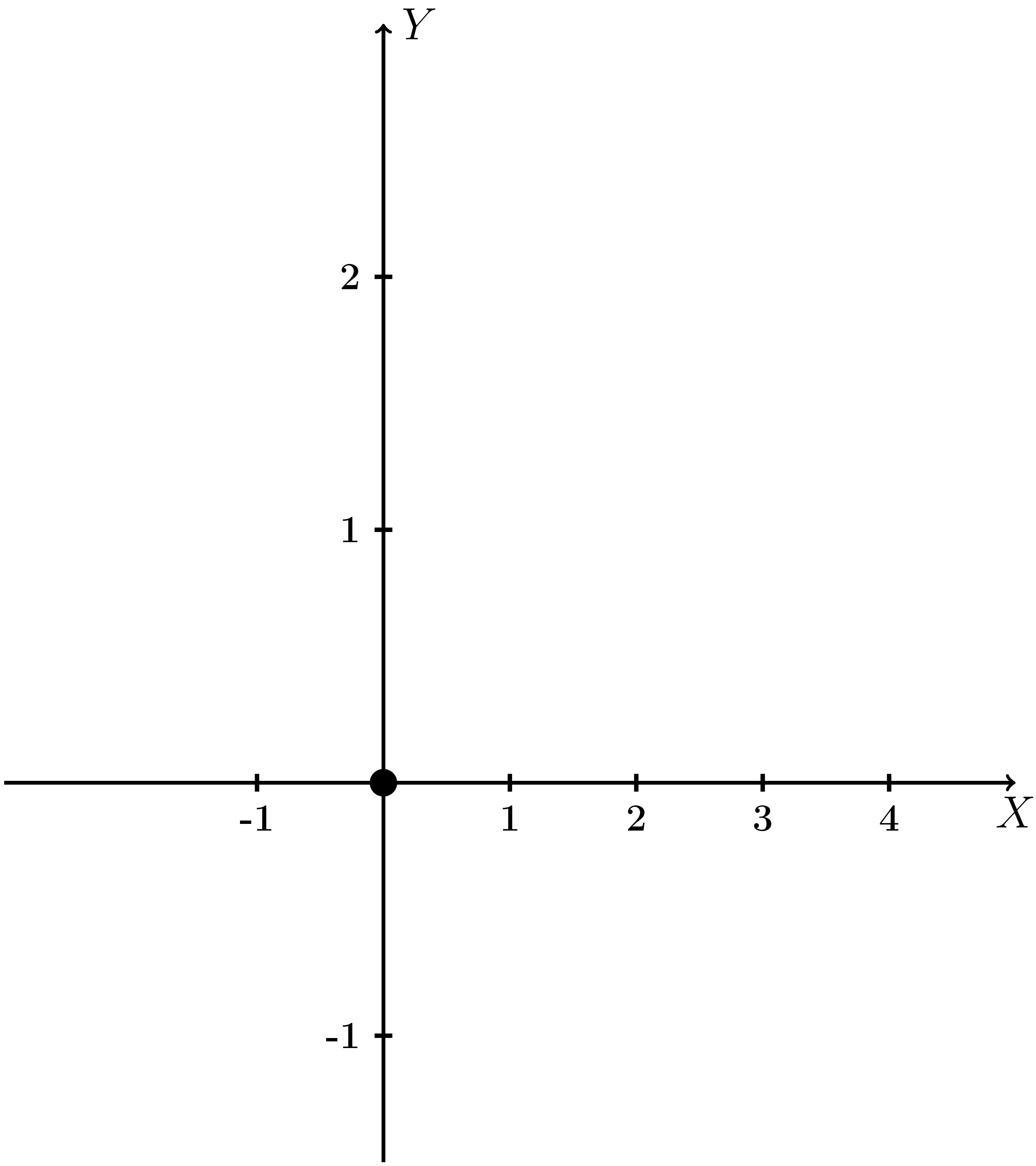

Рис.: Чертеж к задаче 2: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$x_{\text{лев}} = \qquad \text{– левая граница;}$$
$$x_{\text{прав}} = \qquad \text{– правая;}$$
$$y_{\text{низ}}(x) = 0 \qquad \text{– нижняя;}$$
$$y_{\text{верх}}(x) = \begin{cases} & \text{при} \\ & \text{при} \end{cases} \qquad \text{– верхняя (из 2х частей).}$$

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6 с разбиением области интегрирования на две части согласно форме верхней границы. Для интегрирования экспоненты используется формула 7 таблицы 2.

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-2}^{0}\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл левый}} + \underbrace{\int_0^3\left(\int_0^{e^{-0.7x}} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл правый}} =$$

$$= \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx + \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx =$$

$$= \int \left(\qquad \right) dx + \int \left(\qquad \right) dx =$$

$$= \int \left(\qquad \right) dx + \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad \right)\Big| + \left(\qquad \right)\Big| =$$

$$= \left[\left(\qquad \right) - \left(\qquad \right)\right] + \left[\qquad - \qquad \right] =$$

$$= \qquad + \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2. Для интегрирования экспоненты используются формулы 7,8 таблицы 2.

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0} x\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} dy\right) dx + \frac{1}{S}\int_0^3 x\left(\int_0^{e^{-0.7x}} dy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \quad\right) dx + \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \quad\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\quad) \, dx + \frac{1}{S}\int \quad x\,(\quad) \, dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad (\quad) \, dx + \frac{1}{S}\int \quad dx =$$

$$= \frac{1}{S}\left(\quad \right)\Big| \quad + \frac{1}{S}\left(\quad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\quad \Big) +$$

$$+ \Big(\quad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad} \cdot (\quad + \quad) = \quad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0}\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} y\,dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^3\left(\int_0^{e^{-0.7x}} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\bigg|_{y=0}^{y=} \quad\right)dx + \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\bigg|_{y=0}^{y=} \quad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad (\quad) \, dx + \frac{1}{2S}\int \quad (\quad) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad dx + \frac{1}{2S}\int \quad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad (\quad) \, dx + \frac{1}{2S}\int \quad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\quad \right)\bigg| + \frac{1}{2S}\left(\quad \right)\bigg| =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\quad \Big) +$$

$$+ \Big(\quad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot} \cdot (\quad + \quad) = \quad .$$

Наносим центр тяжести $C(\quad , \quad)$ на чертеж к задаче 2.

Ответ

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Выборочная проверка вариант 8 задача 2

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

Задача 1.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

$I_{\text{OY}} =$

$I_{\text{OX}} =$

Задача 2.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Задача 1

Область ограничена линиями:

$$
\begin{aligned}
y &= (-5) \cdot x + (-2), \\
y &= 1 \cdot x^2 + (2), \\
x &= x_{\max} = 4.
\end{aligned}
$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь, координаты центра тяжести, и моменты инерции относительно осей координат.

Решение (по образцу примера П1)

Шаг 1: построение линий. Находим пересечение двух первых линий.

$$1 \cdot x^2 + (2) = (-5) \cdot x + (-2)$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$D = \qquad = \qquad .$

$x_1 = \qquad = \qquad ; \qquad x_2 = \qquad = \qquad .$

$\boldsymbol{y = (-5) \cdot x + (-2)}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_1 - 1 =$ до $x_{\max} + 1 =$:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = (-5) \cdot x + (-2)$	23	18	13	8	3	-2	-7	-12	-17	-22	-27

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

Решение (продолжение)

Шаг 1: продолжение.

$\boldsymbol{y = 1 \cdot x^2 + (2)}$ — парабола, для ее построения табулируем:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = 1 \cdot x^2 + (2)$	27	18	11	6	3	2	3	6	11	18	27

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим параболу по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{x = 4}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(4, 0)$ (**на чертеже черным**).

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$
\begin{aligned}
x_{\text{лев}} &= && \text{— левая граница;}\\
x_{\text{прав}} &= && \text{— правая;}\\
y_{\text{низ}}(x) &= && \text{— нижняя;}\\
y_{\text{верх}}(x) &= && \text{— верхняя.}
\end{aligned}
$$

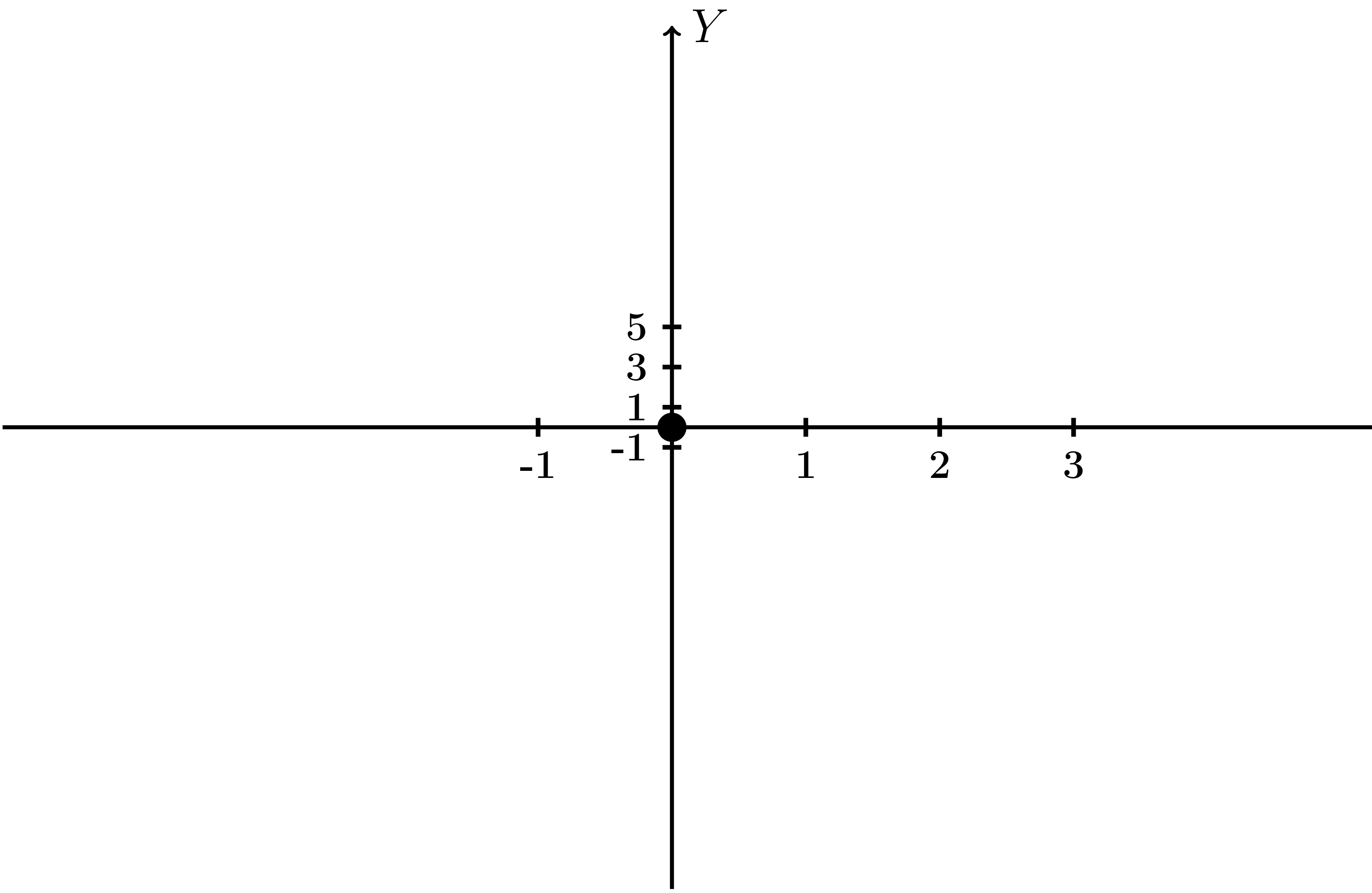

Рис.: Чертеж к задаче 1: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6:

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-1}^{4}\left(\int_{(-5)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(2)} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл}} =$$

$$= \int_{-1}^{4}\left(y\Big|_{y=}^{y=}\right) dx =$$

$$= \int \left(\quad - \quad \right) dx =$$

$$= \int \quad dx =$$

$$= \left(\quad \right)\Big| =$$

$$= \left(\quad \right) - \left(\quad \right) =$$

$$= \quad - \quad = \quad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2:

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_{-1}^{4} x\left(\int_{(-5)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(2)} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x(\qquad\qquad\qquad)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \qquad\qquad\qquad\qquad dx$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad \Big) -$$

$$- \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad} \cdot (\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_{-1}^{4}\left(\int_{(-5)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(2)} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[(\qquad\qquad)^2 - (\qquad\qquad\qquad)^2\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \ [(\qquad\qquad\qquad\qquad) - (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)]\ dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \ [\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad]\ dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{2S}\left[\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\qquad} \cdot (\qquad\qquad - \qquad\qquad) = \qquad .$$

Наносим центр тяжести $C(2.553, -2.526)$ на чертеж к задаче 1.

Решение (продолжение)

Шаг 5: находим моменты инерции относительно осей координат по формулам Правила П 4:

$$I_{\text{OY}} = \iint_G x^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{4} x^2 \left(\int_{(-5)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(2)} dy \right) dx =$$

$$= \int \quad x^2 \left(y \Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right) dx =$$

$$= \int \quad x^2 \, (\qquad\qquad\qquad\qquad) \, dx =$$

$$= \int \quad x^2 (\qquad\qquad\qquad\qquad) dx =$$

$$= \int \quad (\qquad\qquad\qquad\qquad) dx =$$

$$= \left(\qquad\qquad\qquad \right) \Big| \quad =$$

$$= \Big[\Big(\qquad\qquad\qquad \Big) - \Big(\qquad\qquad\qquad \Big) \Big] =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 5: продолжение.

$$I_{\text{OX}} = \iint_G y^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{4} \left(\int_{(-5)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(2)} y^2\,dy \right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{y^3}{3} \Big|_{y=}^{y=} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \left[(\qquad)^3 - (\qquad)^3 \right] dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int [(\qquad) -$$

$$- (\qquad)] \, dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int [\qquad] \, dx =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\qquad \right) \Big| =$$

$$= \frac{1}{3} \left[\left(\qquad \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\qquad \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OY}} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OX}} =$

Выборочная проверка вариант 9 задача 1

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

I_{OY} (формат 1.23): введи Клик

I_{OX} (формат 1.23): введи Клик

Задача 2

Область ограничена линиями:

$$
\begin{aligned}
x &= x_{\max} = 4, \\
x &= x_{\min} = -2, \\
y &= 0, \\
y &= e^{-0.7x}, \\
y &= 1 + 0.2 \cdot x.
\end{aligned}
$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь и координаты центра тяжести области (моменты инерции не вычислять).

Решение (по образцу примера П2)

Шаг 1: построение линий.

$\boldsymbol{y = 1 + 0.2 \cdot x}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_{\min} - 1 = -2 - 1 = -3$ до 1:

x	-3	-2	-1	0	1
$y = 1 + 0.2 \cdot x$	0,4	0,6	0,8	1	1,2

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

$\boldsymbol{y = e^{-0.7x}}$ — экспонента, для ее построения табулируем:

x	-1	0	1	2	3	4	5
$y = e^{-0.7x}$	2	1	0,5	0,2	0,1	0,1	0

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим экспоненту по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{y = 0}$ — горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = 4}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(4, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = -2}$ — вертикальная прямая, проходящая через т. $(-2, 0)$ (**черным**).

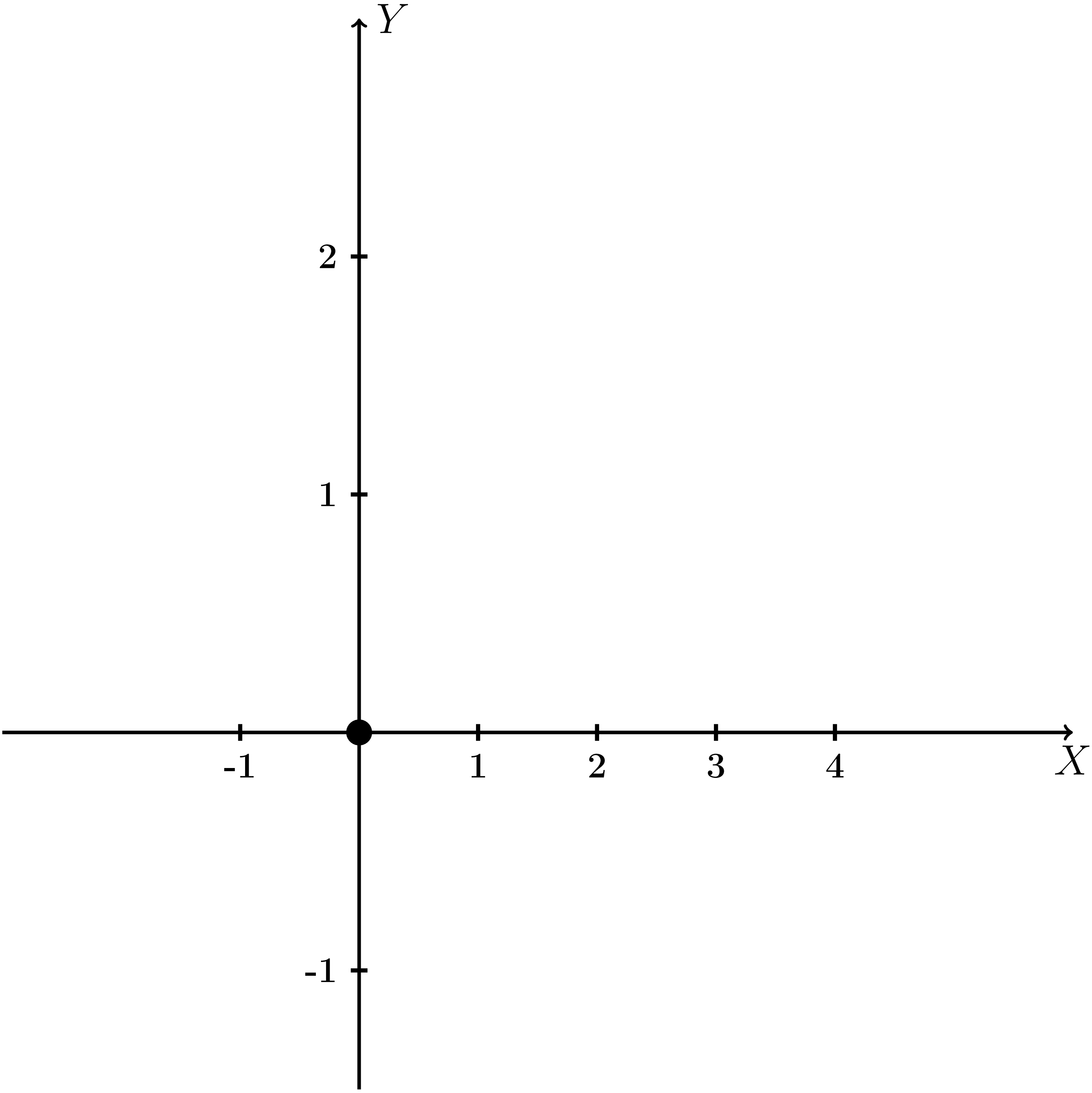

Рис.: Чертеж к задаче 2: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$\begin{aligned} x_{\text{лев}} &= && \text{— левая граница;}\\ x_{\text{прав}} &= && \text{— правая;}\\ y_{\text{низ}}(x) &= 0 && \text{— нижняя;}\\ y_{\text{верх}}(x) &= \begin{cases} & \text{при} \\ & \text{при} \end{cases} && \text{— верхняя (из 2х частей).} \end{aligned}$$

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6 с разбиением области интегрирования на две части согласно форме верхней границы. Для интегрирования экспоненты используется формула 7 таблицы 2.

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-2}^{0}\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл левый}} + \underbrace{\int_0^4\left(\int_0^{e^{-0.7x}} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл правый}} =$$

$$= \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx + \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx =$$

$$= \int \quad (\qquad) \, dx + \int \quad (\qquad) \, dx =$$

$$= \int \quad (\qquad) dx + \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad \right)\Big| + \left(\qquad \right)\Big| =$$

$$= \left[\left(\qquad \right) - \left(\qquad \right)\right] + \left[\qquad - \qquad \right] =$$

$$= \qquad + \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2.
Для интегрирования экспоненты используются формулы 7,8 таблицы 2.

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0} x\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} dy\right) dx + \frac{1}{S}\int_0^4 x\left(\int_0^{e^{-0.7x}} dy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \quad \right) dx + \frac{1}{S}\int \ x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \quad \right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad) \,dx + \frac{1}{S}\int \ x\,(\qquad\qquad) \,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad (\qquad\qquad) \,dx + \frac{1}{S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \ + \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad \Big) +$$

$$+ \Big(\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad}\cdot(\qquad + \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0}\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} y\,dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^4\left(\int_0^{e^{-0.7x}} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=}\right)dx + \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int (\quad)\,dx + \frac{1}{2S}\int (\quad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad dx + \frac{1}{2S}\int \quad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int (\quad)\,dx + \frac{1}{2S}\int \quad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\quad\right)\Big| + \frac{1}{2S}\left(\quad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\quad\Big) +$$

$$+\Big(\quad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot}\cdot(\quad + \quad) = \quad.$$

Наносим центр тяжести $C(\quad,\quad)$ на чертеж к задаче 2.

Ответ

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Выборочная проверка вариант 9 задача 2

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

Задача 1.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

$I_{\mathrm{OY}} =$

$I_{\mathrm{OX}} =$

Задача 2.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Задача 1

Область ограничена линиями:

$$y = (-4) \cdot x + (-1),$$
$$y = 1 \cdot x^2 + (2),$$
$$x = x_{\max} = 3.$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь, координаты центра тяжести, и моменты инерции относительно осей координат.

Решение (по образцу примера П1)

Шаг 1: построение линий. Находим пересечение двух первых линий.

$$1 \cdot x^2 + (2) = (-4) \cdot x + (-1)$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$D = \qquad = \qquad .$

$x_1 = \qquad = \qquad ; \qquad x_2 = \qquad = \qquad .$

$\boldsymbol{y = (-4) \cdot x + (-1)}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_1 - 1 =$ до $x_{\max} + 1 =$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = (-4) \cdot x + (-1)$	15	11	7	3	-1	-5	-9	-13	-17

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

Решение (продолжение)

Шаг 1: продолжение.

$\boldsymbol{y = 1 \cdot x^2 + (2)}$ — парабола, для ее построения табулируем:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 1 \cdot x^2 + (2)$	18	11	6	3	2	3	6	11	18

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим параболу по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{x = 3}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(3, 0)$ (**на чертеже черным**).

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$\begin{aligned} x_{\text{лев}} &= && \text{— левая граница;} \\ x_{\text{прав}} &= && \text{— правая;} \\ y_{\text{низ}}(x) &= && \text{— нижняя;} \\ y_{\text{верх}}(x) &= && \text{— верхняя.} \end{aligned}$$

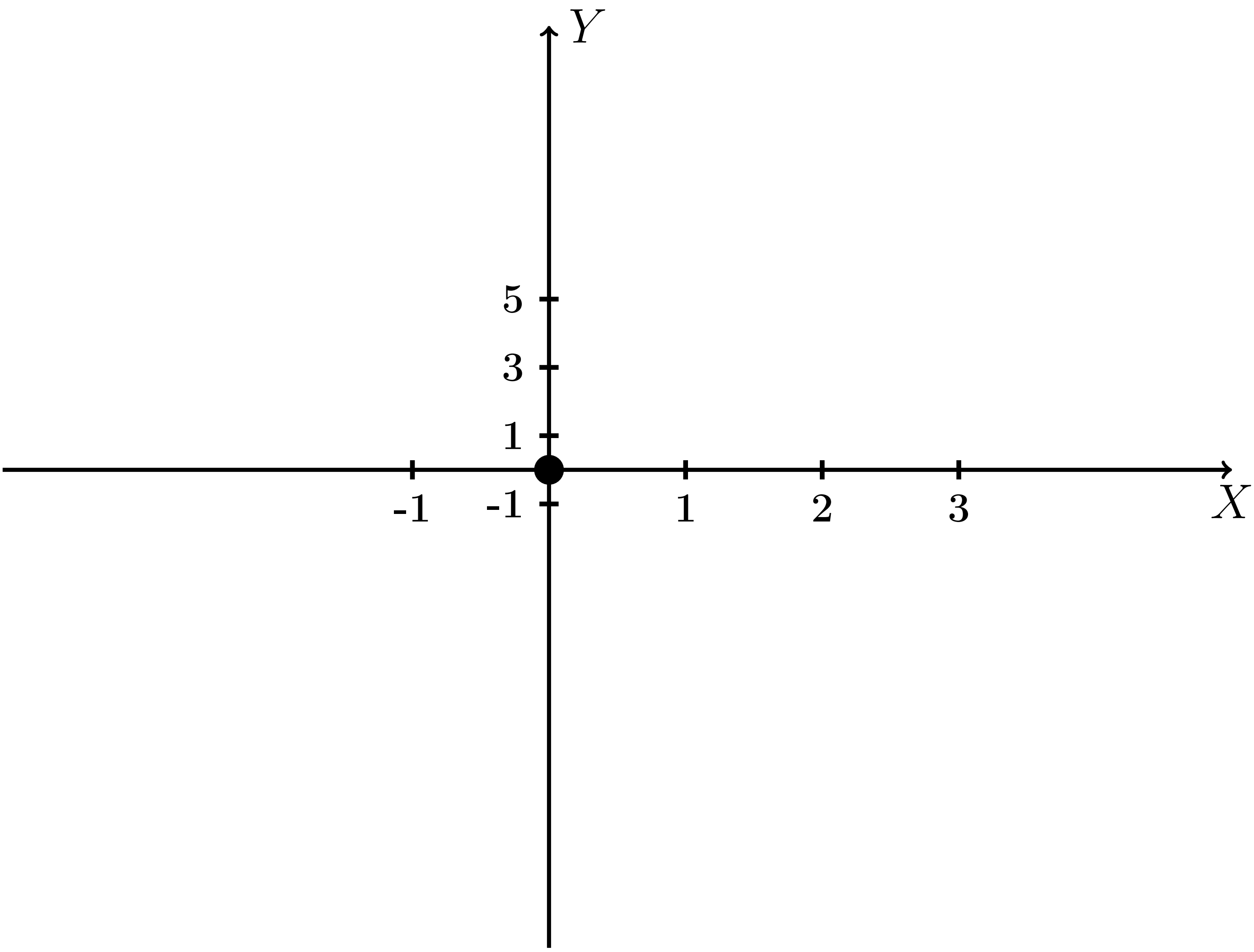

Рис.: Чертеж к задаче 1: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6:

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-1}^{3} \left(\int_{(-4)\cdot x+(-1)}^{1\cdot x^2+(2)} dy \right) dx}_{\text{повторный интеграл}} =$$

$$= \int_{-1}^{3} \left(y \Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \int \; (\qquad - \qquad) \, dx =$$

$$= \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad \right) \Big| \quad =$$

$$= \left(\qquad \right) - \left(\qquad \right) =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2:

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_{-1}^{3} x\left(\int_{(-4)\cdot x+(-1)}^{1\cdot x^2+(2)} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x(\qquad\qquad\qquad\qquad)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad dx$$

$$= \frac{1}{S}\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) -$$

$$- \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad}\cdot(\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_{-1}^{3}\left(\int_{(-4)\cdot x+(-1)}^{1\cdot x^2+(2)} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=}^{y=}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[(\quad)^2 - (\quad)^2\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[(\quad) - (\quad)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int [\quad]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\quad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\quad\Big) -$$

$$- \Big(\quad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad}\cdot(\quad - \quad) = \quad .$$

Наносим центр тяжести $C(1.857, -1.114)$ на чертеж к задаче 1.

Решение (продолжение)

Шаг 5: находим моменты инерции относительно осей координат по формулам Правила П 4:

$$I_{\mathrm{OY}} = \iint_G x^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{3} x^2 \left(\int_{(-4)\cdot x+(-1)}^{1\cdot x^2+(2)} dy \right) dx =$$

$$= \int x^2 \left(y \Big|_{y=}^{y=} \right) dx =$$

$$= \int x^2 (\quad) \, dx =$$

$$= \int x^2 (\quad) dx =$$

$$= \int (\quad) dx =$$

$$= \left(\quad \right) \Big| =$$

$$= \left[\left(\quad \right) - \left(\quad \right) \right] =$$

$$= \quad - \quad = \quad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 5: продолжение.

$$I_{\mathrm{OX}} = \iint_G y^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{3}\left(\int_{(-4)\cdot x+(-1)}^{1\cdot x^2+(2)} y^2\,dy\right)dx =$$

$$= \int \left(\frac{y^3}{3}\Big|_{y=}^{y=}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \left[(\quad)^3 - (\quad)^3\right]dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \left[(\quad) -\right.$$

$$\left. -(\quad)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \left[\quad\right]dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\quad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{3}\left[(\quad) -\right.$$

$$\left. -(\quad)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot(\quad - \quad) = \quad.$$

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OY}} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OX}} =$

Выборочная проверка вариант 10 задача 1

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

I_{OY} (формат 1.23): введи Клик

I_{OX} (формат 1.23): введи Клик

Задача 2

Область ограничена линиями:

$$\begin{aligned} x &= x_{\max} = 3, \\ x &= x_{\min} = -1, \\ y &= 0, \\ y &= e^{-0.7x}, \\ y &= 1 + 0.2 \cdot x. \end{aligned}$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь и координаты центра тяжести области (моменты инерции не вычислять).

Решение (по образцу примера П2)

Шаг 1: построение линий.

$\boldsymbol{y = 1 + 0.2 \cdot x}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_{\min} - 1 = -1 - 1 = -2$ до 1:

x	-2	-1	0	1
$y = 1 + 0.2 \cdot x$	0,6	0,8	1	1,2

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

$\boldsymbol{y = e^{-0.7x}}$ — экспонента, для ее построения табулируем:

x	-1	0	1	2	3	4
$y = e^{-0.7x}$	2	1	0,5	0,2	0,1	0,1

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим экспоненту по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{y = 0}$ — горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = 3}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(3, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = -1}$ — вертикальная прямая, проходящая через т. $(-1, 0)$ (**черным**).

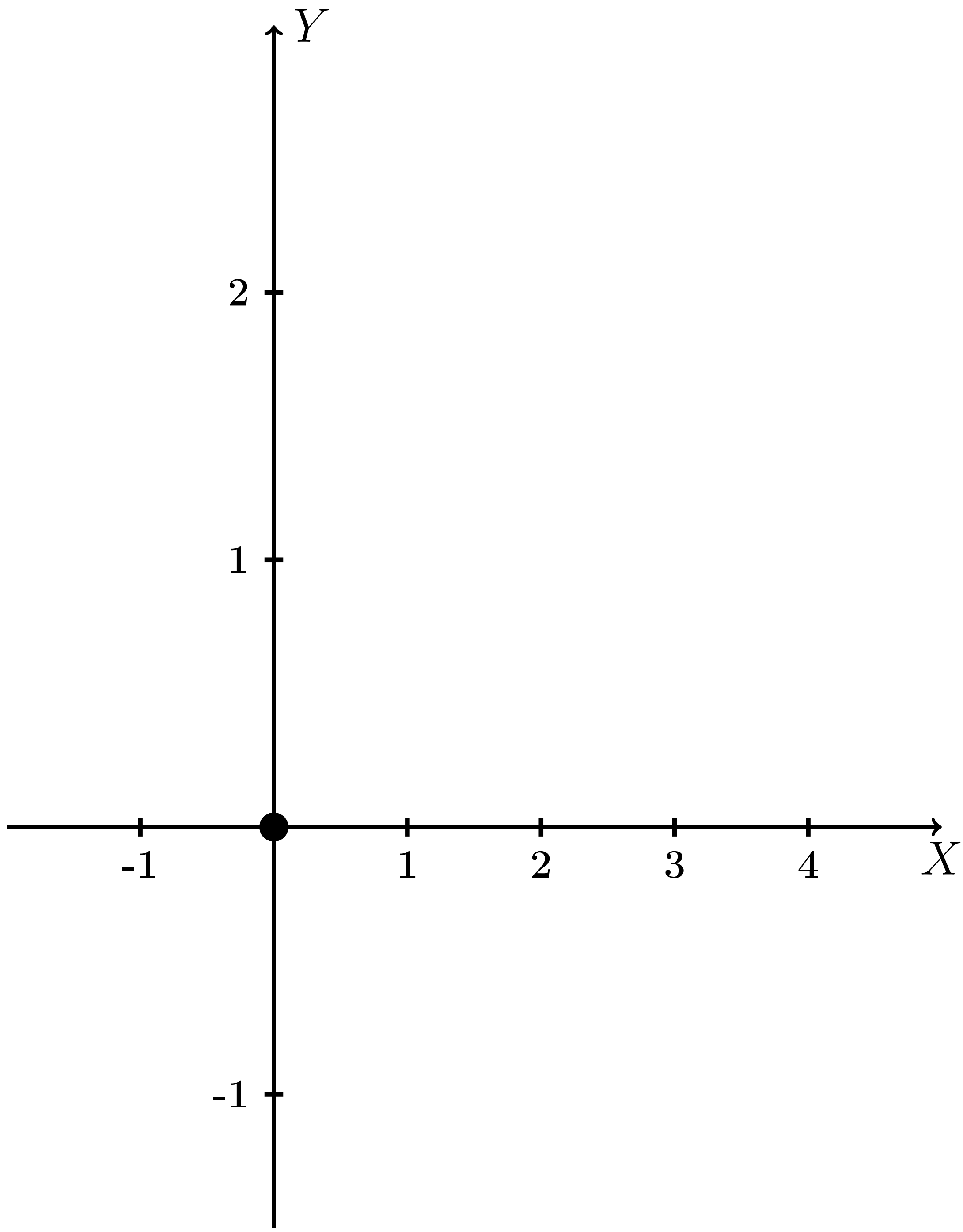

Рис.: Чертеж к задаче 2: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$x_{\text{лев}} = \qquad \text{— левая граница;}$$
$$x_{\text{прав}} = \qquad \text{— правая;}$$
$$y_{\text{низ}}(x) = 0 \qquad \text{— нижняя;}$$
$$y_{\text{верх}}(x) = \begin{cases} & \text{при} \\ & \text{при} \end{cases} \qquad \text{— верхняя (из 2х частей).}$$

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6 с разбиением области интегрирования на две части согласно форме верхней границы. Для интегрирования экспоненты используется формула 7 таблицы 2.

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-1}^{0}\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл левый}} + \underbrace{\int_0^3 \left(\int_0^{e^{-0.7x}} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл правый}} =$$

$$= \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx + \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx =$$

$$= \int (\qquad) \, dx + \int (\qquad) \, dx =$$

$$= \int (\qquad) dx + \int \qquad dx =$$

$$= (\qquad) \Big| + (\qquad) \Big| =$$

$$= [(\qquad) - (\qquad)] + [\qquad - \qquad] =$$

$$= \qquad + \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2. Для интегрирования экспоненты используются формулы 7,8 таблицы 2.

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{0} x\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} dy\right) dx + \frac{1}{S}\int_0^{3} x\left(\int_0^{e^{-0.7x}} dy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad\right) dx + \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad (\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \quad + \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad \Big) +$$

$$+ \Big(\qquad\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad}\cdot(\qquad + \qquad) = \qquad.$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{0}\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} y\,dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^3\left(\int_0^{e^{-0.7x}} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\bigg|_{y=0}^{y=} \quad\right)dx + \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\bigg|_{y=0}^{y=} \quad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad (\quad) \, dx + \frac{1}{2S}\int \quad (\quad) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad dx + \frac{1}{2S}\int \quad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad (\quad) \, dx + \frac{1}{2S}\int \quad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\quad \right)\Big| \quad + \frac{1}{2S}\left(\quad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\quad \Big) +$$

$$+ \Big(\quad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot} \cdot (\quad + \quad) = \quad .$$

Наносим центр тяжести $C(\quad , \quad)$ на чертеж к задаче 2.

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

Выборочная проверка вариант 10 задача 2

S (формат 1.23): введи [ ] Клик [ ]

x_C (формат 1.23): введи [ ] Клик [ ]

y_C (формат 1.23): введи [ ] Клик [ ]

Задача 1.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

$I_{\mathrm{OY}} =$

$I_{\mathrm{OX}} =$

Задача 2.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Задача 1

Область ограничена линиями:

$$\begin{aligned} y &= (-4)\cdot x + (-1), \\ y &= 1\cdot x^2 + (2), \\ x &= x_{\max} = 4. \end{aligned}$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь, координаты центра тяжести, и моменты инерции относительно осей координат.

Решение (по образцу примера П1)

Шаг 1: построение линий. Находим пересечение двух первых линий.

$$1\cdot x^2 + (2) = (-4)\cdot x + (-1)$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$D = \quad = \quad .$

$x_1 = \quad = \quad ; \qquad x_2 = \quad = \quad .$

$\boldsymbol{y = (-4)\cdot x + (-1)}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_1 - 1 =$ до $x_{\max} + 1 =$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = (-4)\cdot x + (-1)$	15	11	7	3	-1	-5	-9	-13	-17	-21

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

Решение (продолжение)

Шаг 1: продолжение.

$\boldsymbol{y = 1 \cdot x^2 + (2)}$ — парабола, для ее построения табулируем:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = 1 \cdot x^2 + (2)$	18	11	6	3	2	3	6	11	18	27

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим параболу по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{x = 4}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(4, 0)$ (**на чертеже черным**).

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$
\begin{aligned}
x_{\text{лев}} &= && \text{— левая граница;} \\
x_{\text{прав}} &= && \text{— правая;} \\
y_{\text{низ}}(x) &= && \text{— нижняя;} \\
y_{\text{верх}}(x) &= && \text{— верхняя.}
\end{aligned}
$$

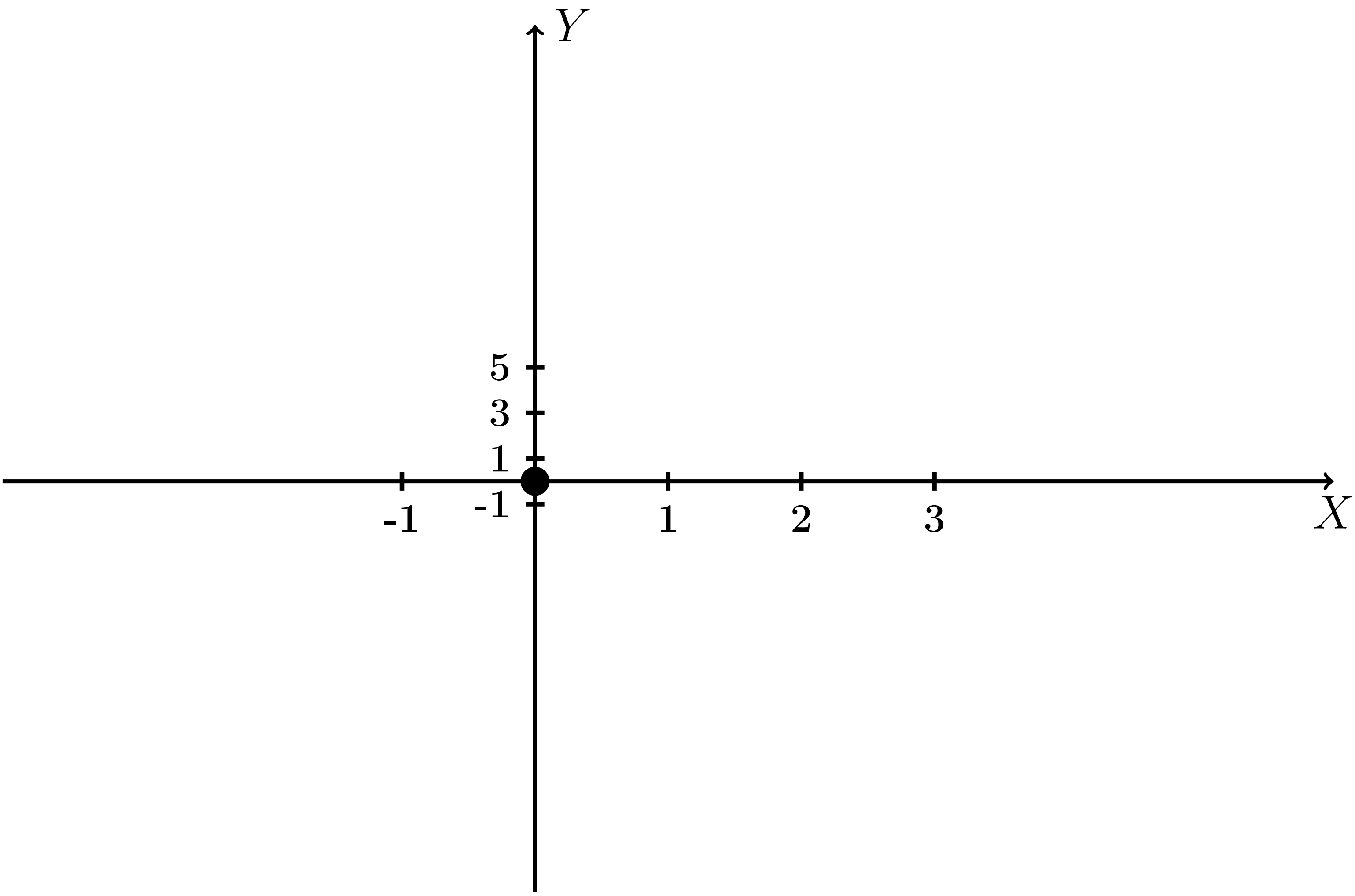

Рис.: Чертеж к задаче 1: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6:

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-1}^{4}\left(\int_{(-4)\cdot x+(-1)}^{1\cdot x^2+(2)} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл}} =$$

$$= \int_{-1}^{4}\left(y\Big|_{y=}^{y=}\qquad\right) dx =$$

$$= \int \left(\qquad - \qquad \right) dx =$$

$$= \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \left(\qquad \right) - \left(\qquad \right) =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2:

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_{-1}^{4} x\left(\int_{(-4)\cdot x+(-1)}^{1\cdot x^2+(2)} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int x\left(y\Big|_{y=}^{y=}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int x\,(\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int x(\qquad)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \qquad dx$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\Big) -$$

$$-\Big(\qquad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad}\cdot(\qquad - \qquad) = \qquad.$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_{-1}^{4}\left(\int_{(-4)\cdot x+(-1)}^{1\cdot x^2+(2)} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=}^{y=}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \Big[(\quad)^2 - (\quad)^2\Big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \big[(\quad) - (\quad)\big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \big[\quad\big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big(\quad\Big)\Big| \; =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\quad\Big) -$$

$$- \Big(\quad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad}\cdot(\quad - \quad) = \quad .$$

Наносим центр тяжести $C(2.594, -0.750)$ на чертеж к задаче 1.

Решение (продолжение)

Шаг 5: находим моменты инерции относительно осей координат по формулам Правила П 4:

$$I_{OY} = \iint_G x^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{4} x^2 \left(\int_{(-4)\cdot x+(-1)}^{1\cdot x^2+(2)} dy \right) dx =$$

$$= \int x^2 \left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \int x^2 \left(\qquad \right) dx =$$

$$= \int x^2 (\qquad) dx =$$

$$= \int (\qquad) dx =$$

$$= \left(\qquad \right)\Big| =$$

$$= \left[\left(\qquad \right) - \left(\qquad \right) \right] =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 5: продолжение.

$$I_{\mathrm{OX}} = \iint_G y^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{4}\left(\int_{(-4)\cdot x+(-1)}^{1\cdot x^2+(2)} y^2\,dy\right)dx =$$

$$= \int \quad \left(\frac{y^3}{3}\Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \quad \left[\left(\qquad\qquad \right)^3 - \left(\qquad\qquad\qquad \right)^3\right] dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \quad [(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) -$$

$$- (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)]\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \quad [\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad]\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right) -\right.$$

$$\left. - \left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot(\qquad\qquad - \qquad\qquad) = \qquad\qquad .$$

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OY}} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OX}} =$

Выборочная проверка вариант 11 задача 1

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

I_{OY} (формат 1.23): введи Клик

I_{OX} (формат 1.23): введи Клик

Задача 2

Область ограничена линиями:

$$
\begin{aligned}
x &= x_{\max} = 4,\\
x &= x_{\min} = -1,\\
y &= 0,\\
y &= e^{-0.7x},\\
y &= 1 + 0.2 \cdot x.
\end{aligned}
$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь и координаты центра тяжести области (моменты инерции не вычислять).

Решение (по образцу примера П2)

Шаг 1: построение линий.

$\boldsymbol{y = 1 + 0.2 \cdot x}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_{\min} - 1 = -1 - 1 = -2$ до 1:

x	-2	-1	0	1
$y = 1 + 0.2 \cdot x$	0,6	0,8	1	1,2

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

$\boldsymbol{y = e^{-0.7x}}$ — экспонента, для ее построения табулируем:

x	-1	0	1	2	3	4	5
$y = e^{-0.7x}$	2	1	0,5	0,2	0,1	0,1	0

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим экспоненту по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{y = 0}$ — горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = 4}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(4, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = -1}$ — вертикальная прямая, проходящая через т. $(-1, 0)$ (**черным**).

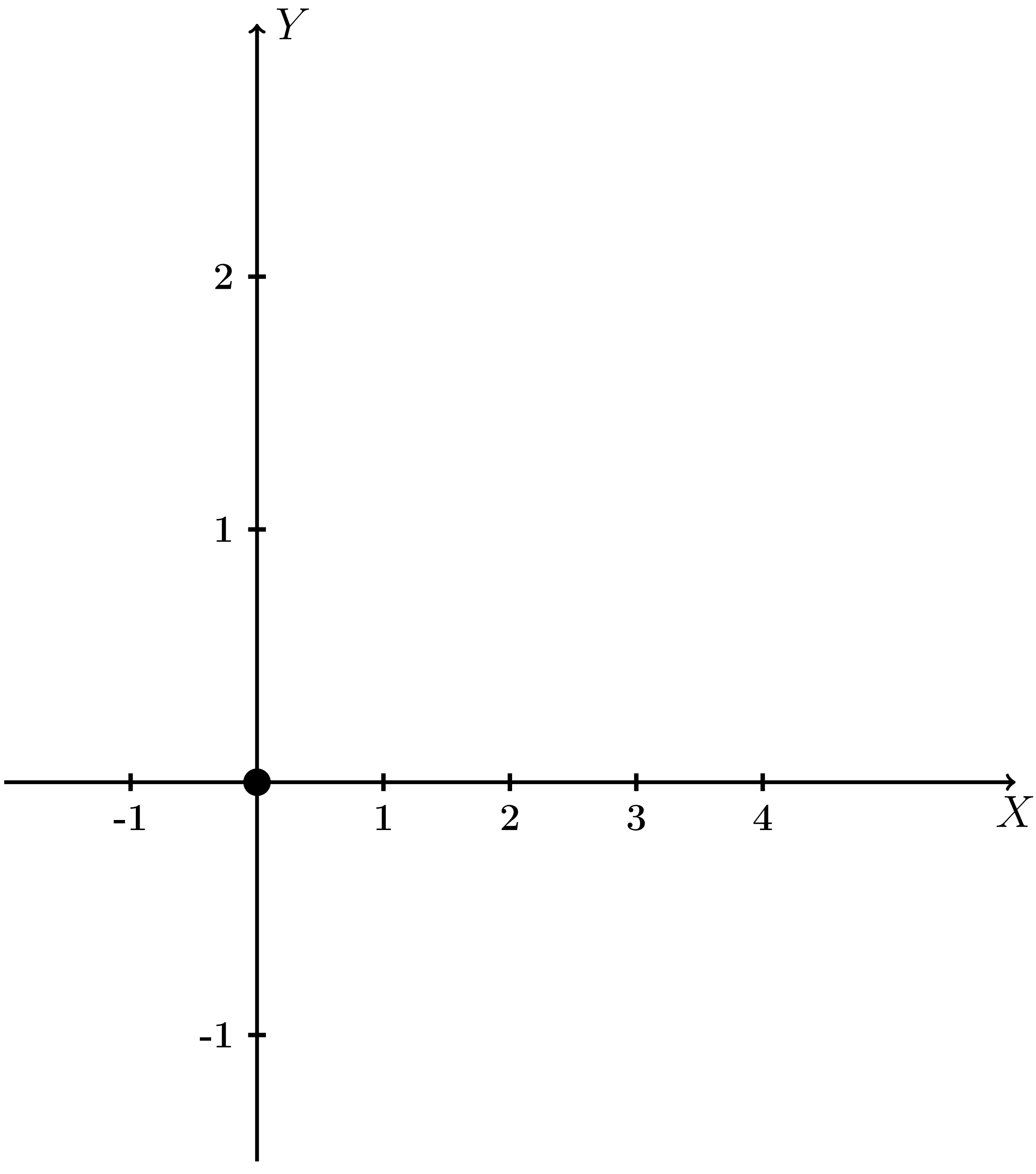

Рис.: Чертеж к задаче 2: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$\begin{aligned} x_{\text{лев}} &= && \text{— левая граница;} \\ x_{\text{прав}} &= && \text{— правая;} \\ y_{\text{низ}}(x) &= 0 && \text{— нижняя;} \\ y_{\text{верх}}(x) &= \begin{cases} & \text{при} \\ & \text{при} \end{cases} && \text{— верхняя (из 2х частей).} \end{aligned}$$

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6 с разбиением области интегрирования на две части согласно форме верхней границы. Для интегрирования экспоненты используется формула 7 таблицы 2.

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-1}^{0}\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл левый}} + \underbrace{\int_0^4\left(\int_0^{e^{-0.7x}} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл правый}} =$$

$$= \int \quad \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \quad\right) dx + \int \quad \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \quad\right) dx =$$

$$= \int \quad (\qquad\qquad) \, dx + \int \quad (\qquad\qquad) \, dx =$$

$$= \int \quad (\qquad) dx + \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad \right)\Big| + \left(\qquad \right)\Big| =$$

$$= \left[\left(\qquad \right) - \left(\qquad \right)\right] + \left[\quad - \quad \right] =$$

$$= \quad + \quad = \quad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2. Для интегрирования экспоненты используются формулы 7,8 таблицы 2.

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{0} x\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^{4} x\left(\int_0^{e^{-0.7x}} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad\right)dx + \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad (\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad\right)\Big| \quad + \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad\right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\Big) +$$

$$+\Big(\qquad\qquad\qquad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad}\cdot(\qquad + \qquad) = \qquad.$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{0}\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} y\,dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^4\left(\int_0^{e^{-0.7x}} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=} \qquad \right)dx + \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=} \qquad \right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad\qquad\qquad) \, dx + \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad\qquad) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \qquad\qquad\qquad dx + \frac{1}{2S}\int \qquad\qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad\qquad\qquad\qquad) \, dx + \frac{1}{2S}\int \qquad\qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right)\Big| \; + \frac{1}{2S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) +$$

$$+ \Big(\qquad\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot \qquad} \cdot (\qquad + \qquad) = \qquad .$$

Наносим центр тяжести $C(\qquad , \qquad)$ на чертеж к задаче 2.

Ответ

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Выборочная проверка вариант 11 задача 2

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

Задача 1.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

$I_{\mathrm{OY}} =$

$I_{\mathrm{OX}} =$

Задача 2.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Задача 1

Область ограничена линиями:

$$y = (-3)\cdot x + (6),$$
$$y = 1\cdot x^2 + (2),$$
$$x = x_{\max} = 3.$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь, координаты центра тяжести, и моменты инерции относительно осей координат.

Решение (по образцу примера П1)

Шаг 1: построение линий. Находим пересечение двух первых линий.

$$1\cdot x^2 + (2) = (-3)\cdot x + (6)$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$D = \quad = \quad .$

$x_1 = \quad = \quad ; \qquad x_2 = \quad = \quad .$

$\boldsymbol{y = (-3)\cdot x + (6)}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_1 - 1 =$ до $x_{\max} + 1 =$:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = (-3)\cdot x + (6)$	21	18	15	12	9	6	3	0	-3	-6

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

Решение (продолжение)

Шаг 1: продолжение.

$\boldsymbol{y = 1 \cdot x^2 + (2)}$ — парабола, для ее построения табулируем:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 1 \cdot x^2 + (2)$	27	18	11	6	3	2	3	6	11	18

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим параболу по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{x = 3}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(3, 0)$ (**на чертеже черным**).

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$x_{\text{лев}} =$ — левая граница;

$x_{\text{прав}} =$ — правая;

$y_{\text{низ}}(x) =$ — нижняя;

$y_{\text{верх}}(x) =$ — верхняя.

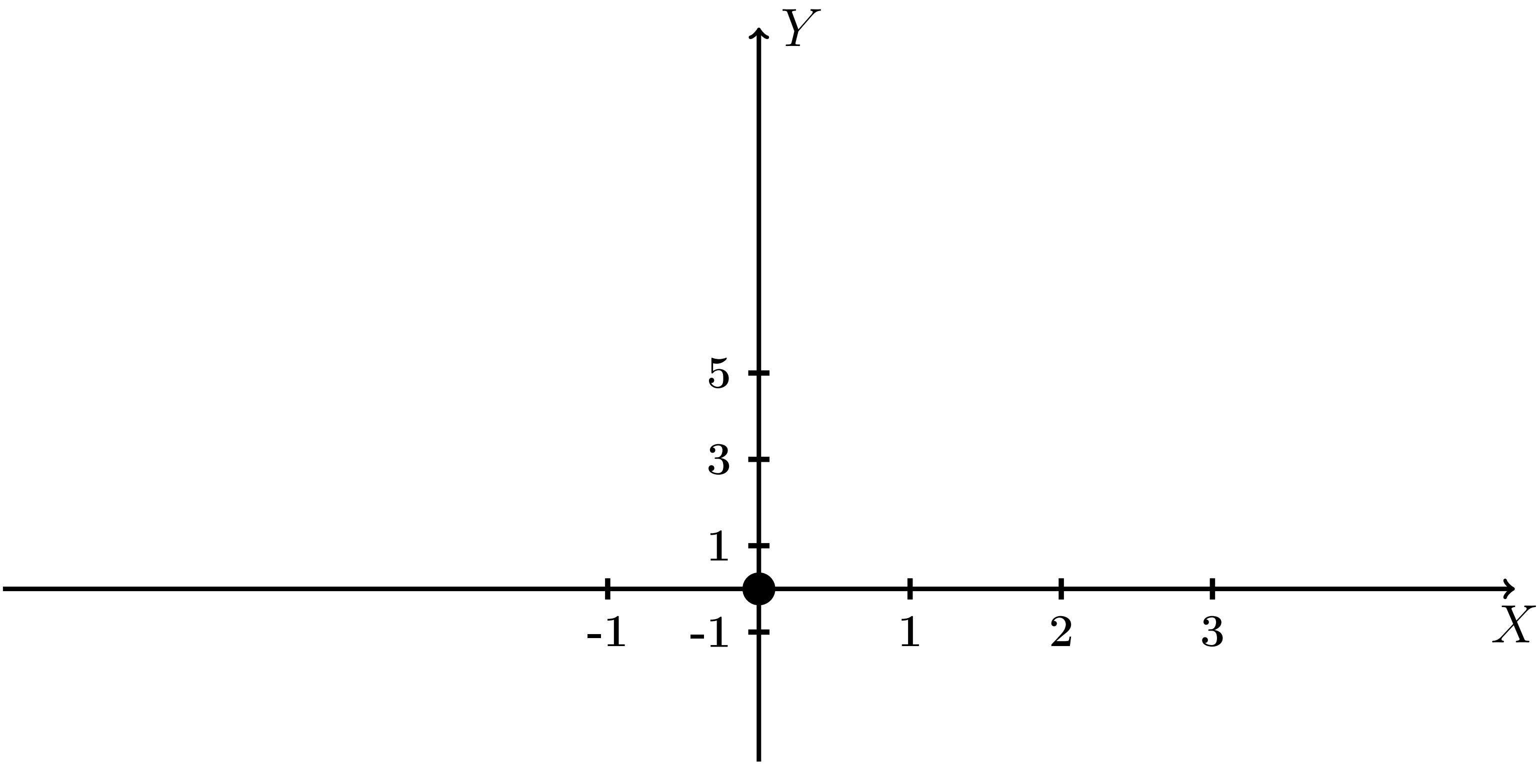

Рис.: Чертеж к задаче 1: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П 1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П 6:

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_1^3 \left(\int_{(-3)\cdot x+(6)}^{1\cdot x^2+(2)} dy \right) dx}_{\text{повторный интеграл}} =$$

$$= \int_1^3 \left(y \Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \int \left(\qquad - \qquad \right) dx =$$

$$= \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad \right) \Big| =$$

$$= \left(\qquad \right) - \left(\qquad \right) =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2:

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_1^3 x\left(\int_{(-3)\cdot x+(6)}^{1\cdot x^2+(2)} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad dx$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) -$$

$$- \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad} \cdot (\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_1^3 \left(\int_{(-3)\cdot x+(6)}^{1\cdot x^2+(2)} y\,dy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[\left(\qquad\qquad \right)^2 - \left(\qquad\qquad \right)^2\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[\left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right) - \left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right] dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) -$$

$$- \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad} \cdot \left(\qquad - \qquad \right) = \qquad .$$

Наносим центр тяжести $C(2.368, 3.358)$ на чертеж к задаче 1.

Решение (продолжение)

Шаг 5: находим моменты инерции относительно осей координат по формулам Правила П4:

$$I_{\text{OY}} = \iint_G x^2\,dx\,dy = \int_1^3 x^2 \left(\int_{(-3)\cdot x+(6)}^{1\cdot x^2+(2)} dy \right) dx =$$

$$= \int x^2 \left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \int x^2 \left(\qquad \right) dx =$$

$$= \int x^2 (\qquad) dx =$$

$$= \int (\qquad) dx =$$

$$= \left(\qquad \right)\Big| =$$

$$= \left[\left(\qquad \right) - \left(\qquad \right) \right] =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 5: продолжение.

$$I_{\mathrm{OX}} = \iint_G y^2\,dx\,dy = \int_1^3 \left(\int_{(-3)\cdot x+(6)}^{1\cdot x^2+(2)} y^2\,dy\right)dx =$$

$$= \int \left(\frac{y^3}{3}\Big|_{y=}^{y=}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \left[(\quad)^3 - (\quad)^3\right]dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \left[(\quad) -\right.$$

$$\left. -(\quad)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int [\quad]\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\quad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{3}\left[(\quad) -\right.$$

$$\left. -(\quad)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot(\quad - \quad) = \quad.$$

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OY}} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OX}} =$

Выборочная проверка вариант 12 задача 1

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

I_{OY} (формат 1.23): введи Клик

I_{OX} (формат 1.23): введи Клик

Задача 2

Область ограничена линиями:

$$
\begin{aligned}
x &= x_{\max} = 3,\\
x &= x_{\min} = -2,\\
y &= 0,\\
y &= e^{-0.7x},\\
y &= 1 + 0.4 \cdot x.
\end{aligned}
$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь и координаты центра тяжести области (моменты инерции не вычислять).

Решение (по образцу примера П2)

Шаг 1: построение линий.

$\boldsymbol{y = 1 + 0.4 \cdot x}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_{\min} - 1 = -2 - 1 = -3$ до 1:

x	-3	-2	-1	0	1
$y = 1 + 0.4 \cdot x$	$-0,2$	$0,2$	$0,6$	1	$1,4$

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

$\boldsymbol{y = e^{-0.7x}}$ — экспонента, для ее построения табулируем:

x	-1	0	1	2	3	4
$y = e^{-0.7x}$	2	1	$0,5$	$0,2$	$0,1$	$0,1$

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим экспоненту по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{y = 0}$ — горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = 3}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(3, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = -2}$ — вертикальная прямая, проходящая через т. $(-2, 0)$ (**черным**).

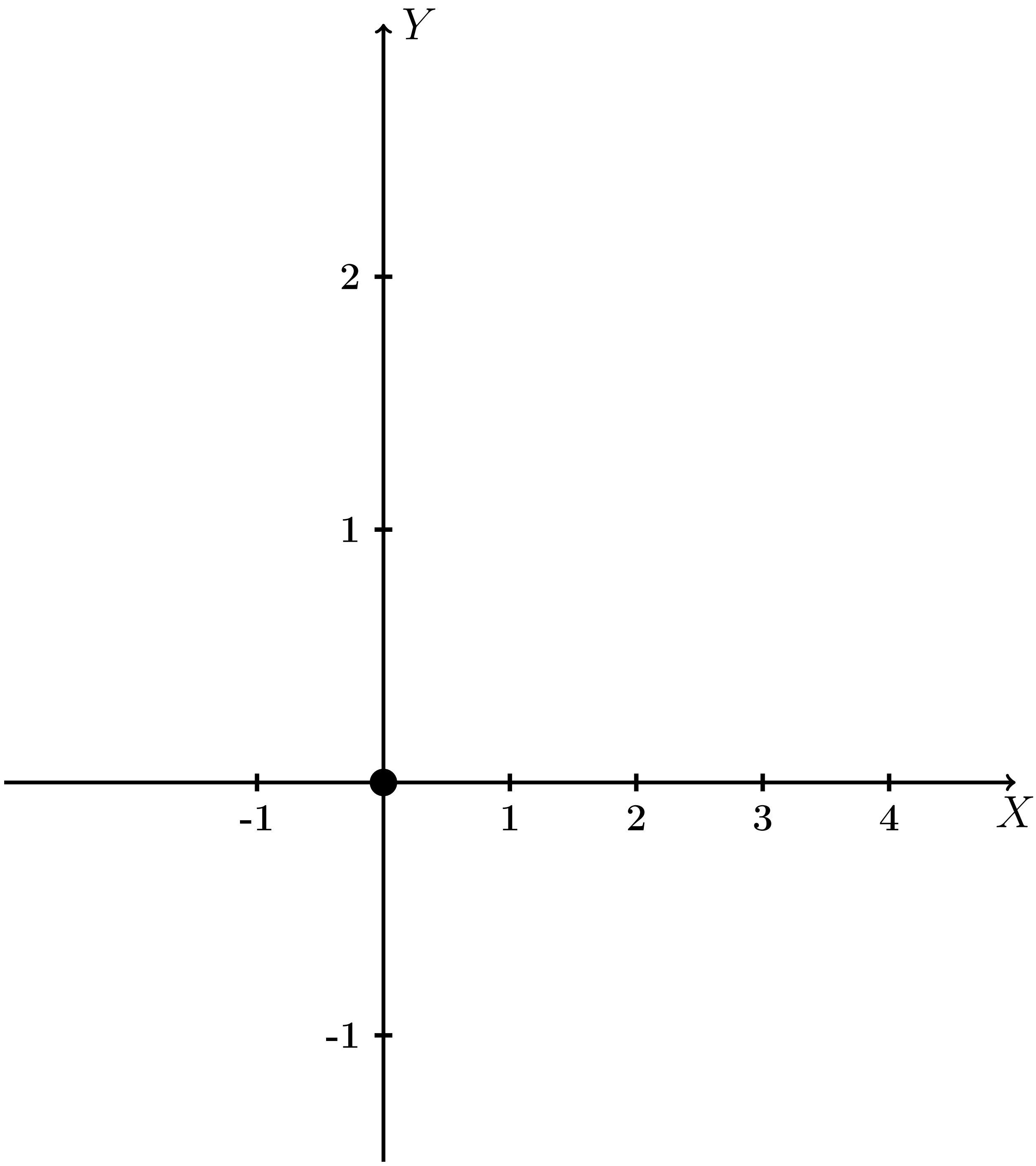

Рис.: Чертеж к задаче 2: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$x_{\text{лев}} = \qquad \text{– левая граница;}$$
$$x_{\text{прав}} = \qquad \text{– правая;}$$
$$y_{\text{низ}}(x) = 0 \qquad \text{– нижняя;}$$
$$y_{\text{верх}}(x) = \begin{cases} & \text{при} \\ & \text{при} \end{cases} \qquad \text{– верхняя (из 2х частей).}$$

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6 с разбиением области интегрирования на две части согласно форме верхней границы. Для интегрирования экспоненты используется формула 7 таблицы 2.

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-2}^{0}\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл левый}} + \underbrace{\int_0^3\left(\int_0^{e^{-0.7x}} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл правый}} =$$

$$= \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx + \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx =$$

$$= \int (\qquad) dx + \int (\qquad) dx =$$

$$= \int (\qquad) dx + \int \qquad dx =$$

$$= (\qquad)\Big| + (\qquad)\Big| =$$

$$= [(\qquad) - (\qquad)] + [\qquad - \qquad] =$$

$$= \qquad + \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2.
Для интегрирования экспоненты используются формулы 7,8 таблицы 2.

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0} x\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} dy\right) dx + \frac{1}{S}\int_0^3 x\left(\int_0^{e^{-0.7x}} dy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \quad\right) dx + \frac{1}{S}\int \ x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \quad\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \ x\,(\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad (\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \ + \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \ =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad \Big) +$$

$$+ \Big(\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad} \cdot (\qquad + \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0}\left(\int_{0}^{1+0.4\cdot x} y\,dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_{0}^{3}\left(\int_{0}^{e^{-0.7x}} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=} \quad\right)dx + \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=} \quad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad (\quad) \, dx + \frac{1}{2S}\int \quad (\quad) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad dx + \frac{1}{2S}\int \quad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad (\quad) \, dx + \frac{1}{2S}\int \quad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\quad \right)\Big| \quad + \frac{1}{2S}\left(\quad \right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\quad \Big) +$$

$$+ \Big(\quad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot \quad}\cdot(\quad + \quad) = \quad .$$

Наносим центр тяжести $C(\quad , \quad)$ на чертеж к задаче 2.

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

Выборочная проверка вариант 12 задача 2

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

Задача 1.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

$I_{\mathrm{OY}} =$

$I_{\mathrm{OX}} =$

Задача 2.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Задача 1

Область ограничена линиями:

$$y = (-3)\cdot x + (6),$$
$$y = 1\cdot x^2 + (2),$$
$$x = x_{\max} = 4.$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь, координаты центра тяжести, и моменты инерции относительно осей координат.

Решение (по образцу примера П1)

Шаг 1: построение линий. Находим пересечение двух первых линий.

$$1\cdot x^2 + (2) = (-3)\cdot x + (6)$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$D = \qquad = \qquad .$

$x_1 = \qquad = \qquad ; \qquad x_2 = \qquad = \qquad .$

$\boldsymbol{y = (-3)\cdot x + (6)}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_1 - 1 =$ до $x_{\max} + 1 =$:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = (-3)\cdot x + (6)$	21	18	15	12	9	6	3	0	−3	−6	−9

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

Решение (продолжение)

Шаг 1: продолжение.

$\boldsymbol{y = 1 \cdot x^2 + (2)}$ — парабола, для ее построения табулируем:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = 1 \cdot x^2 + (2)$	27	18	11	6	3	2	3	6	11	18	27

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим параболу по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{x = 4}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(4, 0)$ (**на чертеже черным**).

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$x_{\text{лев}}$ = – левая граница;

$x_{\text{прав}}$ = – правая;

$y_{\text{низ}}(x)$ = – нижняя;

$y_{\text{верх}}(x)$ = – верхняя.

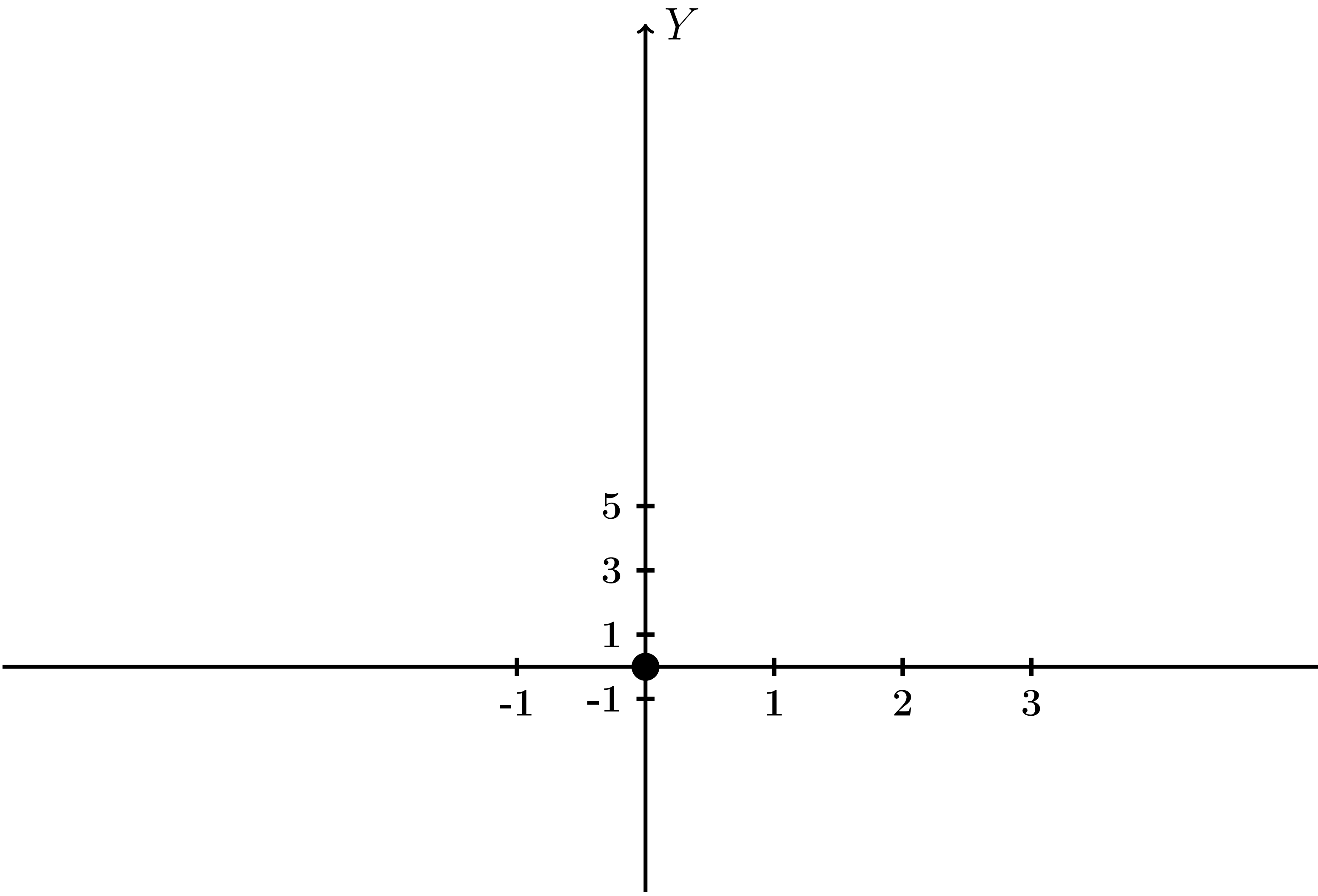

Рис.: Чертеж к задаче 1: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6:

$$\boxed{S} = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_1^4 \left(\int_{(-3)\cdot x+(6)}^{1\cdot x^2+(2)} dy \right) dx}_{\text{повторный интеграл}} =$$

$$= \int_1^4 \left(y \Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \int \left(\qquad - \qquad \right) dx =$$

$$= \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad \right) \Big| =$$

$$= \left(\qquad \right) - \left(\qquad \right) =$$

$$= \qquad - \qquad = \boxed{\qquad}.$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2:

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_1^4 x\left(\int_{(-3)\cdot x+(6)}^{1\cdot x^2+(2)} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int x\left(y\Big|_{y=}^{y=}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int x\,(\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int x(\qquad)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \qquad dx$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\Big) -$$

$$- \Big(\qquad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad}\cdot(\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_1^4 \left(\int_{(-3)\cdot x+(6)}^{1\cdot x^2+(2)} y\,dy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \Big[\big(\qquad \big)^2 - \big(\qquad \big)^2\Big] dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \ \big[\big(\qquad \big) - \big(\qquad \big)\big]\, dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \ \big[\qquad \big]\, dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big(\qquad \Big)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\qquad \Big) -$$

$$- \Big(\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad} \cdot \big(\qquad - \qquad \big) = \quad .$$

Наносим центр тяжести $C(3.071, 4.343)$ на чертеж к задаче 1.

Решение (продолжение)

Шаг 5: находим моменты инерции относительно осей координат по формулам Правила П4:

$$I_{\mathrm{OY}} = \iint_G x^2\,dx\,dy = \int_1^4 x^2 \left(\int_{(-3)\cdot x+(6)}^{1\cdot x^2+(2)} dy\right) dx =$$

$$= \int x^2 \left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \int x^2 \left(\qquad \right) dx =$$

$$= \int x^2 \left(\qquad \right) dx =$$

$$= \int \left(\qquad \right) dx =$$

$$= \left(\qquad \right)\Big| =$$

$$= \left[\left(\qquad \right) - \left(\qquad \right)\right] =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 5: продолжение.

$$I_{\mathrm{OX}} = \iint_G y^2\,dx\,dy = \int_1^4 \left(\int_{(-3)\cdot x+(6)}^{1\cdot x^2+(2)} y^2\,dy \right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{y^3}{3} \Big|_{y=}^{y=} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \left[(\quad)^3 - (\quad)^3 \right] dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \left[(\quad) - \right.$$

$$\left. - (\quad) \right] dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int [\quad] \, dx =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\quad \right) \Big| =$$

$$= \frac{1}{3} \left[(\quad) - \right.$$

$$\left. - (\quad) \right] =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (\quad - \quad) = \quad .$$

Вариант 13 задача 1, ответ, проверка

возврат огл таб. интегралов

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

$\boldsymbol{I}_{\mathrm{OY}} =$

$\boldsymbol{I}_{\mathrm{OX}} =$

Выборочная проверка вариант 13 задача 1

S (формат 1.23): введи [ ] Клик [ ]

x_C (формат 1.23): введи [ ] Клик [ ]

y_C (формат 1.23): введи [ ] Клик [ ]

I_{OY} (формат 1.23): введи [ ] Клик [ ]

I_{OX} (формат 1.23): введи [ ] Клик [ ]

Задача 2

Область ограничена линиями:

$$\begin{aligned} x &= x_{\max} = 4, \\ x &= x_{\min} = -2, \\ y &= 0, \\ y &= e^{-0.7x}, \\ y &= 1 + 0.4 \cdot x. \end{aligned}$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь и координаты центра тяжести области (моменты инерции не вычислять).

Решение (по образцу примера П2)

Шаг 1: построение линий.

$\boldsymbol{y = 1 + 0.4 \cdot x}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_{\min} - 1 = -2 - 1 = -3$ до 1:

x	-3	-2	-1	0	1
$y = 1 + 0.4 \cdot x$	$-0,2$	$0,2$	$0,6$	1	$1,4$

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

$\boldsymbol{y = e^{-0.7x}}$ — экспонента, для ее построения табулируем:

x	-1	0	1	2	3	4	5
$y = e^{-0.7x}$	2	1	$0,5$	$0,2$	$0,1$	$0,1$	0

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим экспоненту по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{y = 0}$ — горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = 4}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(4, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = -2}$ — вертикальная прямая, проходящая через т. $(-2, 0)$ (**черным**).

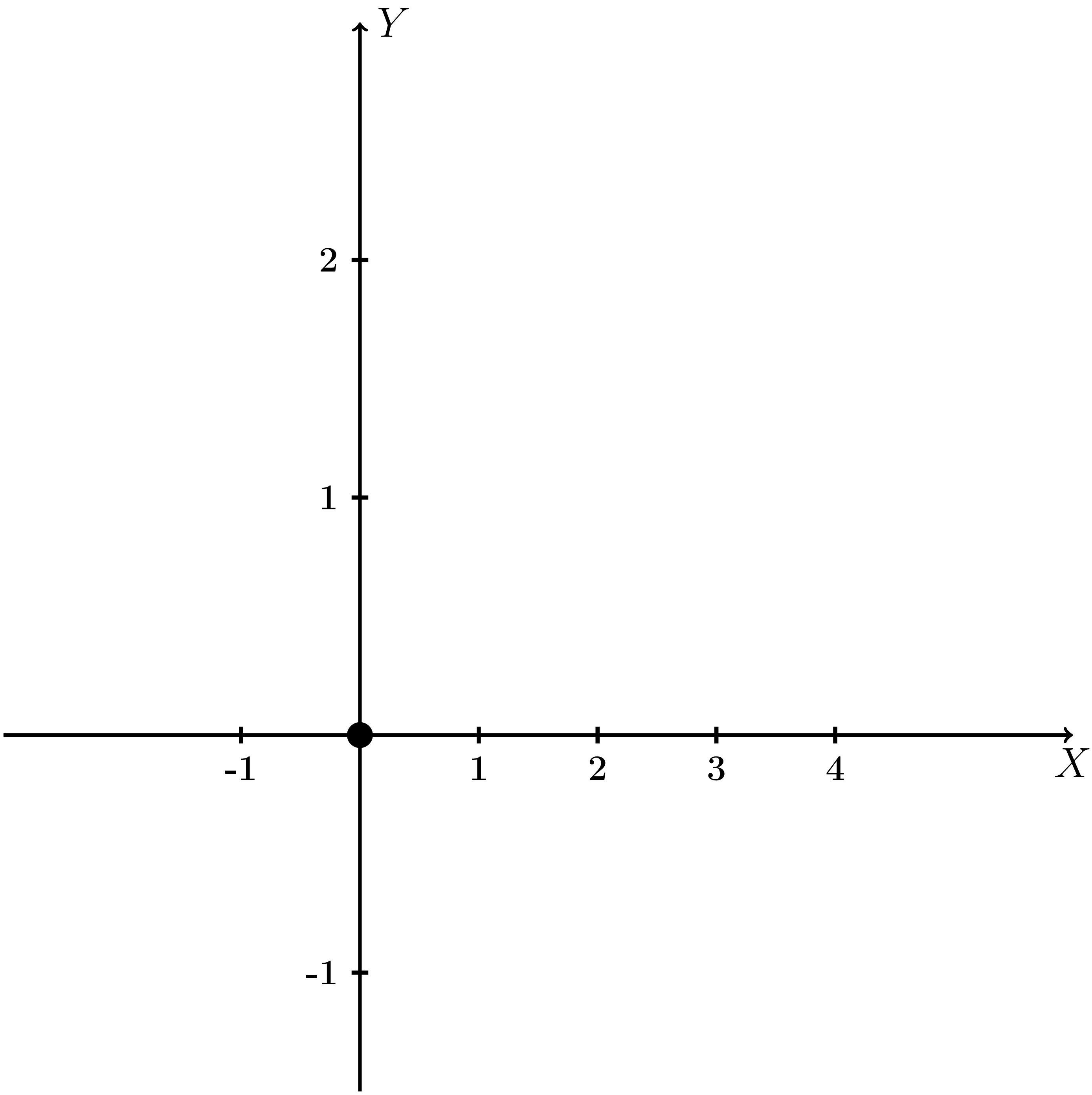

Рис.: Чертеж к задаче 2: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$
\begin{aligned}
x_{\text{лев}} &= && \text{— левая граница;}\\
x_{\text{прав}} &= && \text{— правая;}\\
y_{\text{низ}}(x) &= 0 && \text{— нижняя;}\\
y_{\text{верх}}(x) &= \begin{cases} & \text{при} \\ & \text{при} \end{cases} && \text{— верхняя (из 2х частей).}
\end{aligned}
$$

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6 с разбиением области интегрирования на две части согласно форме верхней границы. Для интегрирования экспоненты используется формула 7 таблицы 2.

$$
S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-2}^{0}\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл левый}} + \underbrace{\int_0^{4}\left(\int_0^{e^{-0.7x}} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл правый}} =
$$

$$
= \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx + \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx =
$$

$$
= \int (\qquad) \, dx + \int (\qquad) \, dx =
$$

$$
= \int (\qquad) dx + \int \qquad dx =
$$

$$
= (\qquad)\Big| + (\qquad)\Big| =
$$

$$
= [(\qquad) - (\qquad)] + [\qquad - \qquad] =
$$

$$
= \qquad + \qquad = \qquad .
$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2.
Для интегрирования экспоненты используются формулы 7,8 таблицы 2.

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0} x\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^4 x\left(\int_0^{e^{-0.7x}} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad \right)dx + \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad \right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad (\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad \right)\Big| \quad + \frac{1}{S}\left(\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad \Big) +$$

$$+ \Big(\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad}\cdot(\qquad + \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0}\left(\int_{0}^{1+0.4\cdot x} y\,dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_{0}^{4}\left(\int_{0}^{e^{-0.7x}} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=} \quad \right)dx + \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=} \quad \right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad) \, dx + \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \qquad dx + \frac{1}{2S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad) \, dx + \frac{1}{2S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\qquad \right)\Big| \quad + \frac{1}{2S}\left(\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\qquad \Big) +$$

$$+ \Big(\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot \quad} \cdot (\qquad + \qquad) = \qquad .$$

Наносим центр тяжести $C(\quad , \quad)$ на чертеж к задаче 2.

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

Выборочная проверка вариант 13 задача 2

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

Задача 1.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

$I_{\mathrm{OY}} =$

$I_{\mathrm{OX}} =$

Задача 2.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Задача 1

Область ограничена линиями:

$$\begin{aligned} y &= (-2)\cdot x + (5), \\ y &= 1\cdot x^2 + (2), \\ x &= x_{\max} = 3. \end{aligned}$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь, координаты центра тяжести, и моменты инерции относительно осей координат.

Решение (по образцу примера П1)

Шаг 1: построение линий. Находим пересечение двух первых линий.

$$1\cdot x^2 + (2) = (-2)\cdot x + (5)$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$D = \qquad = \qquad .$

$x_1 = \qquad = \qquad ; \qquad x_2 = \qquad = \qquad .$

$\boldsymbol{y = (-2)\cdot x + (5)}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_1 - 1 =$ до $x_{\max} + 1 =$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = (-2)\cdot x + (5)$	13	11	9	7	5	3	1	-1	-3

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

Решение (продолжение)

Шаг 1: продолжение.

$\boldsymbol{y = 1 \cdot x^2 + (2)}$ — парабола, для ее построения табулируем:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 1 \cdot x^2 + (2)$	18	11	6	3	2	3	6	11	18

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим параболу по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{x = 3}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(3, 0)$ (**на чертеже черным**).

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$
\begin{aligned}
x_{\text{лев}} &= && \text{— левая граница;}\\
x_{\text{прав}} &= && \text{— правая;}\\
y_{\text{низ}}(x) &= && \text{— нижняя;}\\
y_{\text{верх}}(x) &= && \text{— верхняя.}
\end{aligned}
$$

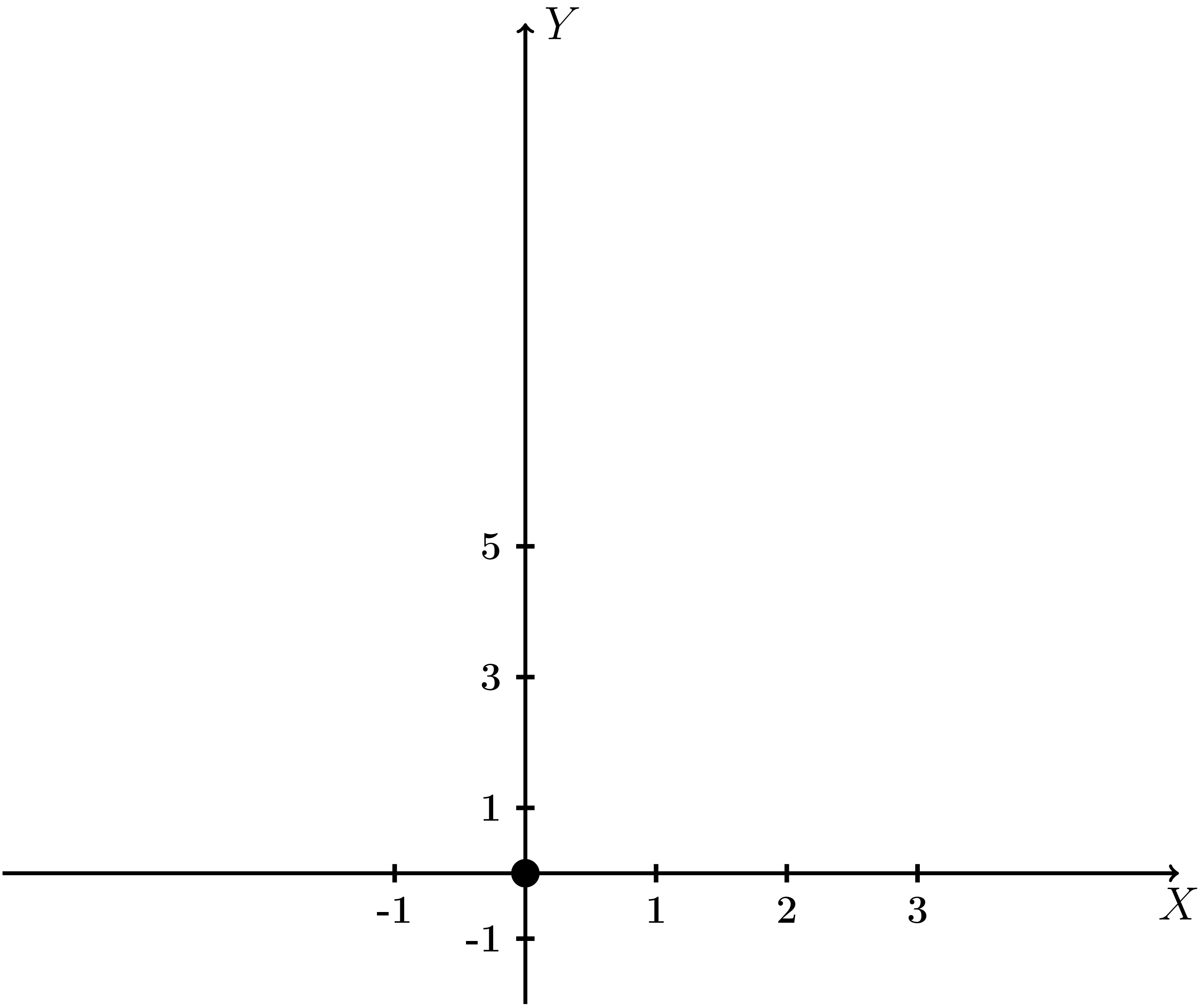

Рис.: Чертеж к задаче 1: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П 1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П 6:

$$\boxed{S} = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_1^3 \left(\int_{(-2)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(2)} dy \right) dx}_{\text{повторный интеграл}} =$$

$$= \int_1^3 \left(y \Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \int \left(\qquad - \qquad \right) dx =$$

$$= \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad \right) \Big| =$$

$$= \left(\qquad \right) - \left(\qquad \right) =$$

$$= \quad - \quad = \boxed{\quad} .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П 2:

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_1^3 x\left(\int_{(-2)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(2)} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int x\left(y\Big|_{y=}^{y=}\qquad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int x\,(\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int x(\qquad\qquad)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \qquad\qquad dx$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad\Big) -$$

$$- \Big(\qquad\qquad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad}\cdot(\qquad - \qquad) = \qquad.$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_1^3 \left(\int_{(-2)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(2)} y\,dy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Bigg|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \Big[\big(\qquad \big)^2 - \big(\qquad \big)^2\Big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \ \big[\big(\qquad \big) - \big(\qquad \big)\big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \ \big[\qquad \big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big(\qquad \Big)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\qquad \Big) -$$

$$- \Big(\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad} \cdot \big(\qquad - \qquad \big) = \qquad .$$

Наносим центр тяжести $C(2.375, 4.050)$ на чертеж к задаче 1.

Решение (продолжение)

Шаг 5: находим моменты инерции относительно осей координат по формулам Правила П4:

$$I_{\text{OY}} = \iint_G x^2\,dx\,dy = \int_1^3 x^2 \left(\int_{(-2)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(2)} dy \right) dx =$$

$$= \int \; x^2 \left(y \Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right) dx =$$

$$= \int \; x^2 \, (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) \, dx =$$

$$= \int \; x^2 (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) dx =$$

$$= \int \; (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) dx =$$

$$= \left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right) \Big| \; =$$

$$= \left[\left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right) - \left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right) \right] =$$

$$= \qquad - \qquad\qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 5: продолжение.

$$I_{\text{OX}} = \iint_G y^2\,dx\,dy = \int_1^3 \left(\int_{(-2)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(2)} y^2\,dy\right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{y^3}{3}\Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \Big[\big(\qquad \big)^3 - \big(\qquad \big)^3\Big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \big[\big(\qquad \big) -$$

$$- \big(\qquad \big)\big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \big[\qquad \big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\Big(\qquad \Big)\Big| =$$

$$= \frac{1}{3}\Big[\Big(\qquad \Big) -$$

$$- \Big(\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\big(\qquad - \qquad \big) = \qquad .$$

Ответ

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

$I_{\mathrm{OY}} =$

$I_{\mathrm{OX}} =$

Выборочная проверка вариант 14 задача 1

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

I_{OY} (формат 1.23): введи Клик

I_{OX} (формат 1.23): введи Клик

Задача 2

Область ограничена линиями:

$$x = x_{\max} = 3,$$
$$x = x_{\min} = -1,$$
$$y = 0,$$
$$y = e^{-0.7x},$$
$$y = 1 + 0.4 \cdot x.$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь и координаты центра тяжести области (моменты инерции не вычислять).

Решение (по образцу примера П2)

Шаг 1: построение линий.

$\boldsymbol{y = 1 + 0.4 \cdot x}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_{\min} - 1 = -1 - 1 = -2$ до 1:

x	-2	-1	0	1
$y = 1 + 0.4 \cdot x$	0,2	0,6	1	1,4

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

$\boldsymbol{y = e^{-0.7x}}$ — экспонента, для ее построения табулируем:

x	-1	0	1	2	3	4
$y = e^{-0.7x}$	2	1	0,5	0,2	0,1	0,1

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим экспоненту по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{y = 0}$ — горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = 3}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(3, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = -1}$ — вертикальная прямая, проходящая через т. $(-1, 0)$ (**черным**).

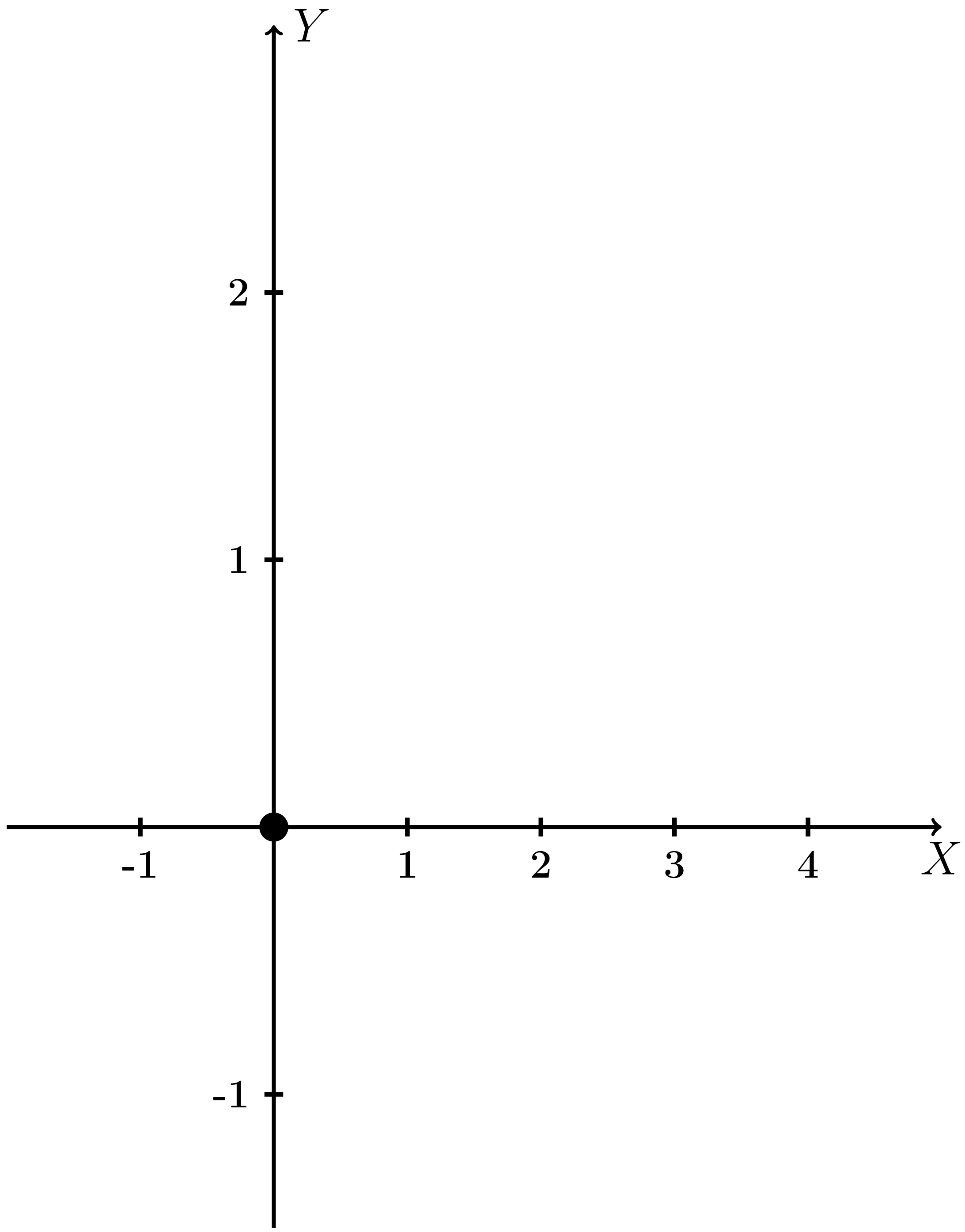

Рис.: Чертеж к задаче 2: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$
\begin{aligned}
x_{\text{лев}} &= && \text{– левая граница;}\\
x_{\text{прав}} &= && \text{– правая;}\\
y_{\text{низ}}(x) &= 0 && \text{– нижняя;}\\
y_{\text{верх}}(x) &= \begin{cases} & \text{при} \\ & \text{при} \end{cases} && \text{– верхняя (из 2х частей).}
\end{aligned}
$$

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6 с разбиением области интегрирования на две части согласно форме верхней границы. Для интегрирования экспоненты используется формула 7 таблицы 2.

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-1}^{0}\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} dy\right)dx}_{\text{повторный интеграл левый}} + \underbrace{\int_0^3\left(\int_0^{e^{-0.7x}} dy\right)dx}_{\text{повторный интеграл правый}} =$$

$$= \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx + \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx =$$

$$= \int \quad (\qquad) \, dx + \int \quad (\qquad) \, dx =$$

$$= \int \quad (\qquad) dx + \int \qquad dx =$$

$$= (\qquad)\Big| \; + (\qquad)\Big| =$$

$$= [(\qquad) - (\qquad)] + [\qquad - \qquad] =$$

$$= \qquad + \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2.
Для интегрирования экспоненты используются формулы 7,8 таблицы 2.

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{0} x\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^{3} x\left(\int_0^{e^{-0.7x}} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad\right)dx + \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad (\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \quad + \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad \Big) +$$

$$+ \Big(\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad} \cdot (\qquad + \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{0}\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} y\,dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^3\left(\int_0^{e^{-0.7x}} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=}\right)dx + \frac{1}{S}\int\left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int (\quad) \,dx + \frac{1}{2S}\int (\quad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad dx + \frac{1}{2S}\int \quad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int (\quad)\,dx + \frac{1}{2S}\int \quad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\quad\right)\Big| + \frac{1}{2S}\left(\quad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\quad\Big) +$$

$$+\Big(\quad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot}\cdot(\quad + \quad) = \quad.$$

Наносим центр тяжести $C(\quad,\quad)$ на чертеж к задаче 2.

Вариант 14 задача 2, ответ, проверка

возврат огл таб. интегралов

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

Выборочная проверка вариант 14 задача 2

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

Задача 1.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

$I_{\mathrm{OY}} =$

$I_{\mathrm{OX}} =$

Задача 2.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Задача 1

Область ограничена линиями:

$$\begin{aligned} y &= (-2)\cdot x + (5), \\ y &= 1\cdot x^2 + (2), \\ x &= x_{\max} = 4. \end{aligned}$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь, координаты центра тяжести, и моменты инерции относительно осей координат.

Решение (по образцу примера П1)

Шаг 1: построение линий. Находим пересечение двух первых линий.

$$1\cdot x^2 + (2) = (-2)\cdot x + (5)$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$D = \qquad = \qquad .$

$x_1 = \qquad = \qquad ; \qquad x_2 = \qquad = \qquad .$

$\boldsymbol{y = (-2)\cdot x + (5)}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_1 - 1 =$ до $x_{\max} + 1 =$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = (-2)\cdot x + (5)$	13	11	9	7	5	3	1	−1	−3	−5

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

Решение (продолжение)

Шаг 1: продолжение.
$\boldsymbol{y = 1 \cdot x^2 + (2)}$ — парабола, для ее построения табулируем:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = 1 \cdot x^2 + (2)$	18	11	6	3	2	3	6	11	18	27

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим параболу по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{x = 4}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(4, 0)$ (**на чертеже черным**).

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$
\begin{aligned}
x_{\text{лев}} &= && \text{– левая граница;}\\
x_{\text{прав}} &= && \text{– правая;}\\
y_{\text{низ}}(x) &= && \text{– нижняя;}\\
y_{\text{верх}}(x) &= && \text{– верхняя.}
\end{aligned}
$$

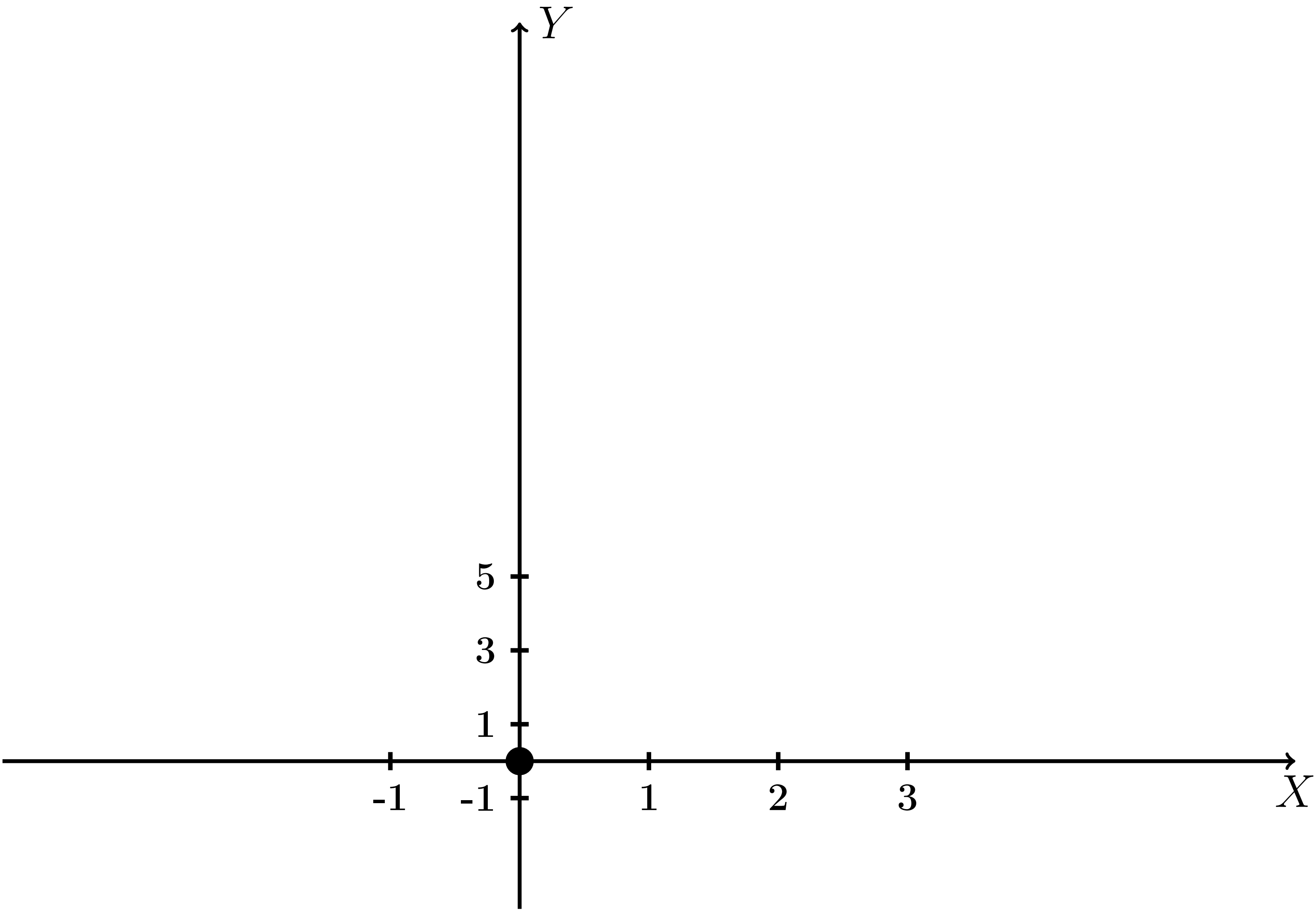

Рис.: Чертеж к задаче 1: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П 1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П 6:

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_1^4 \left(\int_{(-2)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(2)} dy \right) dx}_{\text{повторный интеграл}} =$$

$$= \int_1^4 \left(y \Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \int \left(\qquad - \qquad \right) dx =$$

$$= \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad \right) \Big| =$$

$$= \left(\qquad \right) - \left(\qquad \right) =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2:

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_1^4 x\left(\int_{(-2)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(2)} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad dx$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) -$$

$$- \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad} \cdot (\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_1^4 \left(\int_{(-2)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(2)} y\,dy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \Big[(\qquad)^2 - (\qquad)^2\Big] dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \ [(\qquad) - (\qquad)]\, dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \ [\qquad]\, dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big(\qquad \Big)\Big| \ =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\qquad \Big) -$$

$$- \Big(\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad}\cdot (\qquad - \qquad) = \quad .$$

Наносим центр тяжести $C(3.083, 5.400)$ на чертеж к задаче 1.

Решение (продолжение)

Шаг 5: находим моменты инерции относительно осей координат по формулам Правила П4:

$$I_{\text{OY}} = \iint_G x^2\,dx\,dy = \int_1^4 x^2 \left(\int_{(-2)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(2)} dy \right) dx =$$

$$= \int \ x^2 \left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \int \ x^2 (\qquad\qquad) \, dx =$$

$$= \int \ x^2 (\qquad\qquad) dx =$$

$$= \int \ (\qquad\qquad) dx =$$

$$= \Big(\qquad\qquad \Big)\Big| =$$

$$= \Big[\Big(\qquad \Big) - \Big(\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 5: продолжение.

$$I_{\mathrm{OX}} = \iint_G y^2\,dx\,dy = \int_1^4 \left(\int_{(-2)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(2)} y^2\,dy\right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{y^3}{3}\Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \left[\left(\qquad\qquad \right)^3 - \left(\qquad\qquad \right)^3\right] dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \left[\left(\qquad\qquad \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\qquad\qquad \right)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \left[\qquad\qquad \right] dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\qquad\qquad \right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\qquad\qquad \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\qquad\qquad \right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(\qquad - \qquad \right) = \qquad .$$

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

$\boldsymbol{I}_{\rm OY} =$

$\boldsymbol{I}_{\rm OX} =$

Выборочная проверка вариант 15 задача 1

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

$I_{\rm OY}$ (формат 1.23): введи Клик

$I_{\rm OX}$ (формат 1.23): введи Клик

Задача 2

Область ограничена линиями:

$$
\begin{aligned}
x &= x_{\max} = 4, \\
x &= x_{\min} = -1, \\
y &= 0, \\
y &= e^{-0.7x}, \\
y &= 1 + 0.4 \cdot x.
\end{aligned}
$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь и координаты центра тяжести области (моменты инерции не вычислять).

Решение (по образцу примера П2)

Шаг 1: построение линий.

$\boldsymbol{y = 1 + 0.4 \cdot x}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_{\min} - 1 = -1 - 1 = -2$ до 1:

x	-2	-1	0	1
$y = 1 + 0.4 \cdot x$	0,2	0,6	1	1,4

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

$\boldsymbol{y = e^{-0.7x}}$ — экспонента, для ее построения табулируем:

x	-1	0	1	2	3	4	5
$y = e^{-0.7x}$	2	1	0,5	0,2	0,1	0,1	0

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим экспоненту по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{y = 0}$ — горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = 4}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(4, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = -1}$ — вертикальная прямая, проходящая через т. $(-1, 0)$ (**черным**).

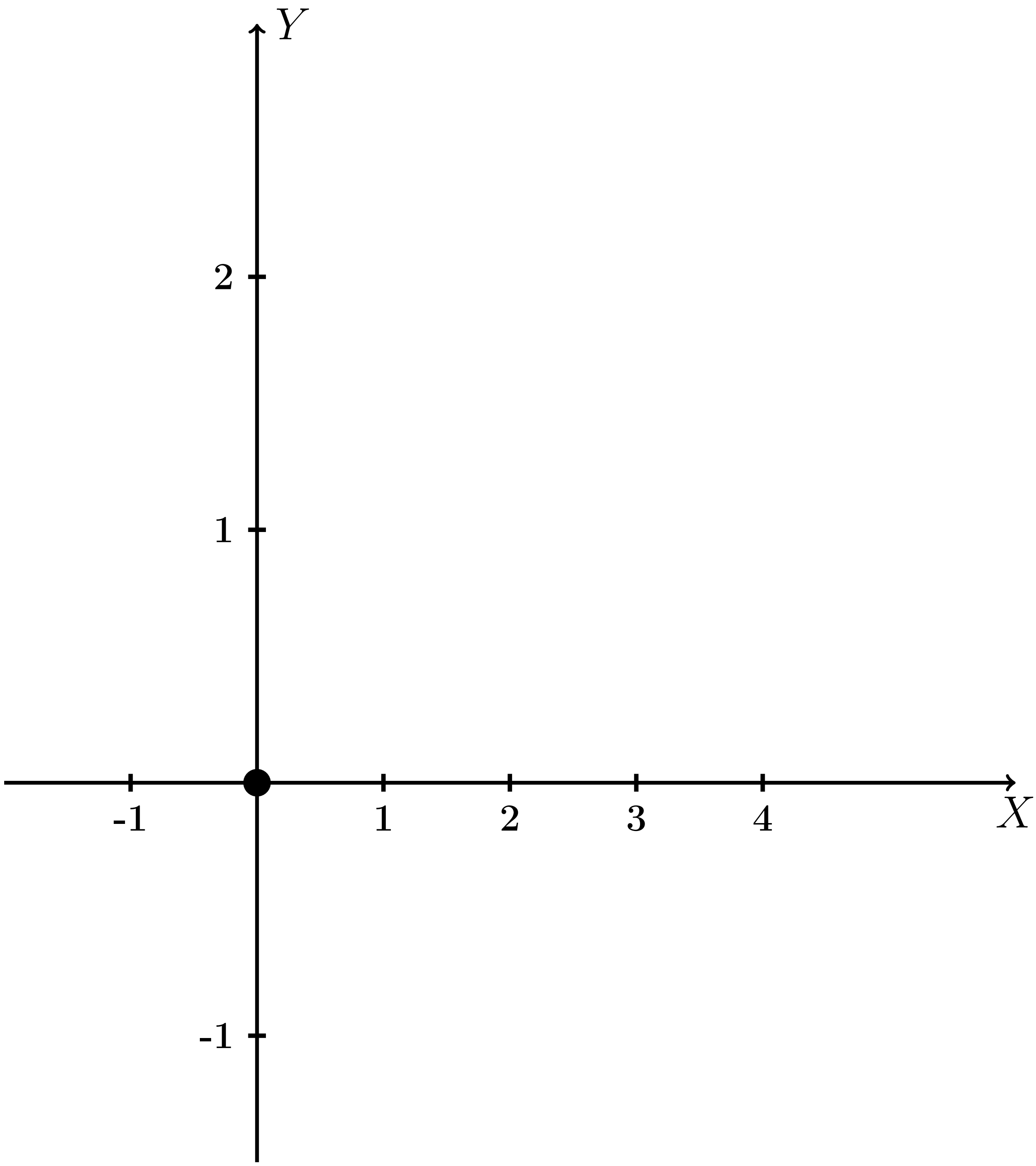

Рис.: Чертеж к задаче 2: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$\begin{aligned} x_{\text{лев}} &= && \text{— левая граница;} \\ x_{\text{прав}} &= && \text{— правая;} \\ y_{\text{низ}}(x) &= 0 && \text{— нижняя;} \\ y_{\text{верх}}(x) &= \begin{cases} & \text{при} \\ & \text{при} \end{cases} && \text{— верхняя (из 2х частей).} \end{aligned}$$

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6 с разбиением области интегрирования на две части согласно форме верхней границы. Для интегрирования экспоненты используется формула 7 таблицы 2.

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-1}^{0}\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} dy\right)dx}_{\text{повторный интеграл левый}} + \underbrace{\int_0^4\left(\int_0^{e^{-0.7x}} dy\right)dx}_{\text{повторный интеграл правый}} =$$

$$= \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx + \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx =$$

$$= \int \quad (\qquad\qquad) \, dx + \int \quad (\qquad\qquad) \, dx =$$

$$= \int \quad (\qquad) dx + \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad \right)\Big| + \left(\qquad \right)\Big| =$$

$$= \left[\left(\qquad \right) - \left(\qquad \right)\right] + \left[\qquad - \qquad \right] =$$

$$= \qquad + \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2. Для интегрирования экспоненты используются формулы 7,8 таблицы 2.

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{0} x\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} dy\right) dx + \frac{1}{S}\int_0^4 x\left(\int_0^{e^{-0.7x}} dy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \quad\right) dx + \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \quad\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\quad) \, dx + \frac{1}{S}\int \quad x\,(\quad) \, dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad (\quad) \, dx + \frac{1}{S}\int \quad dx =$$

$$= \frac{1}{S}\left(\quad \right)\Big| \quad + \frac{1}{S}\left(\quad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\quad \Big) +$$

$$+ \Big(\quad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad} \cdot (\quad + \quad) = \quad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{0}\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} y\,dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^4\left(\int_0^{e^{-0.7x}} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=}\right)dx + \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int (\qquad) dx + \frac{1}{2S}\int (\qquad) dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \qquad dx + \frac{1}{2S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int (\qquad) dx + \frac{1}{2S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\qquad\right)\Big| + \frac{1}{2S}\left(\qquad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\qquad\Big) +$$

$$+\Big(\qquad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot}\cdot(\quad + \quad) = \quad .$$

Наносим центр тяжести $C(\quad,\quad)$ на чертеж к задаче 2.

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

Выборочная проверка вариант 15 задача 2

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

Задача 1.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

$I_{\mathrm{OY}} =$

$I_{\mathrm{OX}} =$

Задача 2.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Задача 1

Область ограничена линиями:

$$
\begin{aligned}
y &= (-5)\cdot x + (-3),\\
y &= 1\cdot x^2 + (1),\\
x &= x_{\max} = 3.
\end{aligned}
$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь, координаты центра тяжести, и моменты инерции относительно осей координат.

Решение (по образцу примера П1)

Шаг 1: построение линий. Находим пересечение двух первых линий.

$$1\cdot x^2 + (1) = (-5)\cdot x + (-3)$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$D = \qquad = \qquad .$

$x_1 = \qquad = \qquad ; \qquad x_2 = \qquad = \qquad .$

$\boldsymbol{y = (-5)\cdot x + (-3)}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_1 - 1 = \qquad$ до $x_{\max} + 1 = \qquad$:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = (-5)\cdot x + (-3)$	22	17	12	7	2	−3	−8	−13	−18	−23

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

Решение (продолжение)

Шаг 1: продолжение.

$\boldsymbol{y = 1 \cdot x^2 + (1)}$ — парабола, для ее построения табулируем:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 1 \cdot x^2 + (1)$	26	17	10	5	2	1	2	5	10	17

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим параболу по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{x = 3}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(3, 0)$ (**на чертеже черным**).

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$\begin{aligned} x_{\text{лев}} &= && \text{– левая граница;} \\ x_{\text{прав}} &= && \text{– правая;} \\ y_{\text{низ}}(x) &= && \text{– нижняя;} \\ y_{\text{верх}}(x) &= && \text{– верхняя.} \end{aligned}$$

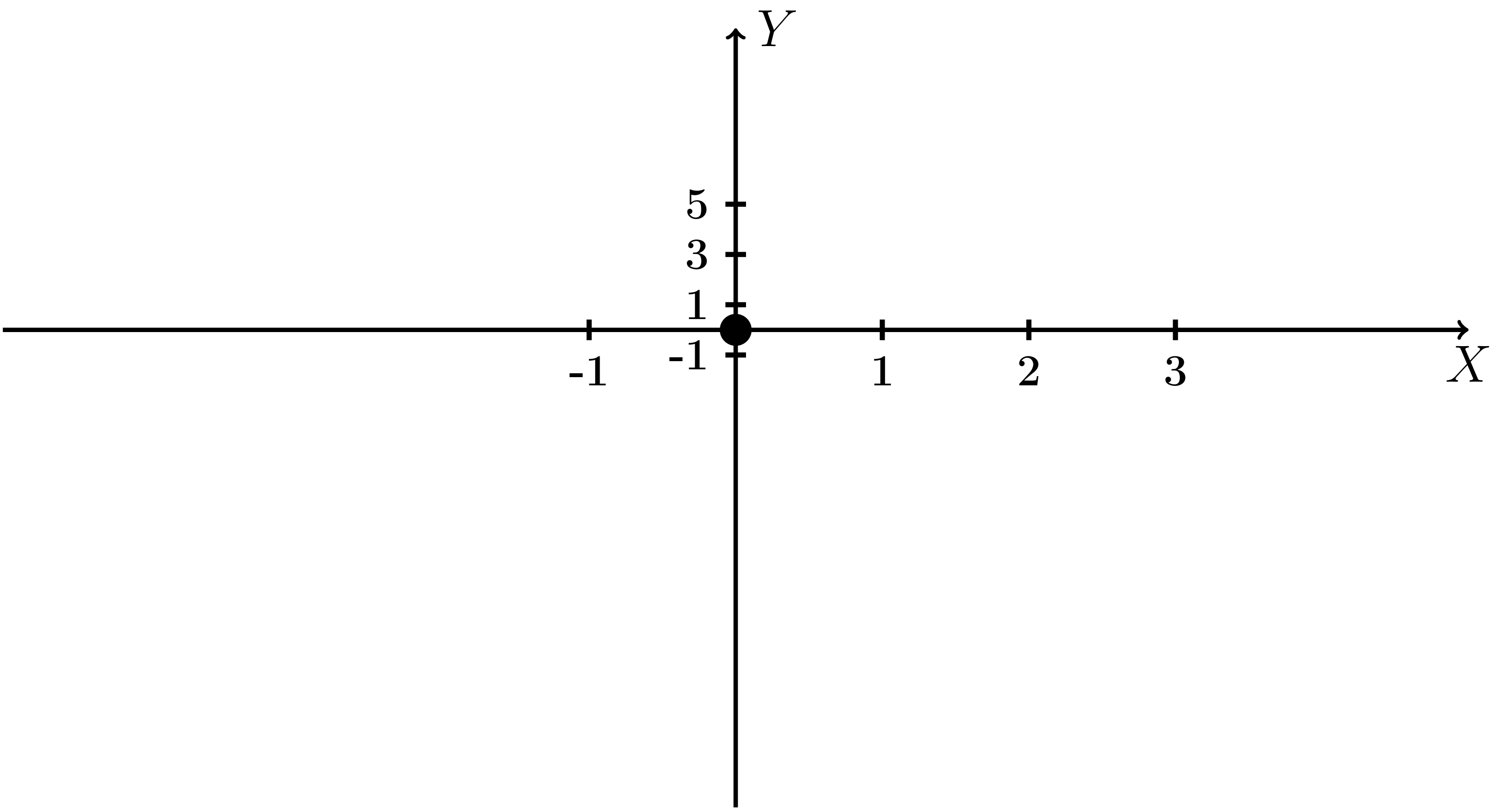

Рис.: Чертеж к задаче 1: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6:

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-1}^{3}\left(\int_{(-5)\cdot x+(-3)}^{1\cdot x^2+(1)} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл}} =$$

$$= \int_{-1}^{3}\left(y\Big|_{y=}^{y=}\qquad\right) dx =$$

$$= \int \left(\qquad - \qquad \right) dx =$$

$$= \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad\right)\Big| \quad =$$

$$= \left(\qquad\right) - \left(\qquad\right) =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2:

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_{-1}^{3} x\left(\int_{(-5)\cdot x+(-3)}^{1\cdot x^2+(1)} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x(\qquad\qquad\qquad\qquad)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad dx$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) -$$

$$- \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad}\cdot(\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_{-1}^{3}\left(\int_{(-5)\cdot x+(-3)}^{1\cdot x^2+(1)} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad \Big[(\qquad\qquad)^2 - (\qquad\qquad\qquad)^2\Big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad [(\qquad\qquad\qquad\qquad) - (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad [\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\Big)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\Big) -$$

$$- \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad} \cdot (\qquad\quad - \qquad\quad) = \qquad .$$

Наносим центр тяжести $C(1.824, -3.506)$ на чертеж к задаче 1.

Решение (продолжение)

Шаг 5: находим моменты инерции относительно осей координат по формулам Правила П 4:

$$I_{\mathrm{OY}} = \iint_G x^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{3} x^2 \left(\int_{(-5)\cdot x+(-3)}^{1\cdot x^2+(1)} dy \right) dx =$$

$$= \int \quad x^2 \left(y \Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \int \quad x^2 \, (\qquad\qquad) \, dx =$$

$$= \int \quad x^2 (\qquad\qquad) dx =$$

$$= \int \quad (\qquad\qquad) dx =$$

$$= \left(\qquad\qquad \right) \Big| \quad =$$

$$= \Big[\Big(\qquad\qquad \Big) - \Big(\qquad\qquad \Big) \Big] =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 5: продолжение.

$$I_{\mathrm{OX}} = \iint_G y^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{3}\left(\int_{(-5)\cdot x+(-3)}^{1\cdot x^2+(1)} y^2\,dy\right)dx =$$

$$= \int \left(\frac{y^3}{3}\Big|_{y=}^{y=}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \Big[(\quad)^3 - (\quad)^3\Big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int [(\quad) -$$

$$-(\quad)]\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int [\quad]\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}(\quad)\Big| =$$

$$= \frac{1}{3}\Big[(\quad) -$$

$$-(\quad)\Big] =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot(\quad - \quad) = \quad .$$

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OY}} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OX}} =$

Выборочная проверка вариант 16 задача 1

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

I_{OY} (формат 1.23): введи Клик

I_{OX} (формат 1.23): введи Клик

Задача 2

Область ограничена линиями:

$$
\begin{aligned}
x &= x_{\max} = 3, \\
x &= x_{\min} = -2, \\
y &= 0, \\
y &= e^{-0.4x}, \\
y &= 1 + 0.2 \cdot x.
\end{aligned}
$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь и координаты центра тяжести области (моменты инерции не вычислять).

Решение (по образцу примера П2)

Шаг 1: построение линий.

$\boldsymbol{y = 1 + 0.2 \cdot x}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_{\min} - 1 = -2 - 1 = -3$ до 1:

x	-3	-2	-1	0	1
$y = 1 + 0.2 \cdot x$	0,4	0,6	0,8	1	1,2

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

$\boldsymbol{y = e^{-0.4x}}$ — экспонента, для ее построения табулируем:

x	-1	0	1	2	3	4
$y = e^{-0.4x}$	1,5	1	0,7	0,4	0,3	0,2

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим экспоненту по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{y = 0}$ — горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = 3}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(3, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = -2}$ — вертикальная прямая, проходящая через т. $(-2, 0)$ (**черным**).

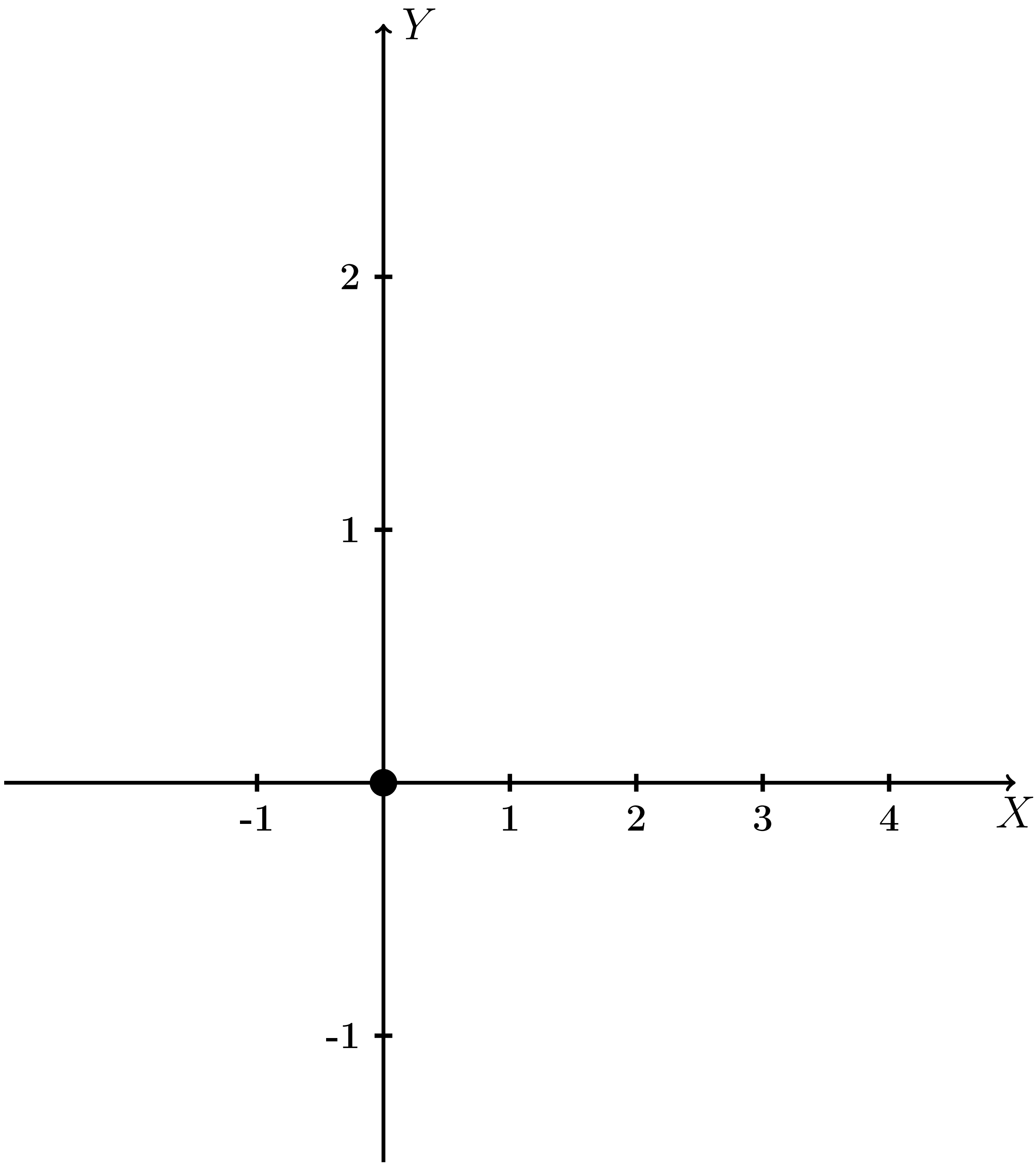

Рис.: Чертеж к задаче 2: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$x_{\text{лев}} = \qquad \text{— левая граница;}$$
$$x_{\text{прав}} = \qquad \text{— правая;}$$
$$y_{\text{низ}}(x) = 0 \qquad \text{— нижняя;}$$
$$y_{\text{верх}}(x) = \begin{cases} & \text{при} \\ & \text{при} \end{cases} \qquad \text{— верхняя (из 2х частей).}$$

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6 с разбиением области интегрирования на две части согласно форме верхней границы. Для интегрирования экспоненты используется формула 7 таблицы 2.

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-2}^{0}\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} dy\right)dx}_{\text{повторный интеграл левый}} + \underbrace{\int_0^3\left(\int_0^{e^{-0.4x}} dy\right)dx}_{\text{повторный интеграл правый}} =$$

$$= \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx + \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx =$$

$$= \int (\qquad) \, dx + \int (\qquad) \, dx =$$

$$= \int (\qquad) dx + \int \qquad dx =$$

$$= (\qquad)\Big| + (\qquad)\Big| =$$

$$= [(\qquad) - (\qquad)] + [\qquad - \qquad] =$$

$$= \qquad + \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2.
Для интегрирования экспоненты используются формулы 7,8 таблицы 2.

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0} x\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} dy\right) dx + \frac{1}{S}\int_0^{3} x\left(\int_0^{e^{-0.4x}} dy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad \right) dx + \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad (\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \quad + \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad \Big) +$$

$$+ \Big(\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad}\cdot(\qquad + \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0}\left(\int_{0}^{1+0.2\cdot x} y\,dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_{0}^{3}\left(\int_{0}^{e^{-0.4x}} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=} \quad\right)dx + \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=} \quad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad (\quad) \, dx + \frac{1}{2S}\int \quad (\quad) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad dx + \frac{1}{2S}\int \quad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad (\quad) \, dx + \frac{1}{2S}\int \quad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\quad \right)\Big| \quad + \frac{1}{2S}\left(\quad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\quad \Big) +$$

$$+ \Big(\quad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot \quad}\cdot(\quad + \quad) = \quad .$$

Наносим центр тяжести $C(\quad , \quad)$ на чертеж к задаче 2.

Ответ

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Выборочная проверка вариант 16 задача 2

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

Задача 1.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

$I_{\mathrm{OY}} =$

$I_{\mathrm{OX}} =$

Задача 2.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Задача 1

Область ограничена линиями:

$$\begin{aligned} y &= (-5)\cdot x + (-3), \\ y &= 1\cdot x^2 + (1), \\ x &= x_{\max} = 4. \end{aligned}$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь, координаты центра тяжести, и моменты инерции относительно осей координат.

Решение (по образцу примера П1)

Шаг 1: построение линий. Находим пересечение двух первых линий.

$$1\cdot x^2 + (1) = (-5)\cdot x + (-3)$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$D = \qquad = \qquad .$$

$$x_1 = \qquad = \qquad ; \qquad x_2 = \qquad = \qquad .$$

$\boldsymbol{y = (-5)\cdot x + (-3)}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_1 - 1 =$ до $x_{\max} + 1 =$:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = (-5)\cdot x + (-3)$	22	17	12	7	2	-3	-8	-13	-18	-23	-28

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

Решение (продолжение)

Шаг 1: продолжение.

$\boldsymbol{y = 1 \cdot x^2 + (1)}$ — парабола, для ее построения табулируем:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = 1 \cdot x^2 + (1)$	26	17	10	5	2	1	2	5	10	17	26

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим параболу по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{x = 4}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(4, 0)$ (**на чертеже черным**).

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$
\begin{aligned}
x_{\text{лев}} &= && \text{– левая граница;} \\
x_{\text{прав}} &= && \text{– правая;} \\
y_{\text{низ}}(x) &= && \text{– нижняя;} \\
y_{\text{верх}}(x) &= && \text{– верхняя.}
\end{aligned}
$$

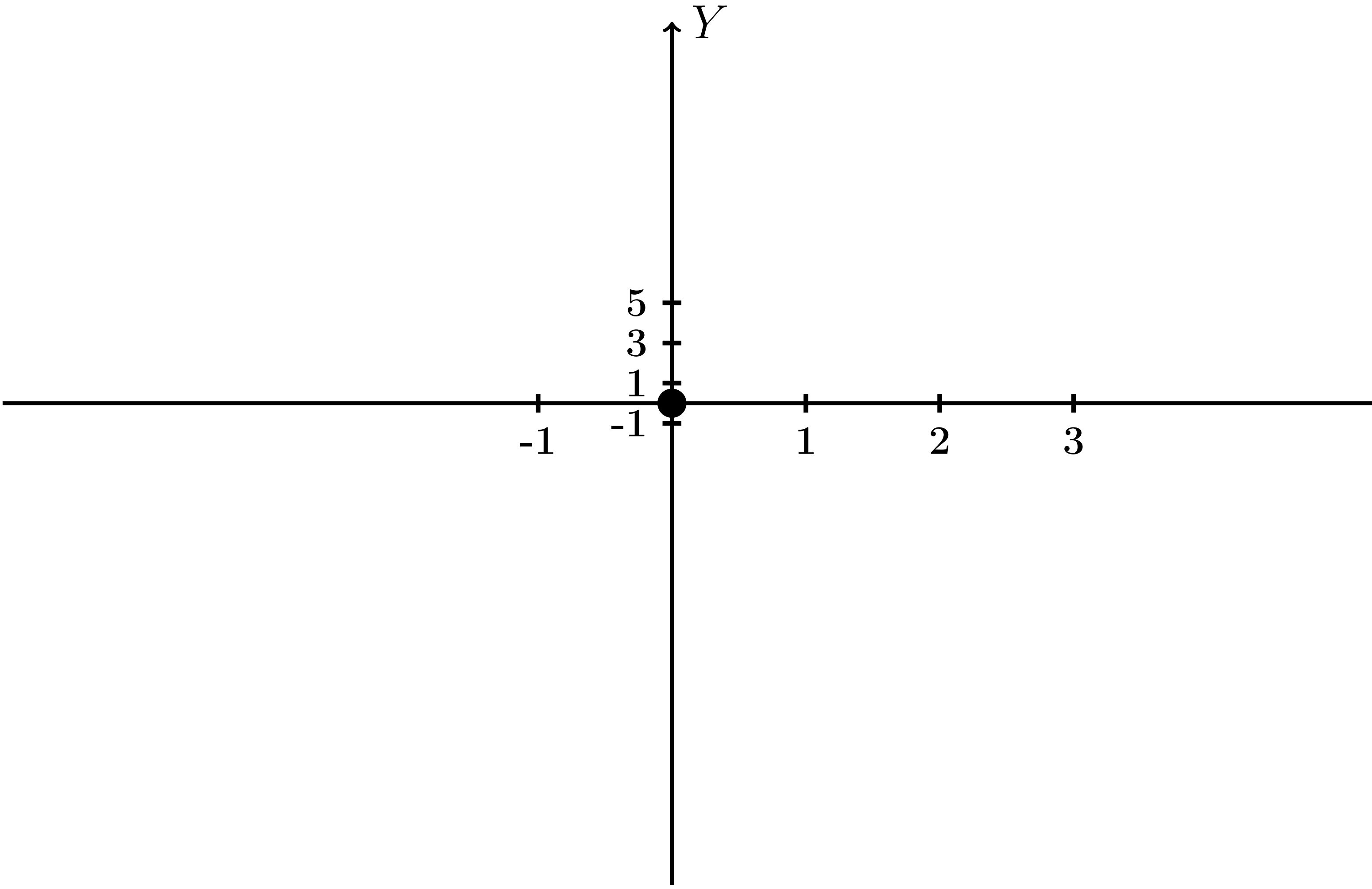

Рис.: Чертеж к задаче 1: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6:

$$\boxed{S} = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-1}^{4}\left(\int_{(-5)\cdot x+(-3)}^{1\cdot x^2+(1)} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл}} =$$

$$= \int_{-1}^{4}\left(y\Big|_{y=}^{y=}\qquad\right) dx =$$

$$= \int \left(\qquad - \qquad \right) dx =$$

$$= \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \left(\qquad \right) - \left(\qquad \right) =$$

$$= \qquad - \qquad = \boxed{\qquad}\,.$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2:

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_{-1}^{4} x\left(\int_{(-5)\cdot x+(-3)}^{1\cdot x^2+(1)} dy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad dx$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) -$$

$$- \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad} \cdot (\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_{-1}^{4}\left(\int_{(-5)\cdot x+(-3)}^{1\cdot x^2+(1)} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad \Big[\big(\qquad\qquad \big)^2 - \big(\qquad\qquad\qquad \big)^2\Big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad [(\qquad\qquad\qquad\qquad) - (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad [\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) -$$

$$- \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad}\cdot(\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Наносим центр тяжести $C(2.553, -3.526)$ на чертеж к задаче 1.

Решение (продолжение)

Шаг 5: находим моменты инерции относительно осей координат по формулам Правила П 4:

$$I_{\text{OY}} = \iint_G x^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{4} x^2 \left(\int_{(-5)\cdot x+(-3)}^{1\cdot x^2+(1)} dy \right) dx =$$

$$= \int \quad x^2 \left(y \Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right) dx =$$

$$= \int \quad x^2 \left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right) dx =$$

$$= \int \quad x^2 (\qquad\qquad\qquad\qquad) dx =$$

$$= \int \quad (\qquad\qquad\qquad\qquad) dx =$$

$$= \left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right) \Big| \quad =$$

$$= \Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) - \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) \Big] =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 5: продолжение.

$$I_{\mathrm{OX}} = \iint_G y^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{4}\left(\int_{(-5)\cdot x+(-3)}^{1\cdot x^2+(1)} y^2\,dy\right)dx =$$

$$= \int \left(\frac{y^3}{3}\Big|_{y=}^{y=}\qquad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \left[(\qquad)^3 - (\qquad)^3\right]dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \left[(\qquad) - \right.$$

$$\left. - (\qquad)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \left[\qquad\right]dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\qquad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\qquad\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\qquad\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot(\qquad - \qquad) = \qquad.$$

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OY}} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OX}} =$

Выборочная проверка вариант 17 задача 1

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

I_{OY} (формат 1.23): введи Клик

I_{OX} (формат 1.23): введи Клик

Задача 2

Область ограничена линиями:

$$\begin{aligned} x &= x_{\max} = 4, \\ x &= x_{\min} = -2, \\ y &= 0, \\ y &= e^{-0.4x}, \\ y &= 1 + 0.2 \cdot x. \end{aligned}$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь и координаты центра тяжести области (моменты инерции не вычислять).

Решение (по образцу примера П2)

Шаг 1: построение линий.

$\boldsymbol{y = 1 + 0.2 \cdot x}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_{\min} - 1 = -2 - 1 = -3$ до 1:

x	-3	-2	-1	0	1
$y = 1 + 0.2 \cdot x$	0,4	0,6	0,8	1	1,2

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

$\boldsymbol{y = e^{-0.4x}}$ — экспонента, для ее построения табулируем:

x	-1	0	1	2	3	4	5
$y = e^{-0.4x}$	1,5	1	0,7	0,4	0,3	0,2	0,1

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим экспоненту по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{y = 0}$ — горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = 4}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(4, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = -2}$ — вертикальная прямая, проходящая через т. $(-2, 0)$ (**черным**).

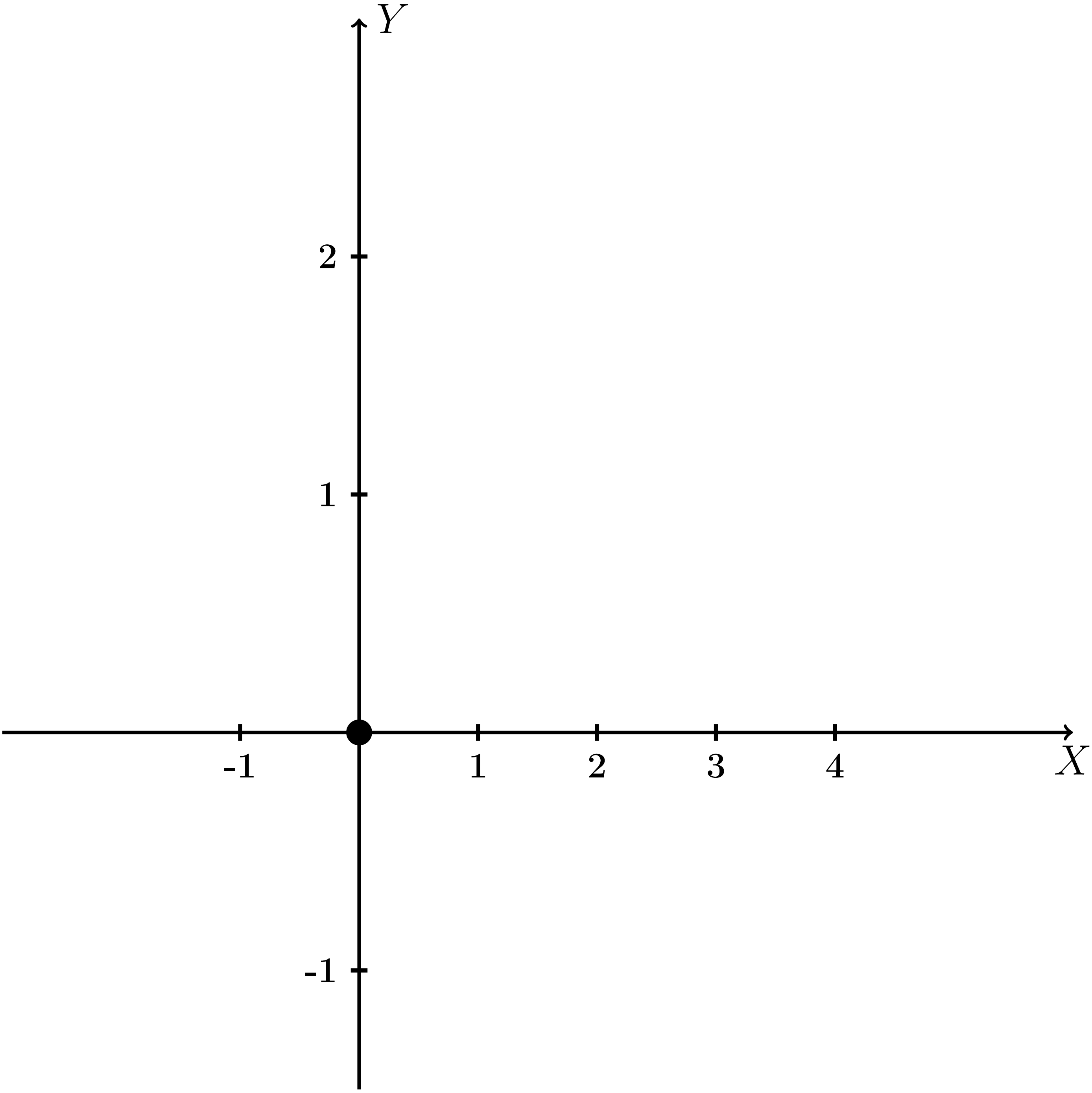

Рис.: Чертеж к задаче 2: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$x_{\text{лев}} = \qquad \text{— левая граница;}$$
$$x_{\text{прав}} = \qquad \text{— правая;}$$
$$y_{\text{низ}}(x) = 0 \qquad \text{— нижняя;}$$
$$y_{\text{верх}}(x) = \begin{cases} & \text{при} \\ & \text{при} \end{cases} \qquad \text{— верхняя (из 2х частей).}$$

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6 с разбиением области интегрирования на две части согласно форме верхней границы. Для интегрирования экспоненты используется формула 7 таблицы 2.

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-2}^{0}\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} dy\right)dx}_{\text{повторный интеграл левый}} + \underbrace{\int_0^4\left(\int_0^{e^{-0.4x}} dy\right)dx}_{\text{повторный интеграл правый}} =$$

$$= \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx + \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx =$$

$$= \int (\qquad) \, dx + \int (\qquad) \, dx =$$

$$= \int (\qquad) dx + \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad \right)\Big| + \left(\qquad \right)\Big| =$$

$$= \left[\left(\qquad \right) - \left(\qquad \right) \right] + \left[\qquad - \qquad \right] =$$

$$= \qquad + \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2. Для интегрирования экспоненты используются формулы 7,8 таблицы 2.

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0} x\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^4 x\left(\int_0^{e^{-0.4x}} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \quad\right)dx + \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \quad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad (\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad \right)\Big| \quad + \frac{1}{S}\left(\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad \Big) +$$

$$+ \Big(\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad} \cdot (\quad + \quad) = \quad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0}\left(\int_{0}^{1+0.2\cdot x} y\,dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_{0}^{4}\left(\int_{0}^{e^{-0.4x}} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \left(\left.\frac{y^2}{2}\right|_{y=0}^{y=}\right)dx + \frac{1}{S}\int \left(\left.\frac{y^2}{2}\right|_{y=0}^{y=}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int (\qquad) \, dx + \frac{1}{2S}\int (\qquad)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \qquad dx + \frac{1}{2S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int (\qquad)\, dx + \frac{1}{2S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\qquad\right)\Big| + \frac{1}{2S}\left(\qquad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\qquad\Big) +$$

$$+ \Big(\qquad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot} \cdot (\qquad + \qquad) = \qquad .$$

Наносим центр тяжести $C(\qquad,\qquad)$ на чертеж к задаче 2.

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

Выборочная проверка вариант 17 задача 2

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

Задача 1.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

$I_{\mathrm{OY}} =$

$I_{\mathrm{OX}} =$

Задача 2.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Задача 1

Область ограничена линиями:

$$y = (-4)\cdot x + (-2),$$
$$y = 1\cdot x^2 + (1),$$
$$x = x_{\max} = 3.$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь, координаты центра тяжести, и моменты инерции относительно осей координат.

Решение (по образцу примера П1)

Шаг 1: построение линий. Находим пересечение двух первых линий.

$$1\cdot x^2 + (1) = (-4)\cdot x + (-2)$$
$$= 0$$
$$= 0$$

$D = \qquad = \qquad .$

$x_1 = \qquad = \qquad ; \qquad x_2 = \qquad = \qquad .$

$\boldsymbol{y = (-4)\cdot x + (-2)}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_1 - 1 = \qquad$ до $x_{\max} + 1 = \qquad$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = (-4)\cdot x + (-2)$	14	10	6	2	-2	-6	-10	-14	-18

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

Решение (продолжение)

Шаг 1: продолжение.

$\boldsymbol{y = 1 \cdot x^2 + (1)}$ — парабола, для ее построения табулируем:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 1 \cdot x^2 + (1)$	17	10	5	2	1	2	5	10	17

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим параболу по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{x = 3}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(3, 0)$ (**на чертеже черным**).

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$
\begin{aligned}
x_{\text{лев}} &= && \text{– левая граница;}\\
x_{\text{прав}} &= && \text{– правая;}\\
y_{\text{низ}}(x) &= && \text{– нижняя;}\\
y_{\text{верх}}(x) &= && \text{– верхняя.}
\end{aligned}
$$

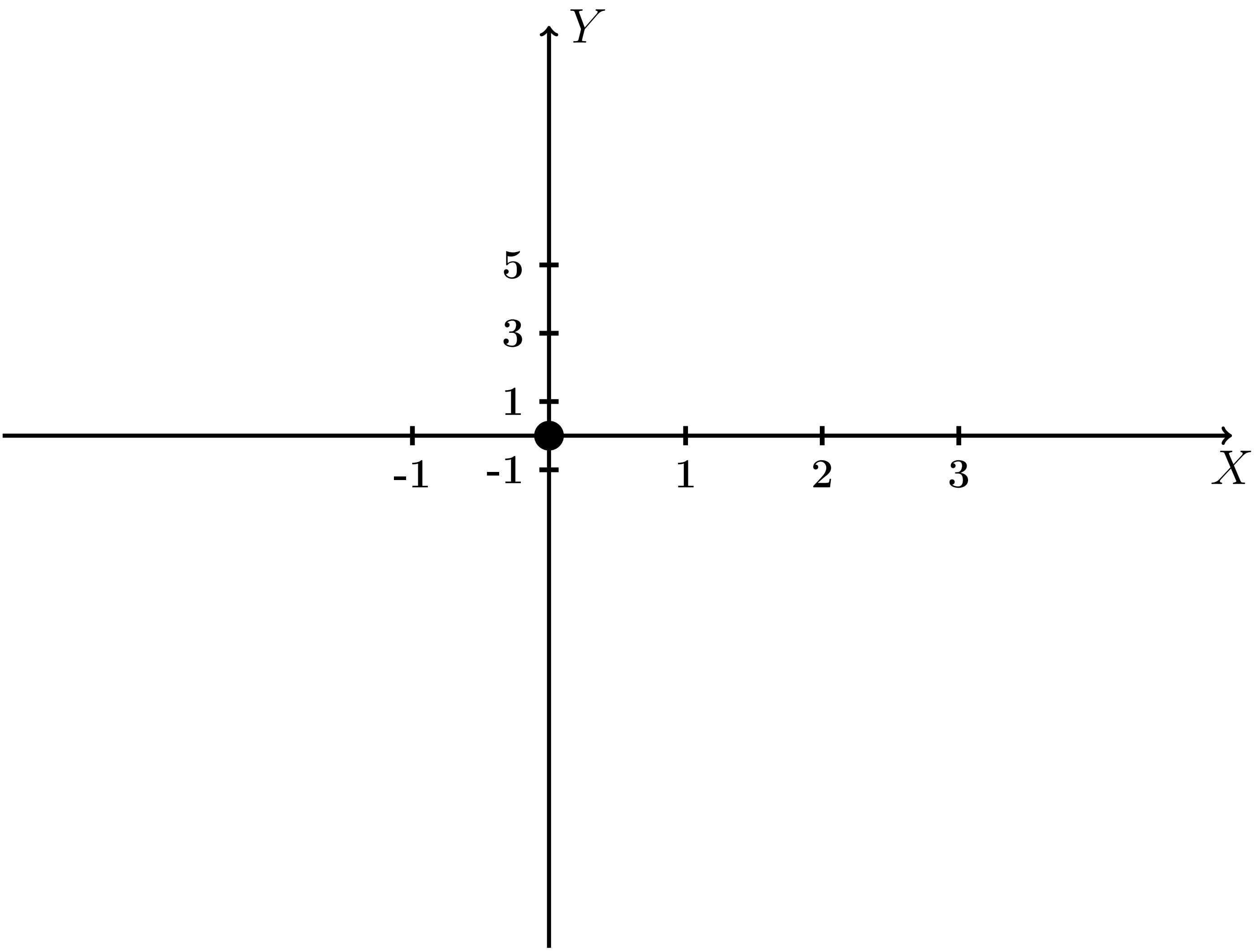

Рис.: Чертеж к задаче 1: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П 1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П 6:

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-1}^{3} \left(\int_{(-4)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(1)} dy \right) dx}_{\text{повторный интеграл}} =$$

$$= \int_{-1}^{3} \left(y \Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \int \Big(\qquad - \qquad \Big)\, dx =$$

$$= \int \qquad dx =$$

$$= \Big(\qquad \Big)\Big| \quad =$$

$$= \Big(\qquad \Big) - \Big(\qquad \Big) =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2:

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_{-1}^{3} x\left(\int_{(-4)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(1)} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad \right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x(\qquad\qquad)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \qquad\qquad dx$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad \Big) -$$

$$- \Big(\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad}\cdot(\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_{-1}^{3}\left(\int_{(-4)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(1)} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=}^{y=}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \Big[(\quad)^2 - (\quad)^2\Big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[(\quad) - (\quad)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[\quad\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big(\quad\Big)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\quad\Big) -$$

$$- \Big(\quad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad}\cdot(\quad - \quad) = \quad .$$

Наносим центр тяжести $C(1.857, -2.114)$ на чертеж к задаче 1.

Решение (продолжение)

Шаг 5: находим моменты инерции относительно осей координат по формулам Правила П4:

$$I_{\mathrm{OY}} = \iint_G x^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{3} x^2 \left(\int_{(-4)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(1)} dy \right) dx =$$

$$= \int \quad x^2 \left(y \Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \int \quad x^2 \left(\qquad \right) dx =$$

$$= \int \quad x^2 (\qquad) dx =$$

$$= \int \quad (\qquad) dx =$$

$$= \left(\qquad \right) \Big| \quad =$$

$$= \left[\left(\qquad \right) - \left(\qquad \right) \right] =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 5: продолжение.

$$I_{\text{OX}} = \iint_G y^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{3} \left(\int_{(-4)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(1)} y^2\,dy \right) dx =$$

$$= \int \quad \left(\frac{y^3}{3} \Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \quad \Big[\big(\qquad\qquad \big)^3 - \big(\qquad\qquad\qquad\qquad \big)^3 \Big] dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \quad [(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) -$$

$$- (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)] \, dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \quad [\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad] \, dx =$$

$$= \frac{1}{3} \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) \Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{3} \Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) -$$

$$- \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) \Big] =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (\qquad\qquad - \qquad\qquad) = \qquad\qquad .$$

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OY}} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OX}} =$

Выборочная проверка вариант 18 задача 1

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

I_{OY} (формат 1.23): введи Клик

I_{OX} (формат 1.23): введи Клик

Задача 2

Область ограничена линиями:

$$
\begin{aligned}
x &= x_{\max} = 3,\\
x &= x_{\min} = -1,\\
y &= 0,\\
y &= e^{-0.4x},\\
y &= 1 + 0.2 \cdot x.
\end{aligned}
$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь и координаты центра тяжести области (моменты инерции не вычислять).

Решение (по образцу примера П2)

Шаг 1: построение линий.

$\boldsymbol{y = 1 + 0.2 \cdot x}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_{\min} - 1 = -1 - 1 = -2$ до 1:

x	-2	-1	0	1
$y = 1 + 0.2 \cdot x$	0,6	0,8	1	1,2

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

$\boldsymbol{y = e^{-0.4x}}$ — экспонента, для ее построения табулируем:

x	-1	0	1	2	3	4
$y = e^{-0.4x}$	1,5	1	0,7	0,4	0,3	0,2

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим экспоненту по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{y = 0}$ — горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = 3}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(3, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = -1}$ — вертикальная прямая, проходящая через т. $(-1, 0)$ (**черным**).

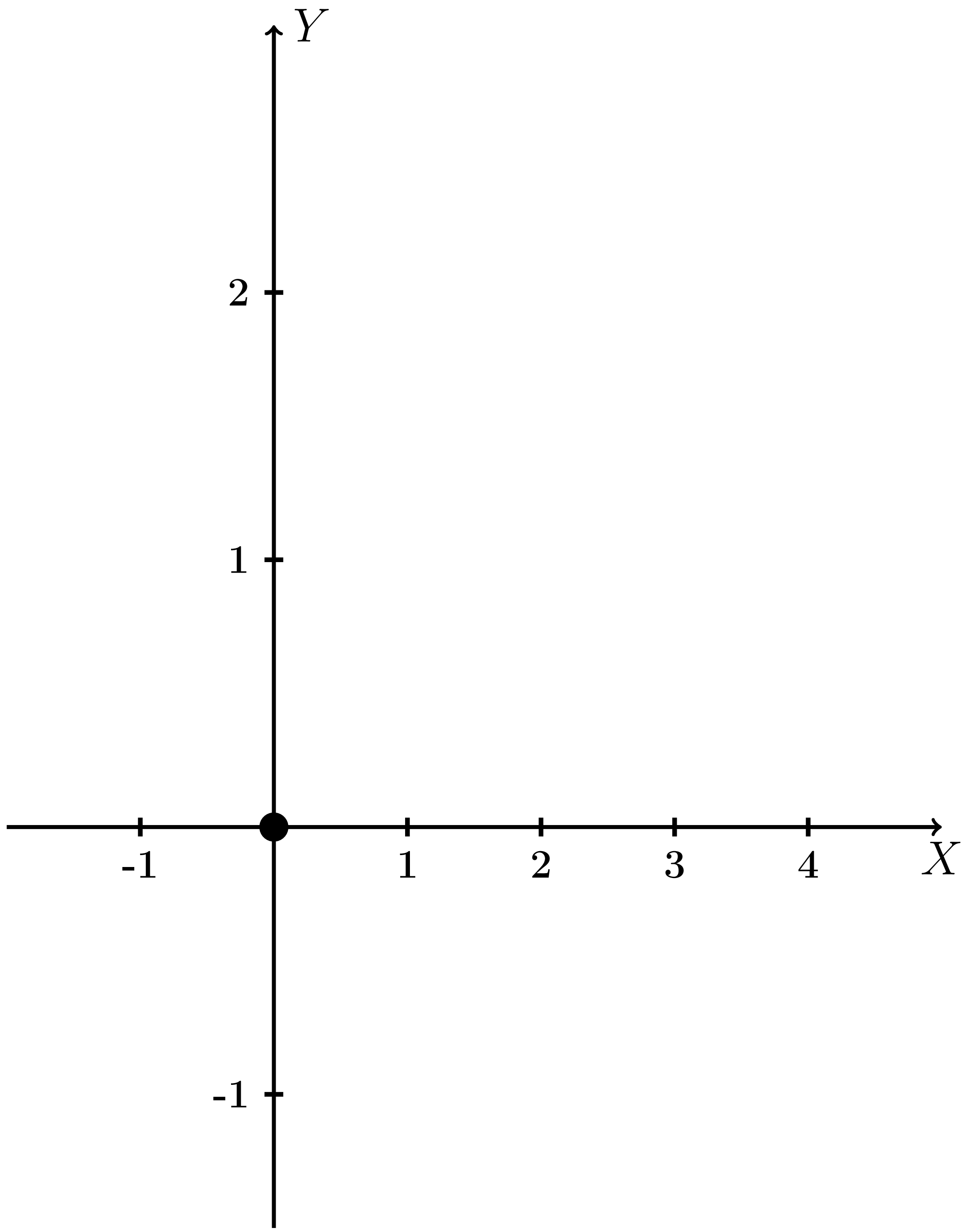

Рис.: Чертеж к задаче 2: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$x_{\text{лев}} = \qquad \text{– левая граница;}$$
$$x_{\text{прав}} = \qquad \text{– правая;}$$
$$y_{\text{низ}}(x) = 0 \qquad \text{– нижняя;}$$
$$y_{\text{верх}}(x) = \begin{cases} & \text{при} \\ & \text{при} \end{cases} \qquad \text{– верхняя (из 2х частей).}$$

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6 с разбиением области интегрирования на две части согласно форме верхней границы. Для интегрирования экспоненты используется формула 7 таблицы 2.

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-1}^{0}\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} dy\right)dx}_{\text{повторный интеграл левый}} + \underbrace{\int_0^3\left(\int_0^{e^{-0.4x}} dy\right)dx}_{\text{повторный интеграл правый}} =$$

$$= \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=}\right)dx + \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=}\right)dx =$$

$$= \int (\qquad) dx + \int (\qquad) dx =$$

$$= \int (\qquad) dx + \int \qquad dx =$$

$$= (\qquad)\Big| + (\qquad)\Big| =$$

$$= [(\qquad) - (\qquad)] + [\qquad - \qquad] =$$

$$= \qquad + \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П 2. Для интегрирования экспоненты используются формулы 7,8 таблицы 2.

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{0} x\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} dy\right) dx + \frac{1}{S}\int_0^{3} x\left(\int_0^{e^{-0.4x}} dy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \quad\right) dx + \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \quad\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\quad) \,dx + \frac{1}{S}\int \quad x\,(\quad)\, dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad (\quad)\, dx + \frac{1}{S}\int \quad dx =$$

$$= \frac{1}{S}\left(\quad \right)\Big| + \frac{1}{S}\left(\quad \right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\quad \Big) +$$

$$+ \Big(\quad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad} \cdot (\quad + \quad) = \quad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{0}\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} y\,dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^3\left(\int_0^{e^{-0.4x}} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=}\right)dx + \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int (\qquad) \, dx + \frac{1}{2S}\int (\qquad) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \qquad dx + \frac{1}{2S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int (\qquad) \, dx + \frac{1}{2S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\qquad\right)\Big| + \frac{1}{2S}\left(\qquad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\qquad\Big) +$$

$$+\Big(\qquad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot} \cdot (\quad + \quad) = \qquad.$$

Наносим центр тяжести $C(\quad , \quad)$ на чертеж к задаче 2.

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

Выборочная проверка вариант 18 задача 2

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

Задача 1.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

$I_{\mathrm{OY}} =$

$I_{\mathrm{OX}} =$

Задача 2.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Задача 1

Область ограничена линиями:

$$\begin{aligned} y &= (-4)\cdot x + (-2), \\ y &= 1\cdot x^2 + (1), \\ x &= x_{\max} = 4. \end{aligned}$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь, координаты центра тяжести, и моменты инерции относительно осей координат.

Решение (по образцу примера П1)

Шаг 1: построение линий. Находим пересечение двух первых линий.

$$1\cdot x^2 + (1) = (-4)\cdot x + (-2)$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$D = \qquad = \qquad .$

$x_1 = \qquad = \qquad ; \qquad x_2 = \qquad = \qquad .$

$\boldsymbol{y = (-4)\cdot x + (-2)}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_1 - 1 = \qquad$ до $x_{\max} + 1 = \qquad$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = (-4)\cdot x + (-2)$	14	10	6	2	-2	-6	-10	-14	-18	-22

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

Решение (продолжение)

Шаг 1: продолжение.
$\boldsymbol{y = 1 \cdot x^2 + (1)}$ — парабола, для ее построения табулируем:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = 1 \cdot x^2 + (1)$	17	10	5	2	1	2	5	10	17	26

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим параболу по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{x = 4}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(4, 0)$ (**на чертеже черным**).

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$
\begin{aligned}
x_{\text{лев}} &= && \text{– левая граница;}\\
x_{\text{прав}} &= && \text{– правая;}\\
y_{\text{низ}}(x) &= && \text{– нижняя;}\\
y_{\text{верх}}(x) &= && \text{– верхняя.}
\end{aligned}
$$

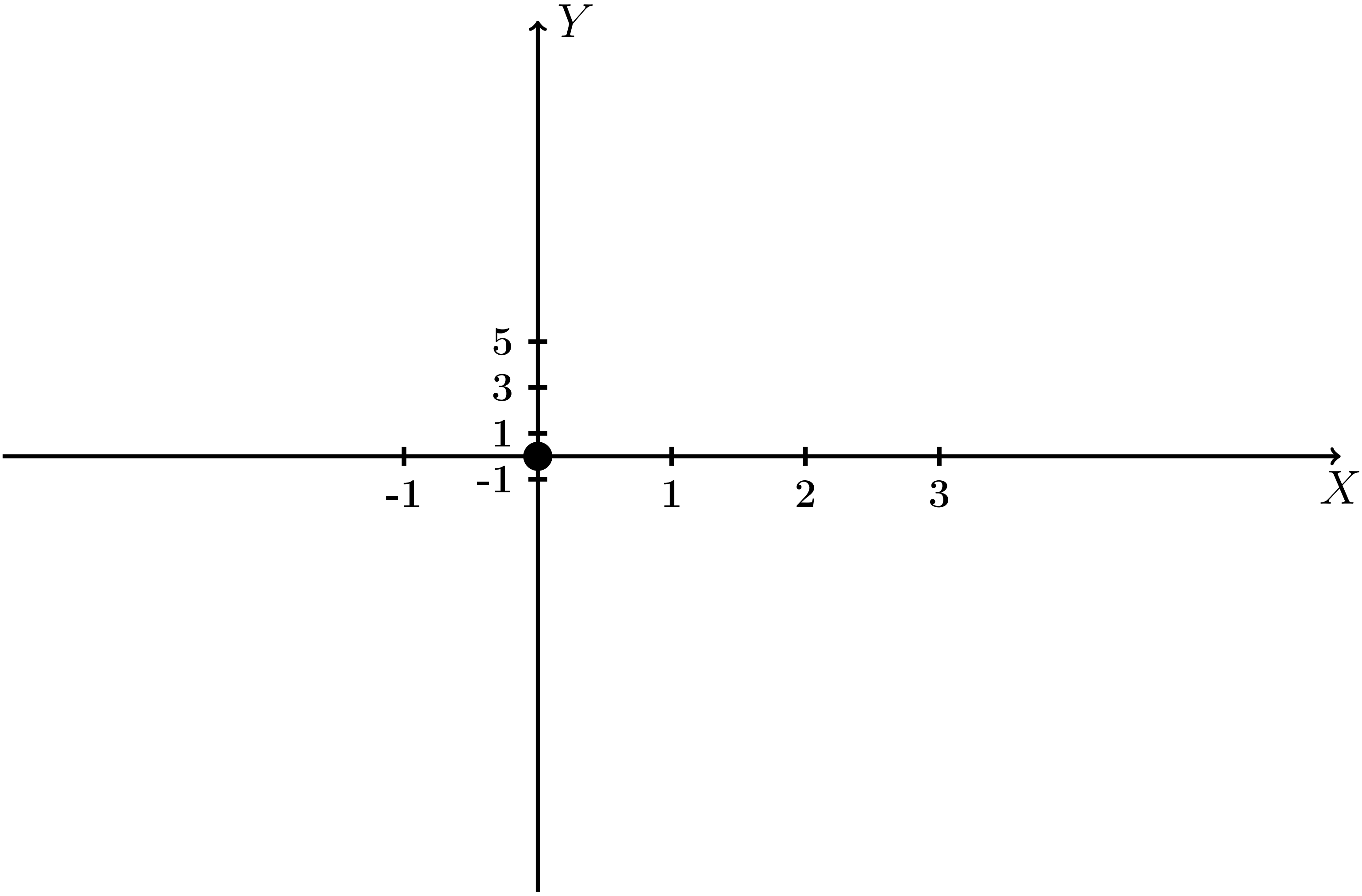

Рис.: Чертеж к задаче 1: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П 1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П 6:

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-1}^{4} \left(\int_{(-4)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(1)} dy \right) dx}_{\text{повторный интеграл}} =$$

$$= \int_{-1}^{4} \left(y \Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \int \; (\qquad - \qquad) \, dx =$$

$$= \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad \right) \Big| \quad =$$

$$= \left(\qquad \right) - \left(\qquad \right) =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2:

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_{-1}^{4} x\left(\int_{(-4)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(1)} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x(\qquad\qquad\qquad\qquad)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad dx$$

$$= \frac{1}{S}\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) -$$

$$- \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad} \cdot (\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_{-1}^{4}\left(\int_{(-4)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(1)} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=}^{y=}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[(\quad)^2 - (\quad)^2\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[(\quad) - (\quad)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[\quad\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\quad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\quad\Big) -$$

$$- \Big(\quad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad}\cdot(\quad - \quad) = \quad .$$

Наносим центр тяжести $C(2.594, -1.750)$ на чертеж к задаче 1.

Решение (продолжение)

Шаг 5: находим моменты инерции относительно осей координат по формулам Правила П4:

$$I_{OY} = \iint_G x^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{4} x^2 \left(\int_{(-4)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(1)} dy \right) dx =$$

$$= \int \quad x^2 \left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right) dx =$$

$$= \int \quad x^2 \, (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) \, dx =$$

$$= \int \quad x^2 (\qquad\qquad\qquad\qquad) dx =$$

$$= \int \quad (\qquad\qquad\qquad\qquad) dx =$$

$$= \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)\Big| \quad =$$

$$= \Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) - \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 5: продолжение.

$$I_{\mathrm{OX}} = \iint_G y^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{4} \left(\int_{(-4)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(1)} y^2\,dy \right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{y^3}{3}\Big|_{y=}^{y=} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \left[(\quad)^3 - (\quad)^3 \right] dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int [(\quad) -$$

$$- (\quad)]\,dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int [\quad]\,dx =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\quad \right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{3} \Big[\Big(\quad \Big) -$$

$$- \Big(\quad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (\quad - \quad) = \quad .$$

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OY}} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OX}} =$

Выборочная проверка вариант 19 задача 1

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

I_{OY} (формат 1.23): введи Клик

I_{OX} (формат 1.23): введи Клик

Задача 2

Область ограничена линиями:

$$
\begin{aligned}
x &= x_{\max} = 4,\\
x &= x_{\min} = -1,\\
y &= 0,\\
y &= e^{-0.4x},\\
y &= 1 + 0.2 \cdot x.
\end{aligned}
$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь и координаты центра тяжести области (моменты инерции не вычислять).

Решение (по образцу примера П2)

Шаг 1: построение линий.

$\boldsymbol{y = 1 + 0.2 \cdot x}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_{\min} - 1 = -1 - 1 = -2$ до 1:

x	-2	-1	0	1
$y = 1 + 0.2 \cdot x$	0,6	0,8	1	1,2

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

$\boldsymbol{y = e^{-0.4x}}$ — экспонента, для ее построения табулируем:

x	-1	0	1	2	3	4	5
$y = e^{-0.4x}$	1,5	1	0,7	0,4	0,3	0,2	0,1

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим экспоненту по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{y = 0}$ — горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = 4}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(4, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = -1}$ — вертикальная прямая, проходящая через т. $(-1, 0)$ (**черным**).

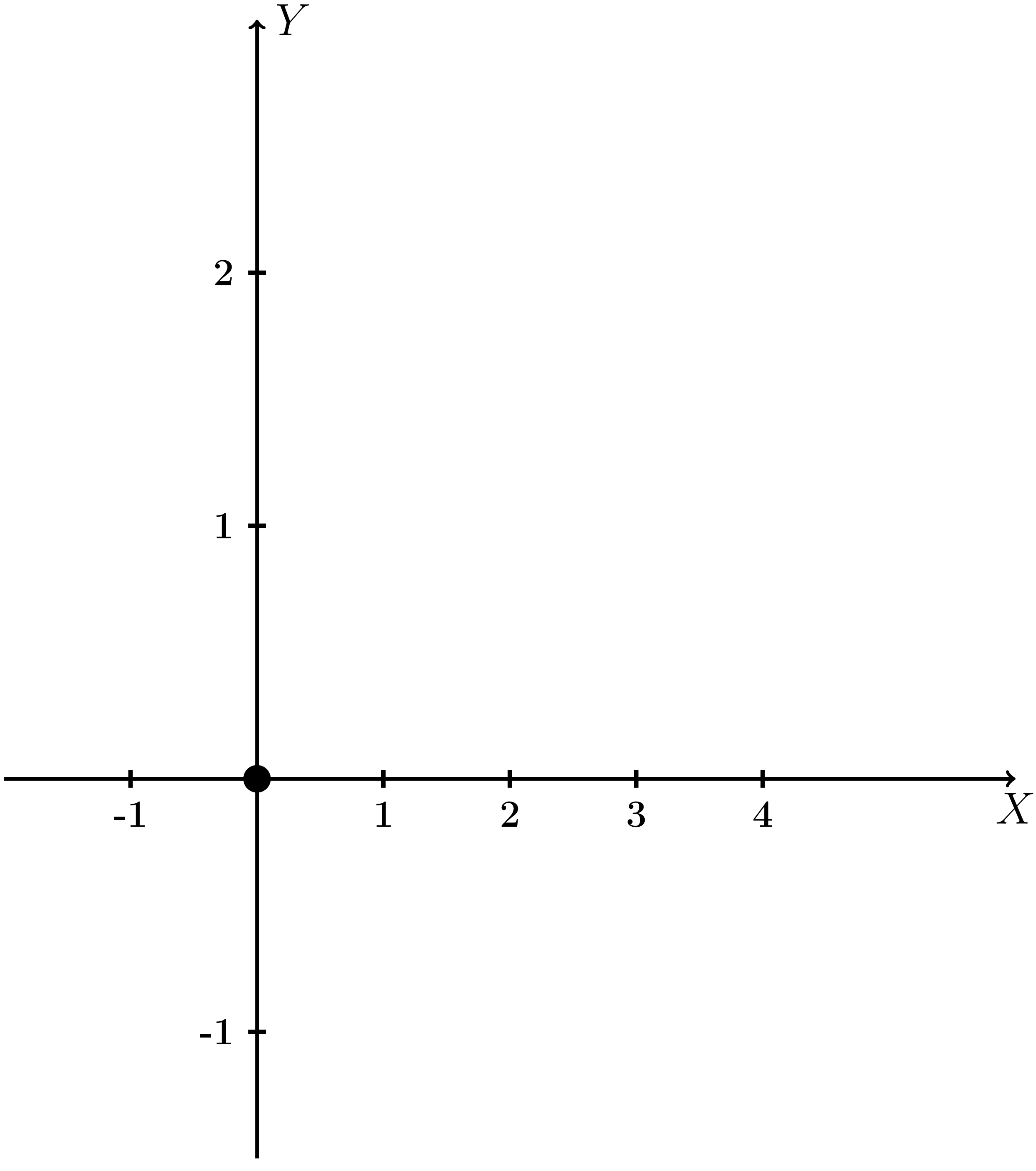

Рис.: Чертеж к задаче 2: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$x_{\text{лев}} \; = \qquad \text{– левая граница;}$$

$$x_{\text{прав}} \; = \qquad \text{– правая;}$$

$$y_{\text{низ}}(x) \; = \; 0 \qquad \text{– нижняя;}$$

$$y_{\text{верх}}(x) \; = \begin{cases} & \text{при} \\ & \text{при} \end{cases} \qquad \text{– верхняя (из 2х частей).}$$

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6 с разбиением области интегрирования на две части согласно форме верхней границы. Для интегрирования экспоненты используется формула 7 таблицы 2.

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-1}^{0}\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл левый}} + \underbrace{\int_0^4\left(\int_0^{e^{-0.4x}} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл правый}} =$$

$$= \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx + \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx =$$

$$= \int (\qquad) \, dx + \int (\qquad) \, dx =$$

$$= \int (\qquad) dx + \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad\right)\Big| + \left(\qquad\right)\Big| =$$

$$= \left[\left(\qquad\right) - \left(\qquad\right)\right] + \left[\qquad - \qquad\right] =$$

$$= \qquad + \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2.
Для интегрирования экспоненты используются формулы 7,8 таблицы 2.

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{0} x\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^4 x\left(\int_0^{e^{-0.4x}} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad\right)dx + \frac{1}{S}\int \; x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \; x\,(\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad (\qquad\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \qquad\qquad dx =$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad\qquad \right)\Big| \quad + \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad\qquad \right)\Big| \; =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) +$$

$$+ \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad}\cdot(\qquad + \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{0}\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} y\,dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^4\left(\int_0^{e^{-0.4x}} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\bigg|_{y=0}^{y=} \qquad \right)dx + \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\bigg|_{y=0}^{y=} \qquad \right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad\qquad\qquad) \, dx + \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad\qquad) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \qquad\qquad\qquad dx + \frac{1}{2S}\int \qquad\qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad\qquad\qquad\qquad) \, dx + \frac{1}{2S}\int \qquad\qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right)\Big| \quad + \frac{1}{2S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) +$$

$$+ \Big(\qquad\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot \qquad} \cdot (\qquad + \qquad) = \qquad .$$

Наносим центр тяжести $C(\qquad , \qquad)$ на чертеж к задаче 2.

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

Выборочная проверка вариант 19 задача 2

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

Задача 1.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

$I_{\text{OY}} =$

$I_{\text{OX}} =$

Задача 2.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Задача 1

Область ограничена линиями:

$$\begin{aligned} y &= (-3)\cdot x + (5),\\ y &= 1\cdot x^2 + (1),\\ x &= x_{\max} = 3. \end{aligned}$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь, координаты центра тяжести, и моменты инерции относительно осей координат.

Решение (по образцу примера П1)

Шаг 1: построение линий. Находим пересечение двух первых линий.

$$1\cdot x^2 + (1) = (-3)\cdot x + (5)$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$D = \qquad = \qquad .$

$x_1 = \qquad = \qquad ; \qquad x_2 = \qquad = \qquad .$

$\boldsymbol{y = (-3)\cdot x + (5)}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_1 - 1 =$ до $x_{\max} + 1 =$:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = (-3)\cdot x + (5)$	20	17	14	11	8	5	2	−1	−4	−7

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

Вариант 20 задача 1, продолжение

Решение (продолжение)

Шаг 1: продолжение.

$\boldsymbol{y = 1 \cdot x^2 + (1)}$ — парабола, для ее построения табулируем:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 1 \cdot x^2 + (1)$	26	17	10	5	2	1	2	5	10	17

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим параболу по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{x = 3}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(3, 0)$ (**на чертеже черным**).

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$\begin{aligned}
x_{\text{лев}} &= && \text{– левая граница;}\\
x_{\text{прав}} &= && \text{– правая;}\\
y_{\text{низ}}(x) &= && \text{– нижняя;}\\
y_{\text{верх}}(x) &= && \text{– верхняя.}
\end{aligned}$$

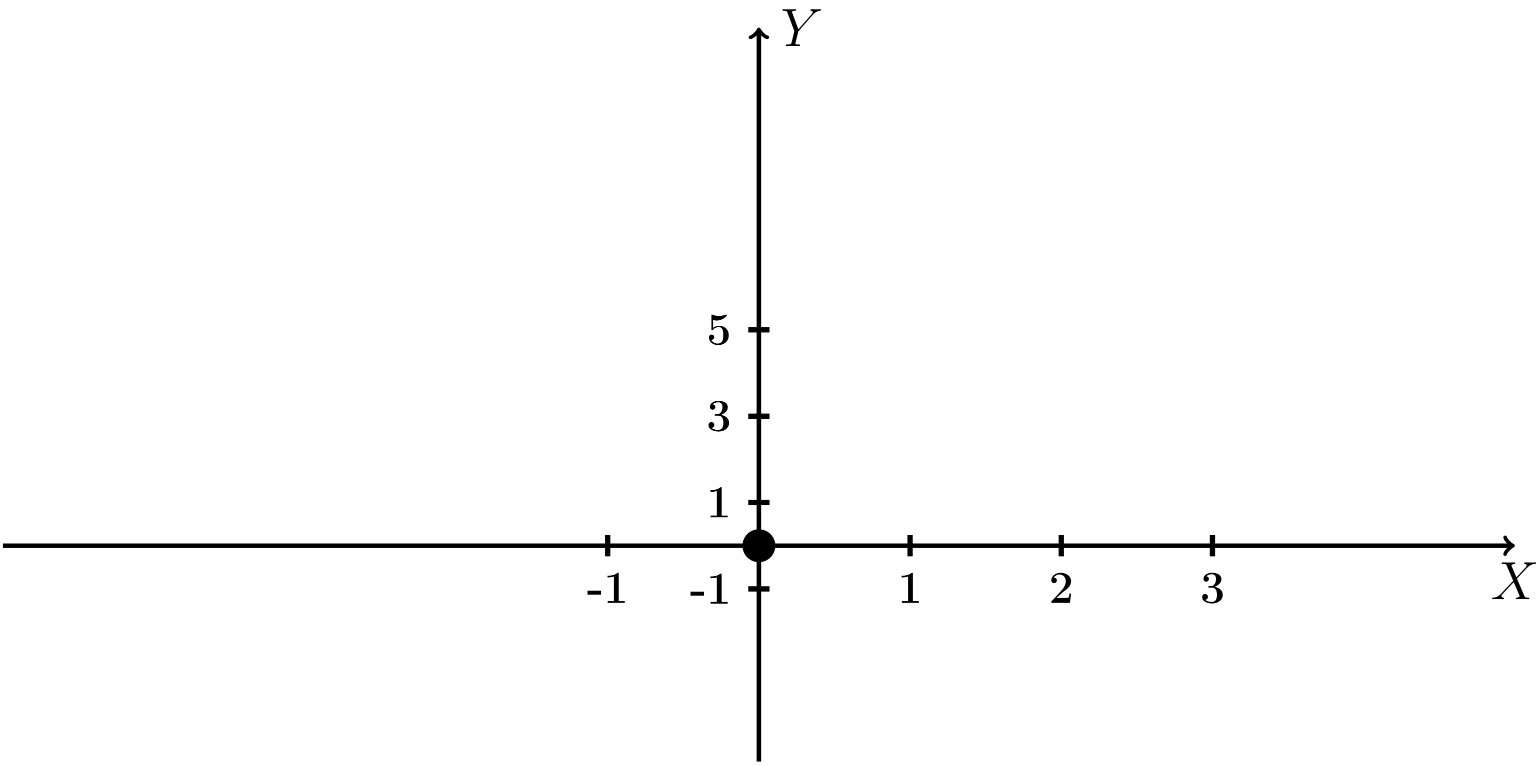

Рис.: Чертеж к задаче 1: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6:

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_1^3 \left(\int_{(-3)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(1)} dy \right) dx}_{\text{повторный интеграл}} =$$

$$= \int_1^3 \left(y \Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \int \left(\qquad - \qquad \right) dx =$$

$$= \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad \right) \Big| =$$

$$= \left(\qquad \right) - \left(\qquad \right) =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2:

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_1^3 x\left(\int_{(-3)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(1)} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int x\left(y\Big|_{y=}^{y=}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int x\,(\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int x(\qquad)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \qquad dx$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\Big) -$$

$$- \Big(\qquad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad}\cdot(\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_1^3 \left(\int_{(-3)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(1)} y\,dy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[(\qquad)^2 - (\qquad)^2\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[(\qquad) - (\qquad)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[\qquad\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\qquad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\qquad\Big) -$$

$$- \Big(\qquad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad}\cdot(\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Наносим центр тяжести $C(2.368, 2.358)$ на чертеж к задаче 1.

Решение (продолжение)

Шаг 5: находим моменты инерции относительно осей координат по формулам Правила П4:

$$I_{\text{OY}} = \iint_G x^2\,dx\,dy = \int_1^3 x^2 \left(\int_{(-3)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(1)} dy \right) dx =$$

$$= \int x^2 \left(y\Big|_{y=}^{y=} \right) dx =$$

$$= \int x^2 \left(\qquad \right) dx =$$

$$= \int x^2 (\qquad) dx =$$

$$= \int (\qquad) dx =$$

$$= \left(\qquad \right)\Big| =$$

$$= \left[\left(\qquad \right) - \left(\qquad \right) \right] =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 5: продолжение.

$$I_{\text{OX}} = \iint_G y^2\,dx\,dy = \int_1^3 \left(\int_{(-3)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(1)} y^2\,dy \right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{y^3}{3} \Big|_{y=}^{y=} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \left[(\qquad)^3 - (\qquad)^3 \right] dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \left[(\qquad) - \right.$$

$$\left. - (\qquad) \right] dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int [\qquad] \, dx =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\qquad \right) \Big| =$$

$$= \frac{1}{3} \left[\left(\qquad \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\qquad \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OY}} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OX}} =$

Выборочная проверка вариант 20 задача 1

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

I_{OY} (формат 1.23): введи Клик

I_{OX} (формат 1.23): введи Клик

Задача 2

Область ограничена линиями:

$$\begin{aligned} x &= x_{\max} = 3, \\ x &= x_{\min} = -2, \\ y &= 0, \\ y &= e^{-0.4x}, \\ y &= 1 + 0.4 \cdot x. \end{aligned}$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь и координаты центра тяжести области (моменты инерции не вычислять).

Решение (по образцу примера П2)

Шаг 1: построение линий.

$\boldsymbol{y = 1 + 0.4 \cdot x}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_{\min} - 1 = -2 - 1 = -3$ до 1:

x	-3	-2	-1	0	1
$y = 1 + 0.4 \cdot x$	$-0,2$	$0,2$	$0,6$	1	$1,4$

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

$\boldsymbol{y = e^{-0.4x}}$ — экспонента, для ее построения табулируем:

x	-1	0	1	2	3	4
$y = e^{-0.4x}$	$1,5$	1	$0,7$	$0,4$	$0,3$	$0,2$

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим экспоненту по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{y = 0}$ — горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = 3}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(3, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = -2}$ — вертикальная прямая, проходящая через т. $(-2, 0)$ (**черным**).

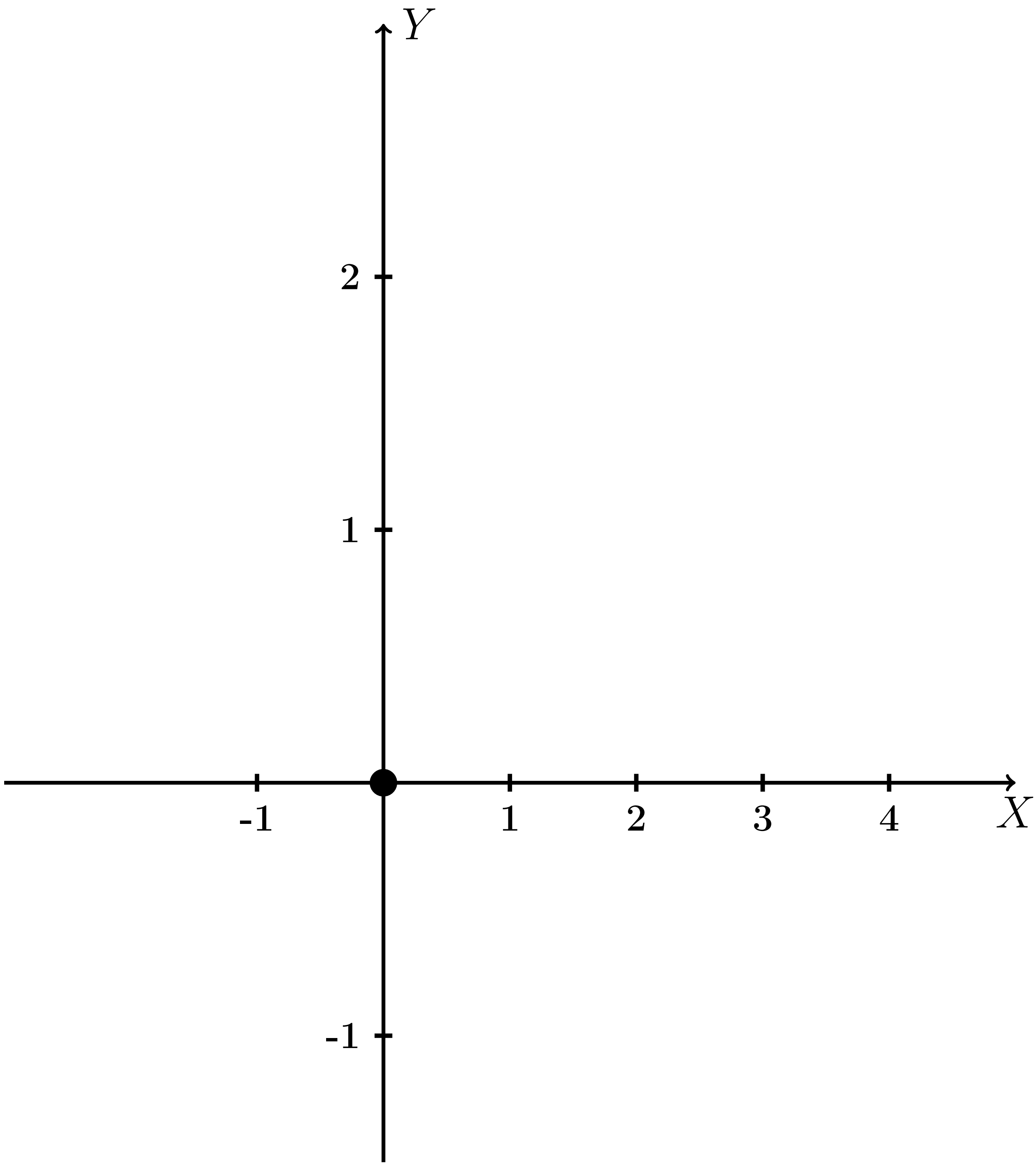

Рис.: Чертеж к задаче 2: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$x_{\text{лев}} = \qquad \text{— левая граница;}$$
$$x_{\text{прав}} = \qquad \text{— правая;}$$
$$y_{\text{низ}}(x) = 0 \qquad \text{— нижняя;}$$
$$y_{\text{верх}}(x) = \begin{cases} & \text{при} \\ & \text{при} \end{cases} \qquad \text{— верхняя (из 2х частей).}$$

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6 с разбиением области интегрирования на две части согласно форме верхней границы. Для интегрирования экспоненты используется формула 7 таблицы 2.

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-2}^{0}\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл левый}} + \underbrace{\int_0^3\left(\int_0^{e^{-0.4x}} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл правый}} =$$

$$= \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx + \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx =$$

$$= \int (\qquad) \, dx + \int (\qquad) \, dx =$$

$$= \int (\qquad) dx + \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad \right)\Big| + \left(\qquad \right)\Big| =$$

$$= \left[\left(\qquad \right) - \left(\qquad \right)\right] + \left[\qquad - \qquad \right] =$$

$$= \qquad + \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2. Для интегрирования экспоненты используются формулы 7,8 таблицы 2.

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0} x\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^3 x\left(\int_0^{e^{-0.4x}} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad\right)dx + \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(\qquad\qquad \right)dx + \frac{1}{S}\int \quad x\left(\qquad\qquad \right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad \left(\qquad\qquad \right)dx + \frac{1}{S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \quad + \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad \Big) +$$

$$+\Big(\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad}\cdot\left(\qquad + \qquad \right) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0}\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} y\,dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^3\left(\int_0^{e^{-0.4x}} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=}\right)dx + \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int (\quad)\,dx + \frac{1}{2S}\int (\quad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad dx + \frac{1}{2S}\int \quad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int (\quad)\,dx + \frac{1}{2S}\int \quad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big(\quad\Big)\Big| + \frac{1}{2S}\Big(\quad\Big)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\quad\Big) +$$

$$+\Big(\quad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot}\cdot(\quad + \quad) = \quad.$$

Наносим центр тяжести $C(\quad,\quad)$ на чертеж к задаче 2.

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

Выборочная проверка вариант 20 задача 2

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

Задача 1.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

$I_{\mathrm{OY}} =$

$I_{\mathrm{OX}} =$

Задача 2.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Задача 1

Область ограничена линиями:

$$
\begin{aligned}
y &= (-3) \cdot x + (5), \\
y &= 1 \cdot x^2 + (1), \\
x &= x_{\max} = 4.
\end{aligned}
$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь, координаты центра тяжести, и моменты инерции относительно осей координат.

Решение (по образцу примера П1)

Шаг 1: построение линий. Находим пересечение двух первых линий.

$$1 \cdot x^2 + (1) = (-3) \cdot x + (5)$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$D = \quad = \quad .$

$x_1 = \quad = \quad ; \qquad x_2 = \quad = \quad .$

$\boldsymbol{y = (-3) \cdot x + (5)}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_1 - 1 =$ до $x_{\max} + 1 =$:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = (-3) \cdot x + (5)$	20	17	14	11	8	5	2	-1	-4	-7	-10

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

Решение (продолжение)

Шаг 1: продолжение.

$\boldsymbol{y = 1 \cdot x^2 + (1)}$ — парабола, для ее построения табулируем:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = 1 \cdot x^2 + (1)$	26	17	10	5	2	1	2	5	10	17	26

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим параболу по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{x = 4}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(4, 0)$ (**на чертеже черным**).

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$\begin{array}{lll} x_{\text{лев}} & = & \quad – \text{ левая граница;} \\ x_{\text{прав}} & = & \quad – \text{ правая;} \\ y_{\text{низ}}(x) & = & \quad – \text{ нижняя;} \\ y_{\text{верх}}(x) & = & \quad – \text{ верхняя.} \end{array}$$

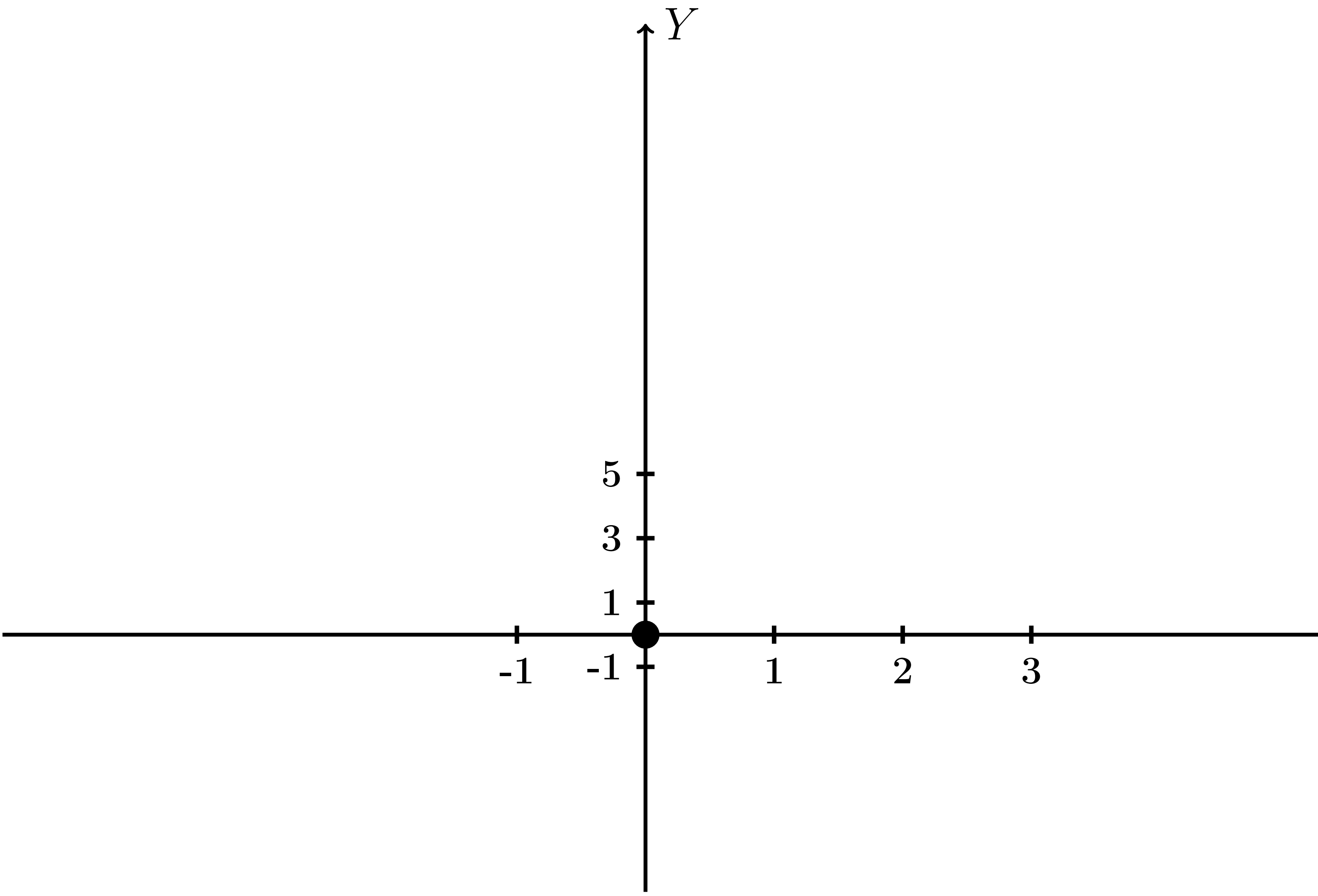

Рис.: Чертеж к задаче 1: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П 1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П 6:

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_1^4 \left(\int_{(-3)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(1)} dy \right) dx}_{\text{повторный интеграл}} =$$

$$= \int_1^4 \left(y \Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \int \left(\qquad - \qquad \right) dx =$$

$$= \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad \right) \Big| =$$

$$= \left(\qquad \right) - \left(\qquad \right) =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2:

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_1^4 x\left(\int_{(-3)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(1)} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad dx$$

$$= \frac{1}{S}\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) -$$

$$- \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad} \cdot (\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_1^4 \left(\int_{(-3)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(1)} y\,dy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \Big[(\qquad\qquad)^2 - (\qquad\qquad\qquad)^2\Big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \;[(\qquad\qquad\qquad\qquad) - (\qquad\qquad\qquad\qquad)]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \;[\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)\Big| \; =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) -$$

$$- \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad} \cdot (\qquad - \qquad\qquad) = \qquad .$$

Наносим центр тяжести $C(3.071, 3.343)$ на чертеж к задаче 1.

Решение (продолжение)

Шаг 5: находим моменты инерции относительно осей координат по формулам Правила П4:

$$I_{\text{OY}} = \iint_G x^2\,dx\,dy = \int_1^4 x^2 \left(\int_{(-3)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(1)} dy\right) dx =$$

$$= \int x^2 \left(y\Big|_{y=}^{y=}\right) dx =$$

$$= \int x^2 (\qquad) \, dx =$$

$$= \int x^2 (\qquad) dx =$$

$$= \int (\qquad) dx =$$

$$= \left(\qquad\right)\Big| =$$

$$= \left[\left(\qquad\right) - \left(\qquad\right)\right] =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 5: продолжение.

$$I_{\mathrm{OX}} = \iint_G y^2\,dx\,dy = \int_1^4 \left(\int_{(-3)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(1)} y^2\,dy\right) dx =$$

$$= \int \left(\left.\frac{y^3}{3}\right|_{y=}^{y=} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \Big[\big(\quad \big)^3 - \big(\quad \big)^3\Big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \big[\big(\quad \big) -$$

$$- \big(\quad \big)\big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \big[\quad \big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\Big(\quad \Big)\Big| =$$

$$= \frac{1}{3}\Big[\Big(\quad \Big) -$$

$$- \Big(\quad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\big(\quad - \quad \big) = \quad .$$

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OY}} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OX}} =$

Выборочная проверка вариант 21 задача 1

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

I_{OY} (формат 1.23): введи Клик

I_{OX} (формат 1.23): введи Клик

Задача 2

Область ограничена линиями:

$$\begin{aligned} x &= x_{\max} = 4, \\ x &= x_{\min} = -2, \\ y &= 0, \\ y &= e^{-0.4x}, \\ y &= 1 + 0.4 \cdot x. \end{aligned}$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь и координаты центра тяжести области (моменты инерции не вычислять).

Решение (по образцу примера П2)

Шаг 1: построение линий.

$\boldsymbol{y = 1 + 0.4 \cdot x}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_{\min} - 1 = -2 - 1 = -3$ до 1:

x	-3	-2	-1	0	1
$y = 1 + 0.4 \cdot x$	$-0{,}2$	$0{,}2$	$0{,}6$	1	$1{,}4$

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

$\boldsymbol{y = e^{-0.4x}}$ — экспонента, для ее построения табулируем:

x	-1	0	1	2	3	4	5
$y = e^{-0.4x}$	$1{,}5$	1	$0{,}7$	$0{,}4$	$0{,}3$	$0{,}2$	$0{,}1$

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим экспоненту по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{y = 0}$ — горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = 4}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(4, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = -2}$ — вертикальная прямая, проходящая через т. $(-2, 0)$ (**черным**).

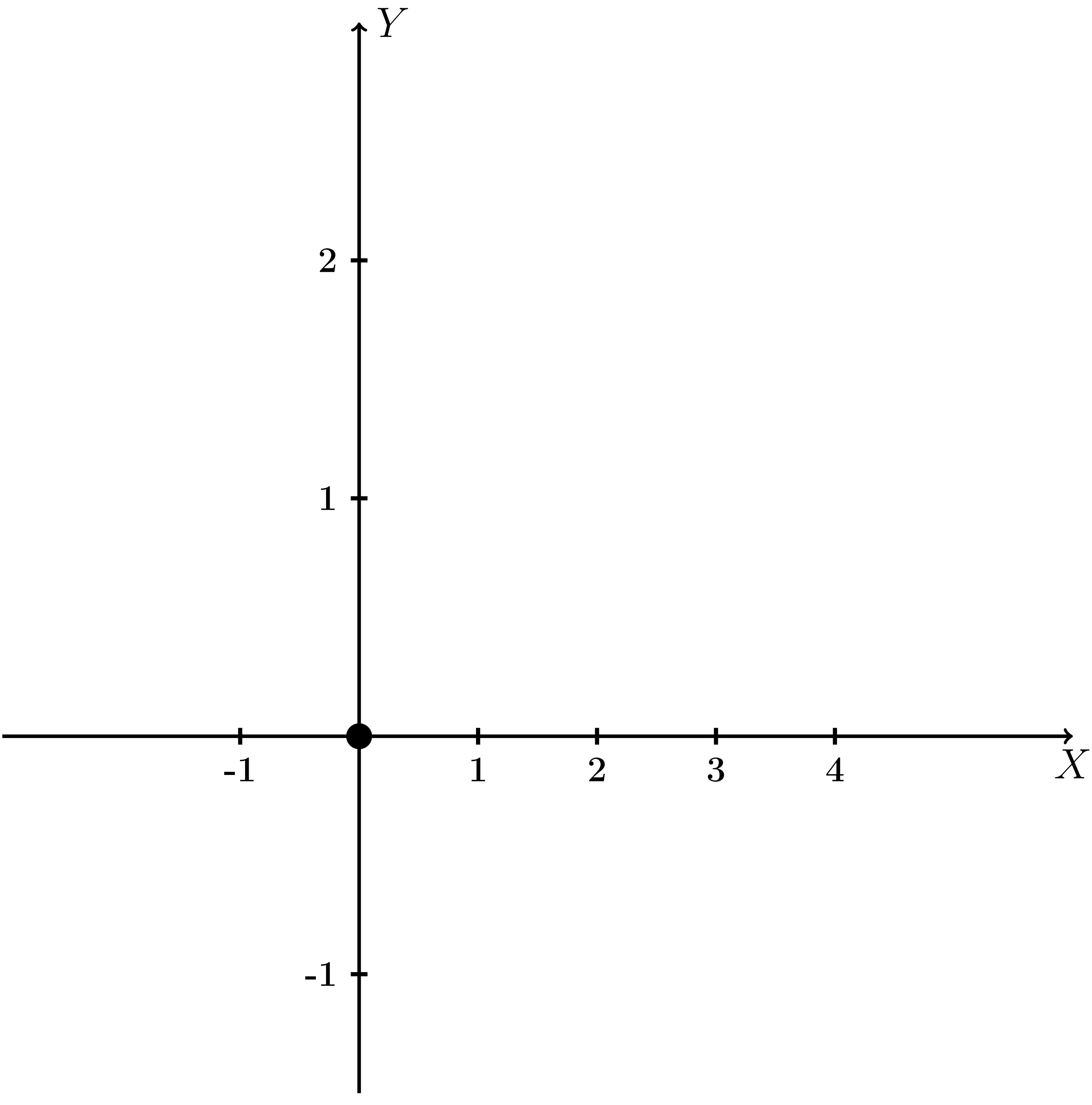

Рис.: Чертеж к задаче 2: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$
\begin{aligned}
x_{\text{лев}} &= && \text{— левая граница;}\\
x_{\text{прав}} &= && \text{— правая;}\\
y_{\text{низ}}(x) &= 0 && \text{— нижняя;}\\
y_{\text{верх}}(x) &= \begin{cases} & \text{при} \\ & \text{при} \end{cases} && \text{— верхняя (из 2х частей).}
\end{aligned}
$$

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6 с разбиением области интегрирования на две части согласно форме верхней границы. Для интегрирования экспоненты используется формула 7 таблицы 2.

$$
S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-2}^{0}\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} dy\right)dx}_{\text{повторный интеграл левый}} + \underbrace{\int_0^4\left(\int_0^{e^{-0.4x}} dy\right)dx}_{\text{повторный интеграл правый}} =
$$

$$
= \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx + \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx =
$$

$$
= \int \left(\qquad \right) dx + \int \left(\qquad \right) dx =
$$

$$
= \int \left(\qquad \right) dx + \int \qquad dx =
$$

$$
= \left(\qquad \right)\Big| + \left(\qquad \right)\Big| =
$$

$$
= \left[\left(\qquad \right) - \left(\qquad \right)\right] + \left[\qquad - \qquad \right] =
$$

$$
= \qquad + \qquad = \qquad .
$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П 2.
Для интегрирования экспоненты используются формулы 7,8 таблицы 2.

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0} x\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^4 x\left(\int_0^{e^{-0.4x}} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad\right)dx + \frac{1}{S}\int \; x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \; x\,(\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad (\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \; + \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \; =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad \Big) +$$

$$+ \Big(\qquad\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad} \cdot (\qquad + \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0}\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} y\,dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^4\left(\int_0^{e^{-0.4x}} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=} \quad\right)dx + \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=} \quad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad (\quad) \, dx + \frac{1}{2S}\int \quad (\quad) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad dx + \frac{1}{2S}\int \quad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad (\quad) \, dx + \frac{1}{2S}\int \quad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\quad \right)\Big| + \frac{1}{2S}\left(\quad \right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\left[\left(\quad \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\quad \right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot} \cdot (\quad + \quad) = \quad .$$

Наносим центр тяжести $C(\quad , \quad)$ на чертеж к задаче 2.

Ответ

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Выборочная проверка вариант 21 задача 2

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

Задача 1.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

$I_{\text{OY}} =$

$I_{\text{OX}} =$

Задача 2.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Задача 1

Область ограничена линиями:

$$y = (-2)\cdot x + (4),$$
$$y = 1\cdot x^2 + (1),$$
$$x = x_{\max} = 3.$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь, координаты центра тяжести, и моменты инерции относительно осей координат.

Решение (по образцу примера П1)

Шаг 1: построение линий. Находим пересечение двух первых линий.

$$1\cdot x^2 + (1) = (-2)\cdot x + (4)$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$D = \quad = \quad .$

$x_1 = \quad = \quad ; \qquad x_2 = \quad = \quad .$

$\boldsymbol{y = (-2)\cdot x + (4)}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_1 - 1 =$ до $x_{\max} + 1 =$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = (-2)\cdot x + (4)$	12	10	8	6	4	2	0	−2	−4

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

Вариант 22 задача 1, продолжение

Решение (продолжение)

Шаг 1: продолжение.

$\boldsymbol{y = 1 \cdot x^2 + (1)}$ — парабола, для ее построения табулируем:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 1 \cdot x^2 + (1)$	17	10	5	2	1	2	5	10	17

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим параболу по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{x = 3}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(3, 0)$ (**на чертеже черным**).

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$x_{\text{лев}} =$ — левая граница;

$x_{\text{прав}} =$ — правая;

$y_{\text{низ}}(x) =$ — нижняя;

$y_{\text{верх}}(x) =$ — верхняя.

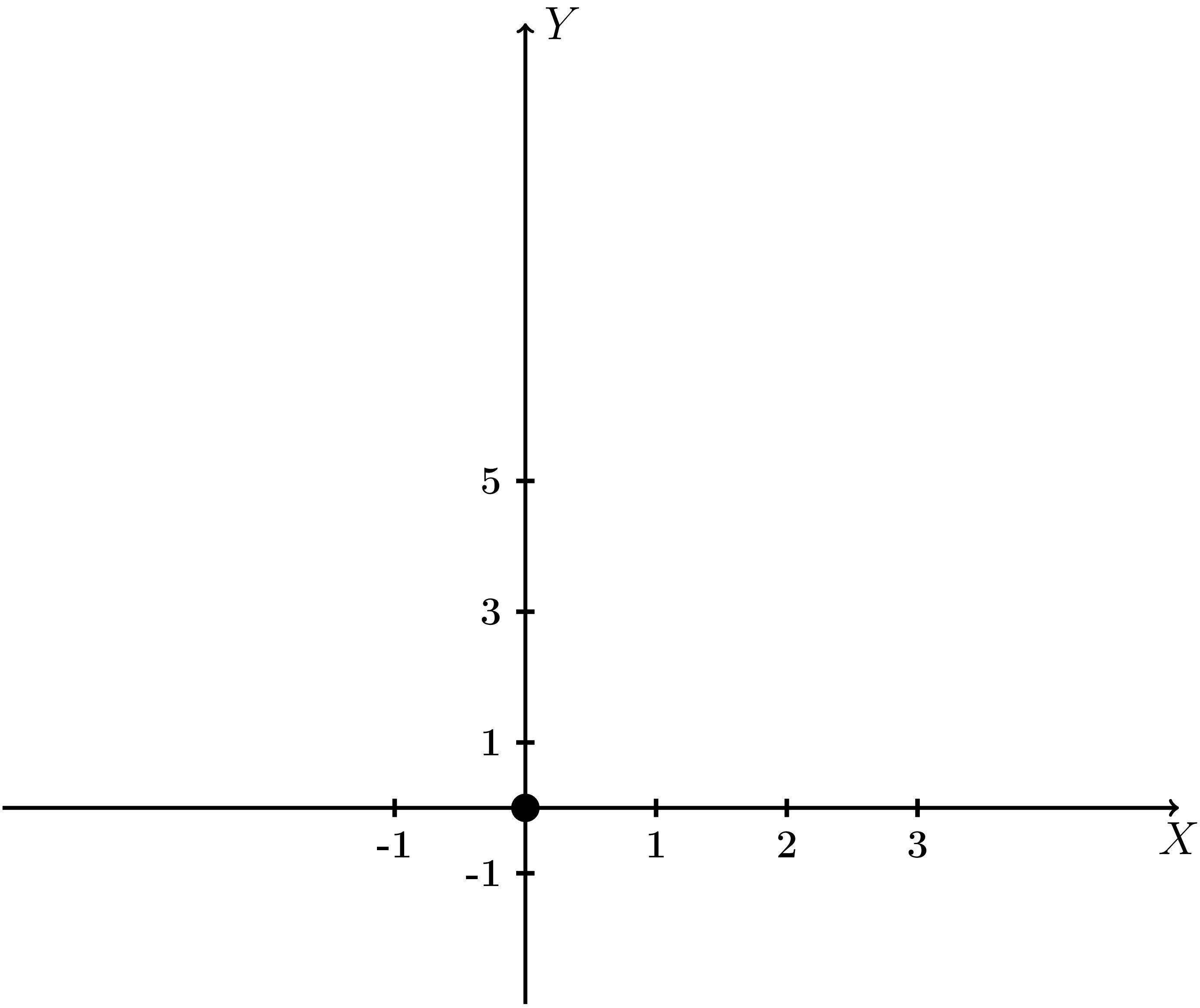

Рис.: Чертеж к задаче 1: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П 1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П 6:

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_1^3 \left(\int_{(-2)\cdot x+(4)}^{1\cdot x^2+(1)} dy \right) dx}_{\text{повторный интеграл}} =$$

$$= \int_1^3 \left(y \Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \int \left(\qquad - \qquad \right) dx =$$

$$= \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad \right) \Big| =$$

$$= \left(\qquad \right) - \left(\qquad \right) =$$

$$= \quad - \quad = \quad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2:

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_1^3 x\left(\int_{(-2)\cdot x+(4)}^{1\cdot x^2+(1)} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int x\left(y\Big|_{y=}^{y=}\qquad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int x\,(\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int x(\qquad\qquad)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \qquad\qquad dx$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad\Big) -$$

$$-\Big(\qquad\qquad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad}\cdot(\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_1^3 \left(\int_{(-2)\cdot x+(4)}^{1\cdot x^2+(1)} y\,dy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[\left(\qquad\qquad\right)^2 - \left(\qquad\qquad\right)^2\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[\left(\qquad\qquad\qquad\right) - \left(\qquad\qquad\qquad\right)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[\qquad\qquad\qquad\qquad\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\Big) -$$

$$- \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad} \cdot \left(\qquad - \qquad\right) = \qquad .$$

Наносим центр тяжести $C(2.375, 3.050)$ на чертеж к задаче 1.

Решение (продолжение)

Шаг 5: находим моменты инерции относительно осей координат по формулам Правила П4:

$$I_{\mathrm{OY}} = \iint_G x^2\, dx\, dy = \int_1^3 x^2 \left(\int_{(-2)\cdot x+(4)}^{1\cdot x^2+(1)} dy \right) dx =$$

$$= \int x^2 \left(y\Big|_{y=}^{y=} \right) dx =$$

$$= \int x^2 (\qquad) \, dx =$$

$$= \int x^2 (\qquad) dx =$$

$$= \int (\qquad) dx =$$

$$= \left(\qquad \right)\Big| =$$

$$= \left[\left(\qquad \right) - \left(\qquad \right) \right] =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 5: продолжение.

$$I_{\text{OX}} = \iint_G y^2\,dx\,dy = \int_1^3 \left(\int_{(-2)\cdot x+(4)}^{1\cdot x^2+(1)} y^2\,dy \right) dx =$$

$$= \int \quad \left(\frac{y^3}{3}\Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \quad \Big[(\qquad)^3 - (\qquad)^3 \Big]\, dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \quad \big[(\qquad) -$$

$$- (\qquad) \big]\, dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \quad \big[\qquad \big]\, dx =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\qquad \right) \Big| =$$

$$= \frac{1}{3} \Big[\Big(\qquad \Big) -$$

$$- \Big(\qquad \Big) \Big] =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Вариант 22 задача 1, ответ, проверка

возврат огл таб. интегралов

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

$\boldsymbol{I}_{\mathrm{OY}} =$

$\boldsymbol{I}_{\mathrm{OX}} =$

Выборочная проверка вариант 22 задача 1

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

I_{OY} (формат 1.23): введи Клик

I_{OX} (формат 1.23): введи Клик

Задача 2

Область ограничена линиями:

$$\begin{aligned} x &= x_{\max} = 3, \\ x &= x_{\min} = -1, \\ y &= 0, \\ y &= e^{-0.4x}, \\ y &= 1 + 0.4 \cdot x. \end{aligned}$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь и координаты центра тяжести области (моменты инерции не вычислять).

Решение (по образцу примера П2)

Шаг 1: построение линий.

$\boldsymbol{y = 1 + 0.4 \cdot x}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_{\min} - 1 = -1 - 1 = -2$ до 1:

x	-2	-1	0	1
$y = 1 + 0.4 \cdot x$	0,2	0,6	1	1,4

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

$\boldsymbol{y = e^{-0.4x}}$ — экспонента, для ее построения табулируем:

x	-1	0	1	2	3	4
$y = e^{-0.4x}$	1,5	1	0,7	0,4	0,3	0,2

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим экспоненту по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{y = 0}$ — горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = 3}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(3, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = -1}$ — вертикальная прямая, проходящая через т. $(-1, 0)$ (**черным**).

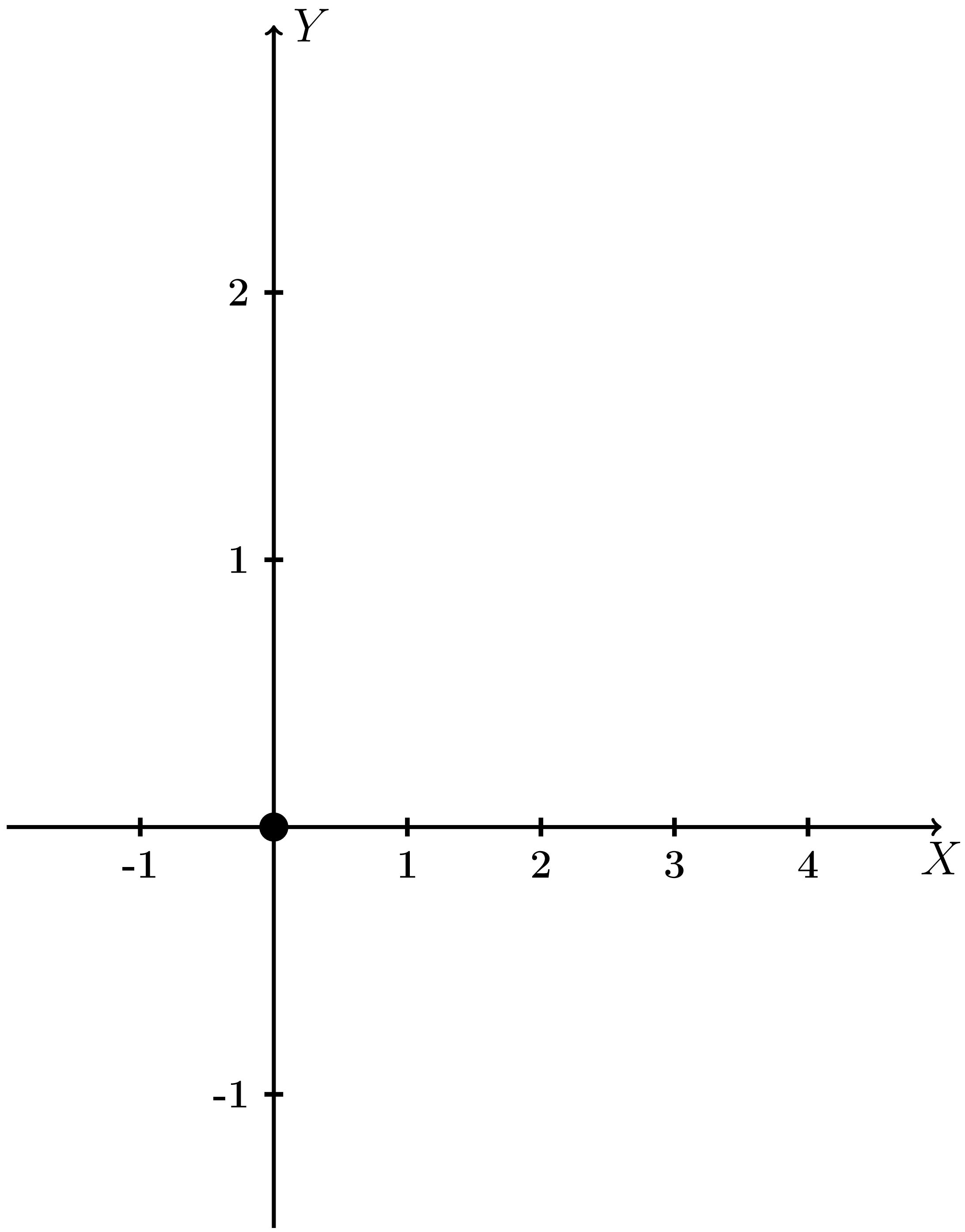

Рис.: Чертеж к задаче 2: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$
\begin{aligned}
x_{\text{лев}} &= && \text{– левая граница;}\\
x_{\text{прав}} &= && \text{– правая;}\\
y_{\text{низ}}(x) &= 0 && \text{– нижняя;}\\
y_{\text{верх}}(x) &= \begin{cases} & \text{при} \\ & \text{при} \end{cases} && \text{– верхняя (из 2х частей).}
\end{aligned}
$$

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6 с разбиением области интегрирования на две части согласно форме верхней границы. Для интегрирования экспоненты используется формула 7 таблицы 2.

$$
S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-1}^{0}\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} dy\right)dx}_{\text{повторный интеграл левый}} + \underbrace{\int_0^{3}\left(\int_0^{e^{-0.4x}} dy\right)dx}_{\text{повторный интеграл правый}} =
$$

$$
= \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx + \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx =
$$

$$
= \int \left(\qquad \right) dx + \int \left(\qquad \right) dx =
$$

$$
= \int \left(\qquad \right) dx + \int \qquad dx =
$$

$$
= \left(\qquad \right)\Big| + \left(\qquad \right)\Big| =
$$

$$
= \left[\left(\qquad \right) - \left(\qquad \right) \right] + \left[\qquad - \qquad \right] =
$$

$$
= \qquad + \qquad = \qquad .
$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2.
Для интегрирования экспоненты используются формулы 7,8 таблицы 2.

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{0} x\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^3 x\left(\int_0^{e^{-0.4x}} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad\right)dx + \frac{1}{S}\int \ x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \ x\,(\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad (\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad\right)\Big| \quad + \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad\right)\Big| \ =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\Big) +$$

$$+\Big(\qquad\qquad\qquad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad}\cdot(\qquad + \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{0}\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} y\,dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^3\left(\int_0^{e^{-0.4x}} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=} \quad\right)dx + \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=} \quad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad\qquad) \, dx + \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad\qquad) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \qquad\qquad dx + \frac{1}{2S}\int \qquad\qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad\qquad) \, dx + \frac{1}{2S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \quad + \frac{1}{2S}\left(\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\qquad\qquad \Big) +$$

$$+ \Big(\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot \quad}\cdot(\quad + \quad) = \qquad .$$

Наносим центр тяжести $C(\quad , \quad)$ на чертеж к задаче 2.

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

Выборочная проверка вариант 22 задача 2

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

Задача 1.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

$I_{\text{OY}} =$

$I_{\text{OX}} =$

Задача 2.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Задача 1

Область ограничена линиями:

$$\begin{aligned} y &= (-2)\cdot x + (4), \\ y &= 1\cdot x^2 + (1), \\ x &= x_{\max} = 4. \end{aligned}$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь, координаты центра тяжести, и моменты инерции относительно осей координат.

Решение (по образцу примера П1)

Шаг 1: построение линий. Находим пересечение двух первых линий.

$$1\cdot x^2 + (1) = (-2)\cdot x + (4)$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$D = \qquad = \qquad .$

$x_1 = \qquad = \qquad ; \qquad x_2 = \qquad = \qquad .$

$\boldsymbol{y = (-2)\cdot x + (4)}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_1 - 1 =$ до $x_{\max} + 1 =$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = (-2)\cdot x + (4)$	12	10	8	6	4	2	0	-2	-4	-6

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

Решение (продолжение)

Шаг 1: продолжение.

$\boldsymbol{y = 1 \cdot x^2 + (1)}$ — парабола, для ее построения табулируем:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = 1 \cdot x^2 + (1)$	17	10	5	2	1	2	5	10	17	26

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим параболу по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{x = 4}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(4, 0)$ (**на чертеже черным**).

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$
\begin{aligned}
x_{\text{лев}} &= && \text{— левая граница;}\\
x_{\text{прав}} &= && \text{— правая;}\\
y_{\text{низ}}(x) &= && \text{— нижняя;}\\
y_{\text{верх}}(x) &= && \text{— верхняя.}
\end{aligned}
$$

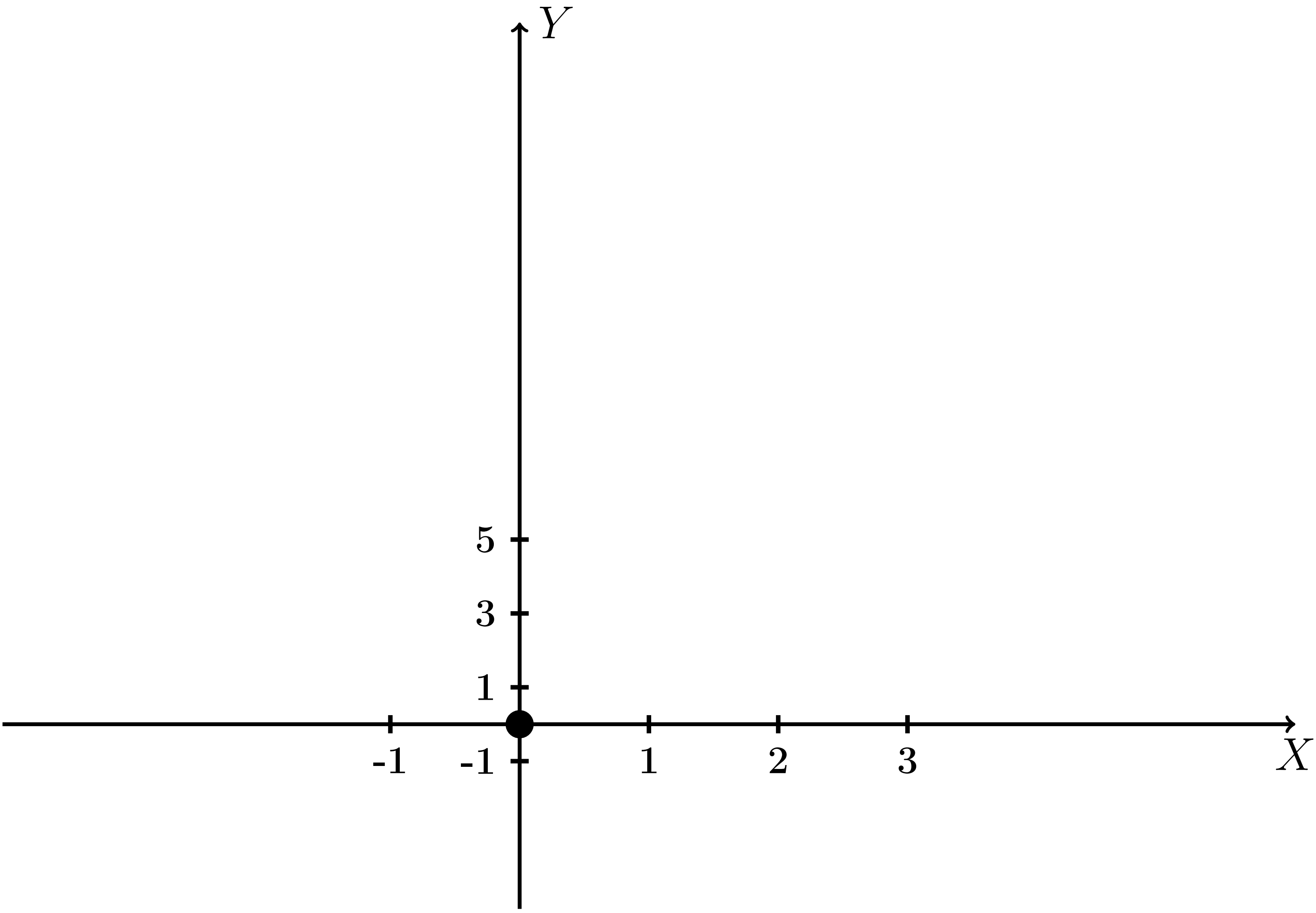

Рис.: Чертеж к задаче 1: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6:

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_1^4 \left(\int_{(-2)\cdot x+(4)}^{1\cdot x^2+(1)} dy \right) dx}_{\text{повторный интеграл}} =$$

$$= \int_1^4 \left(y \Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \int \left(\qquad - \qquad \right) dx =$$

$$= \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad \right) \Big| =$$

$$= \left(\qquad \right) - \left(\qquad \right) =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П 2:

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_1^4 x\left(\int_{(-2)\cdot x+(4)}^{1\cdot x^2+(1)} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad) \,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x(\qquad\qquad)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \qquad\qquad dx$$

$$= \frac{1}{S}\Big(\qquad\qquad \Big)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad \Big) -$$

$$- \Big(\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad}\cdot(\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_1^4 \left(\int_{(-2)\cdot x+(4)}^{1\cdot x^2+(1)} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=}^{y=} \qquad \right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \Big[(\qquad)^2 - (\qquad)^2\Big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int [(\qquad) - (\qquad)]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int [\qquad]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big(\qquad\Big)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\qquad\Big) -$$

$$- \Big(\qquad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad}\cdot(\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Наносим центр тяжести $C(3.083, 4.400)$ на чертеж к задаче 1.

Решение (продолжение)

Шаг 5: находим моменты инерции относительно осей координат по формулам Правила П 4:

$$I_{\text{OY}} = \iint_G x^2\,dx\,dy = \int_1^4 x^2 \left(\int_{(-2)\cdot x+(4)}^{1\cdot x^2+(1)} dy \right) dx =$$

$$= \int \quad x^2 \left(y \Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \int \quad x^2 \, (\qquad\qquad) \, dx =$$

$$= \int \quad x^2 (\qquad\qquad) dx =$$

$$= \int \quad (\qquad\qquad) dx =$$

$$= \left(\qquad\qquad \right) \Big| \; =$$

$$= \left[\left(\qquad\qquad \right) - \left(\qquad\qquad \right) \right] =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 5: продолжение.

$$I_{\mathrm{OX}} = \iint_G y^2\,dx\,dy = \int_1^4 \left(\int_{(-2)\cdot x+(4)}^{1\cdot x^2+(1)} y^2\,dy \right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{y^3}{3} \Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \left[(\qquad)^3 - (\qquad)^3 \right] dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \left[(\qquad) - \right.$$

$$\left. - (\qquad) \right] dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int [\qquad] \, dx =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\qquad \right) \Big| =$$

$$= \frac{1}{3} \left[\left(\qquad \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\qquad \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OY}} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OX}} =$

Выборочная проверка вариант 23 задача 1

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

I_{OY} (формат 1.23): введи Клик

I_{OX} (формат 1.23): введи Клик

Задача 2

Область ограничена линиями:

$$x = x_{\max} = 4,$$
$$x = x_{\min} = -1,$$
$$y = 0,$$
$$y = e^{-0.4x},$$
$$y = 1 + 0.4 \cdot x.$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь и координаты центра тяжести области (моменты инерции не вычислять).

Решение (по образцу примера П2)

Шаг 1: построение линий.

$\boldsymbol{y = 1 + 0.4 \cdot x}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_{\min} - 1 = -1 - 1 = -2$ до 1:

x	-2	-1	0	1
$y = 1 + 0.4 \cdot x$	0,2	0,6	1	1,4

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

$\boldsymbol{y = e^{-0.4x}}$ — экспонента, для ее построения табулируем:

x	-1	0	1	2	3	4	5
$y = e^{-0.4x}$	1,5	1	0,7	0,4	0,3	0,2	0,1

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим экспоненту по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{y = 0}$ — горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = 4}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(4, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = -1}$ — вертикальная прямая, проходящая через т. $(-1, 0)$ (**черным**).

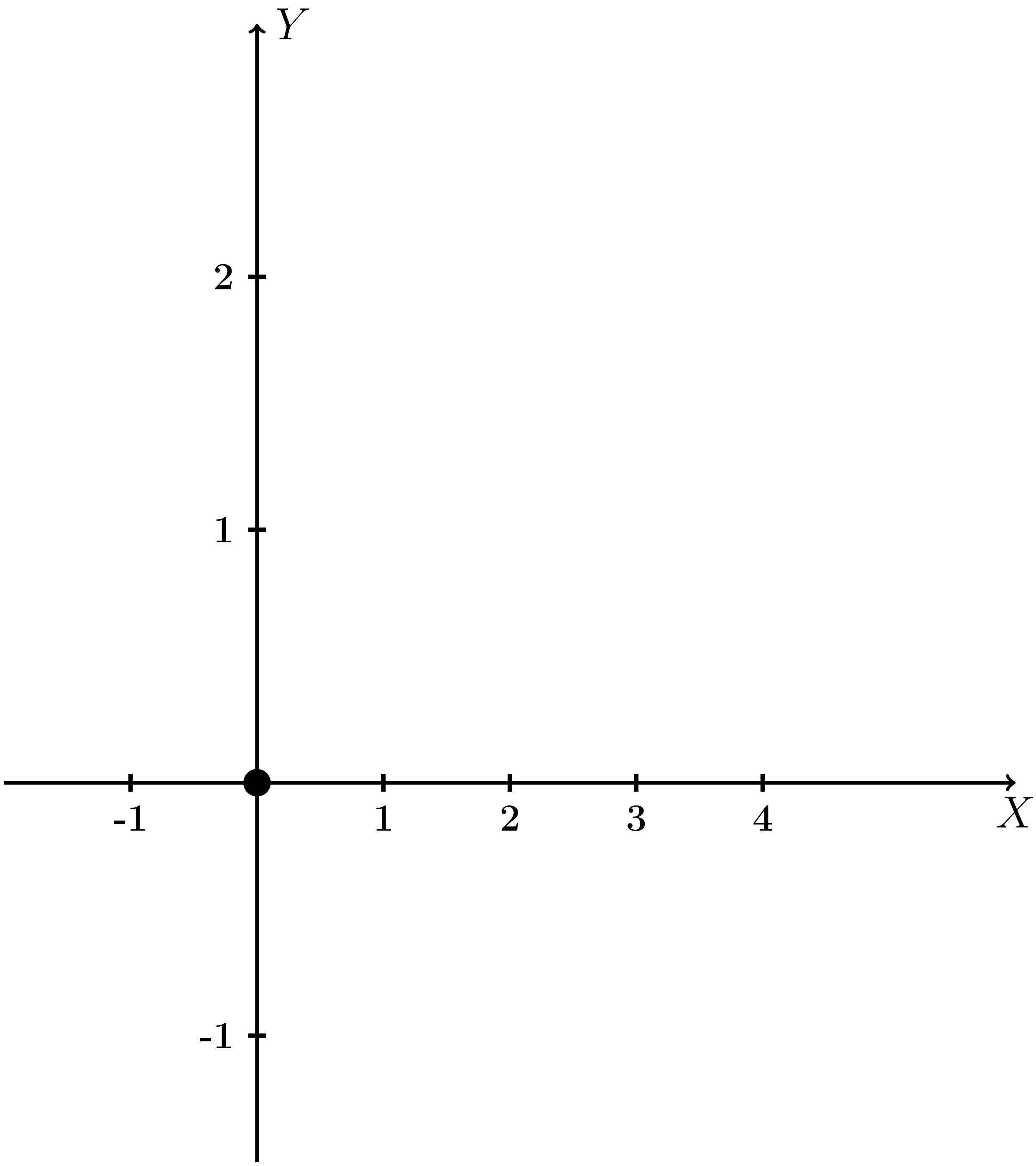

Рис.: Чертеж к задаче 2: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$
\begin{aligned}
x_{\text{лев}} &= && \text{— левая граница;}\\
x_{\text{прав}} &= && \text{— правая;}\\
y_{\text{низ}}(x) &= 0 && \text{— нижняя;}\\
y_{\text{верх}}(x) &= \begin{cases} & \text{при} \\ & \text{при} \end{cases} && \text{— верхняя (из 2х частей).}
\end{aligned}
$$

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6 с разбиением области интегрирования на две части согласно форме верхней границы. Для интегрирования экспоненты используется формула 7 таблицы 2.

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-1}^{0}\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл левый}} + \underbrace{\int_0^4\left(\int_0^{e^{-0.4x}} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл правый}} =$$

$$= \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx + \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx =$$

$$= \int \quad (\qquad\qquad) \, dx + \int \quad (\qquad\qquad) \, dx =$$

$$= \int \quad (\qquad) dx + \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad \right)\Big| + \left(\qquad \right)\Big| =$$

$$= \left[\left(\qquad \right) - \left(\qquad\qquad \right)\right] + \left[\qquad - \qquad \right] =$$

$$= \qquad + \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2.
Для интегрирования экспоненты используются формулы 7,8 таблицы 2.

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{0} x\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^4 x\left(\int_0^{e^{-0.4x}} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad \right)dx + \frac{1}{S}\int \; x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \; x\,(\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad (\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \quad + \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad \Big) +$$

$$+ \Big(\qquad\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad}\cdot(\qquad + \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{0}\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} y\,dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^4\left(\int_0^{e^{-0.4x}} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=}\right)dx + \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int (\qquad)\,dx + \frac{1}{2S}\int (\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \qquad dx + \frac{1}{2S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int (\qquad)\,dx + \frac{1}{2S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\qquad\right)\Big| + \frac{1}{2S}\left(\qquad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\qquad\Big) +$$

$$+ \Big(\qquad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot}\cdot(\qquad + \qquad) = \qquad.$$

Наносим центр тяжести $C(\quad,\quad)$ на чертеж к задаче 2.

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

Выборочная проверка вариант 23 задача 2

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

Задача 1.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

$I_{\mathrm{OY}} =$

$I_{\mathrm{OX}} =$

Задача 2.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Задача 1

Область ограничена линиями:

$$y = (-5) \cdot x + (-2),$$
$$y = 1 \cdot x^2 + (2),$$
$$x = x_{\max} = 3.$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь, координаты центра тяжести, и моменты инерции относительно осей координат.

Решение (по образцу примера П1)

Шаг 1: построение линий. Находим пересечение двух первых линий.

$$1 \cdot x^2 + (2) = (-5) \cdot x + (-2)$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$D = \quad = \quad .$

$x_1 = \quad = \quad ; \qquad x_2 = \quad = \quad .$

$\boldsymbol{y = (-5) \cdot x + (-2)}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_1 - 1 =$ до $x_{\max} + 1 =$:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = (-5) \cdot x + (-2)$	23	18	13	8	3	−2	−7	−12	−17	−22

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

Вариант 24 задача 1, продолжение

Решение (продолжение)

Шаг 1: продолжение.

$\boldsymbol{y = 1 \cdot x^2 + (2)}$ — парабола, для ее построения табулируем:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 1 \cdot x^2 + (2)$	27	18	11	6	3	2	3	6	11	18

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим параболу по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{x = 3}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(3, 0)$ (**на чертеже черным**).

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$
\begin{aligned}
x_{\text{лев}} &= && \text{— левая граница;}\\
x_{\text{прав}} &= && \text{— правая;}\\
y_{\text{низ}}(x) &= && \text{— нижняя;}\\
y_{\text{верх}}(x) &= && \text{— верхняя.}
\end{aligned}
$$

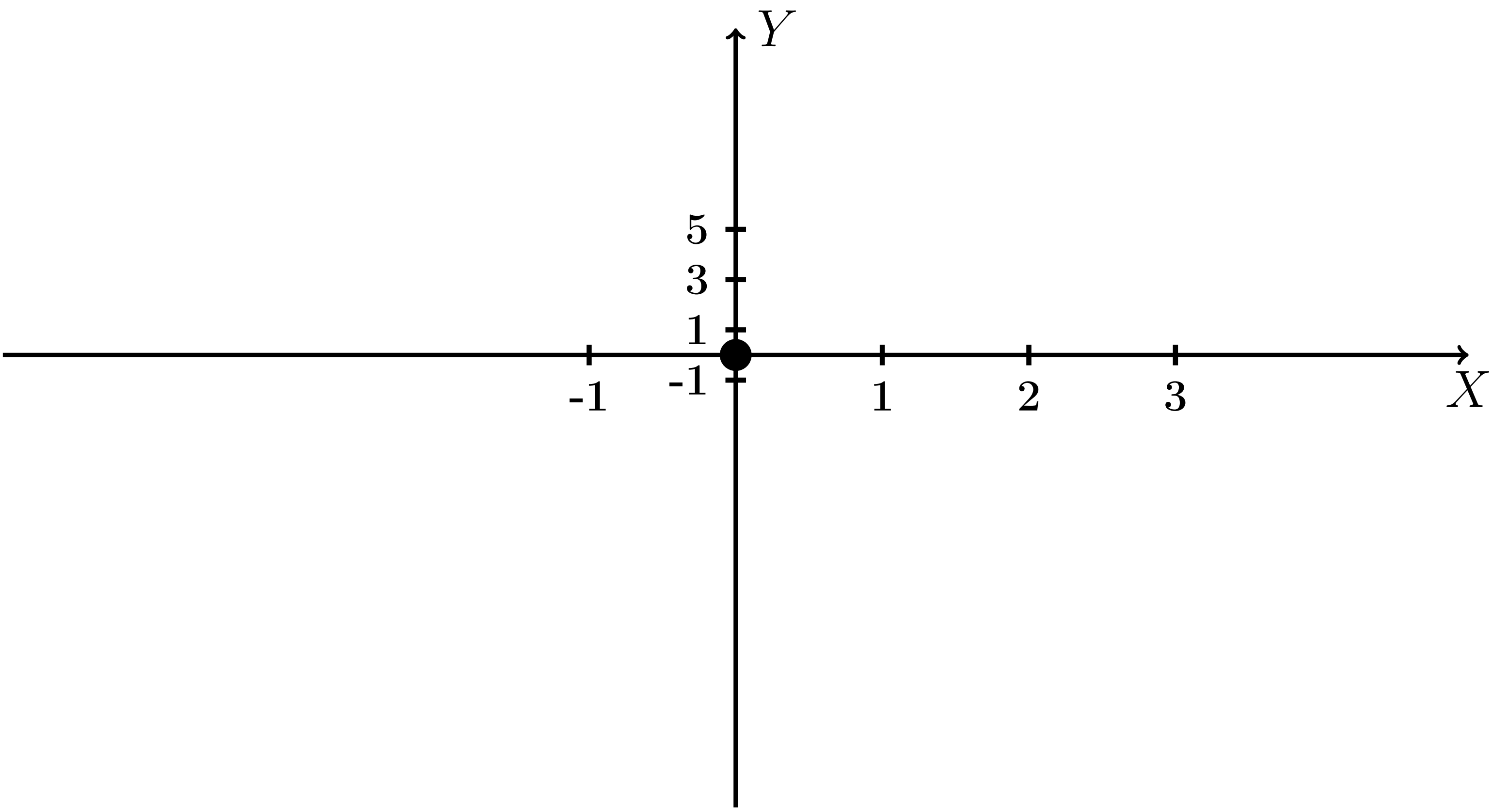

Рис.: Чертеж к задаче 1: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6:

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-1}^{3}\left(\int_{(-5)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(2)} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл}} =$$

$$= \int_{-1}^{3}\left(y\Big|_{y=}^{y=}\qquad\right) dx =$$

$$= \int \left(\qquad - \qquad\right) dx =$$

$$= \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad\right)\Big| \quad =$$

$$= \left(\qquad\right) - \left(\qquad\right) =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2:

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_{-1}^{3} x\left(\int_{(-5)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(2)} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x(\qquad\qquad\qquad\qquad)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad dx$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad \Big) -$$

$$- \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad} \cdot (\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_{-1}^{3}\left(\int_{(-5)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(2)} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad \Big[(\qquad\qquad)^2 - (\qquad\qquad)^2\Big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad [(\qquad\qquad) - (\qquad\qquad)]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad [\qquad\qquad]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\qquad\qquad\right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\qquad\qquad\Big) -$$

$$- \Big(\qquad\qquad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad}\cdot(\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Наносим центр тяжести $C(1.824, -2.506)$ на чертеж к задаче 1.

Решение (продолжение)

Шаг 5: находим моменты инерции относительно осей координат по формулам Правила П4:

$$I_{\mathrm{OY}} = \iint_G x^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{3} x^2 \left(\int_{(-5)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(2)} dy \right) dx =$$

$$= \int \quad x^2 \left(y \Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \int \quad x^2 \left(\qquad \right) dx =$$

$$= \int \quad x^2 (\qquad) dx =$$

$$= \int \quad (\qquad) dx =$$

$$= \left(\qquad \right) \Big| \quad =$$

$$= \left[\left(\qquad \right) - \left(\qquad \right) \right] =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 5: продолжение.

$$I_{\mathrm{OX}} = \iint_G y^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{3}\left(\int_{(-5)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(2)} y^2\,dy\right)dx =$$

$$= \int \left(\left.\frac{y^3}{3}\right|_{y=}^{y=}\qquad\qquad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \left[\left(\qquad\qquad\right)^3 - \left(\qquad\qquad\qquad\qquad\right)^3\right]dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\Big) -$$

$$- \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\Big)\Big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \Big[\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\Big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\right) -\right.$$

$$\left.- \left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(\qquad\qquad - \qquad\qquad\right) = \qquad\qquad .$$

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

$\boldsymbol{I}_{\mathrm{OY}} =$

$\boldsymbol{I}_{\mathrm{OX}} =$

Выборочная проверка вариант 24 задача 1

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

I_{OY} (формат 1.23): введи Клик

I_{OX} (формат 1.23): введи Клик

Задача 2

Область ограничена линиями:

$$\begin{aligned} x &= x_{\max} = 3, \\ x &= x_{\min} = -2, \\ y &= 0, \\ y &= e^{-0.7x}, \\ y &= 1 + 0.2 \cdot x. \end{aligned}$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь и координаты центра тяжести области (моменты инерции не вычислять).

Решение (по образцу примера П2)

Шаг 1: построение линий.

$\boldsymbol{y = 1 + 0.2 \cdot x}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_{\min} - 1 = -2 - 1 = -3$ до 1:

x	-3	-2	-1	0	1
$y = 1 + 0.2 \cdot x$	0,4	0,6	0,8	1	1,2

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

$\boldsymbol{y = e^{-0.7x}}$ — экспонента, для ее построения табулируем:

x	-1	0	1	2	3	4
$y = e^{-0.7x}$	2	1	0,5	0,2	0,1	0,1

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим экспоненту по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{y = 0}$ — горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = 3}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(3, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = -2}$ — вертикальная прямая, проходящая через т. $(-2, 0)$ (**черным**).

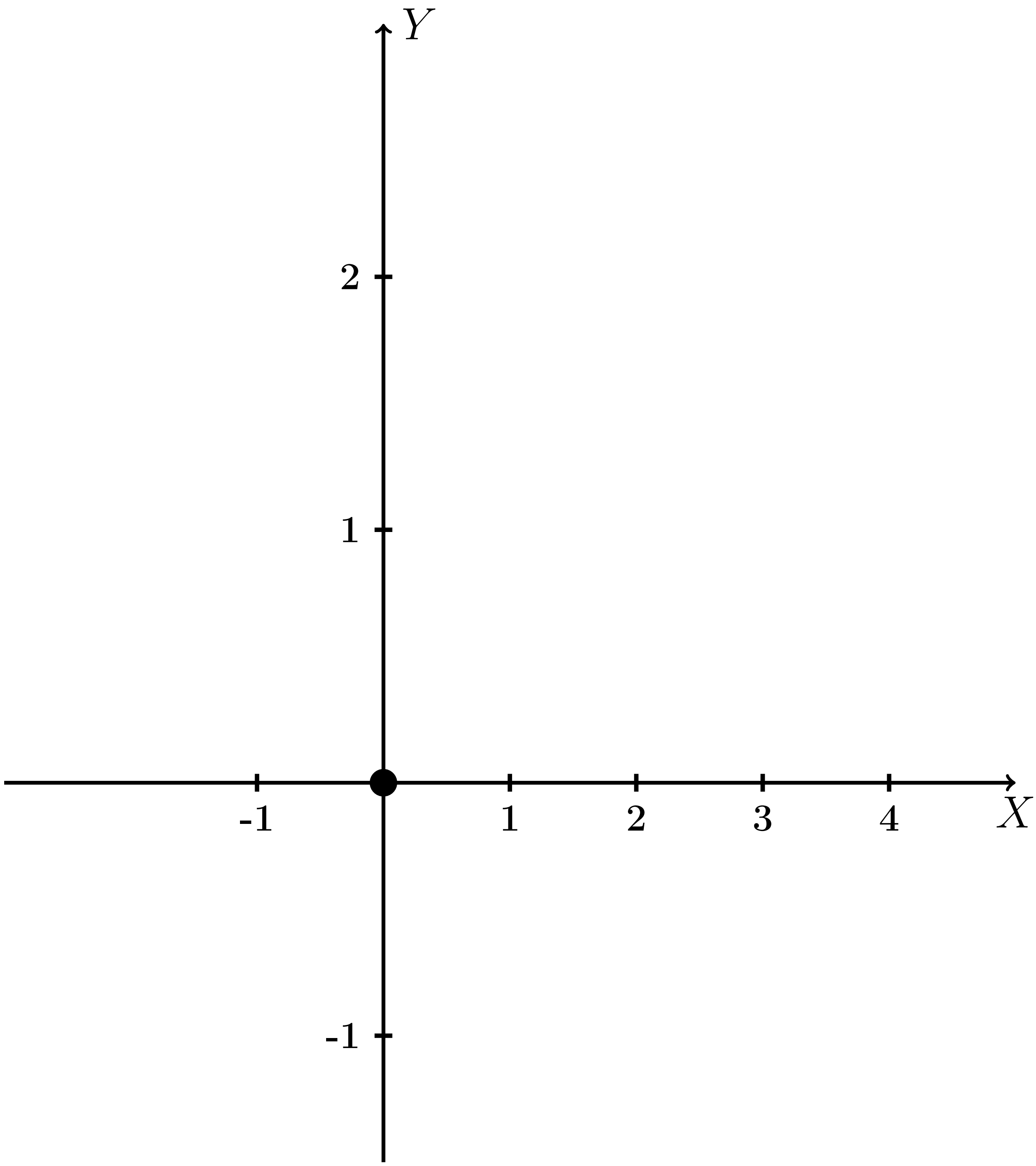

Рис.: Чертеж к задаче 2: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$x_{\text{лев}} = \qquad \text{– левая граница;}$$

$$x_{\text{прав}} = \qquad \text{– правая;}$$

$$y_{\text{низ}}(x) = 0 \qquad \text{– нижняя;}$$

$$y_{\text{верх}}(x) = \begin{cases} & \text{при} \\ & \text{при} \end{cases} \qquad \text{– верхняя (из 2х частей).}$$

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6 с разбиением области интегрирования на две части согласно форме верхней границы. Для интегрирования экспоненты используется формула 7 таблицы 2.

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-2}^{0}\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл левый}} + \underbrace{\int_0^3\left(\int_0^{e^{-0.7x}} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл правый}} =$$

$$= \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx + \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx =$$

$$= \int \left(\qquad \right) dx + \int \left(\qquad \right) dx =$$

$$= \int \left(\qquad \right) dx + \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad \right)\Big| + \left(\qquad \right)\Big| =$$

$$= \left[\left(\qquad \right) - \left(\qquad \right) \right] + \left[\qquad - \qquad \right] =$$

$$= \qquad + \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2.
Для интегрирования экспоненты используются формулы 7,8 таблицы 2.

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0} x\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^3 x\left(\int_0^{e^{-0.7x}} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int x\left(y\Big|_{y=0}^{y=}\right)dx + \frac{1}{S}\int x\left(y\Big|_{y=0}^{y=}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int x\,(\quad)\,dx + \frac{1}{S}\int x\,(\quad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int (\quad)\,dx + \frac{1}{S}\int \quad dx =$$

$$= \frac{1}{S}\left(\quad\right)\Big| + \frac{1}{S}\left(\quad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\quad\Big) +$$

$$+\Big(\quad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad}\cdot(\quad + \quad) = \quad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0}\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} y\,dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^3\left(\int_0^{e^{-0.7x}} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=}\right)dx + \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int (\qquad)\,dx + \frac{1}{2S}\int (\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \qquad dx + \frac{1}{2S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int (\qquad)\,dx + \frac{1}{2S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\qquad\right)\Big| + \frac{1}{2S}\left(\qquad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\qquad\Big) +$$

$$+\Big(\qquad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot}\cdot(\qquad + \qquad) = \qquad.$$

Наносим центр тяжести $C(\qquad,\qquad)$ на чертеж к задаче 2.

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

Выборочная проверка вариант 24 задача 2

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

Задача 1.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

$I_{\text{OY}} =$

$I_{\text{OX}} =$

Задача 2.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Задача 1

Область ограничена линиями:

$$\begin{aligned} y &= (-5)\cdot x + (-2), \\ y &= 1\cdot x^2 + (2), \\ x &= x_{\max} = 4. \end{aligned}$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь, координаты центра тяжести, и моменты инерции относительно осей координат.

Решение (по образцу примера П1)

Шаг 1: построение линий. Находим пересечение двух первых линий.

$$1\cdot x^2 + (2) = (-5)\cdot x + (-2)$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$D = \quad = \quad .$

$x_1 = \quad = \quad ; \qquad x_2 = \quad = \quad .$

$\boldsymbol{y = (-5)\cdot x + (-2)}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_1 - 1 =$ до $x_{\max} + 1 =$:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = (-5)\cdot x + (-2)$	23	18	13	8	3	-2	-7	-12	-17	-22	-27

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

Решение (продолжение)

Шаг 1: продолжение.

$\boldsymbol{y = 1 \cdot x^2 + (2)}$ — парабола, для ее построения табулируем:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = 1 \cdot x^2 + (2)$	27	18	11	6	3	2	3	6	11	18	27

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим параболу по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{x = 4}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(4, 0)$ (**на чертеже черным**).

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$x_{\text{лев}}$ = – левая граница;

$x_{\text{прав}}$ = – правая;

$y_{\text{низ}}(x)$ = – нижняя;

$y_{\text{верх}}(x)$ = – верхняя.

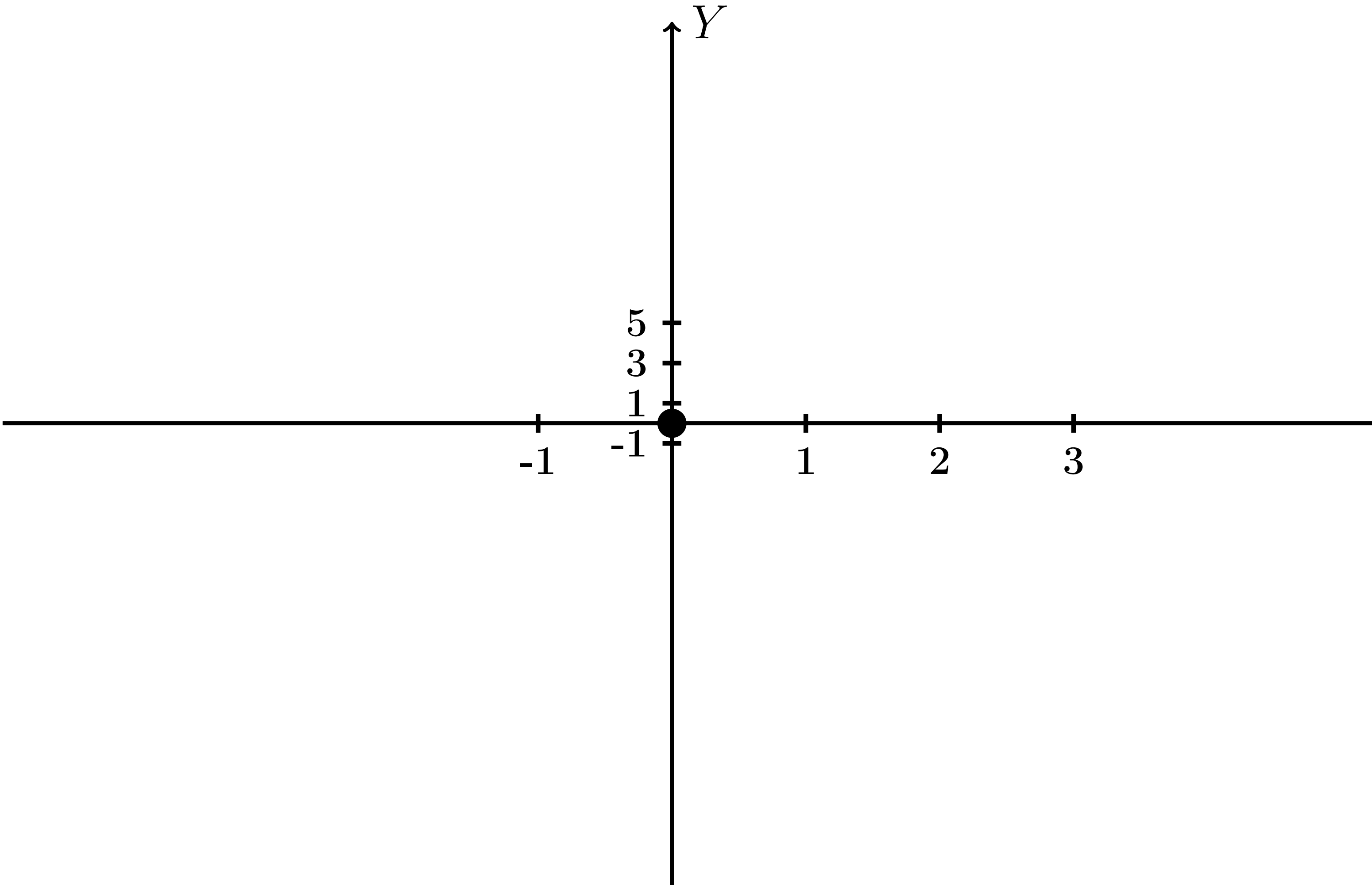

Рис.: Чертеж к задаче 1: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6:

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-1}^{4}\left(\int_{(-5)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(2)} dy\right)dx}_{\text{повторный интеграл}} =$$

$$= \int_{-1}^{4}\left(y\Big|_{y=}^{y=}\qquad\right)dx =$$

$$= \int \left(\qquad - \qquad \right) dx =$$

$$= \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \left(\qquad \right) - \left(\qquad \right) =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2:

$$x_C = \frac{1}{S} \iint_G x\,dx\,dy = \frac{1}{S} \int_{-1}^{4} x \left(\int_{(-5)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(2)} dy \right) dx =$$

$$= \frac{1}{S} \int x \left(y \Big|_{y=}^{y=} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{S} \int x \, (\qquad) \, dx =$$

$$= \frac{1}{S} \int x(\qquad)dx =$$

$$= \frac{1}{S} \int \qquad dx$$

$$= \frac{1}{S} \left(\qquad \right) \Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S} \Big[\Big(\qquad \Big) -$$

$$- \Big(\qquad \Big) \Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad} \cdot (\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_{-1}^{4}\left(\int_{(-5)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(2)} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=}^{y=}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \Big[(\quad)^2 - (\quad)^2\Big]dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int [(\quad) - (\quad)]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int [\quad]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big(\quad\Big)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\quad\Big) -$$

$$- \Big(\quad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad}\cdot(\quad - \quad) = \quad .$$

Наносим центр тяжести $C(2.553, -2.526)$ на чертеж к задаче 1.

Решение (продолжение)

Шаг 5: находим моменты инерции относительно осей координат по формулам Правила П 4:

$$I_{\mathrm{OY}} = \iint_G x^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{4} x^2 \left(\int_{(-5)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(2)} dy \right) dx =$$

$$= \int x^2 \left(y \Big|_{y=}^{y=} \right) dx =$$

$$= \int x^2 (\qquad) \, dx =$$

$$= \int x^2 (\qquad) dx =$$

$$= \int (\qquad) dx =$$

$$= \left(\qquad \right) \Big| =$$

$$= \left[\left(\qquad \right) - \left(\qquad \right) \right] =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 5: продолжение.

$$I_{\mathrm{OX}} = \iint_G y^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{4}\left(\int_{(-5)\cdot x+(-2)}^{1\cdot x^2+(2)} y^2\,dy\right)dx =$$

$$= \int \left(\frac{y^3}{3}\Big|_{y=}^{y=}\qquad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \Big[(\qquad)^3 - (\qquad)^3\Big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \big[(\qquad) -$$

$$-(\qquad)\big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \big[\qquad\big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\Big(\qquad\Big)\Big| =$$

$$= \frac{1}{3}\Big[\Big(\qquad\Big) -$$

$$-\Big(\qquad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot(\qquad - \qquad) = \qquad.$$

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OY}} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OX}} =$

Выборочная проверка вариант 25 задача 1

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

I_{OY} (формат 1.23): введи Клик

I_{OX} (формат 1.23): введи Клик

Задача 2

Область ограничена линиями:

$$\begin{aligned} x &= x_{\max} = 4, \\ x &= x_{\min} = -2, \\ y &= 0, \\ y &= e^{-0.7x}, \\ y &= 1 + 0.2 \cdot x. \end{aligned}$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь и координаты центра тяжести области (моменты инерции не вычислять).

Решение (по образцу примера П2)

Шаг 1: построение линий.

$\boldsymbol{y = 1 + 0.2 \cdot x}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_{\min} - 1 = -2 - 1 = -3$ до 1:

x	-3	-2	-1	0	1
$y = 1 + 0.2 \cdot x$	0,4	0,6	0,8	1	1,2

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

$\boldsymbol{y = e^{-0.7x}}$ — экспонента, для ее построения табулируем:

x	-1	0	1	2	3	4	5
$y = e^{-0.7x}$	2	1	0,5	0,2	0,1	0,1	0

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим экспоненту по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{y = 0}$ — горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0,0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = 4}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(4,0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = -2}$ — вертикальная прямая, проходящая через т. $(-2,0)$ (**черным**).

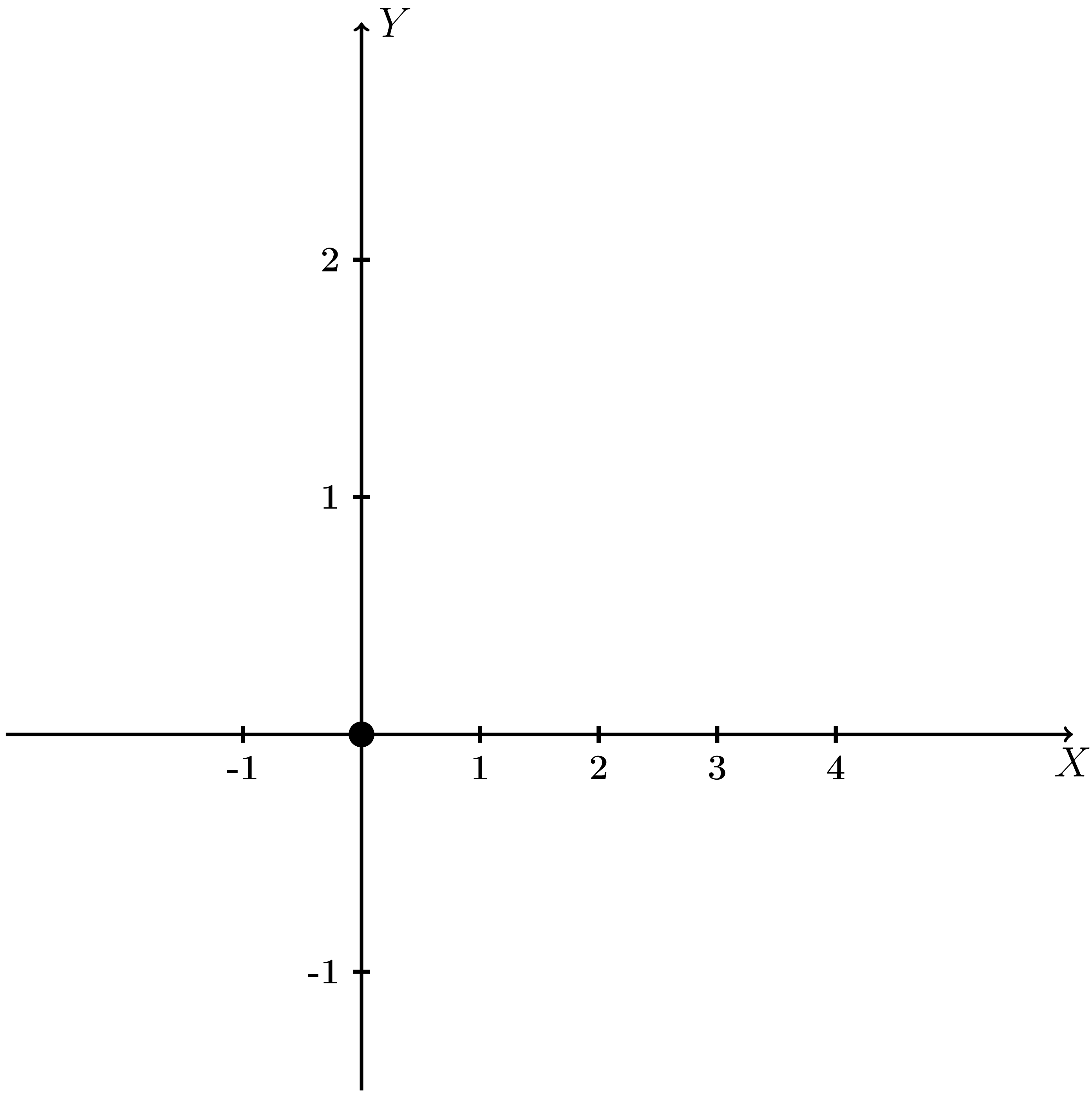

Рис.: Чертеж к задаче 2: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$\begin{aligned}
x_{\text{лев}} &= && \text{— левая граница;}\\
x_{\text{прав}} &= && \text{— правая;}\\
y_{\text{низ}}(x) &= 0 && \text{— нижняя;}\\
y_{\text{верх}}(x) &= \begin{cases} & \text{при} \\ & \text{при} \end{cases} && \text{— верхняя (из 2х частей).}
\end{aligned}$$

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6 с разбиением области интегрирования на две части согласно форме верхней границы. Для интегрирования экспоненты используется формула 7 таблицы 2.

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-2}^{0} \left(\int_0^{1+0.2\cdot x} dy \right) dx}_{\text{повторный интеграл левый}} + \underbrace{\int_0^4 \left(\int_0^{e^{-0.7x}} dy \right) dx}_{\text{повторный интеграл правый}} =$$

$$= \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx + \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx =$$

$$= \int (\qquad) \, dx + \int (\qquad) \, dx =$$

$$= \int (\qquad) dx + \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad \right)\Big| + \left(\qquad \right)\Big| =$$

$$= \left[\left(\qquad \right) - \left(\qquad \right) \right] + \left[\qquad - \qquad \right] =$$

$$= \qquad + \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2.
Для интегрирования экспоненты используются формулы 7,8 таблицы 2.

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0} x\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^4 x\left(\int_0^{e^{-0.7x}} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad \right)dx + \frac{1}{S}\int \; x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad \right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \; x\,(\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad (\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \quad + \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \; =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad \Big) +$$

$$+ \Big(\qquad\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad} \cdot (\qquad + \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0}\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} y\,dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^4\left(\int_0^{e^{-0.7x}} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=} \qquad \right)dx + \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=} \qquad \right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad\qquad\qquad) \,dx + \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad\qquad) \,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \qquad\qquad\qquad dx + \frac{1}{2S}\int \qquad\qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad\qquad\qquad\qquad) \,dx + \frac{1}{2S}\int \qquad\qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right)\Big| \quad + \frac{1}{2S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) +$$

$$+ \Big(\qquad\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot \qquad} \cdot (\qquad + \qquad) = \qquad .$$

Наносим центр тяжести $C(\qquad , \qquad)$ на чертеж к задаче 2.

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

Выборочная проверка вариант 25 задача 2

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

Задача 1.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

$I_{\text{OY}} =$

$I_{\text{OX}} =$

Задача 2.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Задача 1

Область ограничена линиями:

$$
\begin{aligned}
y &= (-4)\cdot x + (-1),\\
y &= 1\cdot x^2 + (2),\\
x &= x_{\max} = 3.
\end{aligned}
$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь, координаты центра тяжести, и моменты инерции относительно осей координат.

Решение (по образцу примера П1)

Шаг 1: построение линий. Находим пересечение двух первых линий.

$$1\cdot x^2 + (2) = (-4)\cdot x + (-1)$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$D = \qquad = \qquad .$

$x_1 = \qquad = \qquad ; \qquad x_2 = \qquad = \qquad .$

$\boldsymbol{y = (-4)\cdot x + (-1)}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_1 - 1 = \qquad$ до $x_{\max} + 1 = \qquad$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = (-4)\cdot x + (-1)$	15	11	7	3	−1	−5	−9	−13	−17

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

Решение (продолжение)

Шаг 1: продолжение.

$\boldsymbol{y = 1 \cdot x^2 + (2)}$ — парабола, для ее построения табулируем:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 1 \cdot x^2 + (2)$	18	11	6	3	2	3	6	11	18

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим параболу по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{x = 3}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(3, 0)$ (**на чертеже черным**).

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$
\begin{array}{lll}
x_{\text{лев}} & = & \qquad - \text{ левая граница;} \\
x_{\text{прав}} & = & \qquad - \text{ правая;} \\
y_{\text{низ}}(x) & = & \qquad - \text{ нижняя;} \\
y_{\text{верх}}(x) & = & \qquad - \text{ верхняя.}
\end{array}
$$

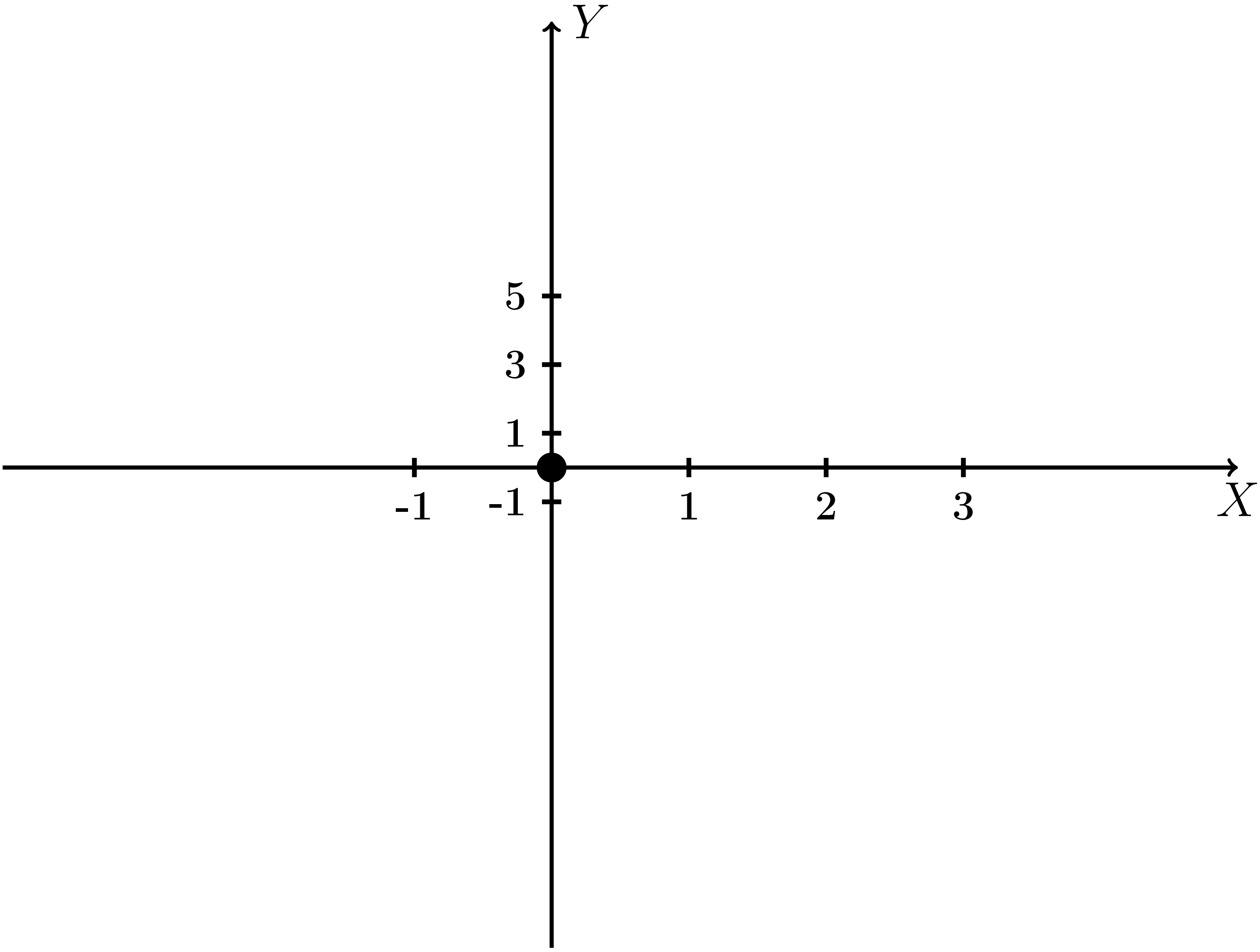

Рис.: Чертеж к задаче 1: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П 1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П 6:

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-1}^{3}\left(\int_{(-4)\cdot x+(-1)}^{1\cdot x^2+(2)} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл}} =$$

$$= \int_{-1}^{3}\left(y\Big|_{y=}^{y=}\qquad\right) dx =$$

$$= \int \left(\qquad - \qquad\right) dx =$$

$$= \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad\right)\Big| \quad =$$

$$= \left(\qquad\right) - \left(\qquad\right) =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2:

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_{-1}^{3} x\left(\int_{(-4)\cdot x+(-1)}^{1\cdot x^2+(2)} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x(\qquad\qquad\qquad\qquad)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad dx$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\Big) -$$

$$- \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad} \cdot (\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_{-1}^{3}\left(\int_{(-4)\cdot x+(-1)}^{1\cdot x^2+(2)} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad \Big[(\qquad\qquad)^2 - (\qquad\qquad)^2\Big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad [(\qquad\qquad) - (\qquad\qquad)]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad [\qquad\qquad]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big(\qquad\qquad\Big)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\qquad\qquad\Big) -$$

$$- \Big(\qquad\qquad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad} \cdot (\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Наносим центр тяжести $C(1.857, -1.114)$ на чертеж к задаче 1.

Решение (продолжение)

Шаг 5: находим моменты инерции относительно осей координат по формулам Правила П 4:

$$I_{OY} = \iint_G x^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{3} x^2 \left(\int_{(-4)\cdot x+(-1)}^{1\cdot x^2+(2)} dy \right) dx =$$

$$= \int \quad x^2 \left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \int \quad x^2 \,(\qquad\qquad) \,dx =$$

$$= \int \quad x^2 (\qquad\qquad) dx =$$

$$= \int \quad (\qquad\qquad) dx =$$

$$= \left(\qquad\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \left[\left(\qquad\qquad \right) - \left(\qquad\qquad \right) \right] =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 5: продолжение.

$$I_{\mathrm{OX}} = \iint_G y^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{3}\left(\int_{(-4)\cdot x+(-1)}^{1\cdot x^2+(2)} y^2\,dy\right)dx =$$

$$= \int \left(\frac{y^3}{3}\bigg|_{y=}^{y=}\qquad\qquad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \Big[(\qquad\qquad)^3 - (\qquad\qquad\qquad)^3\Big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \Big[(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) -$$

$$-(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)\Big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \Big[\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\Big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\Big)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{3}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\Big) -$$

$$-\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot(\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OY}} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OX}} =$

Выборочная проверка вариант 26 задача 1

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

I_{OY} (формат 1.23): введи Клик

I_{OX} (формат 1.23): введи Клик

Задача 2

Область ограничена линиями:

$$
\begin{aligned}
x &= x_{\max} = 3,\\
x &= x_{\min} = -1,\\
y &= 0,\\
y &= e^{-0.7x},\\
y &= 1 + 0.2 \cdot x.
\end{aligned}
$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь и координаты центра тяжести области (моменты инерции не вычислять).

Решение (по образцу примера П2)

Шаг 1: построение линий.

$\boldsymbol{y = 1 + 0.2 \cdot x}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_{\min} - 1 = -1 - 1 = -2$ до 1:

x	-2	-1	0	1
$y = 1 + 0.2 \cdot x$	0,6	0,8	1	1,2

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

$\boldsymbol{y = e^{-0.7x}}$ — экспонента, для ее построения табулируем:

x	-1	0	1	2	3	4
$y = e^{-0.7x}$	2	1	0,5	0,2	0,1	0,1

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим экспоненту по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{y = 0}$ — горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = 3}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(3, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = -1}$ — вертикальная прямая, проходящая через т. $(-1, 0)$ (**черным**).

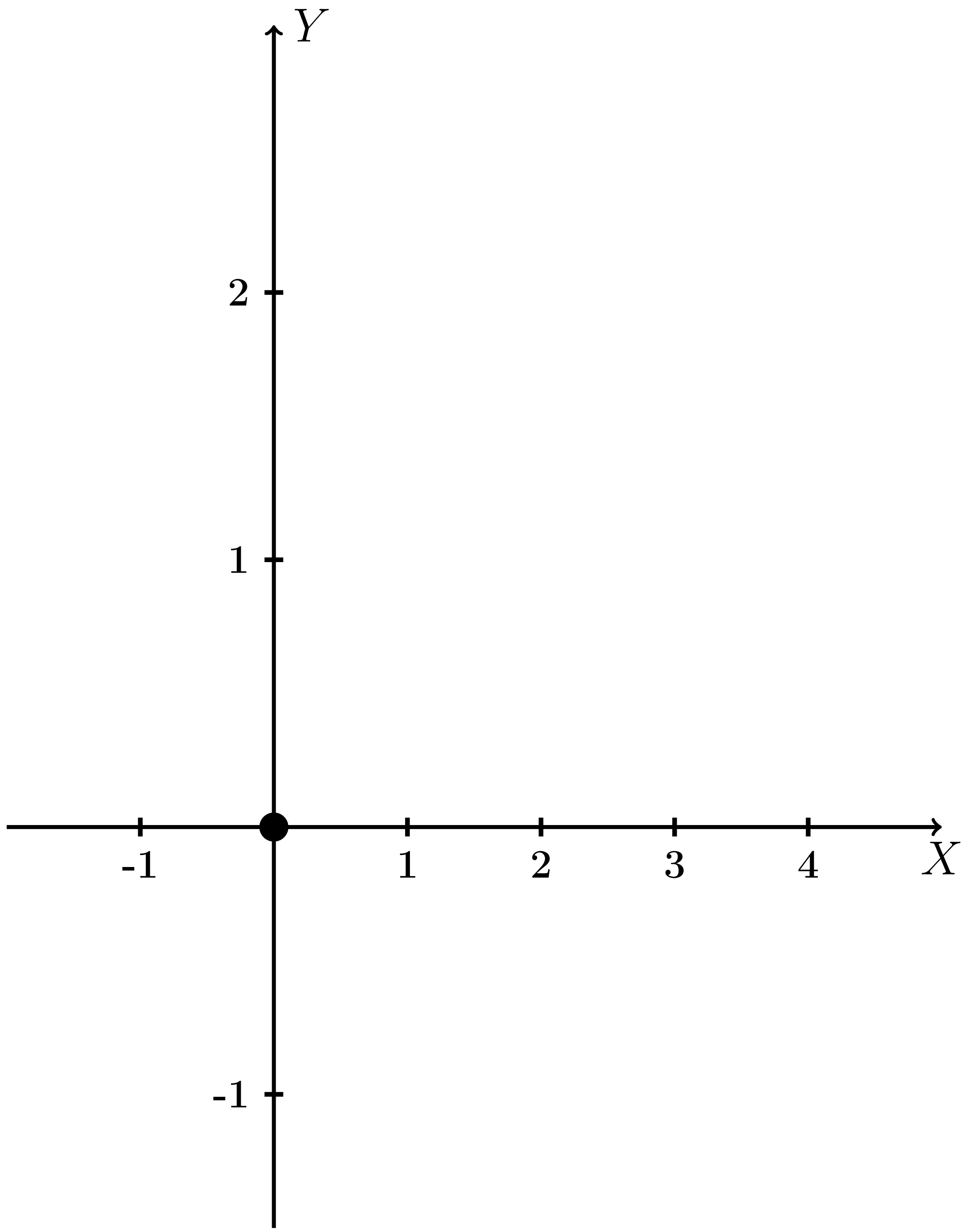

Рис.: Чертеж к задаче 2: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$\begin{aligned} x_{\text{лев}} &= && \text{— левая граница;}\\ x_{\text{прав}} &= && \text{— правая;}\\ y_{\text{низ}}(x) &= 0 && \text{— нижняя;}\\ y_{\text{верх}}(x) &= \begin{cases} & \text{при} \\ & \text{при} \end{cases} && \text{— верхняя (из 2х частей).} \end{aligned}$$

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6 с разбиением области интегрирования на две части согласно форме верхней границы. Для интегрирования экспоненты используется формула 7 таблицы 2.

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-1}^{0}\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} dy\right)dx}_{\text{повторный интеграл левый}} + \underbrace{\int_0^3\left(\int_0^{e^{-0.7x}} dy\right)dx}_{\text{повторный интеграл правый}} =$$

$$= \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx + \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx =$$

$$= \int (\quad) \, dx + \int (\quad) \, dx =$$

$$= \int (\quad) dx + \int \quad dx =$$

$$= (\quad) \Big| + (\quad) \Big| =$$

$$= \left[(\quad) - (\quad) \right] + \left[\quad - \quad \right] =$$

$$= \quad + \quad = \quad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2.
Для интегрирования экспоненты используются формулы 7,8 таблицы 2.

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{0} x\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} dy\right) dx + \frac{1}{S}\int_0^3 x\left(\int_0^{e^{-0.7x}} dy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad \right) dx + \frac{1}{S}\int \; x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \; x\,(\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad (\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \quad + \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \; =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad \Big) +$$

$$+\Big(\qquad\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad}\cdot(\qquad + \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{0}\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} y\,dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^{3}\left(\int_0^{e^{-0.7x}} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\bigg|_{y=0}^{y=} \quad\right)dx + \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\bigg|_{y=0}^{y=} \quad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad) \, dx + \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \qquad dx + \frac{1}{2S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad) \, dx + \frac{1}{2S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\qquad \right)\Big| + \frac{1}{2S}\left(\qquad \right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\left[\left(\qquad \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\qquad \right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot} \cdot (\quad + \quad) = \qquad .$$

Наносим центр тяжести $C(\quad , \quad)$ на чертеж к задаче 2.

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

Выборочная проверка вариант 26 задача 2

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

Задача 1.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

$I_{\text{OY}} =$

$I_{\text{OX}} =$

Задача 2.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Задача 1

Область ограничена линиями:

$$y = (-4)\cdot x + (-1),$$
$$y = 1\cdot x^2 + (2),$$
$$x = x_{\max} = 4.$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь, координаты центра тяжести, и моменты инерции относительно осей координат.

Решение (по образцу примера П1)

Шаг 1: построение линий. Находим пересечение двух первых линий.

$$1\cdot x^2 + (2) = (-4)\cdot x + (-1)$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$D = \quad = \quad .$

$x_1 = \quad = \quad ; \qquad x_2 = \quad = \quad .$

$\boldsymbol{y = (-4)\cdot x + (-1)}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_1 - 1 =$ до $x_{\max} + 1 =$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = (-4)\cdot x + (-1)$	15	11	7	3	-1	-5	-9	-13	-17	-21

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

Решение (продолжение)

Шаг 1: продолжение.
$\boldsymbol{y = 1 \cdot x^2 + (2)}$ — парабола, для ее построения табулируем:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = 1 \cdot x^2 + (2)$	18	11	6	3	2	3	6	11	18	27

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим параболу по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{x = 4}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(4, 0)$ (**на чертеже черным**).

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$x_{\text{лев}} =$ — левая граница;
$x_{\text{прав}} =$ — правая;
$y_{\text{низ}}(x) =$ — нижняя;
$y_{\text{верх}}(x) =$ — верхняя.

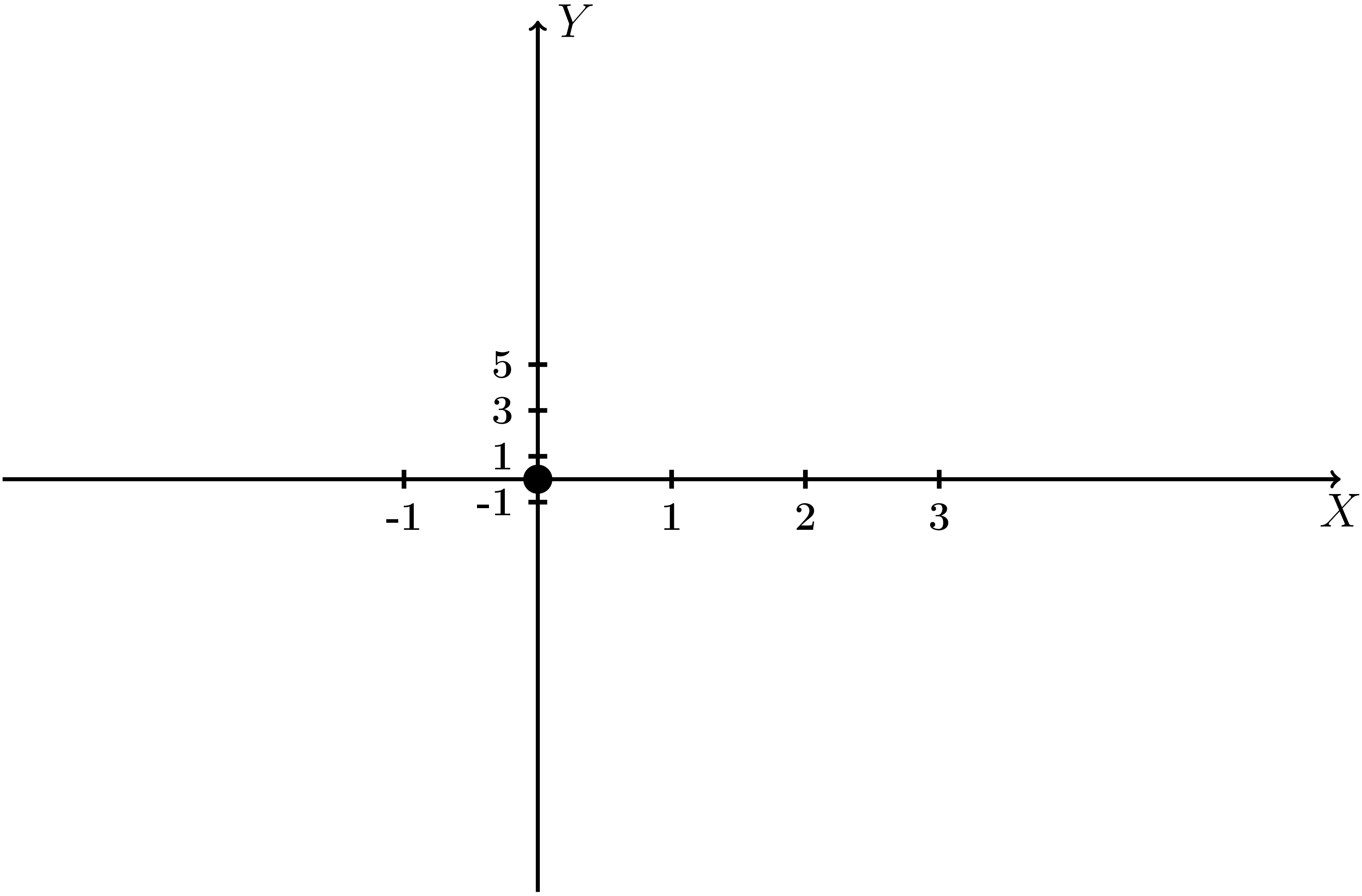

Рис.: Чертеж к задаче 1: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П 1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П 6:

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-1}^{4} \left(\int_{(-4)\cdot x+(-1)}^{1\cdot x^2+(2)} dy \right) dx}_{\text{повторный интеграл}} =$$

$$= \int_{-1}^{4} \left(y \Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \int \ (\qquad - \qquad) \, dx =$$

$$= \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad \right) \Big| \quad =$$

$$= \left(\qquad \right) - \left(\qquad \right) =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2:

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_{-1}^{4} x\left(\int_{(-4)\cdot x+(-1)}^{1\cdot x^2+(2)} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int x\left(y\Big|_{y=}^{y=}\qquad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int x\,(\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int x(\qquad)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \qquad dx$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\Big) -$$

$$- \Big(\qquad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad}\cdot(\qquad - \qquad) = \qquad.$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_{-1}^{4}\left(\int_{(-4)\cdot x+(-1)}^{1\cdot x^2+(2)} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=}^{y=}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \Big[\big(\quad\big)^2 - \big(\quad\big)^2\Big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \big[\big(\quad\big) - \big(\quad\big)\big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \big[\quad\big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big(\quad\Big)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\quad\Big) -$$

$$- \Big(\quad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad}\cdot\big(\quad - \quad\big) = \quad .$$

Наносим центр тяжести $C(2.594, -0.750)$ на чертеж к задаче 1.

Решение (продолжение)

Шаг 5: находим моменты инерции относительно осей координат по формулам Правила П 4:

$$I_{OY} = \iint_G x^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{4} x^2 \left(\int_{(-4)\cdot x+(-1)}^{1\cdot x^2+(2)} dy \right) dx =$$

$$= \int x^2 \left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right) dx =$$

$$= \int x^2 \left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right) dx =$$

$$= \int x^2 (\qquad\qquad\qquad\qquad) dx =$$

$$= \int (\qquad\qquad\qquad\qquad) dx =$$

$$= \left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \left[\left(\qquad\qquad\qquad \right) - \left(\qquad\qquad\qquad \right) \right] =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 5: продолжение.

$$I_{\mathrm{OX}} = \iint_G y^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{4} \left(\int_{(-4)\cdot x+(-1)}^{1\cdot x^2+(2)} y^2\,dy \right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{y^3}{3} \Big|_{y=}^{y=} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \left[(\quad)^3 - (\quad)^3 \right] dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int [(\quad) -$$

$$- (\quad)]\,dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int [\quad]\,dx =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\quad \right) \Big| =$$

$$= \frac{1}{3} \left[\left(\quad \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\quad \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (\quad - \quad) = \quad .$$

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

$\boldsymbol{I}_{\mathrm{OY}} =$

$\boldsymbol{I}_{\mathrm{OX}} =$

Выборочная проверка вариант 27 задача 1

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

I_{OY} (формат 1.23): введи Клик

I_{OX} (формат 1.23): введи Клик

Задача 2

Область ограничена линиями:

$$\begin{aligned} x &= x_{\max} = 4, \\ x &= x_{\min} = -1, \\ y &= 0, \\ y &= e^{-0.7x}, \\ y &= 1 + 0.2 \cdot x. \end{aligned}$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь и координаты центра тяжести области (моменты инерции не вычислять).

Решение (по образцу примера П2)

Шаг 1: построение линий.

$\boldsymbol{y = 1 + 0.2 \cdot x}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_{\min} - 1 = -1 - 1 = -2$ до 1:

x	-2	-1	0	1
$y = 1 + 0.2 \cdot x$	0,6	0,8	1	1,2

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

$\boldsymbol{y = e^{-0.7x}}$ — экспонента, для ее построения табулируем:

x	-1	0	1	2	3	4	5
$y = e^{-0.7x}$	2	1	0,5	0,2	0,1	0,1	0

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим экспоненту по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{y = 0}$ — горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = 4}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(4, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = -1}$ — вертикальная прямая, проходящая через т. $(-1, 0)$ (**черным**).

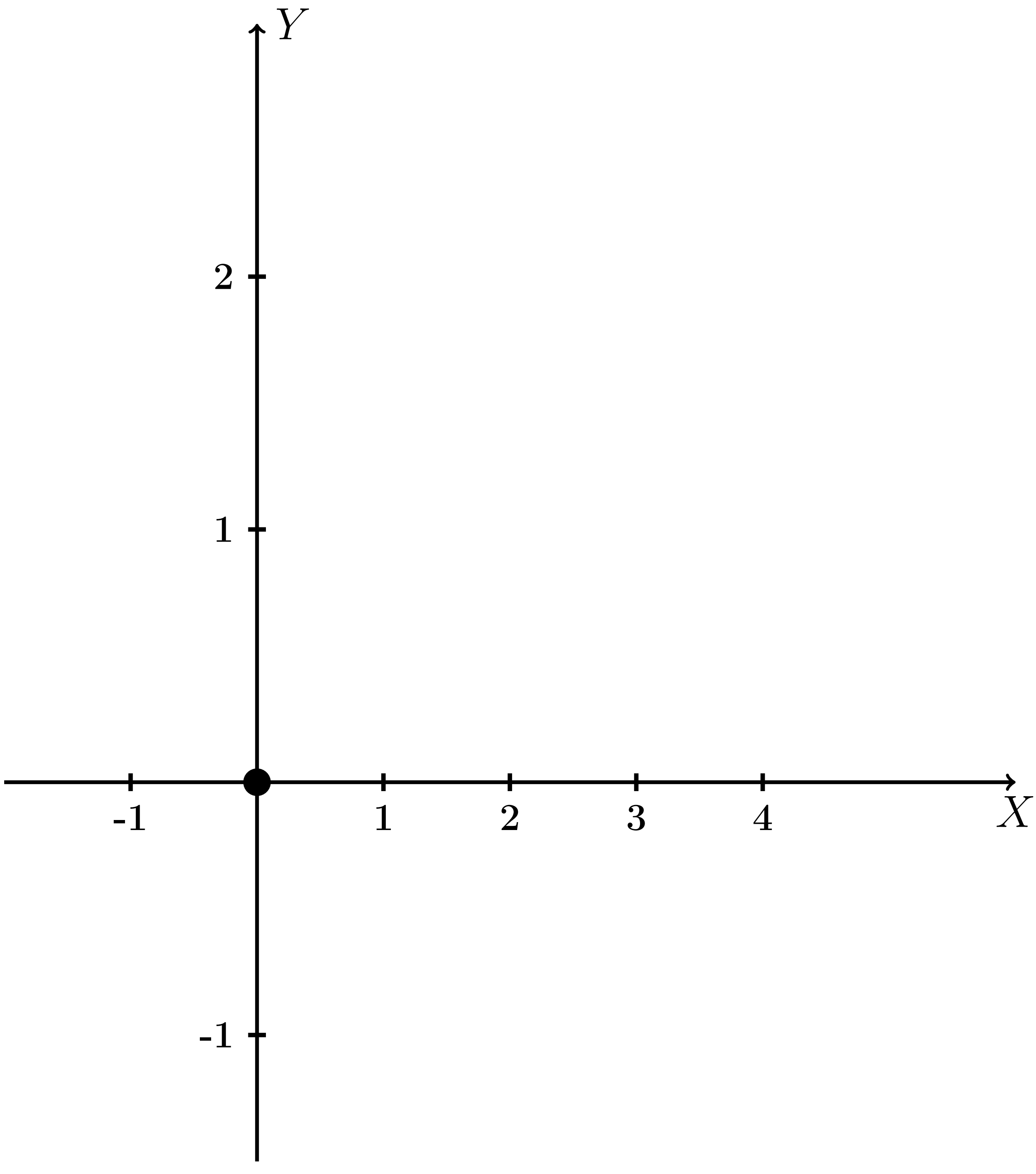

Рис.: Чертеж к задаче 2: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$
\begin{aligned}
x_{\text{лев}} &= && \text{– левая граница;}\\
x_{\text{прав}} &= && \text{– правая;}\\
y_{\text{низ}}(x) &= 0 && \text{– нижняя;}\\
y_{\text{верх}}(x) &= \begin{cases} & \text{при} \\ & \text{при} \end{cases} && \text{– верхняя (из 2х частей).}
\end{aligned}
$$

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6 с разбиением области интегрирования на две части согласно форме верхней границы. Для интегрирования экспоненты используется формула 7 таблицы 2.

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-1}^{0}\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл левый}} + \underbrace{\int_0^4\left(\int_0^{e^{-0.7x}} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл правый}} =$$

$$= \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx + \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx =$$

$$= \int (\qquad) \, dx + \int (\qquad) \, dx =$$

$$= \int (\qquad) dx + \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad\right)\Big| + \left(\qquad\right)\Big| =$$

$$= \left[\left(\qquad\right) - \left(\qquad\right)\right] + \left[\qquad - \qquad\right] =$$

$$= \qquad + \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2.
Для интегрирования экспоненты используются формулы 7,8 таблицы 2.

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{0} x\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^4 x\left(\int_0^{e^{-0.7x}} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad \right)dx + \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad \right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad (\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \quad + \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad \Big) +$$

$$+ \Big(\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad}\cdot(\qquad + \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{0}\left(\int_0^{1+0.2\cdot x} y\,dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^4\left(\int_0^{e^{-0.7x}} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=}\right)dx + \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int (\qquad) dx + \frac{1}{2S}\int (\qquad) dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \qquad dx + \frac{1}{2S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int (\qquad) dx + \frac{1}{2S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\qquad\right)\Big| + \frac{1}{2S}\left(\qquad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\qquad\Big) +$$

$$+\Big(\qquad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot}\cdot(\qquad + \qquad) = \qquad.$$

Наносим центр тяжести $C(\qquad,\qquad)$ на чертеж к задаче 2.

Ответ

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Выборочная проверка вариант 27 задача 2

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

Задача 1.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

$I_{\text{OY}} =$

$I_{\text{OX}} =$

Задача 2.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Задача 1

Область ограничена линиями:

$$\begin{aligned} y &= (-3)\cdot x + (6), \\ y &= 1\cdot x^2 + (2), \\ x &= x_{\max} = 3. \end{aligned}$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь, координаты центра тяжести, и моменты инерции относительно осей координат.

Решение (по образцу примера П1)

Шаг 1: построение линий. Находим пересечение двух первых линий.

$$1\cdot x^2 + (2) = (-3)\cdot x + (6)$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$D = \qquad = \qquad .$

$x_1 = \qquad = \qquad ; \qquad x_2 = \qquad = \qquad .$

$\boldsymbol{y = (-3)\cdot x + (6)}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_1 - 1 =$ до $x_{\max} + 1 =$:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = (-3)\cdot x + (6)$	21	18	15	12	9	6	3	0	-3	-6

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

Решение (продолжение)

Шаг 1: продолжение.
$\boldsymbol{y = 1 \cdot x^2 + (2)}$ — парабола, для ее построения табулируем:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 1 \cdot x^2 + (2)$	27	18	11	6	3	2	3	6	11	18

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим параболу по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{x = 3}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(3, 0)$ (**на чертеже черным**).

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$
\begin{aligned}
x_{\text{лев}} &= && \text{— левая граница;}\\
x_{\text{прав}} &= && \text{— правая;}\\
y_{\text{низ}}(x) &= && \text{— нижняя;}\\
y_{\text{верх}}(x) &= && \text{— верхняя.}
\end{aligned}
$$

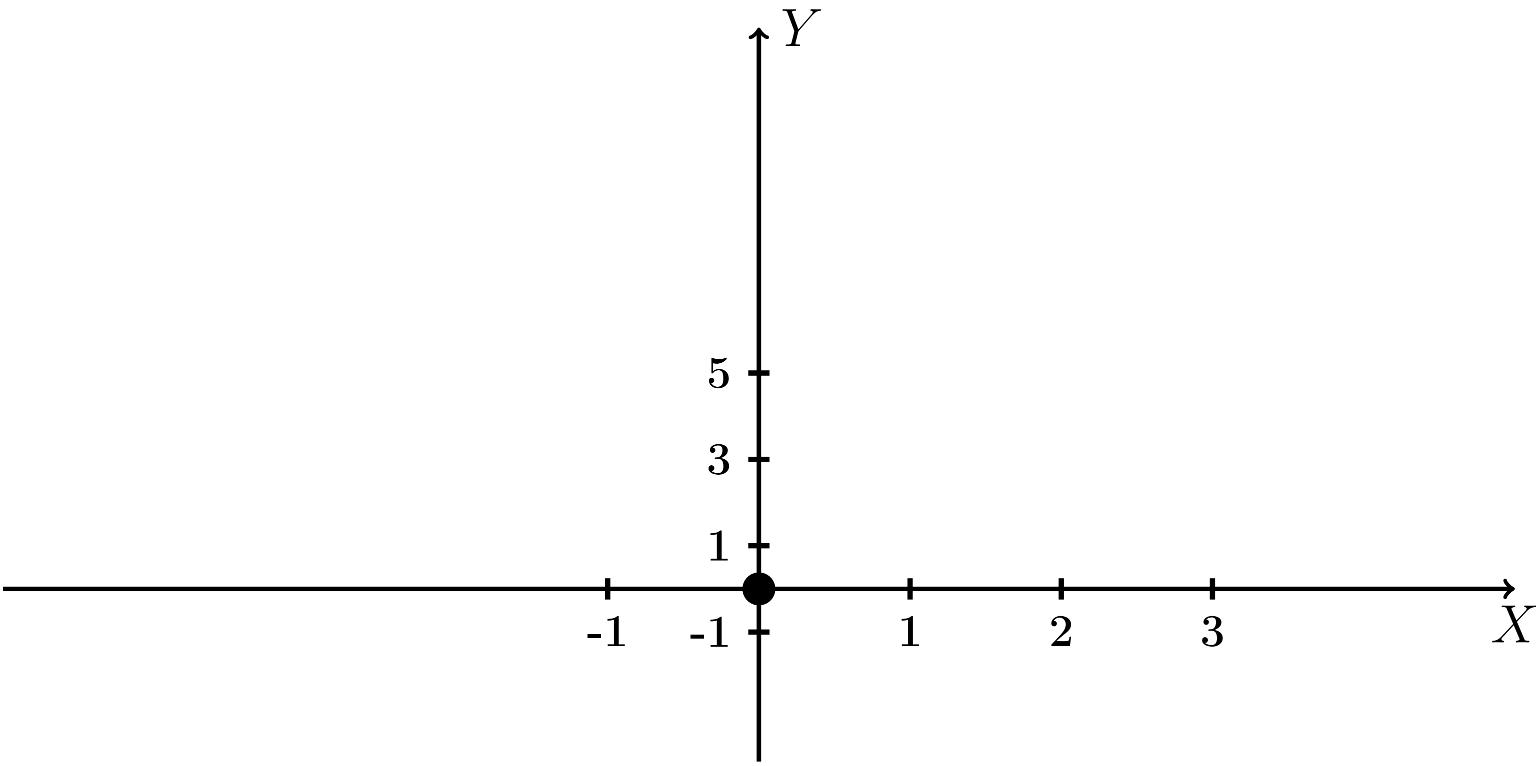

Рис.: Чертеж к задаче 1: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6:

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_1^3 \left(\int_{(-3)\cdot x+(6)}^{1\cdot x^2+(2)} dy \right) dx}_{\text{повторный интеграл}} =$$

$$= \int_1^3 \left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \int \Big(\qquad - \qquad \Big)\, dx =$$

$$= \int \qquad dx =$$

$$= \Big(\qquad \Big)\Big| =$$

$$= \Big(\qquad \Big) - \Big(\qquad \Big) =$$

$$= \quad - \quad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2:

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_1^3 x\left(\int_{(-3)\cdot x+(6)}^{1\cdot x^2+(2)} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad dx$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right)\Big| \;=$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) -$$

$$- \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad} \cdot (\qquad - \qquad\qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_1^3 \left(\int_{(-3)\cdot x+(6)}^{1\cdot x^2+(2)} y\,dy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=}^{y=} \quad\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[(\quad)^2 - (\quad)^2\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[(\quad) - (\quad)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[\quad\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\quad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\left[\left(\quad\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\quad\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\quad}\cdot(\quad - \quad) = \quad .$$

Наносим центр тяжести $C(2.368, 3.358)$ на чертеж к задаче 1.

Решение (продолжение)

Шаг 5: находим моменты инерции относительно осей координат по формулам Правила П 4:

$$I_{\mathrm{OY}} = \iint_G x^2\,dx\,dy = \int_1^3 x^2 \left(\int_{(-3)\cdot x+(6)}^{1\cdot x^2+(2)} dy\right) dx =$$

$$= \int x^2 \left(y\Big|_{y=}^{y=}\right) dx =$$

$$= \int x^2 (\qquad) \, dx =$$

$$= \int x^2 (\qquad) dx =$$

$$= \int (\qquad) dx =$$

$$= \left(\qquad\right)\Big| =$$

$$= \left[\left(\qquad\right) - \left(\qquad\right)\right] =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 5: продолжение.

$$I_{\mathrm{OX}} = \iint_G y^2\,dx\,dy = \int_1^3 \left(\int_{(-3)\cdot x+(6)}^{1\cdot x^2+(2)} y^2\,dy \right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{y^3}{3} \Big|_{y=}^{y=} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \left[(\quad)^3 - (\quad)^3 \right] dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \left[(\quad) - \right.$$

$$\left. - (\quad) \right] dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int [\quad] \, dx =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\quad \right) \Big| =$$

$$= \frac{1}{3} \left[(\quad) - \right.$$

$$\left. - (\quad) \right] =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (\quad - \quad) = \quad .$$

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OY}} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OX}} =$

Выборочная проверка вариант 28 задача 1

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

I_{OY} (формат 1.23): введи Клик

I_{OX} (формат 1.23): введи Клик

Задача 2

Область ограничена линиями:

$$
\begin{aligned}
x &= x_{\max} = 3, \\
x &= x_{\min} = -2, \\
y &= 0, \\
y &= e^{-0.7x}, \\
y &= 1 + 0.4 \cdot x.
\end{aligned}
$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь и координаты центра тяжести области (моменты инерции не вычислять).

Решение (по образцу примера П2)

Шаг 1: построение линий.

$\boldsymbol{y = 1 + 0.4 \cdot x}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_{\min} - 1 = -2 - 1 = -3$ до 1:

x	-3	-2	-1	0	1
$y = 1 + 0.4 \cdot x$	$-0{,}2$	$0{,}2$	$0{,}6$	1	$1{,}4$

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

$\boldsymbol{y = e^{-0.7x}}$ — экспонента, для ее построения табулируем:

x	-1	0	1	2	3	4
$y = e^{-0.7x}$	2	1	$0{,}5$	$0{,}2$	$0{,}1$	$0{,}1$

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим экспоненту по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{y = 0}$ — горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = 3}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(3, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = -2}$ — вертикальная прямая, проходящая через т. $(-2, 0)$ (**черным**).

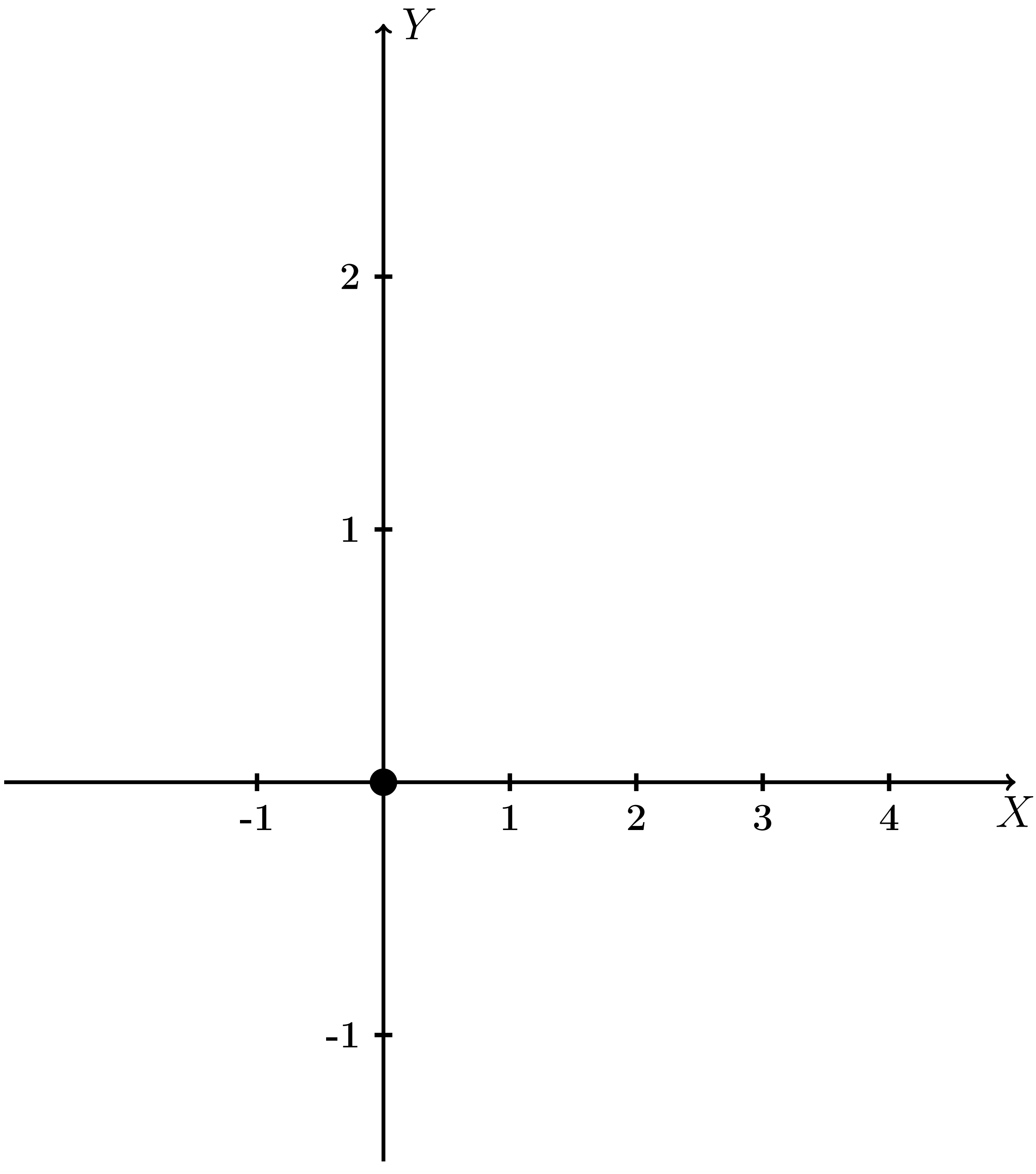

Рис.: Чертеж к задаче 2: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$x_{\text{лев}} = \qquad \text{— левая граница;}$$

$$x_{\text{прав}} = \qquad \text{— правая;}$$

$$y_{\text{низ}}(x) = 0 \qquad \text{— нижняя;}$$

$$y_{\text{верх}}(x) = \begin{cases} & \text{при} \\ & \text{при} \end{cases} \qquad \text{— верхняя (из 2х частей).}$$

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6 с разбиением области интегрирования на две части согласно форме верхней границы. Для интегрирования экспоненты используется формула 7 таблицы 2.

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-2}^{0}\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл левый}} + \underbrace{\int_0^3\left(\int_0^{e^{-0.7x}} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл правый}} =$$

$$= \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=}\right) dx + \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=}\right) dx =$$

$$= \int \left(\qquad\right) dx + \int \left(\qquad\right) dx =$$

$$= \int \left(\qquad\right) dx + \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad\right)\Big| + \left(\qquad\right)\Big| =$$

$$= \left[\left(\qquad\right) - \left(\qquad\right)\right] + \left[\qquad - \qquad\right] =$$

$$= \qquad + \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2.
Для интегрирования экспоненты используются формулы 7,8 таблицы 2.

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0} x\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^3 x\left(\int_0^{e^{-0.7x}} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad\right)dx + \frac{1}{S}\int \; x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \; x\,(\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad (\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| + \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad \Big) +$$

$$+\Big(\qquad\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad}\cdot(\qquad + \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0}\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} y\,dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^3\left(\int_0^{e^{-0.7x}} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=}\right)dx + \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left(\quad\right)dx + \frac{1}{2S}\int \left(\quad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad dx + \frac{1}{2S}\int \quad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left(\quad\right)dx + \frac{1}{2S}\int \quad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\quad\right)\Big| + \frac{1}{2S}\left(\quad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\quad\Big) +$$

$$+\Big(\quad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot}\cdot(\quad + \quad) = \quad .$$

Наносим центр тяжести $C(\quad,\quad)$ на чертеж к задаче 2.

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

Выборочная проверка вариант 28 задача 2

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

Задача 1.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

$I_{\text{OY}} =$

$I_{\text{OX}} =$

Задача 2.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Задача 1

Область ограничена линиями:

$$y = (-3) \cdot x + (6),$$
$$y = 1 \cdot x^2 + (2),$$
$$x = x_{\max} = 4.$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь, координаты центра тяжести, и моменты инерции относительно осей координат.

Решение (по образцу примера П1)

Шаг 1: построение линий. Находим пересечение двух первых линий.

$$1 \cdot x^2 + (2) = (-3) \cdot x + (6)$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$D = \quad = \quad .$

$x_1 = \quad = \quad ; \qquad x_2 = \quad = \quad .$

$\boldsymbol{y = (-3) \cdot x + (6)}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_1 - 1 =$ до $x_{\max} + 1 =$:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = (-3) \cdot x + (6)$	21	18	15	12	9	6	3	0	−3	−6	−9

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

Решение (продолжение)

Шаг 1: продолжение.

$\boldsymbol{y = 1 \cdot x^2 + (2)}$ — парабола, для ее построения табулируем:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = 1 \cdot x^2 + (2)$	27	18	11	6	3	2	3	6	11	18	27

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим параболу по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{x = 4}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(4, 0)$ (**на чертеже черным**).

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$
\begin{aligned}
x_{\text{лев}} &= && \text{– левая граница;}\\
x_{\text{прав}} &= && \text{– правая;}\\
y_{\text{низ}}(x) &= && \text{– нижняя;}\\
y_{\text{верх}}(x) &= && \text{– верхняя.}
\end{aligned}
$$

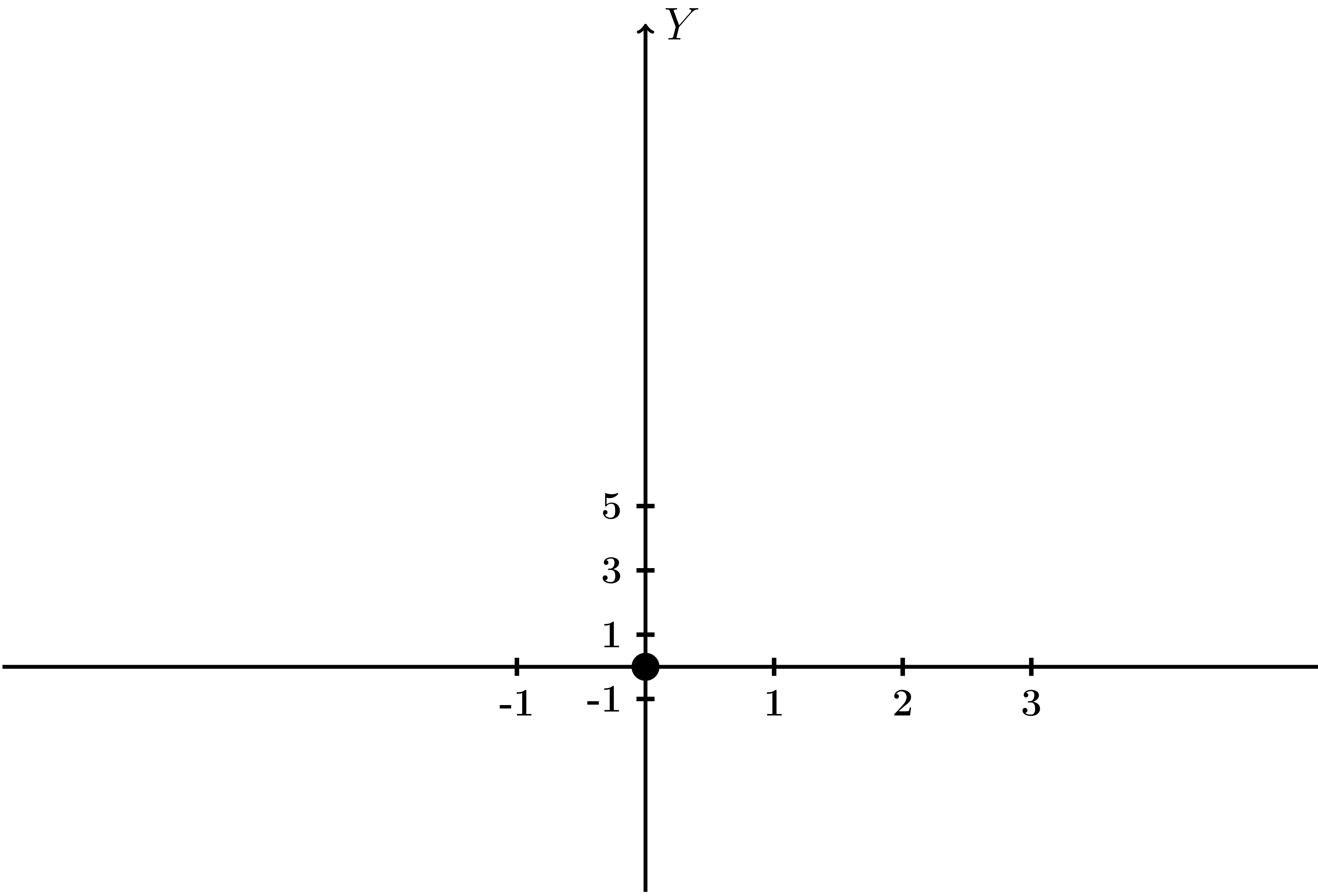

Рис.: Чертеж к задаче 1: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6:

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_1^4 \left(\int_{(-3)\cdot x+(6)}^{1\cdot x^2+(2)} dy \right) dx}_{\text{повторный интеграл}} =$$

$$= \int_1^4 \left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \int \left(\qquad - \qquad \right) dx =$$

$$= \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad \right)\Big| =$$

$$= \left(\qquad \right) - \left(\qquad \right) =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2:

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_1^4 x\left(\int_{(-3)\cdot x+(6)}^{1\cdot x^2+(2)} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int x\left(y\Big|_{y=}^{y=}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int x\,(\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int x(\qquad)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \qquad dx$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\Big) -$$

$$- \Big(\qquad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad}\cdot(\qquad - \qquad) = \qquad.$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_1^4 \left(\int_{(-3)\cdot x+(6)}^{1\cdot x^2+(2)} y\,dy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \Big[(\qquad)^2 - (\qquad)^2\Big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \big[(\qquad) - (\qquad)\big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \big[\qquad\big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big(\qquad\Big)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\qquad\Big) -$$

$$- \Big(\qquad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad}\cdot(\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Наносим центр тяжести $C(3.071, 4.343)$ на чертеж к задаче 1.

Решение (продолжение)

Шаг 5: находим моменты инерции относительно осей координат по формулам Правила П4:

$$I_{\mathrm{OY}} = \iint_G x^2\,dx\,dy = \int_1^4 x^2 \left(\int_{(-3)\cdot x+(6)}^{1\cdot x^2+(2)} dy\right) dx =$$

$$= \int \quad x^2 \left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right) dx =$$

$$= \int \quad x^2 \, (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) \, dx =$$

$$= \int \quad x^2 (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) dx =$$

$$= \int \quad (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) dx =$$

$$= \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)\Big| \; =$$

$$= \Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) - \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad\qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 5: продолжение.

$$I_{\mathrm{OX}} = \iint_G y^2\,dx\,dy = \int_1^4 \left(\int_{(-3)\cdot x+(6)}^{1\cdot x^2+(2)} y^2\,dy\right)dx =$$

$$= \int \left(\frac{y^3}{3}\Big|_{y=}^{y=} \qquad \right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \Big[\Big(\qquad \Big)^3 - \Big(\qquad \Big)^3\Big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \Big[\Big(\qquad \Big) -$$

$$- \Big(\qquad \Big)\Big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \Big[\qquad \Big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\qquad \right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{3}\Big[\Big(\qquad \Big) -$$

$$- \Big(\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(\qquad - \qquad \right) = \qquad .$$

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OY}} =$

$\boldsymbol{I}_{\text{OX}} =$

Выборочная проверка вариант 29 задача 1

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

I_{OY} (формат 1.23): введи Клик

I_{OX} (формат 1.23): введи Клик

Задача 2

Область ограничена линиями:

$$
\begin{aligned}
x &= x_{\max} = 4,\\
x &= x_{\min} = -2,\\
y &= 0,\\
y &= e^{-0.7x},\\
y &= 1 + 0.4 \cdot x.
\end{aligned}
$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь и координаты центра тяжести области (моменты инерции не вычислять).

Решение (по образцу примера П2)

Шаг 1: построение линий.

$\boldsymbol{y = 1 + 0.4 \cdot x}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_{\min} - 1 = -2 - 1 = -3$ до 1:

x	-3	-2	-1	0	1
$y = 1 + 0.4 \cdot x$	$-0,2$	$0,2$	$0,6$	1	$1,4$

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

$\boldsymbol{y = e^{-0.7x}}$ — экспонента, для ее построения табулируем:

x	-1	0	1	2	3	4	5
$y = e^{-0.7x}$	2	1	$0,5$	$0,2$	$0,1$	$0,1$	0

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим экспоненту по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{y = 0}$ — горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = 4}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(4, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = -2}$ — вертикальная прямая, проходящая через т. $(-2, 0)$ (**черным**).

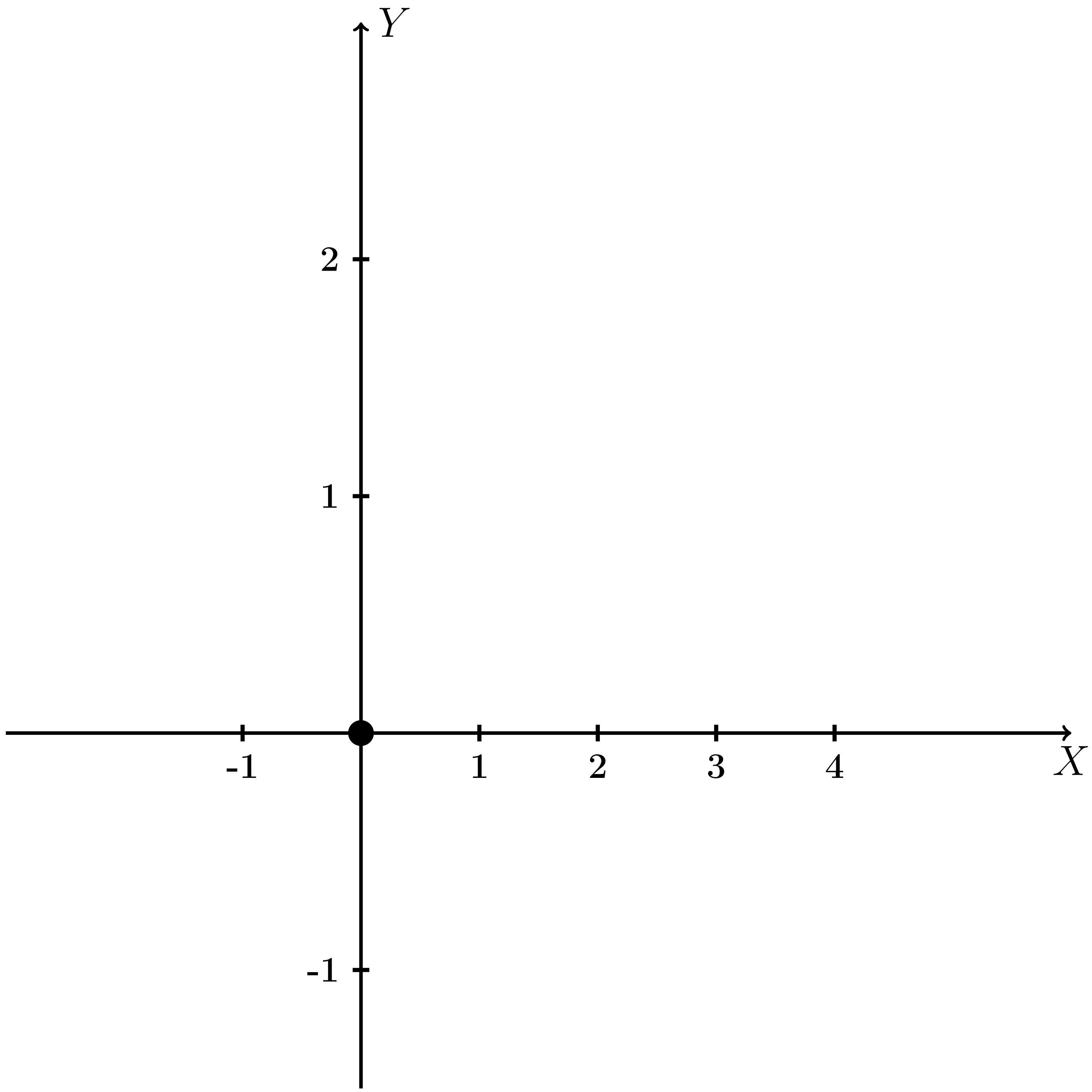

Рис.: Чертеж к задаче 2: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$\begin{aligned}
x_{\text{лев}} &= && \text{— левая граница;}\\
x_{\text{прав}} &= && \text{— правая;}\\
y_{\text{низ}}(x) &= 0 && \text{— нижняя;}\\
y_{\text{верх}}(x) &= \begin{cases} & \text{при} \\ & \text{при} \end{cases} && \text{— верхняя (из 2х частей).}
\end{aligned}$$

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6 с разбиением области интегрирования на две части согласно форме верхней границы. Для интегрирования экспоненты используется формула 7 таблицы 2.

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-2}^{0}\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл левый}} + \underbrace{\int_0^4\left(\int_0^{e^{-0.7x}} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл правый}} =$$

$$= \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx + \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx =$$

$$= \int (\qquad) \, dx + \int (\qquad) \, dx =$$

$$= \int (\qquad) dx + \int \qquad dx =$$

$$= (\qquad) \Big| + (\qquad) \Big| =$$

$$= [(\qquad) - (\qquad)] + [\quad - \quad] =$$

$$= \quad + \quad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2.
Для интегрирования экспоненты используются формулы 7,8 таблицы 2.

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0} x\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} dy\right) dx + \frac{1}{S}\int_0^4 x\left(\int_0^{e^{-0.7x}} dy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad \right) dx + \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad (\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \quad + \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad \Big) +$$

$$+ \Big(\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad} \cdot (\qquad + \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-2}^{0}\left(\int_{0}^{1+0.4\cdot x} y\,dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_{0}^{4}\left(\int_{0}^{e^{-0.7x}} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=} \qquad \right)dx + \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=} \qquad \right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad\qquad\qquad) \,dx + \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad\qquad) \,dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \qquad\qquad\qquad dx + \frac{1}{2S}\int \qquad\qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad\qquad\qquad\qquad) \,dx + \frac{1}{2S}\int \qquad\qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right)\Big| \quad + \frac{1}{2S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) +$$

$$+ \Big(\qquad\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot \qquad}\cdot(\qquad + \qquad) = \qquad .$$

Наносим центр тяжести $C(\qquad , \qquad)$ на чертеж к задаче 2.

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

Выборочная проверка вариант 29 задача 2

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

Задача 1.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

$I_{\mathrm{OY}} =$

$I_{\mathrm{OX}} =$

Задача 2.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Задача 1

Область ограничена линиями:

$$y = (-2)\cdot x + (5),$$
$$y = 1\cdot x^2 + (2),$$
$$x = x_{\max} = 3.$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь, координаты центра тяжести, и моменты инерции относительно осей координат.

Решение (по образцу примера П1)

Шаг 1: построение линий. Находим пересечение двух первых линий.

$$1\cdot x^2 + (2) = (-2)\cdot x + (5)$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$D = \quad = \quad .$

$x_1 = \quad = \quad ; \qquad x_2 = \quad = \quad .$

$\boldsymbol{y = (-2)\cdot x + (5)}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_1 - 1 =$ до $x_{\max} + 1 =$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = (-2)\cdot x + (5)$	13	11	9	7	5	3	1	−1	−3

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

Решение (продолжение)

Шаг 1: продолжение.

$\boldsymbol{y = 1 \cdot x^2 + (2)}$ — парабола, для ее построения табулируем:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 1 \cdot x^2 + (2)$	18	11	6	3	2	3	6	11	18

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим параболу по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{x = 3}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(3, 0)$ (**на чертеже черным**).

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$
\begin{array}{lll}
x_{\text{лев}} & = & \quad – \text{ левая граница;} \\
x_{\text{прав}} & = & \quad – \text{ правая;} \\
y_{\text{низ}}(x) & = & \quad – \text{ нижняя;} \\
y_{\text{верх}}(x) & = & \quad – \text{ верхняя.}
\end{array}
$$

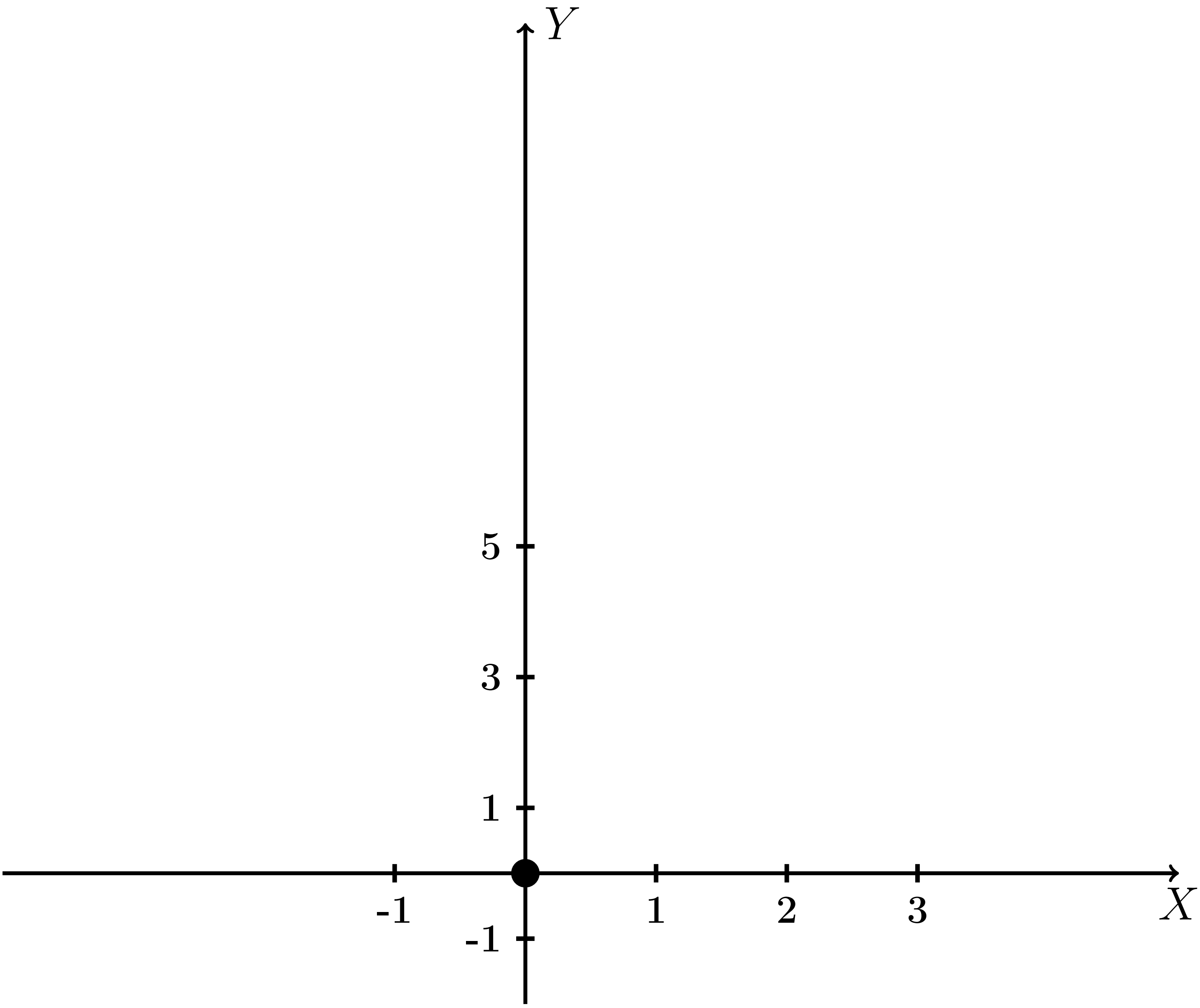

Рис.: Чертеж к задаче 1: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П 1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П 6:

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_1^3 \left(\int_{(-2)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(2)} dy \right) dx}_{\text{повторный интеграл}} =$$

$$= \int_1^3 \left(y \Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \int \left(\qquad - \qquad \right) dx =$$

$$= \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad \right) \Big| =$$

$$= \left(\qquad \right) - \left(\qquad \right) =$$

$$= \quad - \quad = \quad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2:

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_1^3 x\left(\int_{(-2)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(2)} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad dx$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) -$$

$$- \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad} \cdot (\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_1^3 \left(\int_{(-2)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(2)} y\,dy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=}^{y=}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[(\qquad)^2 - (\qquad)^2\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[(\qquad) - (\qquad)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \left[\qquad\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\qquad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\left[\left(\qquad\right) -\right.$$

$$\left.-\left(\qquad\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\qquad}\cdot(\qquad - \qquad) = \qquad.$$

Наносим центр тяжести $C(2.375, 4.050)$ на чертеж к задаче 1.

Решение (продолжение)

Шаг 5: находим моменты инерции относительно осей координат по формулам Правила П4:

$$I_{\mathrm{OY}} = \iint_G x^2\,dx\,dy = \int_1^3 x^2 \left(\int_{(-2)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(2)} dy \right) dx =$$

$$= \int \ x^2 \left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right) dx =$$

$$= \int \ x^2 \left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right) dx =$$

$$= \int \ x^2 (\qquad\qquad\qquad\qquad) dx =$$

$$= \int \ (\qquad\qquad\qquad\qquad) dx =$$

$$= \left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right)\Big| =$$

$$= \left[\left(\qquad\qquad\qquad \right) - \left(\qquad\qquad\qquad \right) \right] =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 5: продолжение.

$$I_{\mathrm{OX}} = \iint_G y^2\,dx\,dy = \int_1^3 \left(\int_{(-2)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(2)} y^2\,dy \right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{y^3}{3}\Big|_{y=}^{y=} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \left[(\qquad)^3 - (\qquad)^3 \right] dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \left[(\qquad) - \right.$$

$$\left. - (\qquad) \right] dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \left[\qquad \right] dx =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\qquad \right) \Big| =$$

$$= \frac{1}{3} \left[\left(\qquad \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\qquad \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

$\boldsymbol{I}_{\rm OY} =$

$\boldsymbol{I}_{\rm OX} =$

Выборочная проверка вариант 30 задача 1

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

$I_{\rm OY}$ (формат 1.23): введи Клик

$I_{\rm OX}$ (формат 1.23): введи Клик

Задача 2

Область ограничена линиями:

$$x = x_{\max} = 3,$$
$$x = x_{\min} = -1,$$
$$y = 0,$$
$$y = e^{-0.7x},$$
$$y = 1 + 0.4 \cdot x.$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь и координаты центра тяжести области (моменты инерции не вычислять).

Решение (по образцу примера П2)

Шаг 1: построение линий.

$\boldsymbol{y = 1 + 0.4 \cdot x}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_{\min} - 1 = -1 - 1 = -2$ до 1:

x	-2	-1	0	1
$y = 1 + 0.4 \cdot x$	0,2	0,6	1	1,4

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

$\boldsymbol{y = e^{-0.7x}}$ — экспонента, для ее построения табулируем:

x	-1	0	1	2	3	4
$y = e^{-0.7x}$	2	1	0,5	0,2	0,1	0,1

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим экспоненту по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{y = 0}$ — горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = 3}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(3, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = -1}$ — вертикальная прямая, проходящая через т. $(-1, 0)$ (**черным**).

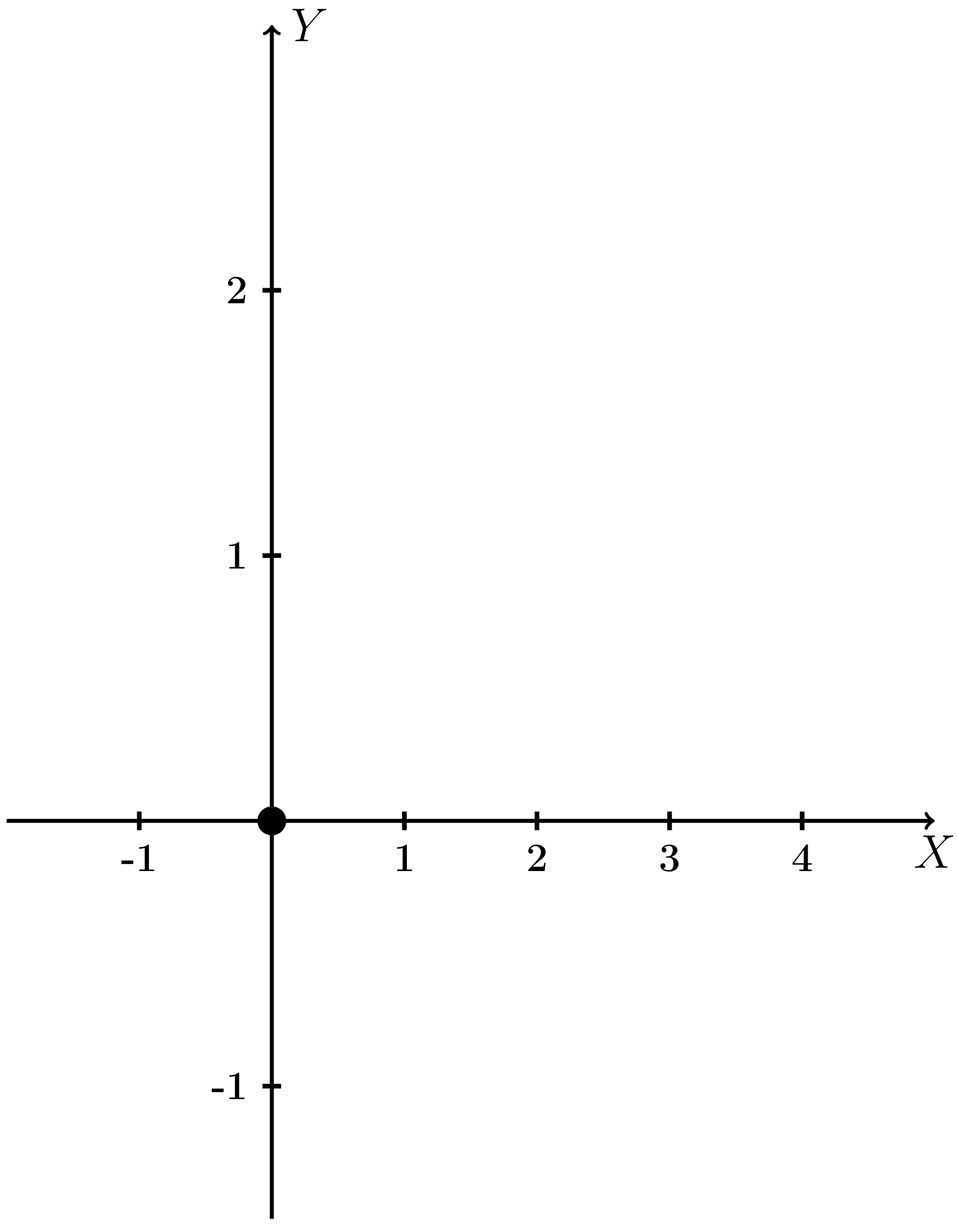

Рис.: Чертеж к задаче 2: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$
\begin{array}{lcll}
x_{\text{лев}} & = & & \text{— левая граница;} \\
x_{\text{прав}} & = & & \text{— правая;} \\
y_{\text{низ}}(x) & = & 0 & \text{— нижняя;} \\
y_{\text{верх}}(x) & = & \begin{cases} & \text{при} \\ & \text{при} \end{cases} & \text{— верхняя (из 2х частей).}
\end{array}
$$

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6 с разбиением области интегрирования на две части согласно форме верхней границы. Для интегрирования экспоненты используется формула 7 таблицы 2.

$$
S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-1}^{0}\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл левый}} + \underbrace{\int_0^{3}\left(\int_0^{e^{-0.7x}} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл правый}} =
$$

$$
= \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx + \int \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \right) dx =
$$

$$
= \int \left(\qquad \right) dx + \int \left(\qquad \right) dx =
$$

$$
= \int \left(\qquad \right) dx + \int \qquad dx =
$$

$$
= \left(\qquad \right)\Big| + \left(\qquad \right)\Big| =
$$

$$
= \left[\left(\qquad \right) - \left(\qquad \right)\right] + \left[\qquad - \qquad \right] =
$$

$$
= \qquad + \qquad = \qquad .
$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П 2. Для интегрирования экспоненты используются формулы 7,8 таблицы 2.

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{0} x\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^3 x\left(\int_0^{e^{-0.7x}} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad\right)dx + \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad (\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad\right)\Big| + \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad\Big) +$$

$$+\Big(\qquad\qquad\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad}\cdot(\qquad + \qquad) = \qquad.$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{0}\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} y\,dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^3\left(\int_0^{e^{-0.7x}} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=} \quad\right)dx + \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=} \quad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad) \, dx + \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \qquad dx + \frac{1}{2S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad) \, dx + \frac{1}{2S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\qquad \right)\Big| \quad + \frac{1}{2S}\left(\qquad \right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\qquad \Big) +$$

$$+ \Big(\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot} \cdot (\quad + \quad) = \quad .$$

Наносим центр тяжести $C(\quad , \quad)$ на чертеж к задаче 2.

Ответ

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Выборочная проверка вариант 30 задача 2

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

Задача 1.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

$I_{\text{OY}} =$

$I_{\text{OX}} =$

Задача 2.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

Задача 1

Область ограничена линиями:

$$y = (-2)\cdot x + (5),$$
$$y = 1\cdot x^2 + (2),$$
$$x = x_{\max} = 4.$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь, координаты центра тяжести, и моменты инерции относительно осей координат.

Решение (по образцу примера П1)

Шаг 1: построение линий. Находим пересечение двух первых линий.

$$1\cdot x^2 + (2) = (-2)\cdot x + (5)$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$D = \quad = \quad .$

$x_1 = \quad = \quad ; \qquad x_2 = \quad = \quad .$

$\boldsymbol{y = (-2)\cdot x + (5)}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_1 - 1 =$ до $x_{\max} + 1 =$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = (-2)\cdot x + (5)$	13	11	9	7	5	3	1	−1	−3	−5

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

Решение (продолжение)

Шаг 1: продолжение.

$\boldsymbol{y = 1 \cdot x^2 + (2)}$ — парабола, для ее построения табулируем:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = 1 \cdot x^2 + (2)$	18	11	6	3	2	3	6	11	18	27

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим параболу по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{x = 4}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(4, 0)$ (**на чертеже черным**).

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$x_{\text{лев}}$ = — левая граница;

$x_{\text{прав}}$ = — правая;

$y_{\text{низ}}(x)$ = — нижняя;

$y_{\text{верх}}(x)$ = — верхняя.

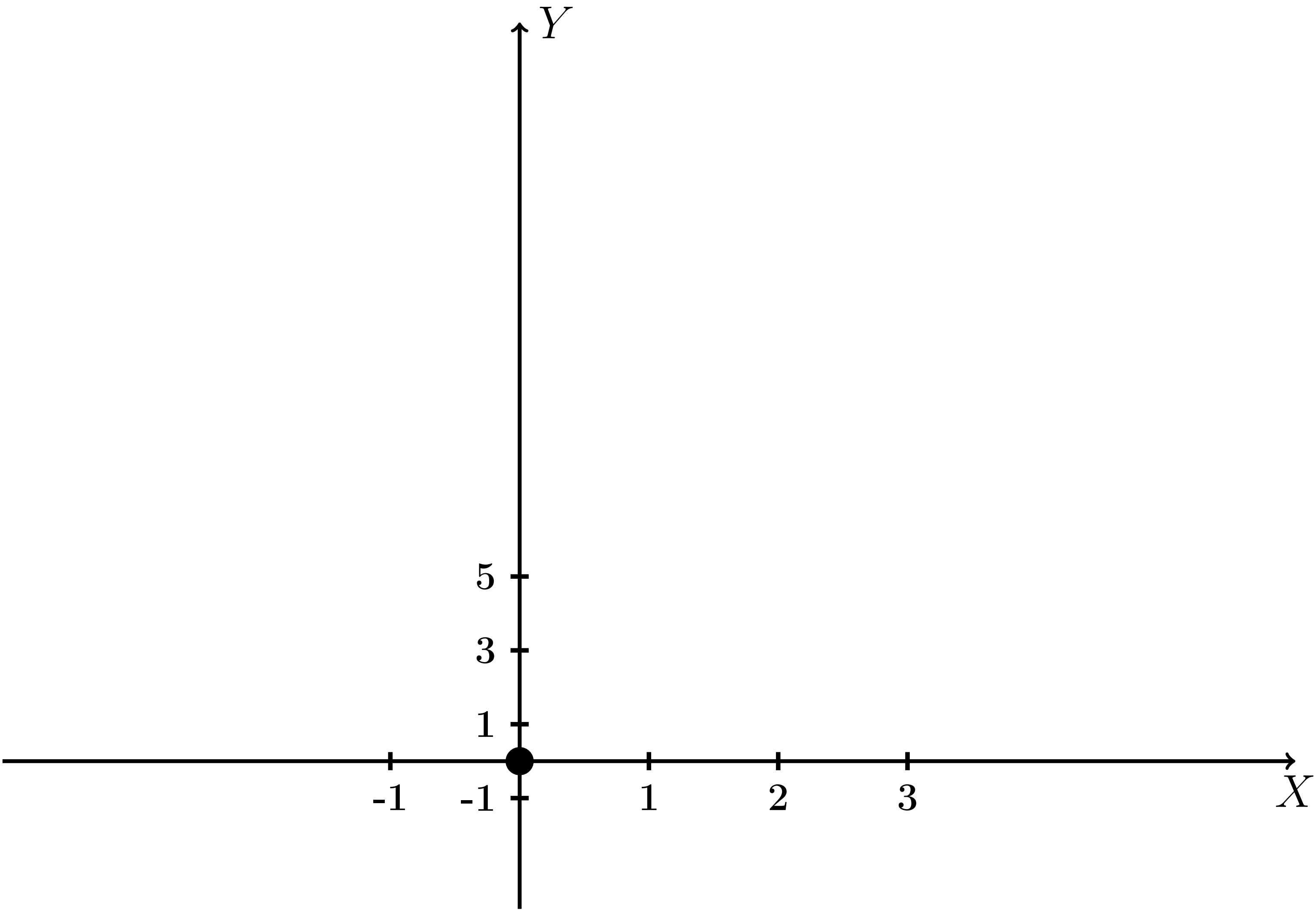

Рис.: Чертеж к задаче 1: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П 1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П 6:

$$\boxed{S} = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_1^4 \left(\int_{(-2)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(2)} dy \right) dx}_{\text{повторный интеграл}} =$$

$$= \int_1^4 \left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \int \left(\qquad - \qquad \right) dx =$$

$$= \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad \right)\Big| =$$

$$= \left(\qquad \right) - \left(\qquad \right) =$$

$$= \qquad - \qquad = \boxed{\qquad}.$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2:

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_1^4 x\left(\int_{(-2)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(2)} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=}^{y=} \qquad\qquad \right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad dx$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) -$$

$$- \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad} \cdot (\qquad - \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy = \frac{1}{S}\int_1^4 \left(\int_{(-2)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(2)} y\,dy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=}^{y=}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \Big[(\quad)^2 - (\quad)^2\Big] dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int [(\quad) - (\quad)]\, dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int [\quad]\, dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\quad\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[(\quad) -$$

$$- (\quad)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\quad}\cdot(\quad - \quad) = \quad .$$

Наносим центр тяжести $C(3.083, 5.400)$ на чертеж к задаче 1.

Решение (продолжение)

Шаг 5: находим моменты инерции относительно осей координат по формулам Правила П4:

$$I_{\text{OY}} = \iint_G x^2\,dx\,dy = \int_1^4 x^2 \left(\int_{(-2)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(2)} dy \right) dx =$$

$$= \int \quad x^2 \left(y \Big|_{y=}^{y=} \qquad \right) dx =$$

$$= \int \quad x^2 \, (\qquad\qquad\qquad) \, dx =$$

$$= \int \quad x^2 (\qquad\qquad\qquad) dx =$$

$$= \int \quad (\qquad\qquad\qquad) dx =$$

$$= \left(\qquad\qquad\qquad \right) \Big| =$$

$$= \left[\left(\qquad\qquad \right) - \left(\qquad\qquad \right) \right] =$$

$$= \qquad - \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 5: продолжение.

$$I_{\text{OX}} = \iint_G y^2\,dx\,dy = \int_1^4 \left(\int_{(-2)\cdot x+(5)}^{1\cdot x^2+(2)} y^2\,dy \right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{y^3}{3} \Big|_{y=}^{y=} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \left[(\quad)^3 - (\quad)^3 \right] dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \left[(\quad) - \right.$$

$$\left. - (\quad) \right] dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \left[\quad \right] dx =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\quad \right) \Big| =$$

$$= \frac{1}{3} \left[\left(\quad \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\quad \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (\quad - \quad) = \quad .$$

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

$\boldsymbol{I}_{\mathrm{OY}} =$

$\boldsymbol{I}_{\mathrm{OX}} =$

Выборочная проверка вариант 31 задача 1

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

I_{OY} (формат 1.23): введи Клик

I_{OX} (формат 1.23): введи Клик

Задача 2

Область ограничена линиями:

$$x = x_{\max} = 4,$$
$$x = x_{\min} = -1,$$
$$y = 0,$$
$$y = e^{-0.7x},$$
$$y = 1 + 0.4 \cdot x.$$

Требуется сделать чертеж, а затем найти площадь и координаты центра тяжести области (моменты инерции не вычислять).

Решение (по образцу примера П2)

Шаг 1: построение линий.

$\boldsymbol{y = 1 + 0.4 \cdot x}$ — прямая, для ее построения табулируем в области от $x_{\min} - 1 = -1 - 1 = -2$ до 1:

x	-2	-1	0	1
$y = 1 + 0.4 \cdot x$	0,2	0,6	1	1,4

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим прямую по точкам (**на чертеже коричневым**).

$\boldsymbol{y = e^{-0.7x}}$ — экспонента, для ее построения табулируем:

x	-1	0	1	2	3	4	5
$y = e^{-0.7x}$	2	1	0,5	0,2	0,1	0,1	0

Таблица: Табулировка в области критических точек

Строим экспоненту по точкам (**на чертеже синим**).

$\boldsymbol{y = 0}$ — горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = 4}$ — вертикальная прямая, проходящая через точку $(4, 0)$ (**черным**).

$\boldsymbol{x = -1}$ — вертикальная прямая, проходящая через т. $(-1, 0)$ (**черным**).

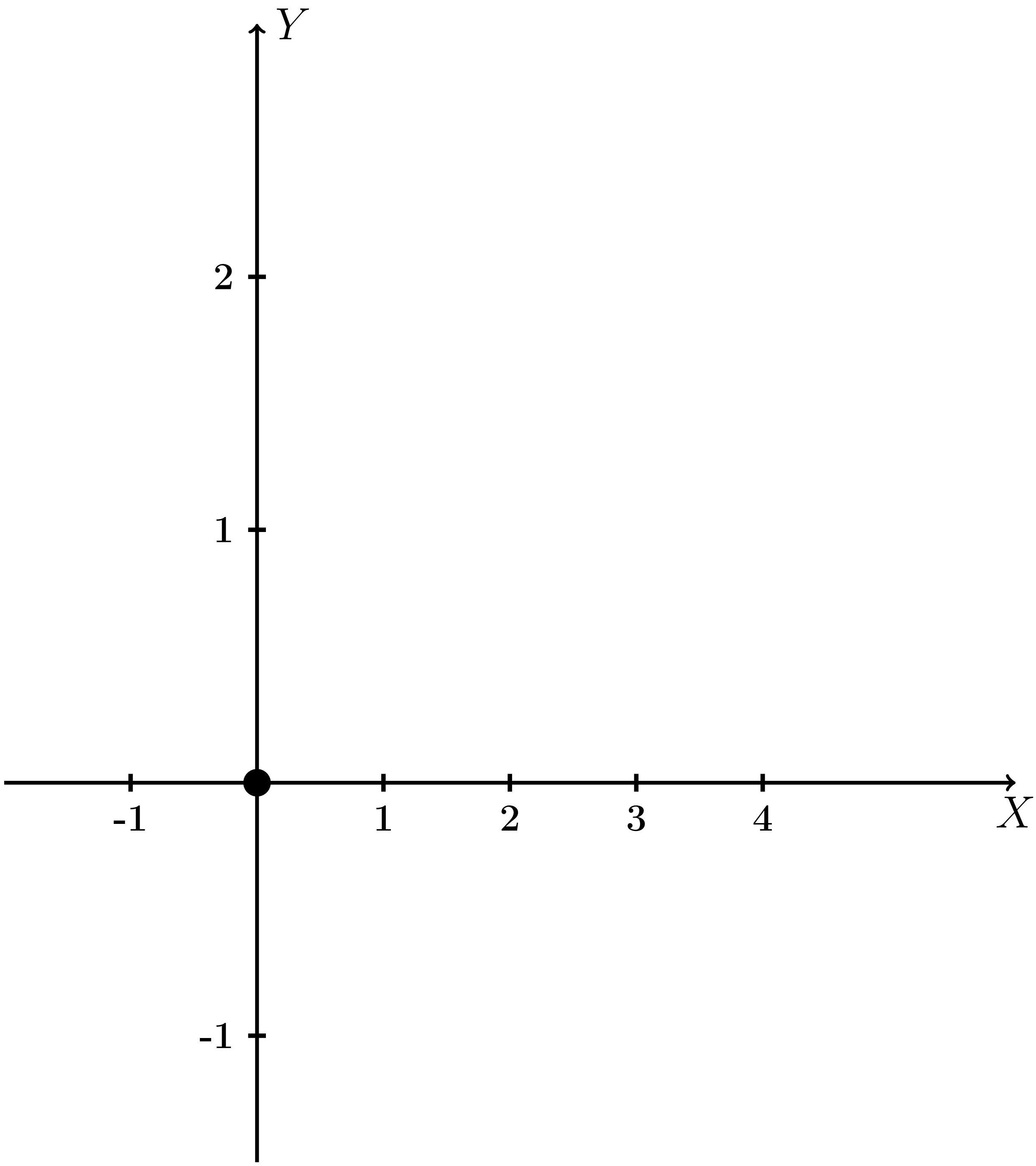

Рис.: Чертеж к задаче 2: область G. Зеленые точки нанесены по данным таблиц Шага 1.

Решение (продолжение)

Шаг 2: определение границ области G. Согласно чертежу, следует взять

$$\begin{array}{lll} x_{\text{лев}} & = & \quad \text{– левая граница;} \\ x_{\text{прав}} & = & \quad \text{– правая;} \\ y_{\text{низ}}(x) & = 0 & \quad \text{– нижняя;} \\ y_{\text{верх}}(x) & = \begin{cases} & \text{при} \\ & \text{при} \end{cases} & \quad \text{– верхняя (из 2х частей).} \end{array}$$

Шаг 3: находим площадь по формуле Правила П1, приводя двойной интеграл к повторному по формуле Правила П6 с разбиением области интегрирования на две части согласно форме верхней границы. Для интегрирования экспоненты используется формула 7 таблицы 2.

$$S = \iint_G dx\,dy = \underbrace{\int_{-1}^{0}\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл левый}} + \underbrace{\int_0^4\left(\int_0^{e^{-0.7x}} dy\right) dx}_{\text{повторный интеграл правый}} =$$

$$= \int \quad \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \quad \right) dx + \int \quad \left(y\Big|_{y=0}^{y=} \quad \right) dx =$$

$$= \int \quad (\qquad\qquad) \, dx + \int \quad (\qquad\qquad) \, dx =$$

$$= \int \quad (\qquad) dx + \int \qquad dx =$$

$$= \left(\qquad \right)\Big| \; + \left(\qquad \right)\Big| =$$

$$= \left[\left(\qquad \right) - \left(\qquad \right)\right] + \left[\qquad - \qquad \right] =$$

$$= \qquad + \qquad = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: находим координаты центра тяжести по формулам Правила П2. Для интегрирования экспоненты используются формулы 7,8 таблицы 2.

$$x_C = \frac{1}{S}\iint_G x\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{0} x\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^4 x\left(\int_0^{e^{-0.7x}} dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad \right)dx + \frac{1}{S}\int \quad x\left(y\Big|_{y=0}^{y=} \qquad \right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \quad x\,(\qquad\qquad)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad (\qquad\qquad)\,dx + \frac{1}{S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \quad + \frac{1}{S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad \Big) +$$

$$+ \Big(\qquad\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\qquad}\cdot(\qquad + \qquad) = \qquad .$$

Решение (продолжение)

Шаг 4: продолжение.

$$y_C = \frac{1}{S}\iint_G y\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int_{-1}^{0}\left(\int_0^{1+0.4\cdot x} y\,dy\right)dx + \frac{1}{S}\int_0^4\left(\int_0^{e^{-0.7x}} y\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=} \quad\right)dx + \frac{1}{S}\int \quad \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=} \quad\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad\qquad) \, dx + \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad\qquad) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \qquad\qquad dx + \frac{1}{2S}\int \qquad\qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\int \quad (\qquad\qquad) \, dx + \frac{1}{2S}\int \qquad dx =$$

$$= \frac{1}{2S}\left(\qquad\qquad \right)\Big| \quad + \frac{1}{2S}\left(\qquad \right)\Big| \quad =$$

$$= \frac{1}{2S}\Big[\Big(\qquad\qquad\qquad \Big) +$$

$$+ \Big(\qquad\qquad \Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot \quad} \cdot (\quad + \quad) = \quad .$$

Наносим центр тяжести $C(\quad , \quad)$ на чертеж к задаче 2.

Ответ

$\boldsymbol{S} =$

$\boldsymbol{x_C} =$

$\boldsymbol{y_C} =$

Выборочная проверка вариант 31 задача 2

S (формат 1.23): введи Клик

x_C (формат 1.23): введи Клик

y_C (формат 1.23): введи Клик

Задача 1.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$

$I_{\mathrm{OY}} =$

$I_{\mathrm{OX}} =$

Задача 2.

$S =$

$x_C =$

$y_C =$