ФГБ ОУ ВПО
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»

Кафедра «Экономическая информатика»

А.И.Сеславин, Е.А. Сеславина

ОПТИМИЗАЦИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Учебное пособие

Москва - 2011

ФГБ ОУ ВПО
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»

Кафедра «Экономическая информатика»

А.И.Сеславин, Е.А. Сеславина

ОПТИМИЗАЦИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Рекомендовано редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия для специалистов, бакалавров и магистров экономических специальностей

Москва - 2011

Содержание

УДК519.86

С33

Сеславин А.И., Сеславина Е.А. Оптимизация и математические методы принятия решений. Учебное пособие. – М.: МИИТ, 2011. – 152.

Учебное пособие содержит теоретический материал, методику решения и примеры экономико-математических моделей, решаемых методами Линейного программирования. Задачи, представленные в пособии, охватывают полный перечень вопросов применения данного раздела прикладной математики для анализа современных экономических ситуаций, требующих принятия оптимизационных решений. Предназначено для студентов, магистров и аспирантов, изучающих математическое моделирование экономических процессов.

Рецензенты: Фиалко Е.Н. – к.э.н., доцент Государственного университета управления, Евдокимова Е.Н. – к.э.н., доцент Российской открытой академии транспорта.

ЧАСТЬ 1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ. ОБЩИЕ ПОДХОДЫ

1. Пояснение к теме. Понятие о задачах линейного программирования

Задачей линейного программирования называется задача на условный экстремум (максимум, или минимум) линейной функции **нескольких** переменных при наличии линейных ограничений типа равенство и типа нестрогое неравенство. Заметим, что в случае, когда имеется лишь одно переменное, найти решение линейной экстремальной задачи совсем несложно. Пусть требуется найти минимальное значение функции L=x при нескольких ограничениях $a_j \le x \le b_j, \quad i = 1,......, \quad m$. Очевидно, что наименьшее значение функции L достигается при значении неизвестного x, равного наибольшему из чисел a_j, если только оно не превышает наименьшего из b_j. В последнем случае система ограничений окажется несовместной.

Термин «линейное программирование» не связан с составлением программ для ЭВМ. Корректным переводом на русский язык английского слова programming, в варианте североамериканского диалекта, является «планирование». Именно для задач экономического планирования изначально предполагалось применять новые математические методы. Термин «линейное программирование» возник отечественной научной литературе в результате недоразумения, связанного с неправильным переводом.

2. Приведение общей задачи линейного программирования к основной задаче этого метода

Общая задача линейного программирования имеет следующий вид:

$$L = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_m x_m + L_0 \to \min$$
$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + ... + a_{im} x_m = b_i, i = 1,..., k < m$$
$$d_{j1}x_1 + d_{j2}x_2 + ... + d_{jm}x_m \le u_j, j = 1,...q,$$
$$s_{l1}x_1 + s_{l2}x_2 + ... + s_{lm}x_m \ge v_l, l = 1,...,p... \quad (1)$$

Здесь переменными являются $x_1,\ldots,x_n$, параметрами – c_i, a_{ih}, d_{ih}, s_{ih}, b_i, u_j, v_l, L_0, заданные постоянными числами. Заметим, что ограничения типа $|x_i| \le q_i$ приводятся к следующим ограничениям типа неравенство: $-q_i \le x_i \le q_i$.

Любое решение системы ограничений называется ее допустимым решением. Заметим, что если допустимое решение таково, что для него все неравенства системы (1) выполняются строго, то оно не может доставлять минимум никакой линейной функции L. Чтобы убедиться в этом, достаточно лишь несколько увеличить одно из x_i, если $c_i<0$, либо уменьшить его, если $c_i>0$. Такие достаточно малые изменения x_i всегда можно осуществить, лишь бы они не нарушали неравенств ограничений системы (1). С другой стороны, эти изменения приведут к уменьшению значения L. Поэтому, решение экстремальной задачи (1) может существовать лишь при условии, когда некоторые из ограничений типа нестрогих неравенств выполняются как равенства. Причем, таких условий должно быть достаточно для однозначного нахождения из полученной системы линейных уравнений ее решения. Имеется лишь конечное число всевозможных ситуаций, при которых n-m (или более, при вырожденности) неравенств рассматриваются как уравнения. Поэтому, общая задача линейного программирования может быть решена с помощью полного перебора всех таких ситуаций. Однако при большом числе неизвестных и ограничений такой способ требует огромного объема вычислений. Для их сокращения предложены различные алгоритмы линейного программирования, наиболее известным из которых является симплекс метод.

Общая задача линейного программирования содержит слишком много различных ограничений и ее всегда можно привести к более простому частному виду – **основной задаче линейного программирования**, в которой отсутствуют ограничения типа неравенство, за исключением следующих самых простых. При этом переходе не происходит умаление общности изучаемой задачи. Математическая запись **основной задаче линейного программирования** имеет следующий вид:

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + L_0 \to \min$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, i = 1, \ldots k < m$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$
(2)

Покажем, что переход от общей задачи линейного программирования к основной задаче линейного программирования всегда можно осуществить. Для того чтобы освободиться от присутствия ограничений типа неравенство, достаточно следующим образом ввести новые переменные:

$$x_{m+j} = u_j - (d_{j1}x_1 + d_{j2}x_2 + \ldots + d_{jm}x_m), \quad j = 1, \ldots, q.$$
$$x_{m+q+l} = s_{l1}x_1 + s_{l2}x_2 + \ldots + s_{lm}x_m - v_l, \; l = 1, \ldots, p..$$
(3)

А для того, чтобы добиться выполнения условия положительности всех неизвестных, достаточно

Заметим, что у системы ограничений основной задачи линейного программирования может и не быть ни одного решения. В этом случае задача линейного программирования во многом теряет свой смысл.

Замечательно то, что у системы ограничений задачи (5) в канонической задаче линейного программирования всегда есть допустимое решение, которое можно сразу указать:

$$x_1 = \cdots = x_n = 0, x_{n+1} = b_1, \ldots, x_{n+k} = b_k. \quad (6)$$

Первые m неизвестных системы (5) называют свободными, а остальные – базисными. Указанное решение называется допустимым базисным решением системы ограничений (или базисным планом).

4. Симплекс алгоритм

Перейдем к изложению симплекс алгоритма, который специально предназначен для решения канонической задачи линейного программирования (5).

Сначала отметим, что в случае положительности (точнее, отсутствия отрицательности) сразу всех коэффициентов c_i линейной формы L, решением задачи линейного программирования будет уже указанное базисное решение системы ее ограничений:

$$x_1 = \ldots = x_m = 0, \quad x_{m+1} = b_1, \ldots, \; x_{m+k} = b_k$$

Действительно, увеличение любого из свободных неизвестных переменных x_i $(i \leq m)$ в этом случае лишь приводит к росту значения линейной формы L. Таким образом, в этом случае решение (6) является оптимальным.

В случае наличия хотя бы одного отрицательного коэффициента линейной формы L попробуем отыскать другое оптимальное решение системы ограничений, при котором значение линейной формы L меньше L_0. Для этого рассмотрим одно из отрицательных $c_i = c_l$. Для уменьшения значения L попытаемся увеличивать переменное x_l, оставляя все другие свободные переменные x_i нулями. Этому увеличению не могут препятствовать те из ограничений, в которых $a_{jl} \le 0$, потому что в этом случае соответствующие базисное неизвестное только возрастает, и не станет отрицательным. Если же коэффициент $a_{jl} > 0$, то увеличивать x_l можно только до значения

$$\frac{b_i}{a_{jl}},$$

при котором будет выполняться условие $x_{m+j} \ge 0$. Дальнейший рост x_l невозможен, потому что он приводит к отрицательности x_{m+j} и выводит это переменное за пределы ограничений. Поскольку может быть несколько положительных a_{jl}, то x_l следует увеличивать лишь до наименьшей из величин

$$\frac{b_i}{a_{jl}}.$$

При этом j станет равным некоторому номеру k. Элемент матрицы ограничений a_{kl} называется разрешающим. Если же все элементы $l-$го столбца системы ограничений отрицательны, то существует возможность неограниченно увеличивать x_l, а с ним неограниченно уменьшать L. В такой ситуации у задачи линейного программирования нет решения.

Еще раз подчеркнем, что если

$$x_j = \frac{b_i}{a_{ik}}, \text{то } x_{m+k} = 0.$$

Поэтому, можно поменять местами x_l и x_{m+k}, переведя первой из них в группу базисных, а второй – в число свободных неизвестных. После этого шага появляется возможность сделать следующий шаг, точно таким же

представить каждое прежнее неизвестное x_i в виде разности двух новых неизвестных следующим образом:

$$x_i = y_i - z_i \tag{4}$$

Такая возможность объясняется тем, что любое число может быть представлено в виде разности двух положительных чисел.

Заметим, что задача о нахождении наибольшего значения целевой функции L сводиться к задаче нахождения наименьшего значения функции $L_1 = -L$. При этом найденное для новой задачи решение будет решением исходной задачи, а найденное наименьшее значение функции будет противоположным искомому наибольшему значению функции исходной задачи линейного программирования.

3. Каноническая задача линейного программирования

Хотя, основная задача линейного программирования проще общей задачи, но и она не является самой удобной для решения. Рассмотрим следующий ее частный вид, который называется **канонической задачей линейного программирования:**

$$\begin{aligned} &L = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m + L_0 \to \min \\ &x_{m+i} + a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{im}x_m = b_i,\ i = 1,\dots,\ k < m. \\ &m + k = n,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\dots,\ x_n \ge 0,\ b_i \ge 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Заметим, что переход от основной задачи Линейного программирования (2) к канонической задаче (5) не так прост. Его не всегда можно осуществить, разрешая систему ограничений, относительно части неизвестных, потому что, при этом могут нарушиться некоторые из условий $b_i \ge 0$. Корректный способ перехода к систем е (5) будет изложен позже.

образом, как и первый (найти отрицательный коэффициент c_i, определить разрешающий элемент, поменять местами базисное и свободное неизвестные). Поскольку имеется лишь конечное число всевозможных базисных решений в канонической задаче линейного программирования, а в случае положительности свободных членов b_i, на каждом шаге симплекс алгоритма происходит уменьшение функции L и базисные планы не повторяются, то через некоторое число шагов может возникнуть одна из следующих ситуаций:

А). $c_l < 0$ и столбец a_{il} состоит из неположительных членов, в этом у задачи линейного программирования нет решения. В этом случае можно беспрепятственно увеличивать неизвестное x_l. При этом функция L стремится в минус бесконечность.

Б) Все $c_l \geq 0$. В этом случае найденное решение является оптимальным.

Сделаем одну оговорку: если часть коэффициентов b_i на некотором этапе симплекс алгоритма станут равными нулю, то может оказаться, что шаги симплекс алгоритма оставляют функцию L постоянной и возникнет так называемое «зацикливание» алгоритма. Методы преодоления этой трудности будут описаны в п.8.

Найдем формулы перерасчета коэффициентов матрицы ограничений и коэффициентов линейной формы L на каждом шаге симплекс алгоритма. Для этого из k-го уравнения выразим x_l через x_{m+k} и подставим его в выражение для L и во все остальные уравнения системы ограничений. Получим:

$$x_l = \frac{b_l}{a_{kl}} - \frac{x_{m+k}}{a_{kl}} - \sum_{j \neq l}^{m} \frac{a_{kj} x_j}{a_{kl}},$$

5. Примеры решения задач симплекс алгоритмом

Чтобы уяснить логику и технические детали симплекс алгоритма, рассмотрим несколько числовых примеров.

Пример 1. Решить следующую каноническую задачу линейного программирования:

$$L = x_1 - x_2 + x_3 + 10 \to \min;$$

$$x_4 + 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$$

$$x_5 + 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 2.$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0.$$

Решение

Имеем начальный план: $x_1=x_2=x_3=0$ – свободные переменные и $x_4=1$, $x_5=2$ – базисные переменные. При таких значениях L=10. Попробуем улучшить этот план. Это можно сделать увеличив x_2, потому что, это переменное входит в выражение для L со знаком минус. Увеличивая x_2, будем оставлять x_1 и x_3 равными нулю. Поэтому, в силу двух ограничений начнут меняться x_4 и x_5. Из рассмотрения второго ограничения следует, что x_5 будет расти и оставаться положительным, в то время как в силу первого ограничения x_4 уменьшается с ростом x_2 и может стать отрицательным. Поэтому, x_2 может расти до значения 1, при котором $x_4=0$. Поменяем местами x_2 и x_4 в группах свободных и базисных элементов. Для этого выразим из первого уравнения x_2:

$x_2 = -x_4 - 3x_1 + 2x_3 + 1$. Подставим это выражение во второе уравнение и в формулу для L. Получим новый вид задачи:

$$L = 4x_1 - x_3 + x_4 + 9 \to \min;$$
$$x_2 + 3x_1 - 2x_3 + x_4 = 1$$
$$x_5 + 8x_1 - 3x_3 + 2x_4 = 4.$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0.$$

Новые свободные неизвестные: $x_1=x_3=x_4=0$. Новые базисные неизвестные: $x_2=1$, $x_5=4$. При этом L=9. Произошло уменьшение L.

Сделаем следующий шаг симплекс алгоритма. Переменное x_3 теперь входит с отрицательным знаком в выражении для L. Начнем увеличивать x_3. При этом, в силу обоих ограничений – равенств, x_2 и x_5 начнут увеличиваться и не препятствуют росту x_3. Поэтому и L может неограниченно уменьшаться. Следовательно, задача не имеет решения, а L может быть сколь угодна малой при надлежащем выборе неизвестных.

Пример 2. Решить следующую каноническую задачу линейного программирования:

$$L = 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 20 \to \min;$$
$$x_4 + x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$$
$$x_5 + 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3.$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0.$$

Решение

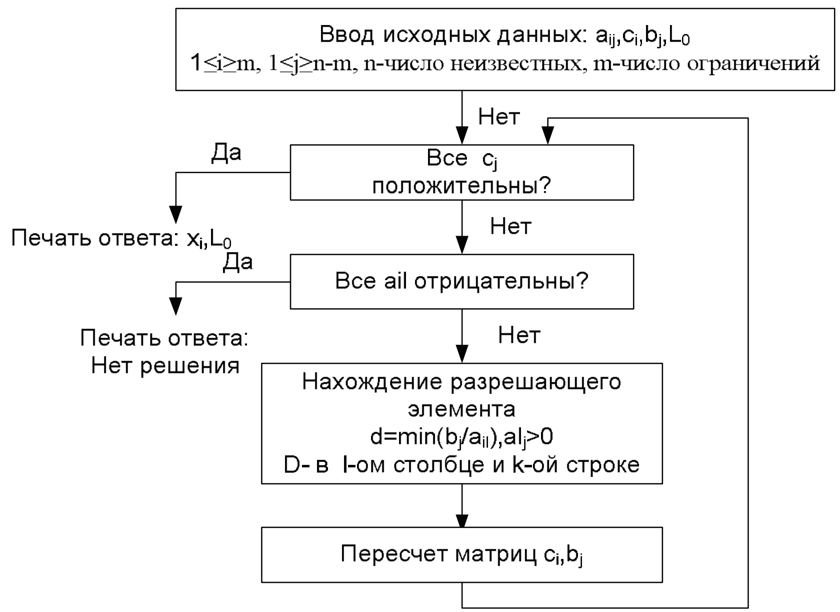
Имеем начальный план: $x_1=x_2=x_3=0$ – свободные переменные и $x_4=2$, $x_5=3$ – базисные переменные. При таких значениях L=20. Для улучшения плана поменяем x_2 и x_5 местами, потому что x_2 входит со знаком минус в выражении для L и со знаком плюс во второе уравнение. Коэффициент при x_2 в этом уравнении равен 2 – это разрешающий элемент матрицы ограничений на первом

$$x_{m+i} + \sum_{j \neq l}^{m} \left(a_{ji} - \frac{a_{jl} a_{kj}}{a_{kl}} \right) x_j - \frac{a_{ki} x_{m+k}}{a_{kl}} = b_i - \frac{b_k a_{il}}{a_{kl}},$$
$$L = L_0 + \frac{c_l b_k}{a_{kl}} + \frac{c_l x_{m+k}}{a_{kl}} + \sum_{i \neq l}^{m} \left(c_i - \frac{c_k a_{ri}}{a_{kl}} \right) x_i. \quad (7)$$

Последняя из формул (7) ясно указывает на то, что свободный член в формуле для L уменьшается на каждом шаге симплекс алгоритма на величину

$$\frac{c_l b_k}{a_{kl}}, \text{так как } b_k > 0, a_{kl} > 0, c_l < 0.$$

Блок-схема симплекс алгоритма



шаге симплекс алгоритма. Выразим x_2 из второго уравнения:

$x_2 = 0{,}5(3 - 3x_1 - x_3 - x_5)$. Подставим это выражение в L и первое уравнение. Получим новый вид задачи:

$$L = 3{,}5x_1 + 2{,}5x_3 + 0{,}5x_5 + 18{,}5 \to \min;$$

$$x_4 + 2{,}5x_1 + 2{,}5x_3 + 0{,}5x_5 = 3{,}5$$

$$x_2 + 1{,}5x_1 + 0{,}5x_3 + 0{,}5x_5 = 1{,}5.$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,5.$$

Поскольку все свободные неизвестные входят в выражение для L с положительными коэффициентами, будучи сами неотрицательными, то дальнейшее уменьшение L невозможно.

Ответ:

$$L_{\min} = 18{,}5 \ \textit{при} \ \ x_2 = 1{,}5,\ \ x_4 = 3{,}5;\ \ x_1 = x_3 = x_5 = 0\ .$$

Рассмотрим более сложный пример, в котором потребуется сделать несколько шагов симплекс алгоритма для получения оптимального плана и наименьшего значения функции цели в канонической задаче линейного программирования.

Пример 3. Решить следующую каноническую задачу линейного программирования:

$$L = 2x_1 - 8x_2 - 3x_3 + 30 \to \min;$$

$$x_4 + x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10$$

$$x_5 + 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 12\ .$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0$$

Решение

Имеем начальный план: $x_1=x_2=x_3=0$ – свободные переменные и $x_4=10$, $x_5=12$ – базисные переменные. При

$$L = \frac{28x_1}{5} + \frac{4x_4}{5} + \frac{7x_5}{5} + \frac{26}{5} \to \min;$$

$$x_3 - \frac{2x_1}{5} + \frac{4x_4}{5} - \frac{3x_5}{5} = \frac{4}{5}$$

$$x_2 + \frac{3x_1}{5} - \frac{x_4}{5} + \frac{2x_5}{5} = 2{,}8.$$

Теперь все коэффициенты формы L стали положительными. Поэтому, получается следующий ответ примера:

$L_{\min}=5{,}2$, $x_1=x_4=x_5=0$, $x_3=0{,}8$, $x_2=2{,}8$.

6. Симплекс метод решения основной задачи линейного программирования

6.1 Пояснение к теме

Симплекс алгоритм приспособлен к решению канонической задачи линейного программирования (5), в то время как она является лишь частным случаем основной задачи (2). Здесь мы покажем, как можно свести **всякую** основную задачу линейного программирования к канонической задаче. Замечательным является то, что для такого перехода можно воспользоваться симплекс алгоритмом.

Для того, чтобы сделать первый шаг симплекс алгоритма необходимо иметь начальное допустимое базисное решение. Как было указано выше, такое решение не всегда можно получить, разрешив относительно m переменных систему ограничений задачи (2). Это связано с тем, что при таком способе некоторые из свободных членов полученной системы, могут оказаться отрицательными, а потому, базисное решение не будет допустимым. Более того, может оказаться, что система ограничений несовместна. В таком случае поиск допустимого базисного решений тщетен.

6.2 Нахождение допустимого решения системы ограничений

Для нахождения допустимого решения сначала умножим на -1 те уравнения системы ограничений (2), правые части которых отрицательны. Таким образом, мы добьемся неотрицательности всех правых частей b_i в системе ограничений. Чтобы найти допустимое решение будем решать следующую специально для этого сконструированную каноническую задачу линейного программирования:

$$Q = y_1 + y_e + ... + y_n \to \min$$

$$y_i + a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i,\ i = 1,...,\ \ k < n.$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,...,\ x_n \geq 0,\ y_1 \geq 0,...,\ y_n \geq 0(8)$$

В этой задаче ограничения

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

взяты из преобразуемой основной задачи линейного программирования, а переменные $y_i\ (i = 1,...,n)$ являются новыми. Если существует какое-либо допустимое решение основной задачи, то при нем $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$ и все y_i=0, Q=0. С другой стороны, $Q \geq 0$ так как $y_i \geq 0$ Если у системы ограничений задачи (2) нет решения, то у построенной задачи (8) не может быть решения y_i=0. В этом случае, у нее либо вообще нет решения, либо оно таково, что Q>0. Если применить симплекс-алгоритм к решению задачи (8), то такой случай можно обнаружить. Если же допустимое решение системы ограничений задачи (2) существует, то в задаче (8) будет иметься решение y_i=0, i=1,…,n; Q=0. Если применять симплекс алгоритм для

таких значениях L=30. Одним из отрицательных коэффициентов при неизвестных в форм L является коэффициент при x_2. Рассмотрев возможности увеличения x_2. Обнаружим, что в силу первого уравнения оно может расти до $\frac{10}{3}$, а в силу второго, только до $\frac{12}{4} = 3$. Поэтому, именно последнее ограничение прежде вступает в силу и разрешающим элементом является 4.

1-й шаг симплекс алгоритма: из второго уравнения $x_2 = -\frac{x_5}{4} - \frac{x_1}{2} - \frac{x_3}{4} + 3$. Подставим в выражение для L и в первое уравнение. Получим:

$$L = 6x_1 - x_3 + 2x_5 + 6 \to \min;$$

$$x_2 + \frac{x_1}{2} + \frac{x_3}{4} + \frac{x_5}{4} = 3$$

$$x_4 - \frac{x_1}{2} + \frac{5x_3}{4} - \frac{3x_5}{4} = 1.$$

2-ой шаг симплекс алгоритма: в выражении для L выбираем переменную x_3 с отрицательным коэффициентом. Только второе ограничение препятствует ее росту прежде первого. Разрешающий элемент равен 1,25. Поэтому, меняем местами x_3
и x_4:

$$x_3 = \frac{2x_1}{5} - \frac{4x_4}{5} + \frac{3x_5}{5} + \frac{4}{5}.$$

нахождения этого решения, то оно будет найдено, и такому решению при y_i=0 будет соответствовать некоторое базисное решение системы ограничений задачи (2). Это решение можно найти, положив в системе ограничений нулю все y_i и все получившиеся свободными x_i. Однако в найденном решении не все переменные y_i могут оказаться в числе свободных, а находятся среди базисных переменных, которым соответствуют свободные члены b_i=0.

6.3 Нахождение допустимого базисного решения

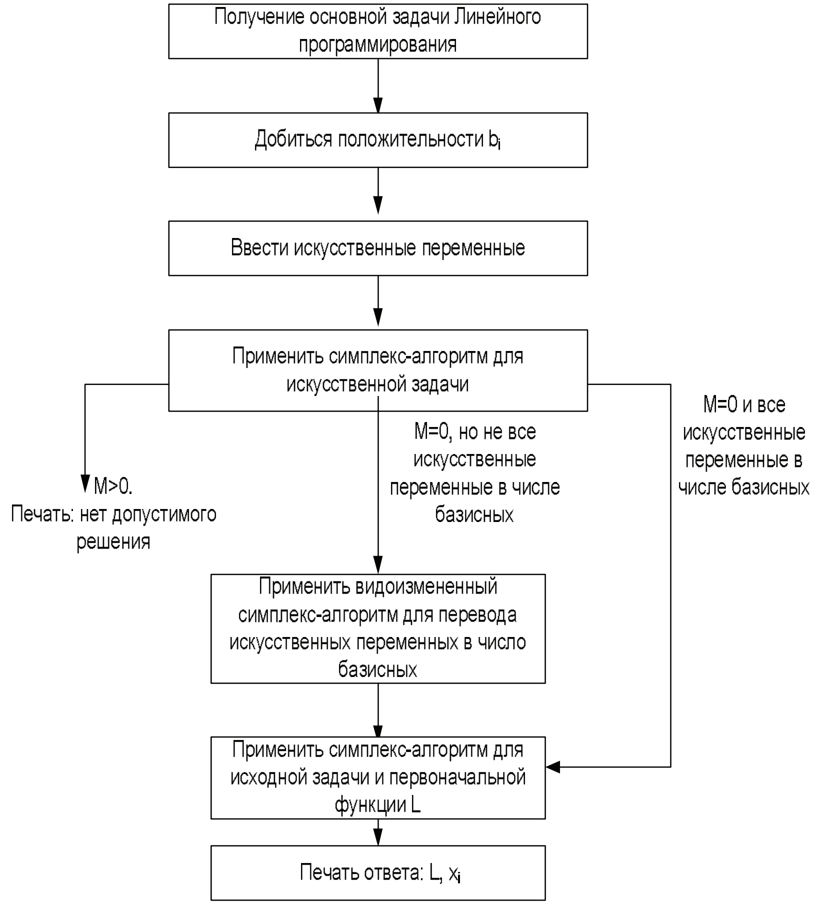
Для нахождения допустимого базисного решения можно пытаться перевести оставшиеся базисными y_i в группу свободных. Поскольку число переменных y_i, равное числу ограничений, меньше числа переменных x_i, то в принципе, такой обмен возможен. При обмене y_i на x_i план должен оставаться допустимым. Поэтому, обмен возможен лишь для тех строк, где $a_{ij} \le 0$ и в которых в строке для Q, на i-ом месте стоит x_j, а не какой-либо из y_i. После такого обмена все свободные переменные в форму L будут по-прежнему входить с положительными коэффициентами. Если на некотором этапе этого процесса некоторая строка будет состоять только из членов с неотрицательными коэффициентами при всех x_i т.е.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = 0 \ ,$$

то все входящие в нее неизвестные полагаются нулю, и их следует изъять из системы ограничений и выражения для функции Q.

Заметим (следуя Вальду), что действуя по указанному алгоритму, можно уменьшить объем вычислений, если после каждого обмена y_i на x_i вычеркивать i-ый столбец с y_i из матрицы ограничений. Это приведет к запрету возможного обратного обмена уже переведенного в число

Блок-схема симплекс метода



7. Примеры решения задачи линейного программирования симплекс методом

7.1 Базовые примеры

Пример 4.

Найти оптимальное решение.

$$L = x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 - 2x_5 \to \min;$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 24$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 18.$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0$$

Решение

Применим симплекс метод. Сначала будем с помощью симплекс алгоритма решать следующую вспомогательную задачу:

$$Q = y_1 + y_2 \to \min;$$
$$y_1 + 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 24$$
$$y_2 + x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 18.$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ y_1,\ y_2 \geq 0.$$

Сначала, выразив из обоих уравнений y_1 и y_2, подставим их в выражение для Q:

$$Q = -3x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 - 4x_5 + 42.$$

Сделаем первый шаг симплекс алгоритма. Разрешающий элемент равен 2.Он находится при x_1 в первом уравнении. Поэтому, выразим y_1 через x_1 и подставим во второе уравнение и в выражение для Q. Получим:

$$x_1 = 0{,}5(24 - y_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Q = 1{,}5y_1 - 1{,}5x_2 - 2{,}5x_3 + 2x_4 + 0{,}5x_5 + 6.$$
$$x_1 + 0{,}5y_1 + 0{,}5x_2 - 0{,}5x_3 + x_4 + 1{,}5x_5 = 12$$
$$y_2 - 0{,}5y_1 + 1{,}5x_2 + 2{,}5x_3 - 2x_4 - 0{,}5x_5 = 6.$$

В выражении для Q остались члены с отрицательными знаками. Требуется еще один шаг симплекс алгоритма. При

свободных y_i на какой-либо из базисных x_k. Поскольку, целью является перевод всех y_i в число свободных, то указанный запрет целесообразен, притом операции со столбцом с y_i становятся ненужными и сам столбец становится ненужным. Поэтому его и отбрасывают.

Таким образом, основная задача линейного программирования может быть решена в два этапа.

На первом этапе с помощью симплекс алгоритма (решая искусственную каноническую задачу линейного программирования) находится допустимое решение системы ограничений (либо выясняется, что она несовместна),

На втором этапе с помощью симплекс алгоритма находится оптимальное решение исходной задачи линейного программирования, либо показывается, что оптимального решения в этой задаче не существует.

Такой двухэтапный алгоритм называется симплекс методом линейного программирования. Еще раз подчеркнем, что этап поиска допустимого базисного решения может привести к нахождению базисного допустимого решения во всех невырожденных случаях.

этом разрешающим элементом будет коэффициент при x_2 во втором уравнении. Выразим из него x_2 через y_2:

$$x_2 = (2/3)(6 + 0{,}5y_1 - y_2 - 2{,}5x_3 + 2x_4 + 0{,}5x_5)$$

и подставим в первое уравнение и выражение для Q. Получим:

$$Q = y_1 + y_2 \to \min$$

$$x_1 + (2/3)y_1 - (1/3)y_2 - (4/3)x_3 + (5/3)x_4 + (5/3)x_5 = 10$$

$$x_2 - (1/3)y_1 + (2/3)y_2 + (5/3)x_3 - (4/3)x_4 - (1/3)x_5 = 4.$$

В данном случае счастливо получилось допустимое решение $x_1=10$, $x_2=4$, $x_3=x_4=x_5$ исходной задачи, которое является и базисным для нее. Это видно из того, что обе вспомогательных переменных перешли в группу свободных неизвестных без дополнительной работы, описанной в предыдущем пункте. Перейдем ко второму этапу симплекс метода – применению симплекс алгоритма для полученной задачи, в ограничениях которой отброшены все новые переменные, а функция цели взята из условия примера:

$$L = x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 - 2x_5 \to \min;$$

$$x_1 - (4/3)x_3 + (5/3)x_4 + (5/3)x_5 = 10$$

$$x_2 + (5/3)x_3 - (4/3)x_4 - (1/3)x_5 = 4.$$

Подставив x_1 и x_2 из уравнений в выражение для L, получим

$$L = (2/3)x_3 + (14/3)x_4 - (10/3)x_5 + 14 \to \min$$

$$x_1 - (4/3)x_3 + (5/3)x_4 + (5/3)x_5 = 10$$

$$x_2 + (5/3)x_3 - (4/3)x_4 - (1/3)x_5 = 4.$$

Пример 5.

$$L = x_1 - x_2 + 2x_3 \to \min;$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 18$$

$$x_1 - x_2 - 4x_3 - x_4 - 3x_5 = 12.$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0.$$

Решение

Применим симплекс метод. Сначала будем с помощью симплекс алгоритма решать следующую вспомогательную задачу:

$$Q = y_1 + y_2 \to \min;$$

$$y_1 + 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 18$$

$$y_2 + x_1 - x_2 - 4x_3 - x_4 - 3x_5 = 12.$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ y_1,\ y_2 \geq 0.$$

Применим симплекс алгоритм:

$$Q = -3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 + 2x_5 + 30.$$

На первом шаге ведущим элементом служит коэффициент при x_1 в первом уравнении. Выразим с помощью этого уравнения x_1 через y_1:

$$Q = y_1 + y_2 \to \min;$$

$$x_1 = -0{,}5(y_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5) + 9.$$

Подставим это выражение во второе уравнение и в выражение для Q. Получим:

$$Q = 1{,}5y_1 + 2{,}5x_2 + 3{,}5x_3 + 2x_4 + 3{,}5x_5 + 3.$$

Все коэффициенты при неизвестных в этом выражении положительны. Поэтому, минимальное значение

Q достигается при $y_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0$ и равно 3. Поскольку, это значение Q отлично от нуля, то система ограничений несовместна.

Пример 6.

$$2x_1+x_2+x_3+x_4=11$$
$$3x_1+2x_2+3x_3+5x_4=38$$
$$L=10+x_1-x_4\to\min$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\ge 0.$$

Решение

Применим симплекс метод. Сначала будем с помощью симплекс алгоритма решать следующую вспомогательную задачу:

$$Q=y_1+y_2\to\min;$$
$$y_1+2x_1+x_2+x_3+x_4=11$$
$$y_2+3x_1+2x_2+3x_3+5x_4=38$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ y_1,y_2\ge 0.$$

Выразим y_1 и y_2 из уравнений и подставим в выражение для Q:

$$Q=-5x_1-3x_2-4x_3+6x_4+49\to\min.$$

Таким образом, получена следующая каноническая задача линейного программирования:

$$Q=-5x_1-3x_2-4x_3+49\to+\min;$$
$$y_1+2x_1+x_2+x_3+x_4=11$$
$$y_2+3x_1+2x_2+3x_3+5x_4=38.$$

Сделаем первый шаг симплекс алгоритма в этой задаче. Разрешающим здесь будет коэффициент при x_3 в первом уравнении. Из первого уравнения выразим x_5 через x_1 и подставим во второе уравнение и в выражение для L. Получим:

$$x_5=(3/5)\left[10-x_1+(4/3)x_3-(5/3)x_4\right].$$
$$x_5+(3/5)x_1-(4/5)x_3+x_4=6$$
$$x_2-(1/5)x_1+(7/5)x_3-(5/3)x_4=6.$$
$$L=-6+2x_1-2x_3+8x_4.$$

Сделаем еще один шаг симплекс алгоритма. Разрешающий элемент находится во втором уравнении при третьем неизвестном. Подучим: $x_3=(5/7)(-x_2+x_4+0{,}2x_1-6)$.

Подставим это выражение в первое уравнение в выражение для функции L:

$$x_3+(5/7)x_2-(5/7)x_4-(1.7)x_1=(30.7)$$
$$x_5+(4/7)x_2+(3/7)x_4+(17/35)x_1=(66/7).$$
$$L=-(102/7)+(10/7)x_2+(46/7)x_4+(12/7)x_1+8x_4.$$

Все члены вошли в выражение для L с положительными знаками. Поэтому, можно считать найденным решение исходной задачи: $x_3=30/7$; $x_5=66/7$; $x_1=x_2=x_4=0$, L=-102/7.

Применим симплекс алгоритм. Разрешающим элементом на первом шаге выберем коэффициент при x_1 в первом уравнении. Выразим из первого уравнения x_5:

$$x_1 = 11/2 - 0{,}5\left(y_1 + x_2 + x_3 + x_4\right)$$

и подставим в выражение для Q и в остальные уравнения. Получим:

$$Q = 2{,}5y_1 - 0{,}5x_2 - 1{,}5x_3 - 3{,}5x_4 + 21{,}5 \to \min;$$

$$x_1 + 0{,}5y_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}5x_3 + 0{,}5x_4 = 5{,}5$$

$$y_2 - 1{,}5y_1 + 0{,}5x_2 + 1{,}5x_3 + 3{,}5x_4 = 21{,}5.$$

Не все y_i перешли в группу свободных неизвестных. Выразим из второго уравнения x_2 и подставим в выражение для Q и в первое уравнение. Получим:

$$Q = y_1 + 0 * x_2 + * x_3 + 0 * x_4 + y_2 \to \min;$$

$$x_4 - (3/7)y_1 + (1/7)x_2 + (3/7)x_3 + (2/7)y_2 = 43/7$$

$$x_1 + (2/7)y_1 + (3/7)x_2 + (2/7)x_3 - (1/7)y_2 = 17/7.$$

В силу отсутствия отрицательных слагаемых в формуле для функции Q получен ответ первого этапа симплекс метода. Минимальное значение функции Q равно нулю. Теперь можно найти канонический вид задачи линейного программирования для второго этапа симплекс метода. Для его записи достаточно отбросить переменные y_1 и y_2 в последней системе и вернуться к исходной функции цели L. Получим:

7.2 Применение замечания Вальда для упрощения расчетов при решении задач с помощью симплекс метода

Основной вычислительной трудностью при расчетах с помощью симплекс метода является расчет базисного плана, который осуществляется на первом этапе метода. Этот расчет осуществляется симплекс методом с числом неизвестных больших, чем в исходной задаче. В это число помимо исходных неизвестных входят и дополнительные неизвестные, количество которых совпадает с числом ограничений. На втором этапе применения симплекс метода расчет ведется с числом неизвестных, равным их числу в исходной задаче. Поэтому представляют интерес способы сокращения объема вычислений именно на первом этапе применения симплекс метода. Один такой способ был предложен американо-венгерским математиком Абрахамом Вальдом (1902-1950).

Пример 7. Пусть система ограничений в основной задаче линейного программирования имеет следующий вид:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

$$2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 60$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0.$$

Найдем базисный план для этой системы с помощью замечания Вальда.

$$y_1 + x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

$$y_2 + 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 60$$

$$Q = y_1 + y_2 = -3x_1 - 6x_2 - 8x_3 + 70 \to \min$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ y_1, y_2 \ge 0.$$

На первом шаге алгоритм не отличается от симплексного. Выберем разрешающий элемент в первом уравнении у первого неизвестного. Запишем систему ограничений и функцию цели после первого шага алгоритма. Получим:

$$x_1 + y_1 + x_2 + x_3 = 10$$

$$y_2 - 2y_1 + 3x_2 + 5x_3 = 40$$

$$Q = 3y_1 - 3x_2 - 5x_3 + 40 \rightarrow \min$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ y_1, y_2 \geq 0.$$

Далее Вальд предложил несколько отклониться от симплекса алгоритма и положить нулю первое из дополнительных неизвестных.

Получим:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

$$y_2 + 3x_2 + 5x_3 = 40$$

$$Q = -3x_2 - 5x_3 + 40 \rightarrow \min$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ y_2 \geq 0.$$

Число неизвестных в системе уменьшилось. Поэтому число дальнейших вычислений сократится. Решим с помощью симплекс алгоритма последнюю каноническую задачу. Выберем последнее неизвестное как варианту и найдем разрешающий элемент во втором уравнении при третьем. Сделаем шаг симплекс алгоритма и получим:

$$L = 10 + x_1 - x_4 \rightarrow \min;$$

$$x_4 + (1/7)x_2 + (3/7)x_3 = 43/7$$

$$x_1 + (3/7)x_2 + (2/7)x_3 = 17/7.$$

Чтобы добиться канонического вида задачи линейного программирования следует подставить в функцию L неизвестные x_1 и x_4 из первого и второго уравнений. Получим:

$$L = -(2.7)x_2 + (1/7)x_3 + 44/7 \rightarrow \min;$$

$$x_4 + (1/7)x_2 + (3/7)x_3 = 43/7$$

$$x_1 + (3/7)x_2 + (2/7)x_3 = 17/7.$$

Применим симплекс алгоритм для решения последней задачи. Разрешающий элемент находится при втором неизвестном во втором уравнении. Выразив из второго уравнения второе неизвестное через остальные, и подставив это выражение в первое уравнение и в выражение для функции цели, получим:

$$L = (1/3)x_1 + (1/3)x_3 + 98/21 \rightarrow \min;$$

$$x_2 + (7/3)x_1 + (2/3)x_3 = 17/7$$

$$x_4 - (1/3)x_1 + (1/3)x_3 = 16/3.$$

Все коэффициенты слагаемых в выражении для функции цели положительны. Поэтому оказывается найденным следующее оптимальное решение исходной примера 6 задачи: $x_1 = x_3 = 0$, $x_4 = 16/3$, $x_2 = 17/3$.

$$x_1 + (2/5)x_2 + (4/5)y_2 = 2$$
$$x_3 - (3/5)x_2 + (1/5)y_2 = 8$$
$$Q = y_2 \to \min$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ y_2 \geq 0.$$

В выражении для функции Q отсутствуют слагаемые с отрицательными коэффициентами. Поэтому получен ответ задачи. Исключив второе дополнительное переменно из последней системы можно найти каноническую запись исходной системы ограничений, а вместе с ней и ее базисное решение:

$$x_1 + (2/5)x_2 = 2$$
$$x_3 - (3/5)x_2 = 8$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0.$$

Задача решена.

7.3. Упрощение применения симплекс метода при частичном преобразовании основной задачи линейного программирования в каноническую задачу линейного программирования

В некоторых частных случаях удается привести часть уравнений системы ограничения к виду, совпадающему с каноническим. В этих случаях удается обойтись меньшим числом дополнительных неизвестных для нахождения канонического вида системы ограничений.

Пример 8. Рассмотрим следующую систему ограничений:

$$x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$$
$$x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 27$$
$$y + x_3 - 6x_4 - 3x_5 = 5$$
$$Q = y = -x_3 + 6x_4 + 3x_5 + 5 \to \min$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5, y \geq 0.$$

Сделаем один шаг симплекс алгоритма. Получим:

$$x_3 + y_1 - 6x_4 - 3x_5 = 5$$
$$x_2 - y_1 + 8x_4 + 6x_5 = 22$$
$$x_1 - y + 7x_4 + 4x_5 = 5$$
$$Q = y$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5, y \geq 0.$$

В данном примере вычислительная работа заканчивается. Опустив дополнительное неизвестное в последней системе, получим систему ограничений исходной задачи Линейного программирования в канонической форме:

$$x_3 - 6x_4 - 3x_5 = 5$$
$$x_2 + 8x_4 + 6x_5 = 22$$
$$x_1 + 7x_4 + 4x_5 = 5$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5, y \geq 0.$$

Очевидно, что объем проделанных вычислений существенно меньше того объема, который мог быть при введении не одного, а трех дополнительных неизвестных.

7.4 Понятие о симплекс-таблицах

При решении задачи Линейного программирования с помощью симплекс метода вручную применяются специальные симплекс таблицы, которые заполняются по формальным правилам, получаемым из соотношений (7). При этом получается экономия в записи, потому что в ней опускаются неизвестные x_i.

Также для задачи Линейного программирования можно решать, применяя стандартный табличный редактор Excel, используя надстройку «Поиск решения».

7.5 Метод «большого М» (М-метод)

Можно объединить два этапа симплекс метода в один с помощью метода «большого штрафа». При решении основной задачи Линейного программирования (2), так же как и при применении обычного симплекс метода, вводятся новые переменные следующим образом:

$$y_i + a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i,\ i = 1,\ \ldots,\ k < n$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ldots,\ x_n \ge 0,\ y_i,\ \ldots,\ y_k \ge 0 \qquad (9)$$

Число М считается достаточно большим. При существовании допустимого решения исходной системы ограничений, решение задачи (9) должно быть таким, что y_i=0 при всех i. Если же допустимого решения не существует, то L_{1min}>0.

Пример 9.

$$L = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \to \min;$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 6$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 15$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \ge 0.$$

$$x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$$

$$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 47$$

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 69$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \ge 0.$$

Имеется возможность исключить первое переменное из второго и третьего уравнений, а затем исключит и второе переменное из третьего уравнения. Последовательно получим:

$$x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$$

$$x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 27$$

$$3x_2 + 4x_3 + 0 * x_4 + 6x_5 = 59$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \ge 0.$$

$$x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$$

$$x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 27$$

$$x_3 - 6x_4 - 3x_5 = 5$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \ge 0.$$

Первые две переменных стоят в началах записей первого и второго уравнений и не входят в третье уравнение. Они могут служить достойной заменой двух из трех новых переменных. Однако третье дополнительное переменное придется ввести для получения канонической задачи линейного программирования второго этапа симплекс метода.

Решение

Применяя метод «большого М», получим:

$$y_1 + x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 6$$

$$y_2 + 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 15$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ y_1,\ y_2 \geq 0.$$

$$L_1 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + M(y_1 + y_2) =$$

$$= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + M(6 - x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4) =$$

$$= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + M(15 - 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4) =$$

$$= (1-3M)x_1 + (-1-M)x_2 + (1-2M)x_3 - x_4 + 21M \to \min.$$

Это каноническая задача линейного программирования. Полагая М достаточно большим, определим, что коэффициент при x_1 в выражении для L_1 отрицателен. Сделаем шаг симплекс алгоритма:

$$x_1 + y_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 6$$

$$y_2 - 2y_1 - 5x_2 - x_3 + 3x_4 = 3$$

$$L_1 = (3M-1)y_1 + (5M-3)x_2 + Mx_3 - 3Mx_4 + 3M + 6 \to \min.$$

В форме L_1 есть единственный отрицательный коэффициент при x_4. Сделаем второй шаг симплекс алгоритма:

$$x_1 + (1/3)y_1 + (1/3)x_2 + (2/3)x_3 + (1/3)y_2 = 7$$

$$x_4 - (2/3)y_1 - (5/3)x_2 - (1/3)x_3 + (1/3)y_2 = 1$$

$$L_1 = (M-1)y_1 - 3x_2 + My_2 + 6 \to \min.$$

Сделаем третий шаг симплекс алгоритма:

Коэффициент в форме L_1 при x_2 отрицателен. Делаем второй шаг симплекс алгоритма:

$$x_1 + (2/5)y_1 + (1/5)y_2 - (4/5)x_3 = 13/5$$

$$x_2 - (1/5)y_1 + (2/5)x_2 - (3/5)x_3 = 6/5$$

$$L_1 = (M - 2/5)y_1 + 0{,}2(5M - 1)y_2 - (1/5)x_3 + 13/5.$$

Оказалось, что коэффициент при x_3 в выражении для L_1 отрицателен, в то время как все коэффициенты при x_3 в уравнениях ограничений отрицательны. Следовательно, не существует наименьшего значения L. Можно достичь сколь угодно малой ее величины, полагая $x_1 = \dfrac{15}{5} + \dfrac{4x_3}{5},\ x_2 = \dfrac{6}{5} + \dfrac{x_3}{5}$ и устремляя x_3 в бесконечность.

Замечание 1. Совершенно необязательно при расчетах методом «большого М» придавать ему конкретное значение. Можно оперировать с ним, как с параметром. При этом, следует определять знак выражения коэффициентов L_1 вида aM+b знаком а при $a \neq 0$ и знаком b при $a = 0$.

8. Проблема возможного зацикливания симплекс алгоритма

8.1 Пояснение к теме

Из формулы (7) следует, что за шаг симплекс алгоритма функция цели L изменяется на величину

$$\frac{c_l b_k}{a_{kl}}.$$

Так как $c_l<0,\ a_{kl}>0$, а b_k не может быть отрицательным, то функция L уменьшится, если $b_k>0$ и останется неизменной, если $b_k=0$. Сразу заметим, что в случае положительности правых частей уравнений ограничений b_i

и при единственности разрешающего элемента в выбранном столбце на следующем шаге симплекс алгоритма правые части останутся положительными. Из (7) следует, что новые значения правых частей равны

$$b_i - \frac{b_k a_{il}}{a_{kl}}$$

Если a_{ji} отрицательно, то правые части лишь возрастут, если же a_{ji} положительно, то они уменьшатся до положительных чисел, потому что разрешающий элемент удовлетворяет следующему неравенству:

$$a_{il} \leq \frac{b_i a_{kl}}{b_k}.$$

Из этого следует, что при начальной положительности правых частей в ограничениях, некоторые из них могут стать нулевыми лишь в исключительных ситуациях. Такие задачи называются вырожденными, и их следует рассматривать особо. Практически вырождение маловероятно и его появление обычно игнорируют при составлении программ симплекс метода. Однако, представляют теоретический интерес те методы, которые позволяют решить вырожденные задачу и которые при этом являются небольшой модификацией симплекс метода. Существуют различные способы модификации симплекс алгоритма [А1, Б2, В3]. Сначала укажем метод, отличный от методов, приведенных в указанных источниках. Всякий раз при возникновении вырожденности, этот метод использует симплекс алгоритм, для решения специальной задачи линейного программирования.

$$x_2 + y_1 + 3x_1 + 2x_3 + y_2 = 21$$
$$x_4 + y_1 + 5x_1 + 3x_3 + 2x_2 = 36$$
$$L_1 = (M+2)y_1 + 6x_3 + (M+3)y_2 + 9x_1 - 57 \to \min.$$

Получен следующий ответ: $x_1 = x_3 = 0,\ x_2 = 21,\ x_4 = 36,\ L_{\min} = -57.$

Пример 10.

$$L = x_1 - x_3 \to \min;$$
$$2x_1 - x_2 - x_3 = 4$$
$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0.$$

Решение

Применяя метод «большого М», получим:

$$y_1 + 2x_1 - x_2 - x_3 = 4$$
$$y_2 + x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ y_1,\ y_2 \geq 0.$$
$$L_1 = (1-3M)x_1 - Mx_2 + (3M-1)x_3 + 9M.$$

Учитывая, что М велико, получим: 1–3М<0 и сделаем шаг симплекс алгоритма.

$$x_1 + (1/2)y_1 - (1/2)x_2 - (1/2)x_3 = 2$$
$$y_2 - (1/2)y_1 + (5/2)x_2 - (3/2)x_3 = 3$$
$$L_1 = 0{,}5(3M-1)y_1 - 0{,}5(5M-1)x_2 + 0{,}5(3M-1)x_3 + 3M + 2.$$

8.2 Симплексный способ преодоления зацикливания

Пусть на некотором этапе симплекс алгоритма коэффициент c_i в линейной форме – отрицателен и существуют ограничения, правые части которых положительны. Заметим, что все правые части ни на каком этапе симплекс алгоритма не могут стать одновременно нулевыми. Это следует из того, что уравнение с разрешающим элементом на предыдущем этапе симплекс алгоритма преобразуется в уравнение с положительной правой частью. Далее, укажем, что если все коэффициенты a_{ki}, с которыми входит свободное переменное x_i в вырожденные уравнения, отрицательны, то разрешающий элемент будет выбран в невырожденных уравнениях и шаг симплекс алгоритма сразу приведет к уменьшению функции L. Если же среди указанных коэффициентов a_{ki} найдется положительный, то сразу сделать такой шаг невозможно, а следует прибегнуть к следующей процедуре. Выделим из системы ограничений те, в правых частях которых находятся нули. Разделим каждое из этих уравнений на x_i и перенесем a_{ki} в правые части. В тех случаях, когда a_{ki} отрицательны, умножим соответствующие уравнения на -1. К полученной новой системе ограничений присоедини и L без аддитивной константы, но разделенную на x_i. Будем искать решение во вновь полученной задаче линейного программирования с помощью симплекс метода. Возможны два варианта. В первом – у задачи нет допустимого решения. Тогда, нет допустимого решения и в исходной задаче линейного программирования. Если же найдено допустимое базисное решение, то умножив на x_i полученные при этом ограничения, будем иметь

i-ый столбец с отрицательными коэффициентами при x_i. При этом начальное отрицательное значение функции цели только уменьшится, оно останется отрицательным, и

$$L = x_3 - 6x_5 + 3x_6 - 1 \to \min;$$
$$x_1 - 2x_2 + 3x_5 - 5x_6 = 0$$
$$x_2 - x_3 + 3x_5 - 4x_6 = 0$$
$$x_4 + x_3 - x_5 + 3x_6 = 1$$

Продолжение расчетов обычным симплекс методом невозможно, потому что нельзя увеличивать x_5 из-за того, что в силу обоих первых ограничений станут отрицательными x_1 и x_2. Применим прием, описанный выше:

$$F = \frac{x_3}{x_5} + 3\frac{x_6}{x_5} - 6 \to \min;$$
$$y_1 - \frac{x_1}{x_5} + 2\frac{x_3}{x_5} + 5\frac{x_6}{x_5} = 3$$
$$y_2 - \frac{x_2}{x_5} + \frac{x_3}{x_5} + 4\frac{x_6}{x_5} = 3\,.$$

Решим эту задачу с помощью метода «большого М».

$$F = M\frac{x_3}{x_5} + M\frac{x_6}{x_5} + (1-3M)\frac{x_3}{x_5} + (3-9M)\frac{x_6}{x_5} + 6M - 6 \to \min;$$
$$y_1 - \frac{x_1}{x_5} + 2\frac{x_3}{x_5} + 5\frac{x_6}{x_5} = 3$$
$$y_2 - \frac{x_2}{x_5} + \frac{x_3}{x_5} + 4\frac{x_6}{x_5} = 3.$$

Сделаем шаг симплекс алгоритма, взяв за разрешающий коэффициент 2.

$$F=\frac{1-M}{2}*\frac{x_1}{x_5}+M\frac{x_2}{x_5}+\frac{3M-1}{2}*\frac{x_6}{x_5}+(3-9M)\frac{x_6}{x_5}-1{,}5M-15\rightarrow \min;$$

$$\frac{x_3}{x_5}-0{,}5*\frac{x_1}{x_5}+0*\frac{x_2}{x_5}+0{,}5y_1+2{,}5\frac{x_6}{x_5}=1{,}5$$

$$y_2+0{,}5*\frac{x_1}{x_5}-\frac{x_2}{x_5}-0{,}5y_1+1{,}5\frac{x_6}{x_5}=1{,}5.$$

Сделаем еще шаг симплекс алгоритма, выбрав разрешающий элемент $\frac{1}{2}$ во втором уравнении:

$$F=(M-1)y_2+\frac{x_2}{x_5}+My_1-\frac{x_6}{x_5}-3M-13{,}5.$$

$$\frac{x_3}{x_5}+y_2-\frac{x_2}{x_5}+0*y_1+4\frac{x_6}{x_5}=3$$

$$\frac{x_1}{x_5}+2y_2-2\frac{x_2}{x_5}-y_1+3\frac{x_6}{x_5}=3.$$

Сделаем шаг симплекс алгоритма, выбрав разрешающим 4 в первом уравнении:

$$F=(M-0{,}75)y_2+0{,}75\frac{x_2}{x_5}+My_1+0{,}25\frac{x_3}{x_5}-3M-14{,}25.$$

$$\frac{x_6}{x_5}+0{,}25y_2-0{,}25\frac{x_2}{x_5}+0*y_1+0{,}25\frac{x_3}{x_5}=0{,}75$$

$$\frac{x_1}{x_5}+1{,}25y_2-1{,}25\frac{x_2}{x_5}-y_1-0{,}75\frac{x_3}{x_5}=0{,}75.$$

вернувшись к исходной задаче, получим, что коэффициент при x_i в L останется отрицательным. Поскольку при всех заменах базисных переменных в уравнениях со свободными членами, последние не менялись и оставались положительными, то теперь можно сделать шаг симплекс-алгоритма в исходной задаче, который приведет к уменьшению L. Заметим, что искусственная задача имеет заведомо меньшее число уравнений, чем исходная. Если и в ней на каком-либо этапе решения возникнет вырожденность, то можно вновь воспользоваться указанным методом. Поскольку при ограничениях, состоящих из единственного уравнения, не может быть вырожденности, то указанная процедура, в конце концов, приведет к решению исходной задачи.

Пример 11.

$$L=-x_4-5x_5\rightarrow \min;$$

$$x_1+2x_2+x_5+x_6=2$$

$$x_2+x_4+2x_5-x_6=1$$

$$x_3+x_4-x_5+3x_6=1$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6\geq 0.$$

Решение

В исходной задаче уже найдено допустимое базисное решение. Сделаем шаг симплекс алгоритма, выбрав в качестве разрешающего коэффициент при x_4 в третьем уравнении. Получим следующую вырожденную систему ограничений:

Оптимальное решение вспомогательной задачи найдено, а вместе с ним найдено следующее допустимое базисное решение в исходной задаче:

$$L = x_3 - 6x_5 + 3x_6 - 1 \to \min;$$

$$x_6 - 0{,}25x_2 + 0{,}25x_3 - 0{,}75x_5 = 0$$

$$x_1 - 1{,}25x_2 + 0{,}75x_3 - 0{,}75x_5 = 0$$

$$x_4 + x_3 - x_5 + 3x_6 = 1.$$

Подставив выражение для x_6 из первого уравнения в третье, и в выражение для F, получим:

$$L = 0{,}25x_3 + 0{,}75x_2 - 3{,}75x_5 - 1 \to \min;$$

$$x_6 - 0{,}25x_2 + 0{,}25x_3 - 0{,}75x_5 = 0$$

$$x_1 - 1{,}25x_2 + 0{,}75x_3 - 0{,}75x_5 = 0$$

$$x_4 + 0{,}75x_2 + 0{,}25x_3 + 1{,}25x_5 = 1.$$

Теперь, можно сделать шаг симплекс алгоритма, приводящий к уменьшению L:

$$L = 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 4 \to \min;$$

$$x_6 - 0{,}2x_2 + 0{,}4x_3 + 0{,}75x_5 = 0{,}6$$

$$x_1 - 0{,}8x_2 - 0{,}6x_3 + 0{,}75x_4 = 0{,}6$$

$$x_5 + 0{,}6x_2 + 0{,}2x_3 + 0{,}8x_4 = 0{,}8$$

Ответ:

$$L_{\min} = -4 \text{ при } x_2 = x_3 = x_4 = 0 \text{ и } x_1 = x_6 = 0{,}6, \; x_5 = 0{,}8.$$

Введя переменные $x_i = z_i - q_i$, получим задачу с ограничениями в стандартной форме:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = b_j; \qquad 0 \le x_i \le d_i;$$

$$i = 1,2,\dots,n;$$

$$L = \sum_{j=1}^{m} c_i x_i \to \min, \tag{11}$$

где $d_i = s_i - q_i$ и $L = M + \sum_{j=1}^{m} c_i q_i$.

Задача (3) называется задачей линейного программирования с ограниченными сверху неизвестными.

10. Видоизмененный симплекс алгоритм для задач Линейного программирования ограниченными сверху переменными

10. 1 Описание и обоснование алгоритма

Для решения канонической задачи с ограниченными сверху переменными (10) с помощью симплекс алгоритма следует переформулировать условие оптимальности найденного базисного плана и принцип перехода от одного оптимального плана к другому.

$$x_{m+i} + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = b_j; \qquad i = 1,2,\dots,n;$$

$$0 \le x_k \le d_k; \qquad k = 1, 2, \dots, n+m;$$

$$L = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j \to \min. \tag{12}$$

В этой задаче при заданных базисных переменных свободные переменные уже не обязательно равны нулю, а базисные не равны b_i. Если некоторая свободная переменная принимает свое наибольшее значение d_i, то ее уже нельзя увеличивать, но можно уменьшать. Поэтому, если коэффициенты в линейной форме L при переменных $x_i = d_i$, отрицательны, в то время как коэффициенты при $x_i = 0$ этой же формы положительны, то найденное базисное решение является оптимальным. Последнее утверждение служит критерием оптимальности базисного решения. Запись условия оптимальности допустимого базисного решения в переменных двойственной задачи имеет следующий вид:

если $x_i = 0$, то $c_i - \sum_{j=1}^{m} y_j a_{ji} \geq 0,$ если $x_i = d_{ij}$, то

$$c_i - \sum_{j=1}^{m} y_j a_{ji} \geq 0. \qquad (13)$$

При переходе от одного базисного решения к другому в симплексе алгоритме, следует иметь в виду, что разрешающий элемент выбирается таким образом, чтобы ни одно из переменных не вышло за рамки своих ограничений. Иначе говоря, в случае $c_i < 0$ рассматривается только такая свободная переменная, которая не принимает своего наибольшего значения. При ее увеличении обязаны выполняться следующие неравенства:

$$0 \leq x_{m+i} = b_i - a_{ij}\, x_j \leq d_{m+i} \quad и \quad 0 \leq x_j \leq d_j. \qquad (14)$$

Поскольку при $a_{ij} > 0$ может нарушиться условие $x_{m+i} \geq 0$, то

$$x_i \leq \frac{b_i}{a_{ij}}, \text{откуда } x_j = \min_i (b_i / a_{ij} \ \ при\ a_{ij} > 0, d_j). \qquad (15)$$

Далее увеличивать x_j невозможно, не нарушая условия (14).

8.3.Преодоление зацикливания методом возмущения

Как показано выше, зацикливание возможно лишь при возникновении вырожденности на некотором этапе симплекс алгоритма. При этом в некоторых правых частях уравнений обязательно должны быть нули. Можно в эти правые чисти добавить некоторые сколь угодно малые члены, и производя следующие шаги симплекс алгоритма, освободиться от вырожденности.

9. Задачи с ограниченными сверху неизвестными

9.1 Пояснение к теме

Если исходная постановка задачи линейного программирования отличается от основной задачи лишь тем, что вместо ограничений типа $x_i \geq 0$, то в ней имеются двусторонние ограничения типа $s_i \leq x_i \leq p_i$, где s_i и p_i заданные постоянные. В этом случае ее нетрудно свести к основной задаче Линейного программирования введением новых переменных $y_i = p_i - x_i$ и $z_i = x_i - s_i$. Однако при таком способе возрастает число неизвестных в задаче, что приводит к увеличению времени расчета и требует большего объема занимаемой в ЭВМ памяти. Небольшим видоизменением симплекс алгоритма можно избежать этих трудностей. Пусть требуется решить следующую задачу линейного программирования:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} z_j = b_j; \qquad q_i \leq z_i \leq s_i;$$

$$i = 1,2,\ldots,n;$$

$$M = \sum_{j=1}^{m} c_i z_i \to min \qquad (10)$$

А при $a_{ij} < 0$ имеется опасность нарушения неравенства

$b_i – a_{ij}\, x_j \le d_{m+i}$, откуда $x_j \le \min\limits_i (b_i - d_{m+i}) / a_{ij}$. (16)

Объединяя (15) и (16), получим:

$$x_j = \min\limits_i (d_j, b_i / a_{ij} \text{ при } a_{ij} > 0, (b_i - d_{m+i}) / a_{ij} \text{ при } a_{ij} < 0) \qquad (17)$$

Если же $c_j > 0$, то следует уменьшать только те свободные неизвестные, которые не равны нулю. При этом должны выполняться условия (14). При $a_{ij} > 0$ следует учитывать только условие

$b_i – a_{ij}\, x_j \le d_{m+i}$, откуда $x_i \ge \frac{b_i - d_{m+i}}{a_{ij}}$. (18) При $a_{ij} < 0$ следует опасаться нарушения в (5) только условия

$0 \le b_i – a_{ij}\, x_j$, откуда получим, что $x_i \ge -\frac{b_i}{a_{ij}}$. (19)

Объединяя условия (18), (19) и $x_j \ge 0$, получим, что x_j можно менять вплоть до наибольшего из этих чисел. Т.е. имеют место следующие равенства:

$$x_j = \max(\left[0, (b_i - \frac{d_{m+i}}{a_{ij}}\right] \text{ при } a_{ij} > 0$$

$$\text{и } x_j = -\frac{b_i}{a_{ij}} \text{ при } a_{ij} < 0. (20)$$

Далее, как и в обычном симплекс алгоритме, следует поменять местами x_{m+i} и x_j. Условие (20) и дает правило перехода от одного базиса к другому.

Заметим, что если на некотором шаге симплекс алгоритма, все свободные неизвестные были равны нулю, либо равны своим верхним границам, то на следующем шаге, либо одно из них перейдет с одной из границ на другую и при этом номера свободных и базисных

x_5 через остальные неизвестные и подставив в первое уравнение и выражение для L, получим:

$$x_4 - x_1 + 2x_5 + 3x_3 = 11$$

$$x_2 + x_1 - x_5 - 2x_3 = -4$$

$$L = 2x_1 - x_5 - 4x_3 + 4 \to \min.$$

и новый план $(0,1,0,1,\underset{*}{5})$. Звездочка показывает, что пятая переменная находится на своей верхней границе и входит в число свободных. Начнем увеличивать x_3. Получим систему неравенств:

$0 \le x_4 = 11 – 3x_3 \le 47/3 \le x_3 \le 11/3$

$0 \le x_2 = – 4 + 2x_3 \le 3$ $\Leftrightarrow$ $2 \le x_3 \le 3{,}5$ $\Leftrightarrow$ $2 \le x_3 \le 3$.

$0 \le x_3 \le 3$ $0 \le x_3 \le 3$

При $x_3 = 3$, она выходит на свою границу. Получим новый план: $(0,2,\underset{*}{3},1,\underset{*}{5})$, при которой форма $L = 2x_1 – x_5 – 4x_3 + 4 = – 13$ принимает свое наименьшее значение, потому что по условию

$2x_1 \ge 0, – x_5 \ge – 5; – 4x_3 \ge – 4 * 3$.

Замечание 2. Задачу линейного программирования, заданную не в каноническом виде, а в виде основной задачи, также можно решить, применив видоизмененный симплекс метод.

11. Параметрическое линейное программирование

11.1 Пояснение к теме

При применении методов линейного программирования для решения практических задач возникает проблема нахождения параметров математической модели. Часто достоверность исходной информации об их значениях подвергается сомнению, либо они заданы с определенной точностью. В таких ситуациях и сам результат проведенной оптимизации может потерять свою практическую ценность. Чтобы преодолеть эту трудность необходимо применять методы для решения задач линейного программирования, заданных не численно, а параметрически. Заметим, что если найденное оптимальное решение задачи линейного программирования является невырожденным, то при небольшом изменении любого параметра задачи номера базисных переменных не изменятся. Действительно, если малым возмущениям подвергались коэффициенты оптимизируемой функции, то номера базисных переменных остались бы положительными, а оптимальное решение невозмущенной задачи удовлетворяло условию оптимальности и для задачи с введенными возмущениями. Можно установить аналогичное утверждение и для возмущений свободных членов ограничений. Поэтому, при решении задач линейного программирования с параметрами можно говорить об устойчивости найденного решения к изменению параметров и об области устойчивости – то есть множестве значений параметров, при которых задача линейного программирования имеет фиксированное базисное решение. Задачей параметрического программирования, прежде всего, является нахождение областей устойчивости для каждого набора параметров. Наиболее просто решается задача с одним параметром, впервые решенная [В2, В3] и описанная в [Б9].

неизвестных не изменятся, либо одно из базисных неизвестных выйдет на одну из границ, в то время как некоторое свободное неизвестное покинет граничное значение. После этого, оно перейдет в разряд базисных неизвестных, а базисное неизвестное станет свободным. Поэтому, все свободные неизвестные на каждом шаге симплекс алгоритма принимают свои граничные значения: либо 0, либо d_i.

10.2 Пример решения задач с ограниченными сверху переменными

Пример 12. С помощью видоизмененного симплекс алгоритма решить следующую задачу линейного программирования с ограниченными сверху переменными:

$$x_4 + x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$$

$$x_5 - x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$$

$$0 \le x_1 \le 2;\ 0 \le x_2 \le 3;\ 0 \le x_3 \le 3;\ 0 \le x_4 \le 4;\ 0 \le x_5 \le 5;$$

$$L = x_1 - x_2 - 2x_3 \to \min.$$

Решение

Начальный план (0,0,0,3,4) является допустимым. Начнем увеличивать x_2, оставляя

$x_1 = x_3 = 0$. Получим следующую систему:

$0 \le x_4 = 3 - 2x_2 \le 4$ $-0{,}5 \le x_2 \le 1{,}5$

$0 \le x_5 = 4 + x_2 \le 5$ $\Leftrightarrow$ $-4 \le x_2 \le 1$ $\Leftrightarrow$ $0 \le x_2 \le 1.$

$0 \le x_2 \le 3$ $0 \le x_2 \le 3$

При $x_2 = 1$ переменная x_5 вышла на свою верхнюю границу. Выразив из второго уравнения исходной системы

11.2 Постановка простейшей задачи параметрического линейного программирования

Задача линейного программирования, в которой минимизируемая функция линейно зависит от параметра t, записывается следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j = b_j; \qquad j = 1,\dots,m;$$

$$L(t) = \sum_{j=1}^{n} (c_j + d_j t) x_j \to min,$$

$$x_j \geq 0; \; m < n.$$

При этом требуется решить задачу при всех действительных значениях параметра t.

11.3 Методы решения задач параметрического Линейного программирования

Заметим, что если при любом фиксированном значении параметра t задача превращается в обыкновенную задачу линейного программирования. Пусть при некотором $t = t_0$ известно решение такой задачи. Мысленно начнем непрерывно менять t. При этом, пока все коэффициенты функции цели L, т.е. $(c_j + d_j t)$ остаются положительными, то и найденное начальное при t_0 решение остается решением задачи на отрезке $[t, t_0]$. Ситуация изменится после того как впервые одно из выражений $(c_j + d_j t)$ сменит знак, то есть при

$$t > \min_{d_j > 0}\left(-\frac{c_j}{d_j}\right).$$

Алгоритм может быть построен следующим образом. Сначала можно решить задачу при $t \to -\infty$. Для этого достаточно с помощью обычного симплекс-метода решить следующую задачу:

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$$
$$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2$$
$$Q = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \to min, \; x_1, x_2, x_3, x_4, \geq 0.$$

Введем искусственные переменные и новую функцию F для нахождения опорного решения исходной задачи:

$$y_1 + 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$$
$$y_2 + x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2$$
$$M = y_1 + y_2 = 12 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 \to min,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, \geq 0. \quad y_1 \geq 0, y_2 \geq 0.$$

С помощью симплекс алгоритма начнем преобразования задачи:

a) $y_1 - 3y_2 + 5x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 4$

$x_1 + y_2 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2$

$M = 4 + 4y_2 - 5x_2 + 2x_3 + 7x_4 \to min,$

$x_1, x_2, x_3, x_4, \geq 0. \; y_1 \geq 0, y_2 \geq 0.$

b) $x_2 - 0{,}6y_2 + 0{,}2y_1 - 0{,}4x_3 - x_4 = 0{,}8$

$x_1 + 0{,}4y_2 + 0{,}2y_1 + 0{,}6x_3 + x_4 = 2{,}8$

$M = y_1 + y_2 + 2x_4 \to min,$

$x_1, x_2, x_3, x_4, \geq 0.$

$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0.$

Таким образом, базисное решение:

$x_1 = 2{,}8, x_2 = 0{,}8, x_3 = x_4 = 0.$

Получена каноническая задача:

$$x_2 - 0{,}4x_3 - x_4 = 0{,}8$$
$$x_1 + 0{,}6x_3 + x_4 = 2{,}8$$
$$Q = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 + 2x_3 + 3x_4 \to min.$$

Ее оптимальное решение совпадает с уже найденным базисным и Q=2.

Перейдем ко второму этапу решения задачи с параметром. Запишем эту задачу в каноническом виде:

$$x_2 - 0{,}4x_3 - x_4 = 0{,}8$$
$$x_1 + 0{,}6x_3 + x_4 = 2{,}8$$

$L = (t + 1)\, x_1 + (1 - t)\, x_2 + (2 + t)\, x_3 + tx_4 =$

$= (t + 1)(2{,}8 – 0{,}6x_3 – x_4) +$
$+(1 – t)(0{,}8 + 0{,}4x_3 + x_4) +$
$+ (2 + t)x_3 + tx_4 = 3{,}6 + 3t + 1{,}8x_3 – tx_4 \to \min.$

$x_1, x_2, x_3, x_4, \geq 0.$

При этом $x_3 = x_4 = 0$. Получим: $L_{min}(t) = 3{,}6 + 3t$.

При $t < 0$ найденное опорное решение является оптимальным. При $t > 0$ перейдем к другому базису с помощью симплекс алгоритма:

$x_2 – 0{,}4x_3 + x_1 = 3{,}6$
$x_4 + 0{,}6x_3 + x_1 = 2{,}8$

$L = 3{,}6 + 3t + 1{,}8x_3 – tx_4 = 3{,}6 + 3t + 1{,}8x_3 – t(2{,}8 – 0{,}6x_3 – x_1) = 3{,}6 + 0{,}2t + (1{,}8 + 0{,}6t)x_3 + 7x_1.$

$x_1, x_2, x_3, x_4, \geq 0.$

В этом случае $L_{min}(t) = 3{,}6 + 0{,}2t$, а оптимальный план

$x_1 = x_3 = 0,\ x_2 = 3{,}6,\ x_4 = 2{,}8.$

Ответ: при $t < 0$, $L_{min}(t) = 3{,}6 + 3t$, $x_1 = 2{,}8$, $x_2 = 0{,}8$, $x_3 = x_4 = 0$.

При $t > 0$, $L_{min}(t) = 3{,}6 + 0{,}2t$, $x_2 = 3{,}6$, $x_4 = 2{,}8$, $x_1 = x_3 = 0$.

При $t = 0$, $L_{min}(t) = 3{,}6$ и оба вышеприведенных плана являются равноценными.

11.4. Некоторые обобщения

Заметим, что задача, в которой от параметра линейно зависят свободные члены в правых частях уравнений-ограничений, имеет в качестве двойственной описанную выше простейшую задачу параметрического программирования и может быть решена двойственным симплекс методом. Для решения этой же задачи можно применить и другой подход, замечая, что переход от одного базисного плана к другому при изменении параметра происходит при вырождении в задаче линейного программирования. Используя эти соображения, можно

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_j; \qquad j = 1,\dots,m;$$

$$L(t) = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j \to \min,\ x_j \geq 0; m < n.$$

Далее, выбирая в качестве базисного найденное на предыдущем этапе решение, следует с помощью симплекс алгоритма найти оптимальное решение задачи при любом $t > \min\limits_{j, d_j > 0}(-c_j / d_j)$, но меньшим следующего по величине $-\frac{c_j}{d_j}$. И так далее, пока такое «следующее по величине» еще будет существовать. Таким образом, получится полное рассмотрение всех возможностей параметров t.

Пример решения задачи параметрического программирования

Пример 13. Решить следующую задачу линейного параметрического программирования:

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$$
$$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2$$
$$L = (t+1)x_1 + (1-t)x_2 + (2+t)x_3 + tx_3 \to \min.$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0$$

Решение

В соответствии с алгоритмом, представленным выше, рассмотрим случай $t \to -\infty$, который сводится к следующей задаче:

решать задачи параметрического программирования, в которых параметр входит одновременно и в свободные члены ограничений и в коэффициенты функции цели и даже в коэффициенты матрицы ограничений.

Если параметр нелинейно входит в уравнения, то осложнение алгоритма заключается лишь в том, что приходится решать нелинейные неравенства вместо линейных, которые получаются в описанных выше стандартных случаях.

12. Минимаксная задача линейного программирования

Минимаксной задачей линейного программирования называется задача с обычными линейными ограничениями типа равенство и типа неравенство, но в которой требуется минимизировать максимум всех неизвестных. Эту задачу можно записать в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j; \qquad j = 1,\dots, m;$$

$$MM = \max_j x_j \to \min, x_j \ge 0; m < n \qquad (21)$$

Минимаксную задачу легко свести к обычной задаче линейного программирования, замечая, что $MM \ge x_j$, при всех j. Поэтому, получим

$$MM - y_i = x_j;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j, x_j \ge 0, y_j \ge 0, MM \to \min. \quad (22)$$

Задача (22) эквивалентна задаче (21), в то же время она является задачей линейного программирования (очевидно, что $MM \ge 0$).

Пример 14. Решить следующую минимаксную задачу:

$x_1, x_2, x_3, x_4, \ge 0.$

13. Модифицированный симплекс метод
13.1 Пояснение к теме. Матричная запись задачи Линейного программирования

Модифицированный симплекс метод представляет собой вычислительный вариант обычного симплекс метода. В ряде случаев применение модифицированного симплекс метода дает выигрыш во времени вычислений и по объему занимаемой в ЭВМ памяти по сравнению со стандартным симплекс методом. Для математической формулировки модифицированного симплекс метода рассмотрим задачу линейного программирования в матричной форме:

$$\mathbb{A}\boldsymbol{X} + \mathbb{B}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{X} \ge \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{Y} \ge \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{B} \ge \boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{C^T}\boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{min}. \qquad (23)$$

В формулах (23) $\boldsymbol{X}$ – n-мерный вектор-столбец базисных переменных,

$\boldsymbol{Y}$- n-мерный вектор-столбец свободных переменных, $\boldsymbol{B}$ − n − мерный вектор − столбец правых столбцов ограничений, $\boldsymbol{C^T}$ − вектор – строка размерности n, $\mathbb{A}$ – матрица с n столбцами и m строками, $\mathbb{B}$ – неособенная квадратная матрица порядка n. Обозначения

$\boldsymbol{X} \ge \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{Y} \ge \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{B} \ge \boldsymbol{0}$ говорят о том, что все элементы этих матриц-столбцов не отрицательны.

На каждом шаге симплекс алгоритма, зная разрешающий элемент, из формул (23) находится $\boldsymbol{Y}$ и подставляется в выражение для функции цели $\boldsymbol{L}$.

При этом получается:

$$\boldsymbol{Y} = \mathbb{B}^{-1}(\boldsymbol{B} - \mathbb{A}\boldsymbol{X}), \boldsymbol{L} = \boldsymbol{C^T}\mathbb{B}^{-1}(\boldsymbol{B} - \mathbb{A}\boldsymbol{X}). \qquad (24)$$

Такой способ иногда называется матричным вариантом симплекс алгоритма. Выбрав i – номер переменной, при которой в выражении (24) для $\boldsymbol{L}$ стоит отрицательный коэффициент, следует перейти к нахождению разрешающего элемента. Для этого достаточно знать элементы i-ого столбца в матрице $\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}$ и элементы столбца $\mathbb{B}^{-1}\boldsymbol{B}$. Чтобы их найти достаточно знать обратную матрицу $\mathbb{B}^{-1}$.

13.2 Алгоритм модифицированного симплекс метода

При решении задачи Линейного программирования обыкновенным симплекс методом всякий раз при переходе от одного базиса (одной системы базисных переменных) к другому в последнем меняется всего одна переменная. При этом матрица $\boldsymbol{B}$ и обратная к ней несильно меняются. Пусть на некотором шаге симплекс алгоритма разрешающий элемент оказался равным q_{ij}. Согласно симплекс алгоритму, следует поменять местами в базисе и в множестве свободных переменных x_i и y_j. При этом матрица $\boldsymbol{B}$ перестанет быть единичной, потому что вместо ее $i-$го столбца встанет столбец q_{kj} матрицы $\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}$. Получим следующую матрицу:

$$\mathrm{P}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \mathrm{d}_{1j} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \mathrm{d}_{2j} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mathrm{d}_{n-1j} & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \mathrm{d}_{nj} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (25)$$

Чтобы найти новые базисные переменные уже на следующем шаге симплекс алгоритма достаточно умножить обратную к матрице $\boldsymbol{P}$ матрицу на новую матрицу $\mathbb{A}$, а для нахождения нового столбца следует умножить P^{-1} на предыдущий столбец. Нетрудно убедиться, что обратная матрица к матрице $\boldsymbol{P}$ имеет следующий вид:

$$x_3 + x_1 + x_2 = 3$$
$$x_4 + 2x_1 + x_2 = 2$$
$$\mathrm{MM} = \max(x_1, x_2, x_3) \to \min.$$

Решение

Запишем задачу (22):

$$x_3 + x_1 + x_2 = 3$$
$$x_4 + 2x_1 + x_2 = 2$$
$$MM = x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = x_3 + y_3 \to min.$$

Преобразуем систему так, чтобы освободиться от ММ в ограничениях:

$$x_1 + y_1 - x_2 - y_2 = 0; \quad x_1 + y_1 - x_3 - y_3 = 0;$$
$$x_3 + x_1 - x_2 = 3$$
$$x_4 + 2x_1 + x_2 = 2$$
$$MM = x_1 + y_1 \to min.$$

Приведем задачу к каноническому виду, заменив x_3 и во втором уравнении на его выражение из третьего уравнения и затем вычитая из полученного уравнения – первое. Получим

$$y_1 + 2x_1 + x_2 - y_3 = 3;$$
$$y_2 + x_1 + 2x_2 - y_3 = 3;$$
$$x_3 + x_1 + x_2 = 3$$
$$x_4 + 2x_1 + x_2 = 2$$
$$\mathrm{MM} = x_1 + y_1 = x_1 + (3 - 2x_1 - x_2 + y_3) = -x_1 - x_2 + y_3 + 3 \to \min.$$

Сделав два шага симплекс алгоритма, получим следующее оптимальное решение:

$x_4 = y_2 = y_3 = 0$; $y_1 = 1$; $x_1 = 1/3$; $x_2 = x_3 = \mathrm{MM} = 4/3$.

$$P^{-1} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -d_{1j}/d_{ij} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -d_{2j}/d_{ij} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -d_{i-1j}/d_{ij} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1/d_{ij} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -d_{i+1j}/d_{ij} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -d_{n-1j}/d_{ij} & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & d_{nj}/d_{ij} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (26)$$

Таким образом, если B - матрица на $k-$ом шаге симплекс алгоритма, а B_1- матрица на $k+1-$ом его шаге, то справедлива следующая формула:

$$B_1 = \boldsymbol{P^{-1}}B. \qquad (27)$$

14. Геометрическая интерпретация задач линейного программирования

14.1 Геометрическая интерпретация задач линейного программирования с двумя независимыми переменными

Пусть в общей задаче линейного программирования имеется всего два переменных: x и y и отсутствуют ограничения типа равенство. Заметим, что любому линейному уравнению $ax+by=c$ соответствует прямая на координатной плоскости XOY. Неравенству $ax+by \le c$ соответствует полуплоскость, расположенная ниже прямой $ax+by=c$ при $b>0$, а при $b>0-$ полуплоскость, находящаяся над этой прямой. Системе неравенств задачи (23) соответствует пересечение нескольких полуплоскостей. Это выпуклый многоугольник (или выпуклая бесконечная фигура с границей в виде ломаной линии – полиэдр). Равенству $L=c_1x+c_2y=q$ соответствует прямая на

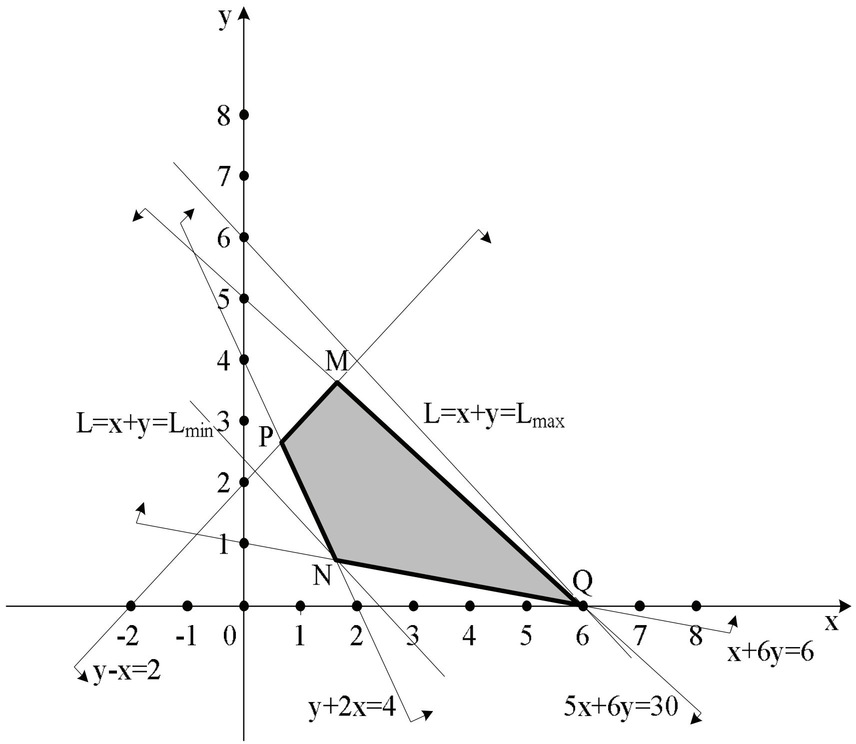


Рис.3. К примеру 15. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования

Поэтому координаты можно найти, решив следующие две системы уравнений:

$$\begin{cases} y-x=2 \\ 5x+6y=30 \end{cases} \text{для точки } N \text{ и } \begin{cases} 6y+x=6 \\ y+2x=4 \end{cases} \text{для точки } Q.$$

Первая система имеет решение

$$Q\left(\frac{18}{11}, \frac{8}{11}\right), L_{min} = \frac{26}{11}.$$

В нем имеет место минимальное значение функции цели. Это ответ в задаче линейного программирования при поиске минимума.

Вторая система имеет следующее решение:

$$M(6{,}0), L_{max} = 6 + 0 = 6.$$

Это ответ задачи линейного программирования при поиске максимума функции цели. На рис.3 представлены две параллельные опорные прямые.

Одна из них соответствует максимальному значению функции цели, а вторая – ее минимальному значению.

Если в задаче линейного программирования имеется три неизвестных x, y и z, то уравнению $ax + by + cz = d$ соответствует плоскость в трехмерном пространстве. Неравенству $ax + by + cz \leq d$ соответствует полупространство, а системе из нескольких линейных неравенств соответствует пересечение нескольких полупространств – в общем случае выпуклый многогранник (возможно и бесконечный полиэдр) – область допустимых планов в задаче линейного программирования. Уравнению $L = px + qy + rz$ соответствует плоскость. Если такая плоскость не пересекается с областью допустимых планов, то такое значение целевой функции L не достижима при указанных ограничениях. Непрерывно изменяя L можно пытаться найти наименьшее ее значение, которое все-таки удовлетворяет системе ограничений. При нем плоскость и многогранник ограничений имеют общую точку. Обычно она является единственной и лежит в одной из вершин многогранника допустимых планов. В этом случае соответствующая плоскость целевой функции называется опорной к многограннику.

Если число неизвестных в задаче линейного программирования превышает число три, то говорят, что одному линейному уравнению соответствует одна гиперплоскость, линейному неравенству соответствует полупространство, а системе неравенств – многомерный выпуклый полиэдр, одной из вершин которого служит

плоскости. Если такая прямая не пересекается с выпуклым многоугольником ограничений, то при всех допустимых значениях неизвестных $L \neq q$. Непрерывно уменьшая величину q можно пытаться достичь пересечения прямой $L = c_1x + c_2y = q$ границ многоугольника. При этом «впервые» (при крайнем значении q) это станет возможным в некоторой вершине многоугольника. Эта точка соответствует наименьшему значению функции цели L, а координаты точки являются решением задачи линенйного программирования.

Пример 15. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $L = x + y$ при неизвестных, которые удовлетворяют следующей системе ограничений:

$$\begin{cases} y + 2x \geq 4 \\ x + 6y \geq 6 \\ 5y + 6x \leq 30 \\ y - x \leq 2 \end{cases}.$$

Решение

На рис.3 проведены прямые:

$$y + 2x = 4, x + 6y = 6, \quad 5y + 6x = 30 \text{ и } y - x = 2.$$

Эти прямые ограничивают выпуклый четырехугольник $MQNP$, являющийся областью допустимых планов в задаче линейного программирования. Однопараметрическое семейство прямых $x + y = L$ соприкасается в вершинах N и M с областью допустимых планов $MQNP$. В вершине N функция L достигает своего минимального значения, а в вершине Q – наибольшего значения. Координаты точек N и Q можно найти, зная уравнения прямых, пересечениями которых они являются.

точка, в которой достигается минимум линейной функции цели.

14.2 Геометрическая интерпретация симплекс алгоритма

Каждому из базисных решений задачи Линейного программировании я соответствует одна из вершин выпуклого многогранника ограничений (базисных планов), лежащего в пространстве всех переменных x_i и y_j. Если непрерывно изменять выбранное в симплекс алгоритме свободное переменное x_i и при этом изменять единственное базисное переменное y_j, соответствующее разрешающему элементу a_{ii}, то этому действию геометрически будет соответствовать движение вдоль ребра многогранника ограничений от одной его вершины, до другой, смежной с ней вершине в направлении убывания функции цели. Такое движение называется геометрической интерпретацией одного шага симплекс алгоритма.

15. Теория двойственности задач Линейного программирования

15.1 Пояснение к теме

Теория двойственности в Линейном и Нелинейном программировании является источником идей основных алгоритмов решения задач. Для доказательства теорем двойственности потребуются некоторые сведения из теории систем линейных неравенств с многими переменными.

$$\begin{cases} x+y+z\le 4 \\ x\ge 0 \\ x+2y-z\le 5 \\ x+y\ge 2 \\ 4x-y+2z\le -1. \end{cases}$$

Решение

Начнем с исключения переменной z. Запишем для нее неравенства из первого, третьего и пятого уравнения системы:

$$\begin{cases} z\le 4-x-y \\ z\ge x+2y-5 \\ z\le -2x+0{,}5y-0{,}5 \end{cases}.$$

Исключим z из последней системы:

$$\begin{cases} x+2y-5\le 4-x-y \\ x+2y-5\le -2x+0{,}5y-0{,}5 \end{cases}.$$

Приведем подобные члены в полученной системе и присовокупим к ней второе и четвертое неравенства исходной системы, которые не содержали переменного z:

$$\begin{cases} 2\mathrm{x}+3\mathrm{y}\le 9 \\ 3\mathrm{x}+1{,}5\mathrm{y}\le 4{,}5 \\ \mathrm{x}\ge 0 \\ \mathrm{x}+\mathrm{y}\ge 2 \end{cases}.$$

Уединим y в левых частях последней системы неравенств:

$$\begin{cases} y\le 3-\dfrac{2x}{3} \\ y\le 3-2x \\ y\ge 2-x \\ x\ge 0 \end{cases}.$$

Перейдем к двусторонним неравенствам:

$$\begin{cases} 2-x\le y\le 3-\dfrac{2x}{3} \\ 2-x\le y\le 3-2x \\ x\ge 0 \end{cases}.$$

Запишем неравенства про неизвестное x:

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1.$$

Из проделанных вычислений следует существование решения у исходной системы неравенств. Возвращаясь к пройденным системам неравенств, опишем всевозможные решения следующим образом:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x \leq y \leq min\left(3 - \frac{2x}{3}, 3 - 2x\right) \\ x + 2y - 5 \leq z \leq min(4 - x - y, -2x + 0{,}5y - 0{,}5) \end{cases}.$$

Исходная система оказалась совместной. Заметим, что помимо установления факта совместности системы неравенств методом исключения неизвестных получаются границы изменения неизвестных. Также имеется принципиальная возможность решать задачи линейного программирования этим методом. Для этого при минимизации функции

$$L = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j$$

можно перейти к неравенству

$$L - \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \geq 0$$

и найти область изменения переменной L с помощью метода исключения переменных
Фурье-Моцкина.

Обратим внимание на то, что метод исключения Фурье-Моцкина как вычислительная процедура малоэффективен, в связи с тем, что при большом числе переменных резко возрастает число неравенств после

15.2.Метод исключения Фурье-Моцкина

Пусть задана следующая система неравенств:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_{i,} i = 1, \ldots, m. \tag{28}$$

Требуется выяснить, совместна ли эта система и найти все ее решения. Для решения поставленной задачи можно последовательно исключать неизвестные следующим образом:

1) Разрешить каждое из неравенств относительно одного неизвестного x_n. При этом получатся неравенства следующих трех типов:

$$x_n \leq A_k(x_1, \ldots, x_{n-1}) \text{ при } a_{in} > 0\,, \tag{29}$$

$$\mathrm{x_n} \geq \mathrm{B_l}(\mathrm{x_1}, \ldots, \mathrm{x_{n-1}}) \text{ при } \mathrm{a_{in}} < 0, \tag{30}$$

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}-1} \mathrm{a_{ij}} \mathrm{x_j} \leq \mathrm{b_j} \text{ при } \mathrm{a_{in}} = 0. \tag{31}$$

2) Из неравенств (29) и (30) для ВСЕХ (!) индексов k и l получить следующие многочисленные неравенства:

$$A_k(x_1, \ldots, x_{n-1}) \geq \mathrm{B_l}(\mathrm{x_1}, \ldots, \mathrm{x_{n-1}}). \tag{32}$$

3) Присоединить к системе неравенств (32) все неравенства типа (31). При этом получится система неравенств, содержащая уже не n, а $n-1$ неизвестное.

Если новая система неравенств окажется совместной, то и исходная система неравенств совместна. Верно и обратное утверждение. Используя предложенный прием исключения неизвестных $n-1$ раз, можно получить систему большого числа неизвестных относительно единственного переменного, которую нетрудно решить элементарными методами.

Пример 16. Проверить на совместность следующую систему линейных неравенств с тремя неизвестными:

каждого исключения переменных. Это явление называется «бичом размерности». Однако метод Фурье-Моцкина имеет важное теоретическое значение.

15.3 Лемма Фаркаша

Лемма Фаркаша здесь будет использована для доказательства теорем двойственности.

Лемма Фаркаша. Если неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} c_k x_k \leq 0 \tag{33}$$

является следствием системы неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 0, \qquad i = 1, \dots, m, \tag{34}$$

где не все числа a_{ij} не равны нулю и не все числа c_k равны нулю, то справедливо следующее тождество:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k x_k = \sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \text{причем } p_i \geq 0. \tag{35}$$

Доказательство

Доказательство проведем методом математической индукции по числу переменных n. Сначала рассмотрим случай n=1 (база индукции). Если $c_1 > 0$, то неравенство $\mathrm{c}_1 x_1 \leq 0$ эквиваленьно неравенстову $x_1 \leq 0$. Оно является следствием системы неравенств (34) только при условии $a_{i1} \geq 0$. Поскольку не все числа a_{i1} равны нулю, то для некоторого номера i справедливо равенство $c_1 = p_1 a_{i1}$, где $p_1 = c_1/a_{i1}$. Случай $c_1 < 0$ сводится к предыдущему заменой переменнной $y_i = -x_i$. По условию леммы число $c_1 \neq 0$. База индукции доказана. Перейдем к доказательству возможности индукционного перехода. Пусть лемма доказана для числа неизвестных, равного

(40) не будут иметь пустые правые части, потому что их «подстрахуют» вторые правые неравенства.

Неравенства (39) и (40) имеют по $n - 1$ неизвестному, и по индукционному предположению при $c_n > 0$ можно записать следующее тождество:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{c_k x_j}{c_n} \equiv \sum_{l=1}^{n-1} p_l \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_{ij} x_j}{a_{in}}.$$

Отсюда получим, что

$$\frac{c_k}{c_n} = \sum_{l=1}^{n-1} p_l \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_{ij}}{a_{in}}.$$

Подставив найденные c_k в исходное неравенство-следствие, получим утверждение леммы. Аналогично этому рассматривается случай $c_n < 0$. Случай $c_n = 0$ невозможен по условию леммы.

Замечание 3. В условии леммы Фаркаша можно заменить нестрогие неравенства на строгие неравенства, либо на равенства. Полученные таким образом утверждения справедливы и могут быть доказаны аналогично доказательству леммы Фаркаша в тексте, учитывая, что равенство A=B эквивалентно системе из двух неравенств $A \leq B$ и $B \leq A$.

15.4Аффинная лемма Фаркаша

Аффинная лемма Фаркаша. Если неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} c_k x_k \le b_0$$

является следствием совместной системы неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = 1, \dots, m,$$

то имеет место следующее тождество:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k x_k - g \equiv \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij} x_j - b_i\right)$$

при некотором $g \le b_0$, а все числа p_i не отрицательны.

Доказательство

Заметим, что каждое неравенство в условии леммы эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i t \le 0 \\ y_j = t x_j \\ t > 0 \end{cases}.$$

Неравенство-следствие также эквивалентно системе:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} c_k y_k - b_0 t \le 0 \\ y_k = t x_k \\ t > 0 \end{cases}.$$

Поэтому неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} c_k y_k - b_0 t \le 0$$

является следствием системы

$n-1$. Докажем лемму для неравенств с n неизвестными. С помощью метода исключения Фурье-Моцкина исключим из исходной системы неравенств ее n – ое неизвестное. Получим систему неравенств следующего вида:

$$-\sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_{ij} x_j}{a_{in}} \le x_n$$

$$\le -\sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_{ij} x_j}{a_{kn}} \text{ при } a_{in} \le 0 \le a_{kn}. \quad (36)$$

Если же отсутствуют положительные либо отрицательные a_{in}, то, соответственно, в (36) будут отсутствовать либо правые либо левые части двойного неравенства. Если $c_n > 0$, то неравенство-следствие имеет следующий вид:

$$x_n \le -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k x_k}{c_n}. \quad (37)$$

При $c_n < 0$ оно эквивалентно неравенству

$$x_n \ge -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k x_k}{c_n}. \quad (38)$$

Поэтому при $c_n > 0$ оно может быть следствием системы неравенств при условии

$$-\sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k x_j}{c_n} \ge -\sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_{ij} x_j}{a_{kn}} \ge -\sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_{ij} x_j}{a_{in}}, \quad (39)$$

а при $c_n < 0$ при условии

$$-\sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k x_j}{c_n} \le -\sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_{ij} x_j}{a_{in}} \le -\sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_{ij} x_j}{a_{in}}. \quad (40)$$

Заметим, что даже при вырождении неравенства (36) в односторонние неравенства (37), или (38) неравенства (39) и

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j - b_i t \le 0 \\ i = 1, \dots, n \\ t > 0 \end{cases}.$$

Используя лемму Фаркаша, получим:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k y_k - b_0 t \equiv \sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i t \right) + \sum_{i=1}^{m} s_i t.$$

Причем $p_i \ge 0$ и $s_i \ge 0$ при $i = 1, \dots, m$.
Следовательно, верны следующие равенства:

$$c_k = \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ik}, \ \ b_0 = \sum_{i=1}^{m} p_i b_i + \sum_{i=1}^{m} s_i.$$

Подставив эти выражения в исходное неравенство-следствие, получим требуемое в лемме утверждение.

15.5.Двойственные задачи Линейного программирования

Определение 1. Пусть дана задача Линейного программирования

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, x_j \ge 0, \qquad i = 1, \dots, m.$$

$$L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max. \qquad (41)$$

Будем называть двойственной к ней следующую другую задачу Линейного программирования:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_j \ge c, y_j \ge 0, \qquad i = 1, \dots, n.$$

задачи. Поэтому говорят, что задача, двойственная к двойственной, является прямой задачей линейного программирования.

15.6 Теорема двойственности

Теорема двойственности. Если ограничения прямой задачи совместны, то обратная задача имеет решение и оптимальные значения целевых функций обеих задач L и M равны между собой.

Доказательство

Сначала докажем, что значение функции L для ЛЮБОГО допустимого решения системы ограничений прямой задачи не меньше значения функции M для любого решения двойственной к ней задачи. Это утверждение называется слабой теоремой двойственности. Для доказательства умножим каждое $i-$ое неравенство (42) на положительное число x_i и сложим полученные неравенства. Имеем:

$$L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ge \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ji} y_j x_i. \qquad (46)$$

Умножим каждое из равенств системы (41) на $y_{i,}$ и сложив, получим:

$$M = \sum_{j=1}^{m} b_j y_j \ge \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ji} y_j x_i. \qquad (47)$$

Сопоставив неравенства (46) и (47), найдем, что

$$L \le M.$$

Пусть L_{max} и M_{min} значения функций цели в прямой и в двойственной задачах линейного программирования. Из последнего неравенства следует, что $L_{max} \le M_{min}$. Теперь докажем, что $L_{max} \ge M_{min}$. Так как для любых допустимых значений неизвестных x_i выполняется неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le L_{max},$$

то оно является следствием системы ограничений прямой задачи линейного программирования. Из аффинной леммы Фаркаша следует, что

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - L' \equiv \sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij} x_j - b_i\right) \ \text{ при } \ L' \le L_{max}.$$

Отсюда следует, что

$$L_{max} \ge L' = \sum_{i=1}^{m} p_i b_{i,} \ \ c_j = \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}. \quad (48)$$

Величины p_i удовлетворяют системе ограничений двойственной задачи и выполняется следующее условие:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i b_i = L' \le L_{max}.$$

Поскольку при некоторых $y_i = p_i$ значение функции M оказалось не большим L_{max}, то тем более $M_{min} \le L_{max}$. Учитывая слабую теорему двойственности, получим, что

$$M_{min} = L_{max.}. \quad (49)$$

Равенство (49) выражает теорему двойственности задач линейного программирования.

15.7.Задача, двойственная к задаче со смешанными ограничениями. Теорема о дополняющей нежесткости

Пусть прямая и двойственная задачи линейного программирования заданы в каноническом виде:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_{i,} i = 1, \dots, m; \quad L = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to min. \ (50)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i + y_{m+j} = \mathrm{c}_j; \ j = 1, \dots, n; M = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to max. (51)$$

$$M = \sum_{j=1}^{m} b_j y_j \to min. \quad (42)$$

Оказывается, что прямая и двойственная задачи глубоко связаны между собой. Чтобы прояснить эту ситуацию приведем прямую и двойственную задачи к их каноническим формам. Каноническая форма прямой задачи имеет следующий вид:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - v_i = b_i, x_j \ge 0, v_i \ge 0, i = 1, \dots, m, \qquad j = 1, \dots, n.$$

$$L = \sum_{j=1}^{n} -c_j x_j \to min. \quad (43)$$

Канонический вид двойственной задачи выглядит следующим образом:

$$-z_i + \sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_j = -c_i, y_j \ge 0, z_i \ge 0,$$

$$i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m.$$

$$M = \sum_{j=1}^{m} -b_j y_j \to max. \quad (44)$$

Запишем задачу Линейного программирования, которая является двойственной к двойственной задаче Линейного программирования:

$$z_i \ge 0, \qquad -\sum_{j=1}^{m} a_{ij} z_j \ \ge -b_i, i = 1, \dots, m$$

$$H = \sum_{j=1}^{m} -c_j z_j \to min. \quad (45)$$

Канонический вид этой задачи с точностью до обозначений совпадает с каноническим видом прямой

В Аналитической Механике принято называть ограничения типа равенство – жесткими, а ограничения типа неравенство – нежесткими.

Поэтому величины x_{n+i} и y_{m+j} называются дополняющими нежесткостями.

Пусть $\{x_i\}, i = 1, \dots, n$ и $\{y_j\},\ j = 1`, \dots, m$ произвольные неорицательные решения систем ограничений прямой и дворйственной задачи линейного программирования. Умножим каждое $i -$ое уравнение системы (50) на y_i и сложим полученные равенства. Получим:

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i = M =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j - x_{n+j} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j y_i - \sum_{i=1}^{m} y_i x_{n+i}. \ (52)$$

Умножим каждое $j -$ое уравнение системы (51) на x_i и сложим полученные равенства. Получим:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = L =$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y_j + y_{m+j} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j y_i + \sum_{j=1}^{n} x_j y_{m+j}. \quad (53)$$

Из равенств (52) и (53) следует такое соотношение:

15.9.Прямодвойственный симплекс метод

В ряде случаев для решения задач Линейного программирования применяется другой прием. На каждом шаге этого алгоритма решается прямая задача Линейного программирования, но делается всего один шаг симплекс алгоритма. Затем, переходят к двойственным переменным (с помощью теоремы о дополняющей нежесткости) и делается один шаг двойственного симплекс метода. Затем возвращаются к прямой задаче, и совершается еще один шаг и так далее. При таком прямодвойственном алгоритме на этапах прямого симплекс метода получаются оценки сверху для оптимальной функции цели, а на этапах двойственного метода находятся ее нижние оценки. Возможность получения двухсторонних оценок функции цели является основным преимуществом прямодвойственного симплекс алгоритма.

15.10. Экономический смысл переменных в двойственной задаче Линейного программирования

Двойственные переменные y_i в силу теоремы о дополняющей нежесткости имеют следующий экономический смысл: если несколько отклониться от оптимального решения прямой задачи и перейти к другому решению ее системы ограничений, то каждое из ограничений измениться на некоторое z_i и целевая функция измениться на

$$\sum_{n=1}^{n} z_i y_i.$$

Следовательно, величины y_i являются ценами за отклонение от оптимального решения (теневые цены). При этом некоторые из теневых цен равны нулю, что говорит о недоиспользовании источника ограничений по соответствующему уравнению, которое привело к нулевой теневой цене.

16. Связь Линейного программирования с теорией матричных игр

16.1 Матричные игры двух лиц

В матричной игре принимают участия два игрока. Первый игрок может своим начальным ходом выбрать одну из n своих стратегий B_i. После этого второй игрок выбирает одну из своих m стратегий C_j. Заранее известны a_{ij} - элементы таблицы A размерности nm. Причем величина a_{ij} в игре служит выигрышем первого игрока при его выборе стратегии B_j и выборе стратегии C_j его противником - вторым игроком. В так называемых играх «с нулевой суммой» выигрыш одного игрока равен проигрышу второго. Условие описанной нами игры можно представить в виде следующей таблицы, называемой платежной матрицей:

Таблица 1

B_i/C_j	C_1	C_2	…………….	C_m
B_1	a_{11}	a_{12}	…………….	a_{1n}
B_2	a_{21}	a_{22}	…………….	a_{2n}
…………….	…………….	…………….	…………….	…………….
B_m	a_{m1}	a_{m2}	…………….	a_{mn}

Поэтому, описанная выше игра называется матричной. Некоторые хорошо известные игры могут быть представлены своей матрицей. Например, «двухпальцевая Морра», известная в Италии с античных времен,

$$\sum_{j=1}^{n} x_j y_{m+j} + \sum_{i=1}^{m} y_i x_{n+i} = L - M. \qquad (54)$$

Теорема о дополняющей нежесткости. Для оптимальных решений прямой и двойственной задач Линейного программирования, всякий раз, когда $k-$ая свободная переменная прямой задачи отлична от нуля, то $k-$ая базисная переменная в двойственной задаче равна нулю. Если же $k-$ая переменная в одной из задач положительна, то $k-$ое ограничение в двойственной задаче, записанное в виде неравенства, обращается в равенство.

Доказательство

При оптимальном решении правая часть равенства (54) в силу теоремы двойственности равна нулю. Все слагаемые в левой части (53) неотрицательны. Следовательно, все они равны нулям. Отсюда следует первое утверждение теоремы. Второе утверждение теоремы получается из того, что при $y_{m+j} = 0$ и при $x_{n+i} = 0$ ограничения типа нестрогое неравенство в прямой и двойственной задачах Линейного программирования реализуются как равенства.

15.8.Двойственный симплекс метод

Для решения задач Линейного программирования можно применять следующий прием: решить двойственную задачу, затем выделить те уравнения исходной задачи, номерам которых соответствуют отличные от нулей y_i, решить их относительно интересующих нас переменных x_j, а остальные x_j считать равными нулю. Такой прием, основанный на теории двойственности Линейного программирования, называется двойственным симплекс методом.

заключается в следующем: каждый из двух играющих показывает один, либо два пальца и одновременно называет предполагаемое число пальцев, которые будут показаны вторым игроком. Если оба игрока не угадают число указанных пальцев противником, то они ничего не заплатят друг другу. Так же произойдет, если они оба угадают эти числа. Если же кто-нибудь из них угадает число пальцев, указанных противником, в то время, как противник не угадает число пальцев, предложенное первым игроком, то догадавшийся игрок получит выигрышную сумму. Эта сумма пропорциональна числу показанных пальцев. Платежная матрица для этой игры имеет следующий вид:

Таблица 2

	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
(1,1)	0	2	–3	0
(1,2)	–2	0	0	3
(2,1)	3	0	0	–4
(2,2)	0	–3	4	0

Здесь (1,2) обозначает, что игрок показывает 1 палец и предполагает, что его противник покажет 2 пальца.

различных стратегий. При выборе им стратегии C_1 он в худшем случае проиграет 4, а при выборе C_2, C_3, C_4 и C_5, соответственно 8, б, 5 и 5. Поэтому, если им будет выбрана первая стратегия C_1, то его проигрыш не может превзойти 4 при ЛЮБЫХ стратегиях противника. Это значение равно

$$\min_i \left(\max_j a_{ij} \right) = PU,$$

которое называется верхней ценой матричной игры или минимаксом.

Докажем, что в любой, матричной игре ее верхняя цена не меньше нижней цены, то есть выполняется неравенство:

$$\min_i \left(\max_j a_{ij} \right) \geq \max_j \left(\min_i a_{ij} \right).$$

Пусть a_{kl} = PD, а a_{sq} = PU. Рассмотрим соответствующую матрицу:

Таблица 4

B_i/C_j	C_1	………	C_l	………	C_q	………
B_1	a_{11}	………	………	………	………	………
………	………	………	………	………	………	………
B_k	………	………	$PD = a_{kl}$	………	a_{kq}	………
………	………	………	………	………	………	………
B_s	………	………	a_{sl}	………	$PU = a_{sq}$	………
………	………	………	………	………	………	………

По определению PD, это число - самое маленькое в своей строке и поэтому, PD ≤ a_{kq}. По определению PU - самое большое число в своем столбце. Поэтому, PU ≥ a_{kq}. Сопоставив эти два неравенства, получим, что PU ≥ PD. Последнее неравенство объясняет названия верхней и нижней цен игры.

Важно отметить, что, как правило, игра не заканчивается после пары ходов игроков. Обычно этот цикл повторяется многократно, и игроки изучают выбор стратегий их противниками. Если верхняя цена игры строго больше нижней цены, то при выборе первым игроком осторожной стратегии B_k, а вторым игроком своей осторожной стратегии C_q, при каждой паре ходов будет получаться ни PU, ни PD, а промежуточное между ними значение a_{kq}. В реальной ситуации первый игрок может «соблазниться» выбрать другую стратегию, для получения еще большего выигрыша. Аналогично и второй игрок может пытаться получить большую выгоду, изменив осторожной стратегии. В этом случае их действия могут носить хаотичный, случайный характер. Если же PU == PD, то при любом отклонении одного из игроков от своей осторожной стратегии, в то время как его противник остается приверженным своей, отклоняющийся потерпит убыток. Это может «отрезвить» последнего и вернуть к прежней стратегии. В таком случае говорят, что игра имеет устойчивую седловую точку, а величина PD = PU = P называется ценой игры. Сам термин «седловая точка» связан с понятием седловой точки, в которой функция, например двух переменных, имеет минимум по одной из них и максимум по направлению возрастания другой. Таблица 5 представляет пример игры с седловой точкой. В этой игре первый игрок будет придерживаться стратегии B_2, а второй игрок - стратегии C_3. Эти стратегии называются «чистыми».

16.2 Верхняя и нижняя цена игры. Матрица с седловой точкой

Рассмотрим следующий пример игры, представленной матрицей:

Таблица 3

B_i/C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	min
B_1	3	5	2	4	2	2
B_2	2	7	6	3	1	1
B_3	3	8	6	5	5	$\boxed{3}$
B_4	4	3	5	4	2	2
max по столбцам	$\boxed{4}$	8	6	5	5	

Первый игрок, выбрав одну из стратегий B_1, B_2, B_3, B_4, может ожидать выигрыш в размере от 1 до 8 при различных выборах вторым игроком стратегий C_1, C_2, C_3, C_4 и C_5. Наихудший для первого игрока исход игры при выборе им стратегии B_1 будет 2 (если второй игрок выберет либо стратегию C_3, либо C_5). При выборе первым игроком: стратегии B_2, B_3 и B_4 наихудшие исходы, соответственно, равны 1, 3 и 2. Поэтому, если первый игрок выберет стратегию B_3, то при **любых** ответах противника он получит выигрыш размером не менее 3.

Это значение равно

$$\max_i \left(\min_j a_{ij} \right) = PD,$$

которое называется нижней ценой матричной игры или максимином.

Второй игрок, не зная о стратегии первого, может рассмотреть варианты, возникающие при выборе им

Таблица 5

B_i/C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	min
B_1	4	5	2	4	2	2
B_2	5	7	$\boxed{3}$	6	9	$\boxed{3}$
B_3	3	8	6	5	5	
max по столбцам	5	8	$\boxed{3}$	5	9	

16.3 Смешанные стратегии

Если игра не имеет седловой точки, и у игроков нет чистых оптимальных стратегий, а игра многократно повторяется, то можно поставить вопрос о случайном выборе набора стратегий и о максимизации математического ожидания выигрыша. Будем считать, что первый игрок выбирает стратегии $\mathbf{B_i}$ с вероятностями $\mathbf{p_i}$, а второй игрок выбирает стратегии $\mathbf{C_j}$, с вероятностями q_j.

Разумеется, выполняются равенства

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{p_i} = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{q_j} = \mathbf{1}.$$

Набор стратегий с их вероятностями называется смешанной стратегией. Первый игрок заинтересован в максимизации своего выигрыша:

$$\mathbf{D} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathbf{a_{ij} p_i q_j}$$

надлежащим выбором $\mathbf{p_i}$, а второй минимизирует ее, подбирая $\mathbf{q_j}$.

Основная теорема теории игр: любая матричная игра двух лиц с нулевой суммой имеет, по крайней мере, одно решение - пару оптимальных стратегий, в общем случае смешанных. При них верно следующее равенство:

условии q» рассмотрены не все возможные сочетания p_i, а только чистые стратегии с p_i=1. Из (56) и (57) следует, что верно следующее равенство:

$$M = \min_q \sum_{j=1}^{m} a_{ij} p_i q_j =$$

$$= \min_q \max_p \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} p_i q_j. \qquad (58)$$

Перейдем к рассмотрению правой части равенства (56). Пусть **L** задается следующим условием:

$$\mathbf{L} = \min_p \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p_i a_{ij}}.$$

Рассуждая аналогично тому, как это было сделано выше по отношению к М, получим

$$\mathbf{L} = \max_p \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p_i a_{ij}} = \max_p \min_q \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{p_i q_j a_{ij}}. \qquad (59)$$

Покажем, что для L и M можно найти, решая две взаимно двойственные задачи линейного программирования.

По определению M имеют место n неравенств:

$$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{q_j a_{ij}} - \mathbf{M} \geq \mathbf{0}. \qquad (60)$$

Если находить наибольшую величину **M** и учесть, что

$$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{q_j} = \mathbf{1} \text{ и } \mathbf{q_j} \geq \mathbf{0},$$

то, решив, такую задачу Линейного программирования, можно получить M. Если же по определению L записать m неравенств

$$\mathbf{L} - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p_i a_{ij}} \geq \mathbf{0},$$

и учесть, что

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{p_i} = \mathbf{1} \text{ и } \mathbf{p_i} \geq \mathbf{0} \qquad (\mathbf{61})$$

и потребовать минимизировать $\boldsymbol{L}$, то получится двойственная к первой задаче. Ниже будет показано, что одна из этих задач имеет решение, и по теореме двойственности L = M, что доказывает основную теорему теории игр.

16.5 Нахождение начального базисного плана. Пояснение к теме

Выше был описан метод сведения матричной игры к основной задаче линейного программирования. Основным по объему вычислением этапом ее решения с помощью симплекс метода, является расчет начального базисного плана. Оказывается для задачи (60) допустимый базисный план может быть найден достаточно просто. Заметим, что при выполнении условия

$$a_{nj} \geq a_{nm} \text{ при } 1 \leq j \leq m-1. \qquad (62)$$

имеется допустимое базисное решение $p_j = 1$, $1 \leq j \leq n - 1$, $x_m = 0$. Условие (62) можно достичь, найдя наименьшее по i из a_{ni} поменяв в матрице А столбец с этим номером и последний столбец местами.

Из этого, в частности следует, что одна из двух

$$\min_p \max_q \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} p_i q_j \right) = \max_q \min_p \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} p_i q_j \right). \quad (55)$$

Оказывается, что эту теорему можно доказать с помощью методов линейного программирования, а сами вероятности p_i и q_j найти, применив симплекс метод.

16.4. Доказательство основной теоремы теории матричных игр и сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Заметим, что, если

$$\mathbf{M} = \min_{\mathbf{q}} \sum_{j=1}^{m} \mathbf{q_j a_{ij}},$$

то для произвольной смешанной стратегии с набором вероятностей $\mathbf{p_1, \dots, p_n}$ будет справедливо следующее неравенство:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{p_1} + \dots + \mathbf{p_n}) = \mathbf{Mp_1} + \dots + \mathbf{Mp_n} \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p_i} \sum_{j=1}^{m} \mathbf{q_j a_{ij}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mathbf{a_{ij} p_i q_j} \geq \min_{\mathbf{p}} \max_{\mathbf{q}} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mathbf{a_{ij} p_i q_j} \right) \geq$$

$$\geq \max_{\mathbf{q}} \min_{\mathbf{p}} \left(\textstyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mathbf{a_{ij} p_i q_j} \right).$$

(56)

С другой стороны,

$$\min_{p} \max_{q} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{a_{ij} p_i q_j} \right) \geq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{a_{ij} p_i q_j} \geq$$

$$\geq \min_q \textstyle\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{a_{ij} p_i q_j} = \boldsymbol{M}, \qquad (57)$$

потому что вместо операции «взятие максимума по p при описанных выше двойственных задач Линейного программирования имеет допустимое решение, а, следовательно, обе задачи имеют оптимальные решения.

16.6 Пример нахождения оптимальных смешанных стратегий

Пусть требуется найти оптимальное решение следующей игры:

Таблица 6

B_i/C_j	$C_1(q_1)$	$C_1(q_2)$	$C_3(q_3)$
$B_1(p_1)$	2	3	1
$B_2(p_2)$	4	1	5

Согласно описанной выше методике получим следующие двойственные задачи линейного программирования:

1) $2p_1 + 4p_2 \geq L$; $3p_1 + p_2 \geq L$; $p_1 + 5p_2 \geq L$; $p_1 + p_2 = 1$; $L \to \max$

2) $2q_1 + 3q_2 + q_3 \leq M$; $4q_1 + q_2 + 5q_3 \leq M$; $q_1 + q_2 + q_3 = 1$; $M \to \min$

Для решения обеих задач введем переменные x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 следующим образом:

$$x_1 - 2p_1 - 4p_2 + L = 0$$
$$x_2 - 3p_1 - p_2 + L = 0$$
$$x_3 - p_1 - 5p_2 + L = 0$$
$$y_1 - 2q_1 + 3q_2 + q_3 - M = 0$$
$$y_2 + 4q_1 + q_2 + 5q_3 - M = 0$$

С помощью формулы $p_2 = 1 - p_1$ и $q_3 = 1 - q_1 - q_2$ освободимся в системах от присутствия p_2 и q_3:

$$x_1 + 2p_1 + L = 4$$
$$x_2 - 2p_1 + L = 1$$
$$x_3 + 4p_1 + L = 5$$
$$y_1 + q_1 + 2q_2 - M = -l$$
$$y_2 - q_1 - 4q_2 - M = -5.$$

равна нулю:

$$C = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} p_i q_j a_{ij} = 0.$$

так как, выбрав $q_j = p_j$, второй игрок получит:

$$C = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_i q_j a_{ij} = 0.$$

для любой симметричной игры.

Пусть даны две взаимно двойственные задачи Линейного программирования

1. $A^{т}x \leq 0$, $x \geq 0$, $M = b^{т}x \to \max$
2. $Ay \geq b$, $y \geq 0$, $L = c^{т}y \to \min$.

Рассмотрим следующую симметричную игру:

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & u & v & t \\
U & 0 & -A & b \\
V & A^{т} & 0 & -c \\
T & -b^{т} & c^{т} & 0
\end{array}$$

где $A^{т}$ - матрица, транспонированная к A, x, u - n-мерные, а y и v - m-мерные векторы-столбцы, t – не отрицательное число. Оптимальные стратегии удовлетворяют следующим неравенствам:

$$-Av + bt \leq 0; \quad A^{т}u - ct \leq 0; \quad -b^{т}u + c^{т}v \leq 0.$$

Если $t \neq 0$, то полагая $u = tx$ и $v = ty$, получим

$Ay \geq b$, $A^{т} \leq c$ и $c^{т}y \leq b^{т}x$

Если же умножить $Ay \geq b$ на $x^{т}$, а $A^{т}x \leq c$ на y, то получим, что

$b^{т}x \leq x^{т}Ay \leq c^{т}y \Rightarrow b^{т}x = c^{т}y$. Следовательно, по теореме двойственности, эти векторы являются оптимальными решениями двух исходных задач линейного программирования. Верно и обратное, если известны x и y - решения исходных задач линейного программирования, то можно найти t, u и v по следующим формулам:

$$t = \frac{1}{\sum x_i + \sum y_j + 1}, \qquad u = tx, \qquad v = ty. (63)$$

ЧАСТЬ 2. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1. Постановка классической транспортной задачи Линейного программирования

Классическая транспортная задача по критерию стоимости ставится следующим образом: на m пунктах отправления (ПО) имеются запасы однородного груза в количествах a_1, a_2, ..., a_m. Эти грузы предназначены для потребителей, находящихся в пунктах назначения (ПН). Причем, потребности пунктов назначения соответственно равны b_1, b_2, ..., b_n единиц груза. Известна стоимость перевозки единицы груза из каждого пункта отправления в каждый пункт назначения. Все эти данные удобно записывать в матрице перевозок (ее также называют транспортной таблицей). В правом верхнем углу клетки, находящейся на i-й строке и в j-м столбце этой матрицы, помещается значение цены перевозки единицы груза из i-го ПО в j-й ПН - c_{ji}. В последнем столбце таблицы располагают исходные объемы запасов продуктов на пунктах отправления - a_i, а в последней строке таблицы находятся необходимые потребителям объемы поставок - b_i. В нижней правой угловой клетке записывают величину общего объема перевозок, который равен и сумме всех потребностей продукции на ПН и общей сумме продукции на ПО. В такой ситуации транспортная задача называется сбалансированной. Требуется найти такой план перевозок,

Исключим из двух уравнений L, вычитая из первого и третьего уравнений второе, таким образом, чтобы в правых частях стояло неотрицательное число, а базисное решение было допустимым.

$x_1 – x_2 + 4p_l = 3$

$x_3 – x_2 + 6p_l = 4$

$–L = x_2 – 2p_1 – 1 \to \min;$

Исключим M из системы ограничений второй задачи, вычтя из первого ее уравнения - второе.

$y_1 – y_2 + 2q_1 + 6q_2 = 4$

$M = y_2 – q_1 – 4q_2 = 5 \to \min.$

Применим симплекс алгоритм для решения обеих задач:

$x_1 – (1/3)x_2 – (2/3)x_3 = 7/3$ $q_2 – (1/6)y_2 + (1/3)q_1 + (1/6)y_1 = 2/3$

$p_1 – (1/6)x_2 + (1/6)x_3 = 2/3$ $M = (1/3)y_2 + (2/3)y_1 + (1/3)q_1 + 7/3 \to \min$

$–L = (2/3)x_2 + (1/3)x_1 – 7/3 \to \min;$

Цена игры L = M = 7/3. Вероятности стратегий первого игрока в смешанной стратегии $p_2 = 1/3$; $p_1 = 2/3$. Вероятности стратегий второго игрока $q_1 = 0$; $q_2 = 2/3$; $q_3 = 1/3$.

16.7 Сведение задачи Линейного программирования к матричной игре

Оказывается, что любую задачу Линейного программирования можно свести к матричной игре. Такое сведение небесполезно, потому что в теории игр разработаны собственные методы нахождения решений. С помощью этих итерационных методов можно решать и задачи Линейного программирования.

Игра называется симметричной, если ее матрица является квадратной и кососимметрической: то есть $a_{ij} = -a_{ji}$. Легко видеть, что цена симметричной игры при котором сумма транспортных расходов принимает наименьшее значение. План перевозок представляет собой совокупность из nm чисел x_{ij}, каждое из которых является объемом перевозок из i-го ПО в j-й ПН. Именно эти величины требуется рассчитать, и их записывают в ту же таблицу на соответствующие места.

Пример 1. Рассмотрим сбалансированную транспортную задачу, представленную следующей таблицей перевозок.

Таблица 1.А

ПО/ПН	$ПН_1$	$ПН_2$	$ПН_3$	$ПН_4$	Запасы на ПО
$ПО_1$	x_{11} 5	x_{12} 7	x_{13} 2	x_{14} 4	80
$ПО_2$	x_{21} 4	x_{22} 1	x_{32} 6	x_{33} 2	90
$ПО_3$	x_{31} 6	x_{32} 2	x_{33} 2	x_{34} 5	30
Потребности ПН	50	70	20	60	200

Из первого пункта отправления следует отправить в 4 пункта назначения соответственно x_{11}, x_{12}, x_{13} и x_{14} единиц продукта.

Всего же на нем сосредоточено 80 единиц продукта. Поэтому верно равенство $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 80$. Еще два аналогичных равенства можно записать для второго и третьего пунктов отправления, ориентируясь на строчки табл. 1. С другой стороны, первый пункт назначения должен получить:

$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 50$ единиц продукции.

Ориентируясь на столбцы таблицы 1А, можно по аналогии с предыдущим уравнением записать еще три уравнения для пунктов назначения с номерами 2, 3 и 4. Таким образом, получается следующая система из 7 линейных уравнений с 12 неизвестными:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 80$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 90$$

является суммарными транспортными расходами. В примере 1 эта функция выглядит следующим образом:

$$F = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{14}x_{14} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24} + c_{31}x_{31} + c_{32}x_{32} + c_{31}x_{31} + +c_{44}x_{44} = 5x_{11} + 7x_{12} + 2x_{13} + 4x_{14} + 4x_{21} + x_{22} + 6x_{23} + 2x_{24} + 3x_{31} + 5x_{32} + 2x_{31} + 5x_{41}.$$

Необходимо найти минимальное значение этой функции при учете ограничений типа равенство и nm неравенств $x_{ij} \geq 0$. При этом требуется отыскать сочетание неизвестных x_{ij}, доставляющих минимум F. Этот набор неизвестных называется оптимальным планом перевозок. Выражение для функции F и система ограничений в их совокупности называется моделью для классической транспортной задачи. Некоторые другие модели будут рассмотрены в п. 4.

Заметим, что транспортная задача является частным случаем основной задачи Линейного программирования и, в принципе, может быть решена с помощью симплекс метода. Однако, для ее решения разработаны специфические и очень эффективные варианты указанного алгоритма, которые будут рассмотрены ниже. Эти алгоритмы могут быть реализованы в виде программ для ЭВМ, но часто на практике, при невысокой размерности транспортной задачи, ее удается решить без использования вычислительной техники.

2. Методы нахождения базисного плана
2.1. Нахождение базисного плана диагональным методом

Проблема нахождения базисного решения в общей задаче Линейного программирования является самой трудоемкой. Однако для транспортной задачи ее решение можно без труда найти. Из изложенного ниже будет ясна причина того, что часто диагональный метод нахождения базисного плана называется методом северо-западного угла.

Будем находить базисные переменные x_{ij} и записывать их в табл. 1 следующим способом. В левую верхнюю (Северо-западную) клетку запишем меньшее из чисел a_1 и b_1. Если $a_1 > b_1$, то из первого пункта отправления будет изъят весь запас продукта, и первую строчку матрицы можно мысленно вычеркнуть. При этом в первый пункт назначения останется доставить $b_1 - a_1$ груза (эту величину записывают в скобках рядом с b_1), Если же $a_1 > b_1$, то в первый пункт назначения будет уже доставлен весь необходимый груз. Тогда первый столбец мысленно может быть вычеркнут, а в первом пункте отправления останется $a_1 - b_1$ продукта. Это число записывают в скобках рядом с a_1 в нижней строке таблицы. После этого делается следующий шаг алгоритма, на котором, аналогично тому, как это сделано на первом шаге, заполняется левая верхняя после вычеркивания клетка таблицы. И так далее. На последнем шаге алгоритма заполняется предпоследняя n + m - 2-я клетка, а в оставшуюся незанятую клетку записывается последнее неизвестное таким образом, чтобы суммы значений базисных неизвестных в оставшейся i-й строке либо в оставшемся j-м столбце равнялись соответственно a_1 либо b_1. Все небазисные переменные, находящиеся в незаполненных клетках таблицы, считаются равными нулю. Применим диагональный метод к задаче примера 1 и заполним таблицу:

$$
\begin{aligned}
&x_{22} + x_{23} + x_{33} + x_{34} = 30\\
&x_{11} + x_{21} + x_{31} = 50\\
&x_{12} + x_{22} + x_{32} = 70\\
&x_{13} + x_{23} + x_{33} = 20\\
&x_{14} + x_{24} + x_{34} = 60
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

В общем случае при m пунктах отправления и n пунктах назначения получится система из n+m уравнений и с nm неизвестными x_{ij}. Получаемая система уравнений не является линейно независимой. Если сложить первые ее m уравнений и сложить последние n уравнений, то в левые части обоих полученных суммарных уравнений войдут все неизвестные x_{ij}, а в правые – суммы правого столбца и последней строчки матрицы, которые по условию равны между собой (задача сбалансирована). Таким образом, получаются два одинаковых уравнения. Следовательно, одно из уравнений системы может быть отброшено. Поэтому число базисных неизвестных (то есть таких, которые можно выразить из системы уравнений через остальные неизвестные) не может быть большим, чем mn - m - n + 1.

Если в качестве базисных переменных взять все неизвестные из первой строки и из первого столбца матрицы, то можно все x_{ij} при $i > 1$ найти из уравнений, записанных по столбцам таблицы, а x_{ij} при $j > 1$ можно определить из уравнений для строк матрицы перевозок. Значение x_{11} можно найти из уравнения, полученного для первой строки, используя найденные x_{1i}, либо из уравнения для первого столбца, с помощью найденных значений x_{j1}. Таким образом, ранг системы уравнений ограничений в транспортной задаче линейного программирования равен nm - n - m + 1. Число свободных переменных равно nm - n - m + 1, а число базисных n + m - 1. Функция $F = \sum\sum c_{ij}x_{ij}$

Таблица 1.Б

ПО/ПН	ПН$_1$	ПН$_2$	ПН$_3$	ПН$_4$	Запасы на ПО
ПО$_1$	50 ^{5}	30 ^{7}	^{2}	^{4}	80
ПО$_2$	^{4}	40 ^{1}	20 ^{6}	30 ^{2}	90
ПО$_3$	^{6}	^{2}	^{2}	20 ^{5}	30
Потребности ПН	50	70	20	60	200

При таком плане перевозок их стоимость может быть подсчитана следующим образом:

$F = 50 * 5 + 30 * 7 + 40 * 1 + 20 * 6 +30*2 ++30 * 5 = 830.$

Заметим, что если в процессе вычислений по диагональному методу на каком-либо этапе $a_l = b_l$, то следует по желанию вычеркнуть либо строку, либо столбец. При этом неизбежно на следующем этапе значение базисной переменной в левом верхнем (северо-западном) углу таблицы станет равным нулю. Если же $a_l = b_l$ и остается всего один столбец, то вычеркивается клетка строки, если же остается одна строка, то вычеркивается клетка столбца.

Рассмотрим пример с нулевым значением базисной переменной.

Пример 2. Найти базисный план перевозок по следующей таблице.

Таблица 2.А

ПО/ПН	ПН$_1$	ПН$_2$	ПН$_3$	Запасы на ПО
ПО$_1$	50 ^{10}	0 ^{2}	^{1}	(50), 0
ПО$_2$	^{3}	70 ^{5}	20 ^{7}	90, (20), (0)
ПО$_3$	^{8}	^{4}	^{2}	40, (0)
Потребности ПН	50, (0)	70, (0)	60, (0)	180

$F = 40 * 5 + 40 *4 + 70 *1 + 20 *2 + 10 *3 + 20 * 2 = 540,$

что меньше значения, полученного диагональным методом. Чтобы еще раз убедиться в эффективности метода наименьшей стоимости, найдем с его помощью базисный план для задачи, представленной в табл. 2.А. При этом получим табл. 2. Б. Вычислим значение функции стоимости перевозок

$F = 50 * 1 + 50 * 3 + 40 * 5 + 30 * 4 + 10 * 2 = 540,$

что существенно меньше стоимости при плане, найденном диагональным методом.

В большинстве случаев метод наименьшей стоимости имеет преимущество перед диагональным методом. Однако и он редко может дать сразу наилучший возможный план, при котором сумма затрат на перевозки принимает наименьшее значение.

Таблица 2.В

ПО/ПН	ПН$_1$	ПН$_2$	ПН$_3$	Запасы на ПО
ПО$_1$	^{10}	^{2}	50 ^{1}	50, 0
ПО$_2$	50 ^{4}	40 ^{5}	^{7}	90, (40), (0)
ПО$_3$	^{8}	30 ^{4}	10 ^{5}	40, (30), (0)
Потребности ПН	50, (0), (0)	70, (40), (0)	60, (10), (0)	180

3. Методы улучшения базисного плана

3.1 Идея распределительного метода

С помощью распределительного метода можно находить оптимальное решение транспортной задачи. Рассмотрим идею этого метода на примере задачи 1. Попробуем улучшить базисный план для задачи 1, который был найден и представлен в таблице 1.В. Рассмотрим таблицу 1.Г. Если по отмеченному в этой таблице циклу из клетки (3,3) перебросить единицу продукта в пустую клетку (1,3), а из клетки (1,1) перебросить единицу продукта в клетку (3,1), то равенства отправляемых продуктов их сумме в первой и третьей строках сохранятся. Также не нарушатся равенства получаемых продуктов по первому и третьему столбцу, потому что, сколько добавляется в них – столько же и забирается. Тем более, не меняются балансы по остальным строкам, не затронутым изменениями.

Таблица 2.Г

ПО/ПН	$ПН_1$	$ПН_2$	$ПН_3$	$ПН_4$	Запасы на ПО
$ПО_1$	40 ^{5}	^{7}	^{2}	40 ^{4}	80
$ПО_2$	^{4}	70 ^{1}	^{6}	20 ^{2}	90
$ПО_3$	10 ^{3}	^{5}	20 ^{2}	^{5}	30
Потребности ПН	50	70	20	60	200

Однако значение функции F изменится в тех ее слагаемых, которые подверглись изменению. Если по циклу передано единица продукта, то в данном примере величина F изменится на величину

$c_{13} – c_{11} + c_{31} – c_{33} = 2 – 5 + 3 – 2 = -2$,

что приведет к уменьшению F. Очевидно, что целесообразно перемещать по циклу не единицу продукции, а наибольшее возможное ее значение - в данном случае 20.

Это приведет к переходу от одного базиса к другому, потому что небазисная (пустая) клетка станет базисной, а одна из базисных (в данном случае (3, 3)) превратится в свободную клетку. Получим новый улучшенный базисный план, при котором F = 500.

Таблица 2.Д

ПО/ПН	$ПН_1$	$ПН_2$	$ПН_3$	$ПН_4$	Запасы на ПО
$ПО_1$	30 ^{5}	^{7}	20 ^{2}	40 ^{4}	80
$ПО_2$	^{4}	70 ^{1}	^{6}	20 ^{2}	90
$ПО_3$	30 ^{3}	^{5}	20 ^{2}	^{5}	30

Наличие нулей в базисном плане перевозок пока не должно Вас смущать при расчетах. Хотя свободные неизвестные также принимают нулевые значения, они от этого не становятся базисными.

Найдем стоимость перевозок при найденном плане:

F = 50 * 10 + 70 * 5 + 20 * 7 + 40 * 2 = 1070.

2.2 Нахождение базисного плана методом наименьшей стоимости

Заметим, что при диагональном методе нахождения опорного плана перевозок информация об их стоимостях - c_{ij} не используется в расчете. При этом, могут быть случайно выбраны в качестве базисных те переменные, для которых c_{ij} большие. Это приведет к неудачному начальному плану. Небольшим видоизменением алгоритма можно попытаться найти лучший начальный план. Для этого на каждом шаге алгоритма следует выбирать не северо-западную клетку, а ту, в которой цена c_{ij} наименьшая. Такой способ называется методом наименьшей стоимости. С его помощью найдем базисный план в примере 1.

Таблица 2Б

ПО/ПН	$ПН_1$	$ПН_2$	$ПН_3$	$ПН_4$	Запасы на ПО
$ПО_1$	40 ^{5}	^{7}	^{2}	40 ^{4}	80, (40), 0
$ПО_2$	^{4}	70 ^{1}	20 ^{7}	20 ^{2}	90, (20), (0)
$ПО_3$	10 ^{3}	^{5}	20 ^{2}	^{5}	30, (10), (0)
Потребности ПН	50, (40)	70, (0)	20, (0)	60, (40)	200

При этом плане перевозок их стоимость может быть подсчитана следующим образом:

Потребности ПН	50	70	20	60	200

Чтобы реализовать идею улучшения базисного плана подробнее разберемся с циклами пересчетов в матрицах.

3.2 Циклы пересчета в матрице

Определение 1. Циклом в матрице называется такая последовательность ее клеток $K_1, K_2, \ldots, K_n$, что каждые две последовательные клетки находятся либо в одной строке, либо в одном столбце, а никакие три последовательные клетки не лежат в одном столбце при общей строке. При этом последняя и первая клетки также находятся в общем для них столбце либо в общей для них строке. Циклы изображаются замкнутой ломаной, звенья которой соединяют центры клеток. В каждой своей вершине ломаная линия имеет прямой угол. Примеры циклов представлены на рис.1.

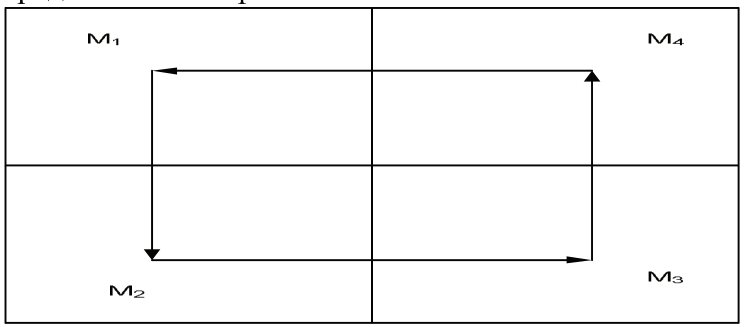


Рис. 1.А. Простейший цикл из четырех клеток в матрице

Доказательство

Пусть L - множество клеток, после которых следуют клетки в их же строке. Пусть M - множество вершин, после которых следуют вершины в их же столбце. При переходе от каждой клетки к последующей, а от последней - к первой множество L отображается на множество M. Поэтому числа элементов в них равны между собой. Число же всех клеток в цикле равно сумме двух равных чисел: элементов из L и M. Потому оно будет четным числом.

Второе свойство. В матрице размерностью mn из произвольных n+m клеток всегда может быть выбран цикл.

Доказательство

Заметим, что не обязательно указанный цикл проходит через все n+m клетки. Доказательством служит следующий алгоритм построения цикла. На первом этапе выберем из указанных клеток те, которые являются единственными среди заданных либо в строке, либо в столбце. Отбросим соответственно их строки и столбцы. После этого неизбежно останутся не отброшенными некоторые клетки матрицы потому, что в противоположном случае на некотором этапе было бы отброшено n строк или m столбцов - т. е. вся матрица, в то время как оставались еще некоторые изначально отмеченные ее клетки. На втором этапе возьмем произвольную оставшуюся клетку A_1 и найдем другую из указанных клеток в ее строке и обозначим ее A_2. Затем найдем в столбце клетки A_2 следующую из заданных клеток. И так далее. Когда все клетки будут пройдены (или ранее этого момента), одна из них повторится во время перебора. Это и завершит построение цикла.

Определение 2. Цикл в матрице называется означенным, если всем его вершинам приписаны числа +1 либо -1, причем у последовательных вершин эти числа различны.

На рис.2 изображен означенный цикл.

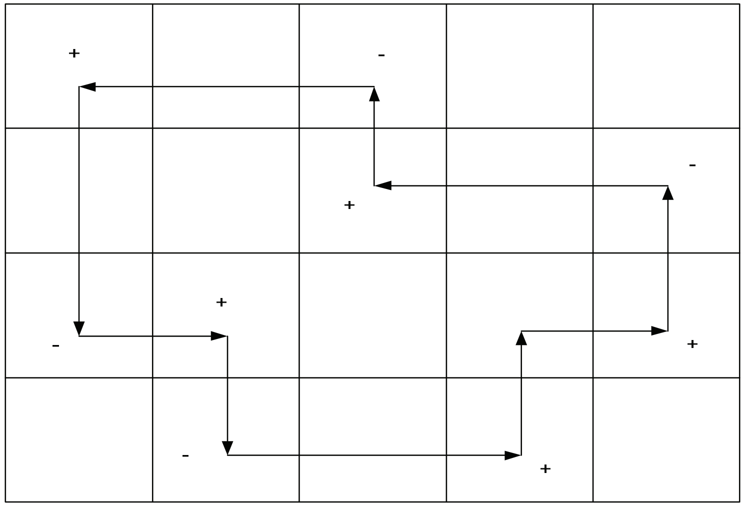


Рис. 2. Означенный цикл в матрице

Поскольку в любом цикле имеется четное число вершин, то существует ровно два способа означить его. Если начать приписывание знаков с некоторой вершины, то остальные однозначно получат знаки при обходе цикла. Но начинать можно как с +1, так и с -1.

Третье свойство. В каждой строке (и в каждом столбце) имеется равное число положительно и отрицательно означенных вершин.

Доказательство

Для доказательства осуществим отображение типа сдвиг цикла в себя, при котором каждая вершина перейдет в соседнюю, а та будет означена противоположно. При таком сдвиге половина вершин из каждой строки (столбца) перейдет в противоположные по знаку вершины этой же строки (столбца). Следовательно, в любой строке (столбце) имеется равное число положительных и отрицательных вершин.

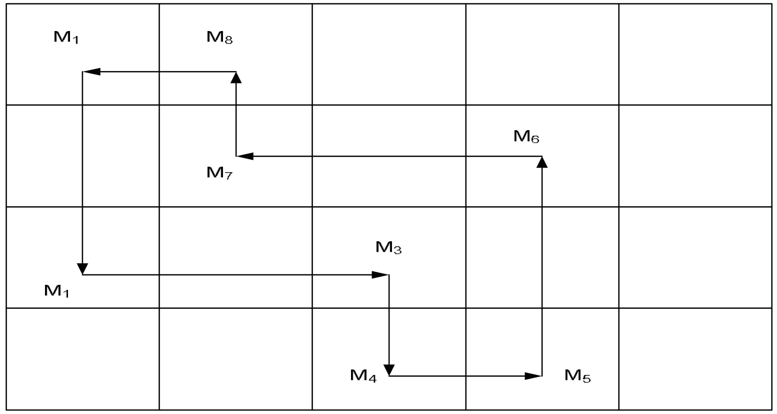


Рис. 1.Б.Цикл из восьми клеток

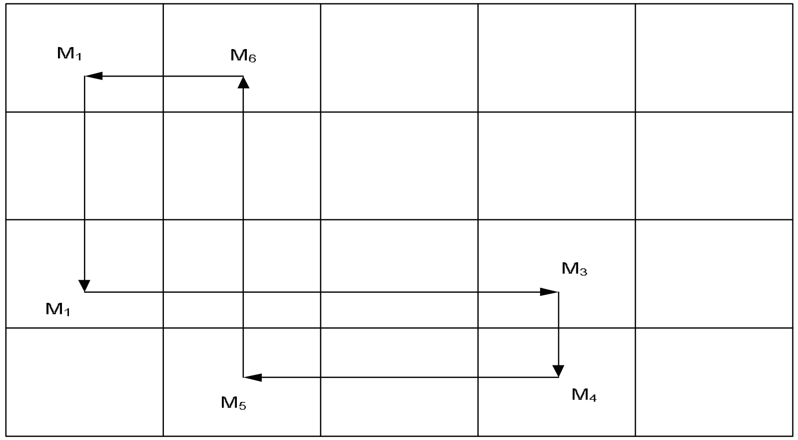


Рис. 1.В.Цикл с самопересечениями

Заметим, что точка самопересечения никак не может являться вершиной ломаной, потому что каждая вершина должна быть соединена звеньями только с двумя другими вершинами.

Свойства циклов

Первое свойство. Число клеток в любом цикле четно.

3.3 Распределительный метод

Распределительный метод последовательного улучшения базисных планов является серией сдвигов по циклам.

Определение 3. Сдвигом по означенному циклу на величину r называется прибавление к числу, находящемуся в каждой клетки матрицы, числа r, умноженного на -1, если клетка в цикле означена положительно, и на 1 в случае, когда она положительна.

Четвертое свойство. Сдвиг по любому означенному циклу в матрице переводит любое решение системы уравнений ограничений в другое решение этой системы.

Доказательство

Поскольку по свойству циклов в каждой строке (или столбце) таблицы имеется равное число положительных и отрицательных клеток, то при сдвиге сумма элементов в строке (столбце) не изменится. Поэтому каждое из уравнений ограничений останется в силе после сдвига.

Пятое свойство. В матрице не существует цикла, все вершины которого находятся в базисных клетках.

Доказательство

Для доказательства отметим, что при сдвиге по такому циклу свободные неизвестные не изменятся, а они однозначно определяют базисные неизвестные, которые были изменены в результате сдвига. Полученное противоречие доказывает свойство 5.

Определение 4. Циклом пересчета любой свободной клетки называется цикл с вершиной в этой клетке и в некоторых базисных клетках. При этом свободной клетке приписывают знак плюс.

Разъясним определение 4. Поскольку из любых n+m клеток может быть выбран цикл (свойство 2) , а цикл состоящий исключительно из базисных клеток не

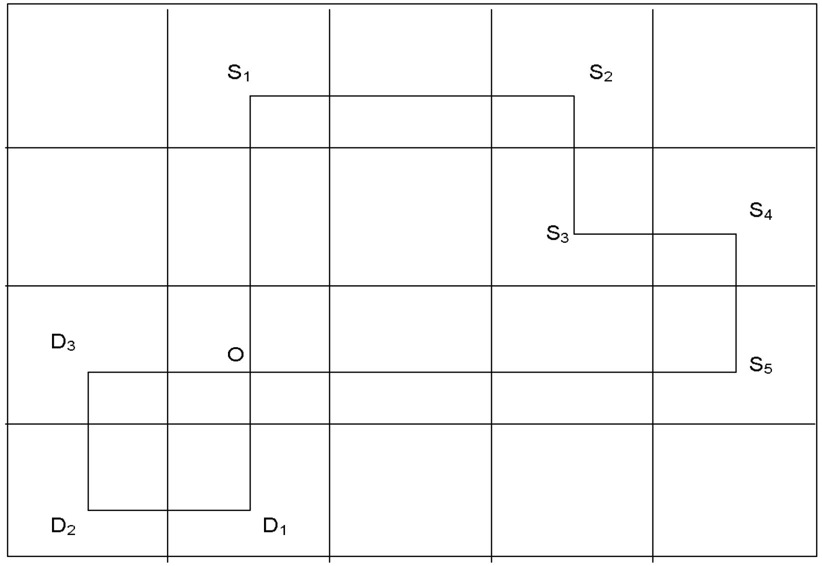


Рис. 3. Новый цикл, составленный из двух циклов

Второе свойство циклов пересчета. В каждой строке и в каждом столбце цикла пересчета некоторой свободной клетки имеется ровно по две клетки этого цикла.

Доказательство

Для определенности рассмотрим ситуации, в которых имеется более чем по две клетки в строке (для столбцов доказательство проводится аналогично). Пусть в некоторой строке имеются клетки цикла с номерами i и i+1, а также j и j+1 (нумерация дана по ходу в цикле). Заметим, что по третьему свойству циклов в строке имеется четное число клеток цикла и ровно трех клеток быть не может. Пусть i < j. Тогда может быть составлен новый цикл путем исключения из прежнего цикла клеток с номерами от i+1 до j-1. В силу первого свойства циклов пересчета эти циклы единственны, и полученное противоречие доказывает свойство 2.

Третье свойство циклов пересчета. Коэффициент, с которым любая свободная неизвестная входит в выражение, для любой базисной равен +1, если базисная является положительной в цикле пересчета указанной свободной клетки, и -1, если она является отрицательной в этом цикле, и 0, если не входит в цикл пересчета свободной клетки.

Доказательство

Пусть значения некоторого набора базисных неизвестных равны y_{ij}. Рассмотрим другое допустимое решение уравнений транспортной задачи, при котором все свободные неизвестные равны нулю, а неизвестная x_{pq} равна единице. При новых свободных базисные переменные будут иметь другие значения. В частности, переменная с теми же индексами i и j будет равна z_{ij}. В силу линейной зависимости базисных переменных $z_{ij} = y_{ij} + a * 1$, где a - интересующий нас коэффициент.

В транспортной таблице рассмотрим цикл пересчета для свободной клетки с неизвестной x_{pq}. Сделаем в этом цикле сдвиг на единицу. Получим по свойству 4 новое решение системы, в котором $z_{pq} = 1$, а все остальные свободные равны нулю. Базисное же значение переменной в клетке с индексами i и j будет, как сказано выше, равным z_{ij}. Поэтому базисные переменные, не вошедшие в цикл, не изменят своего значения, и для них $x_{ij}=y_{ij} + a * 1 = y_{ij}$, а следовательно a = 0.

$$x_{ij} = y_{ij} + a * 1 = y_{ij} + 1.$$

Откуда a = 1. Аналогично, для отрицательных вершин цикла пересчета получим, что a = -1.

Решение транспортной задачи линейного программирования распределительным методом

Алгоритм решения транспортной задачи распределительным методом представляет собой следующую последовательность действий:

существует, то указанный в определении цикл всегда найдется. Оказывается, что такой цикл единственный.

Свойства циклов пересчета

Не всякий произвольно выделенный в матрице цикл является циклом пересчета некоторой свободной клетки. Разберемся в специфике циклов пересчета.

Первое свойство циклов пересчета. Цикл пересчета любой свободной клетки единственен.

Доказательство

Пусть имеется по крайней мере два цикла и O - их общая свободная клетка, а O, D_1, …, D_k, O - первый и O, S_1, …, S_l, O - второй цикл. В качестве нового цикла возьмем D_1, D_2, …, D_k, S_1, S_2, …, S_l, если S_l и D_k лежат не в одной строке (или в одном столбце), и S_1, S_2, …, S_l, D_1, D_2, …, D_k, если S_l и D_1 не лежат в одной строке (или в одном столбце см. рис. 3). Заметим, что это всегда возможно, потому что D_1, D_k, S_1 и S_l являются соседними к клетке O. Если в полученном цикле имеются повторения клеток (это возможно, в случае непустого пересечения множеств { S_1, …, S_l} и { D_1, D_2, …, D_k}, то эти повторения могут быть отброшены, и будет получен цикл, целиком составленный из базисных клеток. Пятое свойство циклов отвергает такую возможность. Полученное противоречие доказывает верность первого свойства циклов пересчета.

Составленный цикл:

D_1, D_2, D_3, S_5, S_4, S_3, S_2, S_1.

1-ый шаг: методом наименьшей стоимости либо методом северо-западного угла находится опорный план транспортной задачи.

2-ой шаг: выбирается произвольная свободная клетка и находится соответствующий ее цикл пересчета. Он означивается, и находится алгебраическая сумма стоимостей по этому циклу.

3-ий шаг: если сумма стоимостей по циклу оказалась положительной, то переходим к следующей свободной клетке на шаге 2. Если суммы стоимостей по всем циклам свободных клеток оказались положительными, то оптимальный план считается найденным, и расчет заканчивается.

4-ый шаг: в цикле пересчета находится отрицательно означенная клетка с наименьшим значением величины перевозимого груза.

5-ый шаг: производится сдвиг по циклу на величину наименьшей величины груза. Переходим к шагу 2.

Отдельно остановимся на проблеме нахождения цикла пересчета свободной клетки. Для нахождения цикла следует вычеркнуть все строки и столбцы матрицы, в которых есть по одной базисной клетке. Затем следует найти ближайшую к свободной в ее столбце базисную клетку, затем ближайшую к последней в ее строке и так далее. Это построение цикла повторяет процесс, описанный при доказательстве второго свойства циклов.

При нахождении суммарной стоимости по циклу цены из его положительных клеток берутся со знаком плюс, а цены из отрицательных клеток – со знаком минус.

Таблица 2.Д

ПО/ПН	$ПН_1$	$ПН_2$	$ПН_4$	Запасы на ПО
$ПО_1$	^{10}	30 ^{2}	20 ^{1}	(50), 0
$ПО_2$	50 ^{3}	40 ^{5}	^{7}	90, (40), (0)
$ПО_3$	^{8}	^{4}	40 ^{2}	40, (30), (0)
Потребности ПН	50, (0), (0)	70, (40), (0)	60, (10), (0)	180

3.4 Связь распределительного метода с симплекс алгоритмом

Представим себе симплекс алгоритм решения транспортной задачи. Согласно третьему свойству цикла пересчета, в вертикальный столбец симплекс таблицы, отвечающий некоторой свободной переменной, не будут входить свободные переменные, не входящие в цикл пересчета. При этом будут входить со знаком «+» те, которые соответствуют положительным вершинам цикла, и со знаком «–» те переменные, которым соответствуют его отрицательные вершины. Сумма же c_{ij} по циклу как раз равна коэффициенту, с которым входит соответствующая неизвестная в минимизируемую функцию задачи линейного программирования. Сдвиг по циклу совпадает с переходом от одного базиса к другому в симплексе алгоритме. Поэтому можно сделать вывод о том, что распределительный метод является конкретизацией симплекс алгоритма для транспортной задачи.

3.5 Метод потенциалов

Одним из недостатков распределительного метода является необходимость на каждом его шаге подсчитывать алгебраическую сумму стоимостей по свободным клеткам до тех пор, пока не найдется такая свободная клетка, в которой эта сумма не окажется отрицательной. Всего в матрице перевозок имеется nm клеток и объем указанных вычислений может оказаться значительным. Помимо указанного обстоятельства еще более существенно, что нахождение цикла пересчета для свободной клетки представляет собой трудоемкую задачу при больших размерах матрицы. Чтобы преодолеть эти неудобства и сократить число построений циклов до одного при каждом опорном плане, можно обратиться к методу потенциалов.

Определение 5. Пусть в матрице перевозок отмечены n+m-1 базисные клетки. Каждой строке с номером i матрицы перевозок сопоставим число u_i, а каждому столбцу с номером j этой матрицы сопоставим число v_j, такие, что для всех базисных клеток выполняется следующее соотношение:

$$u_i + v_j = c_{ij} \tag{2}$$

где c_{ij} стоимость перевозки из i-го ПО в j-ый ПН.

Докажем, что система из n+m-1 уравнений (1) с n+m неизвестными u_i и v_j имеет решение.

Теорема 1. Система уравнений (1) имеет ранг n+m-1.

Доказательство

Покажем, что система (1) имеет матрицу, транспонированную к матрице системы ограничений транспортной задачи (1). Каждому уравнению $u_i + v_j = c_{ij}$ соответствует неизвестное x_{ij} исходной системы. В системе (1) каждое неизвестное входит ровно в два уравнения, в то время как в системе (2) в каждое уравнение входит два неизвестных. В системе (1) имеется n+m уравнений, а в

Блок-схема алгоритма распределительного метода решения транспортной задачи

В примере таблицы 1.Д циклы пересчета всех свободных клеток положительны и сдвиги по ним нецелесообразны. Поэтому найденное в этой таблице базисное решение является оптимальным.

В примере таблицы 2.В цикл клетки (1, 2) (а это клетки (1, 2), (1, 3) , (3, 3), (3, 2)) имеет отрицательную сумму: 2 - 1 + 2 - 4 = -1. Произведем в нем сдвиг на 10. Получим новую таблицу 2.Г, в которой уже нет свободных клеток с отрицательными суммами по циклу. Имеющийся в ней план оптимален.

системе (2) – n+m неизвестных. Таким образом, видно, что если нумеровать неизвестные системы (2) в соответствии с нумерацией уравнений системы (1) , то ее матрица получится транспонированной к матрице системы (2) . Так как ранг системы (1) равен n+m-1, то ранг системы (2) также равен этому числу.

Следовательно, система (2) имеет однопараметрическое семейство решений. Для получения какого-нибудь одного решения можно задаться любым из u_i и v_j. Это всегда можно осуществить, потому что при подстановке в уравнение системы u_i сразу из него находится v_j, которое может быть подставлено в другие уравнения. Нетрудно догадаться, что этот процесс подстановок эквивалентен построению цикла в матрице. Если в дальнейшем найденную на некотором этапе неизвестную уже некуда подставлять, то это означает, что такая строка исходной матрицы имеет единственную базисную клетку. При каждой подстановке неизвестного в следующее уравнение происходит переход от одной базисной клетки к другой. Этот процесс не обрывается и приведет к нахождению всех неизвестных u_i и v_j, которые называются потенциалами строк и столбцов матрицы.

Замечательно то, что с помощью потенциалов удобно находить алгебраическую сумму по циклу пересчета **любой** свободной клетки матрицы.

Теорема 2. Алгебраическая сумма стоимостей по циклу каждой свободной клетки равна

$c_{ij} – u_i - v_j$,

где c_{ij} - цена перевозки, а u_i и v_j - потенциалы клетки.

Доказательство

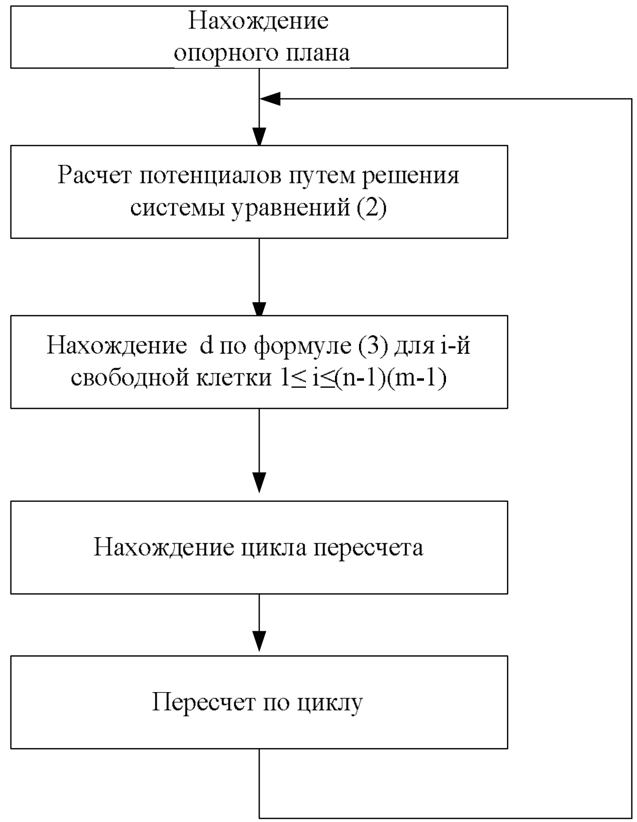
Пусть свободная клетка стоит в i -ом столбце и j-ой строке.

Тогда, алгебраическая сумма цен по циклу Д имеет следующий вид:

другую и т.д. до тех пор, пока не вернемся в исходную свободную клетку.

Алгоритм даст цикл, потому что доказано, что в каждой его строке и и столбце имеется ровно две клетки и не происходит неоднозначного выбора маршрута. Все же одиночные в строках и столбцах базисные клетки оказались вычеркнутыми на первых этапах алгоритма.

Блок-схема метода потенциалов



Пример 3. Решить следующую задачу методом потенциалов.

Таблица 3.А

ПО/ПН	$ПН_1$	$ПН_2$	$ПН_3$	$ПН_4$	$ПН_5$	Запасы на ПО
$ПО_1$	2	6	2	3	8	80
$ПО_2$	3	4	1	5	2	100
$ПО_3$	6	3	7	6	7	90
Потребности ПН	20	60	50	100	40	270

Решение

Найдем опорный план методом наименьшей стоимости.

Таблица 3.Б

ПО/ПН	$ПН_1$	$ПН_2$	$ПН_3$	$ПН_4$	$ПН_5$	Запасы на ПО
$ПО_1$	2 20	6	2	3 60	8	80, (60), (0)
$ПО_2$	3	4	1 50	5 10	2 40	100, (50), (10)
$ПО_3$	6	3 60	7	6 30	7	90, (30), (0)
Потребности ПН	20, (0)	60, (0)	50, (0)	100, (40)	40, (0)	270

Найдем стоимость перевозок при этом плане:

F=20*2+60*3+50*1+10*5+40*2+60*3+30*6= 760.

Составим уравнения для нахождения потенциалов, записывая формулы (2) последовательно, для каждой базисной клетки.

$$d = c_{ij} - c_{j1} + \dots - c_{ki}. \qquad (3)$$

Начиная со второго слагаемого все цены относятся к базисным клеткам, которые равны сумме своих потенциалов. Поэтому, для d получим следующее выражение:

$$d = c_{ij} - (u_i + v_1) + (u_i + v_l) + \dots - (u_k + v_j) = \\ = c_{ij} - u_i \\ - v_j. \qquad (4)$$

При получении равенства (4) произошло взаимное сокращение всех потенциалов базисных клеток.

Если d > 0, то следует находить цикл пересчета и сделать сдвиг по нему, как и в распределительном методе.

Таким образом, для расчета алгебраической суммы цен по циклу пересчета свободной клетки можно пользоваться формулой (4), а не подсчитывать всякий раз эту сумму непосредственно по циклу, как это делается в распределительном методе.

3.6 Алгоритм построения цикла пересчета

Для нахождения цикла пересчета произвольной свободной клетки

можно действовать по следующему алгоритму:

1-ый шаг. Вычеркнуть из матрицы все строки, в каждой из которых находится ровно одна базисная клетка.

2-ый шаг. Вычеркнуть из матрицы все столбцы, в каждом из которых находится ровно одна базисная клетка.

3-й шаг. Перейти к первому шагу, проверяя существование новых вычеркиваемых строк. Если их нет, то следует перейти к 4-ому шагу алгоритма.

4-й шаг. Начиная движение из свободной клетки, найти в ее строке базисную клетку, затем, в столбце последней – следующую базисную, в строке последней -

$u_1 + v_1 = 2$ - для первой базисной клетки (1, 1);
$u_1 + v_4 = 3$ - для второй базисной клетки (1, 4);
$u_2 + v_3 = 1$ - для третьей базисной клетки (2, 3);
$u_2 + v_5 = 2$ - для четвертой базисной клетки (2, 5);
$u_3 + v_2 = 3$ - для пятой базисной клетки (3, 2);
$u_2 + v_4 = 5$ - для шестой базисной клетки (3, 4);
$u_3 + v_4 = 6$ - для седьмой базисной клетки (2, 4).

Задавшись $v_5 = 0$, найдем из четвертого уравнения $u_2 = 2$, подставим его в седьмое и третье уравнения. Найдем $v_4 = 3$ и $v_3 = -1$. Подставим v_4 в шестое и второе уравнения и найдем $u_3 = 3$ и $u_1 = 0$.

Из первого уравнения найдем $v_1 = 2$, а из пятого уравнения $v_2 = 0$. Подпишем потенциалы ПО и ПН. Начнем подсчитывать суммы по циклам для свободных клеток, начиная с первой строки. По формуле (4) получим, что для клетки (1, 2)

$$d=6-2-0>0,$$

для клетки (1, 3) $d=2-(-1)-0>0$, для клетки (1, 5)

$$d=8-0-0>0,$$

в то время как для клетки (2, 1) получим:

$$d=3-2-2<0.$$

Следовательно, для этой клетки можно искать цикл, по которому целесообразно сделать сдвиг. Нетрудно убедиться, что этот цикл является последовательностью следующих клеток: (2, 1) , (2, 3) , (1,3) и (1, 1). Минимальным положительным элементом цикла является 10. Произведем сдвиг на эту величину и перейдем к таблице 3.В. Для ее базисного решения снова составим систему уравнений для потенциалов.

$$d=4-(2+(-1))>0,$$

для клетки (2, 4) $d=5-(2+2)>0$, для клетки (3, 1)

$$d=6-(1+4)>0,$$

для клетки (3, 3)

$$d=7-(-1+4)>0$$

и для клетки (4, 5)

$$d=7-(4+0)>0.$$

Все разности оказались положительными. Следовательно, найден оптимальный план.

Таблица 3.Г

ПО/ПН	$v_1=1$	$v_2=-1$	$v_3=-1$	$v_4=2$	$v_5=0$	Запасы на ПО
$u_1=0$	2 10	6	2	3 70	8	80, (60), (0)
$u_2=2$	3 10	4	1 50	5	2 40	100, (50), (10)
$u_3=4$	6	3 60	7	6 30	7	90, (30), (0)
Потребности ПН	20, (0)	60, (0)	50, (0)	100, (40)	40, (0)	270

Стоимость перевозок при этом плане
F = 10*2 +70*3 +10*3+50*1 + 40*2 + 60*3 ++30*6 = 680.

3.7. Замечание о целочисленности решения задачи

Пусть в исходной транспортной задачи все запасы a_i и потребности b_j являются целыми числами. Тогда, решая эту задачу распределительным способом на первом этапе - нахождения базисного плана, будут найдены целыми числами базисные переменные (алгоритмом северо-западного угла). При дальнейших сдвигах по циклам всегда будут получаться целыми новые базисные решения, потому что к прежним базисным значением будут прибавляться, либо из них вычитаться, целые числа. Следовательно, и оптимальное решение – набор базисных неизвестных, будет целочисленным.

3.8. Особенности решения вырожденных транспортных задач

Базисный план называется вырожденным, если в него входит хотя бы одно нулевое базисное переменное. Для транспортных задач вырожденность можно обнаружить заранее по транспортной таблице.

Теорема 3. Транспортная задача не имеет вырожденного базисного плана тогда и только тогда, когда любая пара его клеток может быть соединена последовательностью ненулевых клеток этого плана. Причем, каждые две соседние клетки (как и в цикле) находятся либо в одной строке, либо в одном столбце, а каждые три последовательные клетки не лежат ни в единой строке, ни в едином столбце.

Замечание 1. В последнем случае говорят, что любая пара пунктов плана может быть соединена маршрутом из его основных коммуникаций.

Доказательство

Допустим, что существует вырожденный базисный план. Заметим, что и в строке и в столбце нулевой его клетки имеются клетки этого плана, потому что в противоположном случае запасы и потребности по соответствующей строчке и столбце ненулевые. Возьмем один пункт плана в столбце, а другой - в строке нулевой точки. Если их можно соединить маршрутом из клеток, в которые не входит нулевая коммуникация, то дополняя этот маршрут нулевой клеткой, получим замкнутой цикл из

Таблица 3.В

ПО/ПН	v_1=2	v_2=0	v_3=-1	v_4=3	v_5=0	Запасы на ПО
u_1=0	^{2} 20	^{6}	^{2}	^{3} 60	^{8}	80, (60), (0)
u_2=2	^{3}	^{4}	^{1} 50	^{5} 10	^{2} 40	100, (50), (10)
u_3=3	^{6}	^{3} 60	^{7}	^{6} 30	^{7}	90, (30), (0)
Потребности ПН	20, (0)	60, (0)	50, (0)	100, (40)	40, (0)	270

Эти уравнения примут следующий вид:

$u_1 + v_1 = 2$ - для первой базисной клетки (1, 1);

$u_1 + v_4 = 3$ - для второй базисной клетки (1, 4);

$u_2 + v_3 = 1$ - для третьей базисной клетки (2, 3);

$u_2 + v_5 = 2$ - для четвертой базисной клетки (2, 5);

$u_3 + v_2 = 3$ - для пятой базисной клетки (3, 2);

$u_2 + v_4 = 5$ - для шестой базисной клетки (3, 4);

$u_3 + v_4 = 6$ - для седьмой базисной клетки (2, 4).

Зададимся $v_5 = 0$ и решим последнюю систему уравнений. Получим: u_1=1; u_2=2; u_3=4; v_1=1; v_2=-1; v_3=-1; v_4=2; v_5=0. Занесем эти числа в таблицу и начнем подсчитывать d по формуле (4) для каждой свободной клетки таблицы 3.Г. Для клетки (1, 2) получим что d=6-(-1+1)>0, для клетки (1, 3)

$$d=2-(-1+1)>0,$$

для клетки (1, 5)

$$d=8-(-1+0)>0,$$

для клетки (2, 2)

базисных клеток, что невозможно по пятому свойству циклов. Обратно, пусть базисный план не вырожден. Пусть нельзя соединить маршрутом клетки (i, j) и (k, l). Следовательно, клетка (i, l) является свободной коммуникацией. Для нее существует цикл, состоящий из базисных клеток. Возьмем две клетки из этого цикла (И, М) и (Л, П) и составим маршрут (i, j), (i, m), … по циклу (l, p) , (k, j). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 3.

Определение 6. Транспортная задача называется невырожденной, если не вырожден любой ее транспортный план.

Теорема 4. Необходимым и достаточным условием отсутствия вырожденности транспортной задачи является невозможность найти какую-либо часть пунктов отправления, суммарные запасы которых равнялись бы суммарным потребностям некоторой части пунктов назначения.

Доказательство

Если суммарные запасы одной части ПО равны суммарным потребностям части ПН, то исходная транспортная задача разбивается на две. И два их базисных плана не будут связаны один с другим никаким маршрутом. Тогда, по теореме 1, общая транспортная задача будет вырожденной. Если же задача вырождена, тогда по теореме 1 некоторые ее базисные клетки не связаны между собой маршрутом. Отправляясь из некоторого ПО, можно составить маршрут, состоящий из неполного числа базисных клеток. При этом в базисном плане останутся не связанные с маршрутом клетки. (В противоположном случае – любые клетки можно было бы связать маршрутом). Но наличие несвязанных маршрутов разбивает базисный план на части.

4. Другие виды транспортной задачи

4.1. Несбалансированная транспортная задача

Если в транспортной задаче суммарный запас продукта на пунктах отправления превышает суммарные потребности, то при любом распределении продукта по пунктам назначения останется некоторое количество нераспределенного продукта. Если же в транспортной задаче другого вида, наоборот, суммарные потребности превышают общие запасы, то при любом плане перевозок найдутся пункты, потребности которых будут не полностью обеспечены. Оба указанных типа транспортных задач называются несбалансированными или открытыми, потому что суммы продукции на пунктах отправления и назначения не равны между собой.

Любая несбалансированная транспортная задача легко сводится к сбалансированной путем введения искусственных пунктов отправления и назначения. Если на пунктах отправления меньше продукции, чем на пунктах назначения, то вводится дополнительный пункт отправления, на котором имеется столько продукта, сколько недостает для получения баланса. Введенный пункт отправления соединяется со всеми пунктами назначения коммуникациями с ценами на единицу перевозимого груза большими, чем сумма всех цен перевозок. Поскольку этот искусственный пункт отправления не может конкурировать с остальными, то решаемая сбалансированная транспортная задача даст решение и для несбалансированной задачи. Если же суммарные потребности меньше запасов, то вводится дополнительный пункт назначения и задача сводится к сбалансированной задаче.

Рассмотрим пример 4, заданный таблицей 4.А. В нем суммарные потребности равны 210, а запасы 240

.

Таблица 4.А

ПО/ПН	ПО$_1$	ПО$_2$	ПО$_3$	Потребности
ПН$_1$	2	7	5	120
ПН$_2$	6	3	1	90
Запасы	100	80	60	

Для сбалансирования задачи введем искусственный третий пункт назначения, а цены перевозок в него назначим большими, равными сумме цен во всех других пунктах (в данном случае это 25).

Получим таблицу 4.Б.

Таблица 4.Б

ПО/ПН	ПО$_1$	ПО$_2$	ПО$_3$	Потребности
ПН$_1$	2	7	5	120
ПН$_2$	6	3	1	90
ПН$_3$	25	25	25	30
Запасы	100	80	60	240

Найдем опорный план методом наименьшей стоимости и получим таблицу 4.В. Применив распределительный метод, убедимся, что найденный план счастливо оказался оптимальным. Этот план заключается в перевозках во второй пункт назначения 100 единиц продукции из первого пункта отправления и 20 единиц продукции из второго, второй пункт назначения получит 30 единиц из второго пункта отправления и 60 единиц продукции из третьего пункта отправления. На складе второго пункта отправления останется 30 единиц невостребованной продукции.

При наличии вырожденности возможно зацикливание алгоритма распределительного метода, потому что на каждом его этапе сдвиг по вырожденному циклу не приносит уменьшения транспортных издержек.

3.9 Способы преодоления вырожденности

Рассмотрим сначала случай, когда все запасы в ПО и потребности ПН целочисленные. Видоизменим транспортную задачу, добавив к каждому запасу a_i положительное число $\varepsilon < 1/n$ и для компенсации добавив к b_m числа $n\varepsilon$. Тогда, никакая сумма, из менее чем n запасов a_i, не будет равняться сумме каких-либо потребностей b_k. Поэтому, по теореме 4, полученная «возмущенная» транспортная задача будет невырожденной. Однако, ее оптимальный план не будет отличаться от оптимального плана исходной задачи, потому что после последнего шага будет выполнено не только условие оптимальности плана в возмущенной, но и в исходной задаче.

Заметим, что в случае рациональных, но не целочисленных параметров транспортной задачи ее можно свести к целочисленной, если умножить все a_i и b_i на их общее кратное их знаменателей.

Существует другой вариант описанного способа, когда значение «ε» не конкретизируется, а считается достаточно малым. С этим значением, как с параметром осуществляются все шаги по поиску оптимального плана перевозок.

В практических расчетах вырожденность встречается достаточно часто, но явление зацикливания бывает чрезвычайно редко. Поэтому, редко составляют компьютерные программы, специально предназначенные для борьбы с зацикливанием.

Таблица 4.В

ПО/ПН	ПО$_1$	ПО$_2$	ПО$_3$	Потребности
ПН$_1$	100 ^{2}	20 ^{7}	^{5}	120, (20)
ПН$_2$	^{6}	30 ^{3}	60 ^{1}	90, (30)
ПН$_3$	^{25}	30 ^{25}	^{25}	30
Запасы	100	80, (50)	60	240

Возможен вариант несбалансированной транспортной задачи, в которой требуется полностью обеспечить некоторые из пунктов назначения, либо (и) полностью разгрузить некоторые пункты отправления (с особыми условиями). При решении такой задачи следует сначала ее сбалансировать введением дополнительных пунктов. Если сумма всех запасов больше суммы потребностей, то может возникнуть проблемы только с требованием к разгрузке некоторых пунктов отправления, а все пункты назначения при любом плане перевозок будут обеспечены. Аналогично, при превышении суммы потребностей над суммой запасов, не следует беспокоиться об обязательности полной разгрузки пунктов отправления. Для решения транспортных задач этого типа следует на этапе нахождения опорного плана добиться выполнения указанных ограничений (обязательности разгрузки, либо обеспечения некоторых пунктов). Пусть, для определенности, сумма запасов превышает сумму потребностей и введен в рассмотрение искусственный балансировочный пункт назначения. Применим видоизмененный вариант северо-западного угла для построения опорного плана, специально приспособленного для этой задачи. Выберем первый из тех пунктов отправления, который должен быть обязательно разгружен. Если запас продукции в нем уступает потребностям на первом пункте назначения, то отправим туда весь запас. Если же имеет место обратная ситуация, то удовлетворив потребность на первом пункте назначения,

Таблица 5.Б

ПО/ПН	ПО$_1$	ПО$_2$	ПО$_3$	Потребности
ПН$_1$	50 ^{2}	70 ^{7}	^{5}	120, (50)
ПН$_2$	100 ^{6}	^{4}	100 ^{1}	200, (100)
ПН$_3$	^{25}	^{25}	80 ^{25}	80
Запасы	150, (100)	70	180	400

*Таблица 5.В**

ПО/ПН	ПО$_1$	ПО$_2$	ПО$_3$	Потребности
ПН$_1$	**120** $^{\mathbf{2}}$	$^{\mathbf{7}}$	$^{\mathbf{5}}$	**120, (50)**
ПН$_2$	**30** $^{\mathbf{6}}$	**70** $^{\mathbf{4}}$	**100** $^{\mathbf{1}}$	**200, (100)**
ПН$_3$	$^{\mathbf{25}}$	$^{\mathbf{25}}$	**80** $^{\mathbf{25}}$	**80**
Запасы	150, (100)	70	180	400

Рассмотрев таблицу 5.В, найдем, что свободная клетка (1, 3) имеет цикл пересчета (1, 3), (2, 3), (2, 2), (1, 2), алгебраическая сумма, по которому положительна. Поэтому, эта клетка не нуждается в сдвиге. Свободная клетка (3, 1) имеет отрицательную сумму по циклу (3, 1), (2, 1), (2, 3), (3, 3). Сделав сдвиг на 50, получим таблицу 5.Г. В ней свободные клетки (1, 3) и (2, 1) имеют положительные суммы по соответствующим циклам. Клетка (3, 2) имеет отрицательную сумму, но находится на отмеченном звездочкой запрещенном столбце и сдвиг по ее циклу запрещен в силу того, что ПО$_2$ должен быть обязательно разгружен. Поэтому, таблица 5.Г представляет оптимальный план перевозок для поставленной задачи с обязательной разгрузкой ПО$_2$.

Таблица 5.Г

ПО/ПН	$ПО_1$	$ПО_2$	$ПО_3$	Потребности
$ПН_1$	120 ^{2}	^{7}	^{5}	120, (50)
$ПН_2$	^{6}	70 ^{4}	130 ^{1}	200, (100)
$ПН_3$	30 ^{25}	^{25}	50 ^{25}	80
Запасы	150, (100)	70	180	400

4.2. Транспортная задача с запрещенными коммуникациями

Часто встречается такая ситуация, когда в транспортной сети некоторые пункты отправления не связаны с некоторыми пунктами назначения. Легко видно, что при наличии опорного плана для транспортной задачи такого вида, можно применять метод потенциалов с тем видоизменением, что не рассматриваются в качестве свободных клетки транспортной таблицы, отвечающие несуществующей коммуникации. Эти клетки называются запрещенными. Для указанного вида задач, основным отличительным моментом является этап нахождения опорного плана. Для классической транспортной задачи опорный план существует, в то время как для задач с «запрещенными» клетками его может и не быть. Для того, чтобы свести задачу с запрещенными коммуникациями к классической транспортной задаче, можно приписать запрещенным коммуникациям заведомо большие цены перевозок. Если транспортная задача целочисленная, то в качестве этих больших величин могут выступать числа, большие суммы цен всех незапрещенных коммуникаций, умноженной на сумму всех потребностей и деленной на наименьший общий делитель величин всех запасов и потребностей. Очевидно, что любой план, не состоящий из незапрещенных клеток, будет иметь суммарную стоимость,

перейдем ко второму и т.д., пока весь запас первого разгружаемого пункта не будет израсходован Затем, перейдем ко второму обязательно опустошаемому пункту отправления и т.д. Если на каком-либо шаге исчерпаются возможности всех исходных (без введенного) пунктов назначения, то задача не имеет решения. В противоположном случае будет найден допустимый базисный план. На следующем этапе решения задачи можно применять метод потенциалов. При этом не следует выбирать для пересчета свободные клетки, одновременно соответствующие обязательно разгружаемым пунктам отправления и введенному пункту назначения. Пример такой задачи представлен в таблице 5.А. Звездочкой отмечено, что необходимо полностью разгрузить второй пункт отправления.

Таблица 5.А

ПО/ПН	$ПО_1$	$(*)ПО_2$	$ПО_3$	Потребности
$ПН_1$	^{2}	^{7}	^{5}	120
$ПН_2$	^{6}	^{3}	^{1}	200
Запасы	150	70	180	

Введем дополнительный третий пункт назначения и получим таблицу 5.Б, уже сбалансированной задачи. Начиная с клетки (1, 2) и удовлетворив обязательное требование к разгрузке ПО2, найдем опорный план в задаче. Применим распределительный метод для клетки (2, 2). Ее цикл пересчета: (2, 2), (2, 1), (1, 1), (1, 2). Сделаем сдвиг на 50 по этому циклу и получим таблицу 5.В.

заведомо меньшую суммарной стоимости любого плана, включающего в себя хотя бы одну запрещенную коммуникацию, потому что ее величина не меньше, наибольшего общего делителя всех запасов и потребностей (любая сумма целых чисел делится на их общий делитель). Рассмотрим пример 6, представленный в таблице 6.А. Дважды обведены запрещенные клетки.

Таблица 6.А

ПО/ПН	$ПО_1$	$ПО_2$	$ПО_3$	$ПО_4$	Потребности
$ПН_1$	2	7	5	8	100
$ПН_2$	3	5	1	$\boxed{}$	200
$ПН_3$	$\boxed{}$	2	5	9	80
Запасы	150	50	180		380

Согласно изложенному выше алгоритму, перейдем к эквивалентной, классической транспортной задачи. Наименьшим общим делителем чисел 150, 50, 180, 100, 200 и 80 является 10. Суммой всех цен перевозок служит число 49. Возьмем с запасом 50. Поэтому на местах запрещенных клеток таблицы 6.А поставим число 380*50/10=1900 и получим таблицу 6.Б. Методом наименьшей стоимости найдем опорный план. Базисные клетки плана попали в запрещенные.

начального плана этим методом решается специально построенная классическая транспортная задача тех же размерностей, что и исходная. При этом коммуникации, соответствующие запрещенным клеткам имеют цену 1, а остальные 0, запасы равны числу запрещенных клеток в их столбцах, а потребности – числу запрещенных клеток в их строках. Если оптимальное решение такой задачи даст отличное от нуля значение транспортных затрат, то в исходной задаче нет допустимых решений. Если же сумма транспортных расходов равна нулю, то могут возникнуть два следующих варианта. В первом варианте найденное базисное решение не содержит запрещенных клеток и может быть использовано для решения задачи методом потенциалов. Во втором варианте в базисное решение входят некоторые запрещенные клетки. Разумеется, им соответствуют нулевые значения переменных. Чтобы перейти к базисному решению, свободному от запрещенных клеток следует продолжить оптимизацию методом потенциалов. При этом функция цели (ее называют формой недопустимости) после каждого шага алгоритма будет оставаться равной нулю, а число запрещенных базисных клеток убывать вплоть до построения допустимого базисного решения, вовсе их не содержащего.

Задачи с предписанным объемом перевозок по некоторым коммуникациям.

В некоторых случаях предписан определенный объем перевозок по некоторым указанным коммуникациям. Вычитая стоимость этих перевозок из соответствующих им запасов на ПО и потребностей на ПН, эта задача сводится к задаче с запрещенными перевозками.

4.3 Многопродуктовая транспортная задача

4.3.1 Постановка задачи

Возможно ситуация, когда на складах есть различные виды продукции, причем, для некоторых потребителей эти продукты взаимозаменяемы, а для других потребителей небезразлично, который продукт они будут получать. Например, частично взаимно заменяемыми могут выступать такие продукты, как уголь из различных разрезов, нефть из различных месторождений, горный и речной песок.

4.3.2 Сведение многопродуктовой транспортной задачи к однопродуктовой задаче

Можно представить себе, что пункт отправления, содержащий несколько видов продукции, подразделен на такое же число частей. При этом, для потребителей, которым не нужны некоторые виды продуктов, коммуникации с соответствующими подпунктами запрещаются. Таким образом, многопродуктовая задача сводится к однопродуктовой с запрещенными клетками.

Пример 7. Пусть имеются два пункта отправления, на каждом из которых имеется
продукция двух видов A и B.

Причем на ПО$_1$ имеется 30 единиц продукции A и 50 единиц продукции B, в то время как на ПО$_2$ находится 20 единиц продукции A и 75 единиц продукции B. Второй пункт назначения нуждается в 20 единицах продукции A и в 55 единицах продукта B, то время как третий пункт назначения не нуждается в продукции A и ему требуется 40 единиц продукции B. Первому же пункту безразлично, какую продукцию получать и его общие потребности равны 60 единицам.

Таблица 6.Б

ПО/ПН	ПО$_1$	ПО$_2$	ПО$_3$	ПО$_4$	Потребности
ПН$_1$	100 ^{2}	^{7}	^{6}	^{8}	100
ПН$_2$	20 ^{3}	^{4}	^{1}	^{1900}	200, (40), (20)
ПН$_3$	30 ^{1900}	^{2}	^{5}	^{9}	80, (30)
Запасы	150, (50)	50	160	20	380

Решая задачу распределительным методом, произведем сдвиг по циклу свободной клетки (2, 2). Получим таблицу 6.В.

Таблица 6.В

ПО/ПН	ПО$_1$	ПО$_2$	ПО$_3$	ПО$_4$	Потребности
ПН$_1$	100 ^{2}	^{7}	^{6}	^{8}	100
ПН$_2$	50 ^{3}	30 ^{4}	160 ^{1}	20 ^{1900}	200, (40), (20)
ПН$_3$	^{1900}	20 ^{2}	^{5}	^{9}	80, (30)
Запасы	150, (50)	50	160	20	380

Произведем сдвиг по циклу свободной клетки (1, 4). Получим таблицу 6.Г, которая, как нетрудно проверить, дает оптимальный план.

Таблица 6.Г

ПО/ПН	ПО$_1$	ПО$_2$	ПО$_3$	ПО$_4$	Потребности
ПН$_1$	80 ^{2}	^{7}	^{6}	20 ^{8}	100
ПН$_2$	70 ^{3}	30 ^{4}	160 ^{1}	^{1900}	200, (40), (20)
ПН$_3$	^{1900}	20 ^{2}	^{5}	^{9}	80, (30)
Запасы	150, (50)	50	160	20	380

Существует другой способ решения задачи с запрещенными коммуникациями [A1]. Для поиска

Таблица 7.А

ПО/ПН	$ПО_1А$	$ПО_1В$	$ПО_2А$	$ПО_2В$	Потребности
$ПН_1$	2	7	3	9	60
$ПН_2$	3		7		20
$ПН_3$		3		7	55
$ПН_4$		2		5	40
Запасы	30	50	20	75	175

Мысленно разобьем ПО1 на подпункты ПО1А и ПО1В, ПО2 на ПО2А и ПО2В, соответственно продукциям типов А и В. ПН2 разобьем на два пункта, соответственно его потребностям в продукциях вида А и В.

В таблице 7.А собрана вся информация о поставленной задаче, а сама задача сведена к задаче с запрещенными клетками, выделенными прямоугольниками. Решим эту задачу с помощью метода, изложенного в предыдущем параграфе 4.2.

В таблице 7.Б предложен опорный план для задачи с запрещенными клетками. Он не является оптимальным планом, потому что для клетки (4, 4) целесообразно осуществить сдвиг на 40 единиц по циклу, состоящему еще и из клеток (4, 2), (3, 2), (3, 4).

4.4. Задача с ограничениями на пропускные способности

Постановка задачи

При решении реальных проблем (например, при оптимизации потоков передачи информации в сетях ЭВМ, либо грузопотоков на железнодорожном транспорте) невозможно не учитывать ограниченную пропускную способность некоторых коммуникаций. Еще одним видимым глазом результатом подобной ситуации является «пробка» на автомобильной дороге. При постановке транспортной задачи с учетом ограничений на пропускные способности коммуникаций помимо цен транспортировки по ним, а также запасов на пунктах отправления и потребностей на пунктах назначения, задаются и верхние границы на величины перевозок – d. Поэтому, модель транспортной задачи выглядит следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1,...,m; \ \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = b_i, i = 1,...,n;$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, 0 \le x_{ij} \le d_{ij}, i = 1,...,m; j = 1,...,n;$$

$$L = \sum_{j=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min . \qquad (5)$$

Алгоритм улучшения плана в транспортной задаче с ограничениями на пропускные способности.

По аналогии с тем, как задача с ограниченными сверху неизвестными решается в канонической задаче линейного программирования, здесь, в транспортной задаче необходимо сформулировать критерий оптимальности найденного базисного плана и переформулировать правила работы методом потенциалов и распределительным методом. Из общей теории для задач Линейного программирования с ограниченными сверху переменными можно получить следующий критерий оптимальности плана в транспортной задаче.

Критерий оптимальности плана: базисный план оптимален тогда и только тогда, когда для всех клеток матрицы с x_{ij}=0 выполняется условие $c_{jj} - u_i - v_j \geq 0$, для ненасыщенных клеток матрицы с $0<x_{ij}<d_{ij}$ верно неравенство $c_{ij} - u_i - v_j = 0$, а для насыщенных клеток этой матрицы с $x_{ij}=d_{ij}$ справедливо следующее неравенство

$$c_{ij} - u_i - v_j \leq 0. \qquad (6)$$

Начиная с некоторого опорного плана (метод его нахождения будет дан ниже), можно переходить к лучшему плану распределительным методом следующим образом: взять произвольную небазисную клетку, она может быть с x_{ij}=0, либо насыщенной с $x_{ij}=d_{ij}$; отыскать ее цикл как и при обычном распределительном методе; сделать сдвиг по циклу, не нарушая ограничений в его базисных клетках, причем, если x_{ij}=0, то клетка нагружается и x_{ij} увеличивается, а при x_{ij} клетка разгружается и x_{ij} уменьшается. Если сдвиг по циклу невозможен, то следует переходить к следующей клетке. Если все клетки перебраны и уже не осталось такой, для которой возможно сделать сдвиг по циклу, то найден оптимальный план.

Можно применять вместо распределительного метода его вариант – метод потенциалов. Его применение аналогично обычному методу потенциалов с теми же изменениями, что вносятся при модификации распределительного метода для задачи с ограниченными пропускными способностями.

Пример 8. Решить следующую задачу с ограниченными пропускными способностями:

Таблица 7Б

ПО/ПН	$ПО_1А$	$ПО_1В$	$ПО_2А$	$ПО_2В$	Потребности
$ПН_1$	^{2}	^{7}	^{3}	^{9}	60
$ПН_2$	^{3}		^{7}		20
$ПН_3$		^{3}		^{7}	55
$ПН_4$		^{2}		^{5}	40
Запасы	30	50	20	75	175

Оптимальное решение приведено в таблице 7.В.

Таблица 7.В

ПО/ПН	$ПО_1А$	$ПО_1В$	$ПО_2А$	$ПО_2В$	Потребности
$ПН_1$	10 ^{2}	^{7}	20 ^{3}	30 ^{9}	60
$ПН_2$	20 ^{3}		^{7}		20
$ПН_3$		50 ^{8}		5 ^{7}	55
$ПН_4$		^{2}		40 ^{5}	40
Запасы	30	50	20	75	170

Таблица 8.А

ПО/ПН	ПО$_1$	ПО$_2$	ПО$_3$	ПО$_4$	Потребности
ПН$_1$	$\overline{11}$ 8	$\overline{15}$ 6 8	$\overline{10}$ 12	$\overline{5}$ 7	8
ПН$_2$	$\overline{24}$ 7	$\overline{20}$ 8 8	$\overline{12}$ 10 11	$\overline{15}$ 3 15	34
ПН$_3$	$\overline{22}$ 5	$\overline{23}$ 4 4	$\overline{13}$ 9 $\overline{13}$	$\overline{15}$ 5	33
Запасы	30	20	24	15	75

Так же как и в обычной транспортной таблице, здесь петитом набраны c_{ij} - цены перевозок. Эти цифры стоят в правых верхних углах каждой клетки. В левых верхних углах, набранные петитом с верхней чертой, стоят ограничения на пропускные способности коммуникаций - d_{ij}. В нижней строке расположены запасы на пунктах отправления, а в правом столбце потребности пунктов назначения. Эти числа набраны обычным шрифтом. В таблице 8.А уже указан начальный план. В него, в частности, входит и насыщенная клетка (3, 3), что показано чертой над числом 13. Заметим, что насыщенная клетка (2, 4) с 15 не является базисной, поэтому нет черты на 15.

Найдем оптимальный план в этой задаче распределительным способом. Для этого рассмотрим цикл (2, 1), (2, 2), (3, 2), (3, 1) и произведем по нему сдвиг на 8. Получим таблицу 8.Б.

ПН$_3$	$\overline{22}$ 5 8	$\overline{23}$ 4 12	$\overline{13}$ 9 $\overline{13}$	$\overline{15}$ 5	33
Запасы	16	20	24	15	75

4.4.1.Проблема нахождения опорного плана

Напомним, что нами еще не рассмотрен способ нахождения начального базисного плана в задачах с ограниченными пропускными способностями. Если в задаче без ограничений такой план всегда существует, то здесь его может и не быть. Применив алгоритм улучшения плана с небольшим видоизменением, можно добиться построения опорного базисного плана, либо убедиться, что такого плана не существует. Для этого используется видоизмененный способ нахождения начального базисного плана из симплекс-метода, специально приспособленного для таблицы транспортной задачи.

Пример решения транспортной задачи с ограниченными пропускными способностями

Рассмотрим следующий пример:

Таблица 9.А

8	$\overline{15}$ 6	$\overline{10}$ 12 8	$\overline{5}$ 7	8
7 8	$\overline{20}$ 8	$\overline{12}$ 10 12	$\overline{15}$ 3 15	34
5 13	$\overline{23}$ 4 20	$\overline{13}$ 9 $\overline{13}$	$\overline{15}$ 5	33
16	20	24	15	75

В соответствии с методом наименьшей стоимости выбираем в таблице 9.А клетки с наименьшими ценами перевозок и записываем в них наибольшие возможные величины перевозок. Действуя, таким образом, сначала заполнили клетку (2, 4), удовлетворив условию по четвертому столбцу, затем, заполнили клетку (3, 2), (3, 1), (2, 1), (2, 3) и (1, 3). При этом, из-за ограничения в клетке (2, 3) не возник баланс по третьему столбцу и по второй строке. Величина небаланса равна 4.

Чтобы прийти к сбалансированной по строкам и столбцам таблице, введем две дополнительные клетки с номерами (0, 3) и (2, 0) , записав в них перевозки, равные 4. Получим следующую таблицу:

Таблица 10.Б

			4		
	$\overline{1}$	6	$\overline{10}$ 8 12	$\overline{5}$ 7	8
	$\overline{2}$	8	$\overline{12}$ $\overline{12}$ 10	$\overline{15}$ 15 3	34
	$\overline{22}$ 13 5	$\overline{23}$ 20 4	$\overline{13}$ 9	$\overline{15}$ 5	33
	16	20	24	15	75

Составим цикл относительно клетки (3, 3), в который войдет и клетка (2, 3). Осуществим сдвиг по этому циклу на 4. Получим таблицу 9.В.

Таблица 8.Б

ПО/ПН	ПО$_1$	ПО$_2$	ПО$_3$	ПО$_4$	Заявки
ПН$_1$	$\overline{11}$ 8	$\overline{1}$ 8 6	$\overline{1}$ 12	$\overline{5}$ 7	8
ПН$_2$	$\overline{24}$ 8 7	$\overline{2}$ 8	$\overline{1}$ 11 10	$\overline{1}$ 15 3	34
ПН$_3$	$\overline{22}$ 8 5	$\overline{2}$ 12 4	$\overline{1}$ $\overline{13}$ 9	$\overline{1}$ 5	33
Запасы	1 6	20	24	15	75

Этот шаг не отличается от шага в задаче без ограничений. Далее, перейдем к клетке (3, 3) и рассмотрим ее цикл: (3, 3), (3, 1), (2, 1), (2, 3). Сумма цен по этому циклу 9 - 5 + 7 - 10 = 2 > 0. Поэтому, целесообразно разгружать клетку (3, 3) на 1. Дальнейшей разгрузке препятствует ограничение в клетке (2, 3).Сделав сдвиг на 1, получим следующую таблицу с оптимальным планом:

Таблица 8.Б

ПО/П	ПО$_1$	ПО$_2$	ПО$_3$	ПО$_4$	Заявки
ПН$_1$	$\overline{11}$ 8	$\overline{15}$ 8 6	$\overline{10}$ 12	$\overline{5}$ 7	8
ПН$_2$	$\overline{24}$ 8 7	$\overline{20}$ 8	$\overline{12}$ 11 10	$\overline{15}$ 15 3	34

Таблица 9.В

			4		
	$\overline{11}$ ^{8}	$\overline{15}$ ^{6}	$\overline{10}$ ^{12} 8	$\overline{5}$ ^{7}	8
4	$\overline{24}$ ^{7} 7	$\overline{20}$ ^{8}	$\overline{12}$ ^{10} 8	$\overline{15}$ ^{3} 15	34
	$\overline{22}$ ^{5} 9	$\overline{23}$ ^{4} 20	$\overline{13}$ ^{9} 4	$\overline{15}$ ^{5}	33
	16	20	24	15	75

Теперь, добавив в клетку (2, 3) из дополнительных клеток 4, освободимся от последних. Получим сбалансированную таблицу 9.Г.

Таблица 9.Г

$\overline{11}$ ^{8}	$\overline{15}$ ^{6}	$\overline{10}$ ^{12} 8	$\overline{5}$ ^{7}	8
$\overline{24}$ ^{7} 7	$\overline{20}$ ^{8}	$\overline{12}$ ^{10} $\overline{12}$	$\overline{15}$ ^{3} 15	34
$\overline{22}$ ^{5} 9	$\overline{23}$ ^{4} 20	$\overline{13}$ ^{9} 4	$\overline{15}$ ^{5}	33
16	20	24	15	75

Опорный план построен. Но он не оптимален. Производим пересчет по циклу свободной клетки (1, 2) и получим следующую таблицу:

Таблица 9.Д

$\overline{11}$ ^{8}	$\overline{15}$ ^{6} 8	$\overline{10}$ ^{12}	$\overline{5}$ ^{7}	8
$\overline{24}$ ^{7} 7	$\overline{20}$ ^{8}	$\overline{12}$ ^{10} $\overline{12}$	$\overline{15}$ ^{3} 15	34

каждому элементу матрицы сумму модулей всех ее элементов.

В дальнейшем, для определенности, будем говорить о задачах на минимум суммы баллов.

5.2. Приведение задачи о назначениях к стандартному виду транспортной задачи

Будем считать, что если i-ый исполнитель прикреплен к j-ой работе, то x_{ij}=1, в противоположном случае x_{ij}=1. Поскольку каждый исполнитель должен работать на некоторой работе, то верно следующее равенство:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (7)$$

С другой стороны, каждая работа должна быть обеспечена некоторым исполнителем. Следовательно, верно равенство

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (8)$$

Требуется найти такую совокупность неизвестных x_{ij}, при которых функция издержек F принимала бы наименьшее значение. Это можно записать следующим образом:

$$F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \qquad (9)$$

Следует учитывать, что все x_{ij} неотрицательны.

Задача на минимум F при указанных ограничениях является транспортной задачей и может быть решена описанными выше методами.

Заметим, что переменные x_{ij} могут быть только целыми числами, а именно нулем, либо единицами. Казалось бы, модель задачи о назначениях не учитывает это обстоятельство. Однако, как было показано выше, любая транспортная задача с целочисленными суммами по строкам и столбцам имеет целочисленное решение. Поскольку x_{ij} целые и неотрицательные, то с учетом ограничения (7) получим, что, к счастью, задача имеет именно то решение, при котором $x_{ij}=0$, либо $x_{ij}=1$. Поэтому, указанная модель может быть использована при решении задачи о назначениях с помощью общих методов решения транспортной задачи. Рассмотрим пример применения распределительного метода для решения задачи о назначениях размерностью 3х3.

Таблица 10.А

Должности/ люди	Смит	Адамс	Гилл
Директор завода	^{9}	^{3}	^{1}
Зам. директора по сбыту	^{8}	^{5}	^{2}
Главный технолог	^{6}	^{7}	^{2}

Методом наименьшей стоимости заполним таблицу: запишем в правую верхнюю клетку единицу, а рядом нулем (транспортная задача вырождена); затем, заполним центральную клетку единицей, а клетку (2, 1) нулем. Оставшуюся левую нижнюю клетку заполним единицей. Получим таблицу 10.Б. Суммарные затраты при назначениях, полученных в этой таблице:

F = 1*1 + 1*5 + 1*6 = 12.

Таблица 10.Б

Должности/ люди	Смит	Адамс	Гилл
Директор завода	^{9}	1 ^{3}	0 ^{1}
Зам. директора по сбыту	0 ^{8}	^{5}	1 ^{2}
Главный технолог	1 ^{6}	^{7}	^{2}

$\overline{22}$ 9 ^{5}	$\overline{23}$ 12 ^{4}	$\overline{13}$ 12 ^{9}	$\overline{15}$ ^{5}	33
16	20	24	15	75

Получен оптимальный план перевозок.

5. Задача о назначениях

5.1. Пояснение к теме

Задача о назначениях заключается в распределении n вакансий между n исполнителями. При этом считается заданной оплата труда каждого i-го исполнителя на j-ом месте - c_{ij}. Требуется таким образом распределить должности между людьми, чтобы суммарная оплата их труда была наименьшей. При решении проблем управления персоналом задача о назначениях может использоваться следующим образом: группа экспертов определяет в баллах эффективность работы каждого исполнителя на каждой работе, далее, ставится задача о таком их распределении по вакансиям, при котором суммарное число баллов будет наименьшим (либо наибольшим). Также задача о назначениях может быть использована при выборе оборудования для производства работ. Пусть имеется n станков и n видов работ. Известна эффективность каждого станка при выполнении им каждой работы (под эффективностью могут подразумеваться, либо издержки производства на эксплуатацию станка, либо рентабельность производства). Требуется так распределить работы между станками, чтобы суммарная их эффективность была наибольшей.

Заметим, что задача на максимум суммы положительных баллов при назначениях нетрудно привести к задаче на минимум. Для этого можно поменять знак всех элементов на противоположный, а затем прибавить к

Начнем оптимизировать полученный базисный план распредели- тельным методом. Произведем пересчет по циклу свободной клетки (2, 3) и получим следующую новую таблицу:

Таблица 10.В

Должности/ люди	Смит	Адамс	Гилл
Директор завода	^{9}	1 ^{3}	0 ^{1}
Зам. директора по сбыту	0 ^{8}	^{5}	1 ^{2}
Главный технолог	1 ^{6}	^{7}	^{2}

Суммарные затраты при назначениях, полученных в этой таблице:

F = 1*3 + 1*2 + 1*6 = 11.

Несложно убедиться в том, что найден оптимальный план назначений: Адамс – директор, Гилл – зам. директора, Смит – главный технолог.

Для решения задачи о назначениях разработаны специальные методы решения. Самым известным из них является так называемый «Венгерский метод» [В.1].

6. Транспортная задача по критерию времени

6.1. Пояснение к теме

При перевозке скоропортящихся грузов, а также при перевозке опасных грузов может возникать задача об экономии не общих затрат, а максимальных. Например, целесообразно осуществить каждую транспортировку не более, чем за некоторое время, а это время желательно сделать наименьшим возможным. При этом скоропортящийся груз пострадает наименьшим образом. Транспортная задача по критерию времени имеет следующую математическую постановку: заданы запасы в ПО и потребности ПН, задана прямоугольная матрица t_{ij}, где t_{ij} является временем перевозки из i-го ПО в j-ый ПН.

6.3. Пример решения транспортной задачи по критерию времени

Пусть задача определена следующей таблицей:

Таблица 16.А

^{4}	^{6}	^{7}	^{2}	80
^{1}	^{9}	^{5}	^{8}	25
^{3}	^{11}	^{12}	^{10}	35
40	50	30	20	140

Применим диагональный метод для нахождения опорного плана:

Таблица 16.Б

40 ^{4}	40 ^{6}	^{7}	^{2}	80
^{1}	10 ^{9}	15 ^{5}	^{8}	25
^{3}	^{11}	15 ^{12}	20 ^{10}	35
40	50	30	20	140

Целесообразно сделать сдвиг по циклу клетки (2, 1).

Таблица 16.В

30 ^{4}	50 ^{6}	^{7}	^{2}	80
10 ^{1}	^{9}	15 ^{5}	^{8}	25
^{3}	^{11}	15 ^{12}	20 ^{10}	35
40	50	30	20	140

Целесообразно сделать сдвиг по циклу клетки (1, 4).

Таблица 16.Г

15 ^{4}	50 ^{6}	^{7}	15 ^{2}	80
25 ^{1}	^{9}	^{5}	^{8}	25
^{3}	^{11}	30 ^{12}	5 ^{10}	35
40	50	30	20	140

Продолжая работу, получим следующую последовательность таблиц (16-Д-16-З):

Таблица 16.Д

10 ^{4}	50 ^{6}	^{7}	20 ^{2}	80
25 ^{1}	^{9}	^{5}	^{8}	25
5 ^{3}	^{11}	30 ^{12}	^{10}	35
40	50	30	20	140

Таблица 16.Е

10 ^{4}	50 ^{6}	^{7}	20 ^{2}	80
^{1}	^{9}	25 ^{5}	^{8}	25
30 ^{3}	^{11}	5 ^{12}	^{10}	35
40	50	30	20	140

Таблица 16.Ж

5 ^{4}	50 ^{6}	5 ^{7}	20 ^{2}	80
^{1}	^{9}	25 ^{5}	^{8}	25
35 ^{3}	^{11}	^{12}	^{10}	35
40	50	30	20	140

Таблица 16.З

^{4}	50 ^{6}	10 ^{7}	20 ^{2}	80
5 ^{1}	^{9}	20 ^{5}	^{8}	25
35 ^{3}	^{11}	^{12}	^{10}	35
40	50	30	20	140

Нетрудно убедиться, что таблица 16-З дает оптимальное решение по минимуму времени.

Требуется найти такой план перевозок, который имеет самую меньшую из всех наибольших t_{ij}.

6.2. Метод решения транспортной задачи по критерию времени

Построив опорный базисный план диагональным способом, можно начать его улучшение следующей модификацией распределительного способа:

1. Найти цикл пересчета первой свободной клетки.
2. Если наименьшая из базисных переменных в цикле находится в вершине цикла со знаком, противоположным знаку свободной клетки и ее время больше времени свободной клетки, то сдвиг по циклу целесообразен и выполняется.
3. В противоположном случае переходим к рассмотрению следующей свободной клетки.
4. Если все свободные клетки таковы, что указанный пересчет нецелесообразен, то найденный базисный план оптимален по критерию времени.

Доказательством сходимости указанного алгоритма является, следующая возможность сведения задачи по критерию времени к классической транспортной задаче. Пронумеруем все клетки транспортной таблицы в порядке возрастания t_{ij}. Если присвоить клетке с номером n цену перевозки величиной 2^{n-1}, то легко видеть, что в любом цикле клетка с большим весом перевешивает в цене сумму цен всех остальных, а потому пересчет обычным распределительным методом будет, по крайней мере, не ухудшать наибольшее t_{ij} базисных клеток. Из сходимости распределительного метода обычной транспортной задачи следует сходимость алгоритма решения задачи по критерию времени.

6.4. Минимаксная задача о назначениях

Возможна постановка задачи о назначениях, когда требуется минимизировать не сумму баллов в назначенных клетках, а наибольший возможный балл в них. Очевидно, что такая задача является частным случаем транспортной задачи по минимуму времени. Она может быть решена описанным выше методом. Это иллюстрирует следующий пример:

Таблица 17А

^{7}	^{5}	^{1}
^{8}	^{7}	^{5}
^{2}	^{4}	^{3}

Таблица 17 Б

1 ^{7}	0 ^{5}	^{1}
^{8}	^{7}	1 ^{5}
^{2}	1 ^{4}	1 ^{3}

Таблица 17В

^{7}	1 ^{5}	^{1}
^{8}	^{7}	1 ^{5}
1 ^{2}	0 ^{4}	1 ^{3}

Таблица 17Г

^{7}	1 ^{5}	^{1}
^{8}	^{7}	1 ^{5}
1 ^{2}	1 ^{4}	0 ^{3}

Таблица 17.Д

	1	
		1
1		

Заметим, что если запретить клетки с баллами в 8, 7 и 5, то во второй строке все клетки будут запрещенными и не будет допустимого назначения. Поэтому, наилучшее назначение здесь таково, что наибольший назначенный балл равен 5.

алгоритмы решения транспортной задачи. Гостехиздат, 1963.

2. Глейзал А. Алгоритм для решения проблемы транспортировки. «Математика», 1958, 2:1.

Св.план 2011г., поз. 192
Сеславин Андрей Игоревич, Сеславина Елена Александровна
Оптимизация и математические методы принятия решений.

Учебное пособие

Подписано к печати Формат 60×84/16 Тираж - 100 экз.

Усл. печ. л. Заказ №

Литература

А. ЛИТЕРАТУРА, ПРЕДСТАВЛЯЮЩАЯ ИСТОРИЧЕСКИЙ ИНТЕРЕС

1. Данциг Дж. Линейное программирование. Его применения и обобщения. – М. Прогресс. 1966. – 600 с.

Обобщающий труд автора симплекс-метода. Здесь собраны практически все результаты, полученные до 1969г. Ясность изложения, богатство примеров и блестящее владение предметом сделало эту книгу классической.

Б. МОНОГРАФИИ И УЧЕБНИКИ

1. Карпелевич Ф.И., Садовский Л.Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. – М. Наука. 1965. – 275 с.

Один из первых отечественных учебников с изложением основ линейного программирования. Элементарность, ясность и подробность изложения делают его незаменимым и до сих пор.

2. Грешилов А.А. Прикладные задачи математического программирования. – МГТУ. М. 1990. – 189 с.

Учебное методическое пособие. В главах 2 и 3 рассматриваются задачи линейного программирования.

3. Гольдштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. – Наука. М. 1969. – 381с. 4. Триус Е.Б. Задачи математического программирования транспортного типа. Советское радио. М. 1967, 206с.

5. Нестеров Е.П. Транспортные задачи линейного программирования. М.: Транспорт, 1971.

6. Форд Л., Фалкерсон Д. Потоки в сетях. М. Мир. 1966, 276с.

В. СТАТЬИ

1. Кун Г. Некоторые видоизменения венгерского метода для решения задачи о назначениях. Сб. Методы и