**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования**
**«Московский государственный университет**
**путей сообщения»**

Институт экономики и финансов

Кафедра «Математика»

М.М. Сирош

# Элементы линейной алгебры

Учебное пособие

Москва – 2014

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования**
**«Московский государственный университет**
**путей сообщения»**

Институт экономики и финансов

Кафедра «Математика»

М.М. Сирош

# Элементы линейной алгебры

Рекомендовано редакционно-издательским советом
университета в качестве учебного пособия
для студентов направления 080100.62 «Экономика»

Москва – 2014

# В В Е Д Е Н И Е

Цель настоящего учебного пособия состоит в том, чтобы быстрее ввести студента в круг изучаемых вопросов. Учебное пособие не заменяет учебную литературу. Доказательство утверждений, приводимых в нём, студент должен сам разобрать по учебной литературе. Если при самостоятельной работе над материалом возникнут затруднения или какие-либо вопросы, то следует обратиться за консультацией к преподавателю. Пользоваться можно любым учебником по линейной алгебре для вузов, например [1] − [14]. Для успешного усвоения материала необходимо решить задачи для упражнений, предварительно проанализировав решения типовых задач.

# 1. ПРОИЗВОЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

## 1.1. МЕТОД ГАУССА

Рассмотрим систему $m$ линейных уравнений с $n$ неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Здесь $x_1, x_2, \dots, x_n$ - неизвестные; $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ - коэффициенты при неизвестных; $b_1, b_2, \dots, b_m$ - свободные члены. В системе уравнений (1.1.1) число уравнений не предполагается равным числу неизвестных. Решением системы (1.1.1) называется совокупность $n$ значений неизвестных $x_1 = x_{10}$, $x_2 = x_{20}, \dots, x_n = x_{n0}$ при подстановке которой в систему (1.1.1) все её уравнения обращаются в тождества. Система, имеющая хотя бы одно решение, называется *совместной*; система, не имеющая ни одного решения, называется *несовместной*. Совместная система, имеющая единственное решение, называется *определенной*; совместная система, имеющая более одного решения, называется *неопределенной*.

Матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

называются соответственно матрицей и расширенной матрицей системы (1.1.1).

Для совместности системы (1.1.1) необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы этой системы был равен рангу её расширенной матрицы (теорема Кронекера-Капелли):
$r(A) = r(A_1) = r$. В этом случае число $r$ называется *рангом* системы (1.1.1).

Если $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, то система линейных уравнений (1.1.1) называется однородной.

Однородная система уравнений всегда совместна, так как имеет, например, нулевое решение: $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. Совместность однородной системы следует также из равенства $r(A) = r(A_1)$.

Задание системы уравнений всегда подразумевает, что надо получить какую-то информацию о множестве её решений: либо решить систему (т.е. найти все множество решений), либо - частный случай того же аспекта - исследовать её, т.е. выяснить, существует ли хотя бы одно решение (совместна ли система) и если существует, то единственно ли оно (является ли система определённой).

Две системы называются равносильными, если множества их решений совпадают, т.е. каждое решение первой системы есть решение второй, и обратно. Если нас интересует множество решений системы, то замена данной системы на равносильную не влияет на результат, который должен быть получен. При элементарных преобразованиях строк (но не столбцов) расширенная матрица системы переходит в расширенную матрицу равносильной системы.

Метод (или схема) Гаусса решения системы линейных уравнений заключается в приведении расширенной матрицы данной системы элементарными преобразованиями строк к некоторому специальному виду (прямой ход схемы Гаусса) и нахождению затем множества решений системы с полученной расширенной матрицей (обратный ход схемы Гаусса).

Запишем систему (1.1.1) в виде таблицы:

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & \\ \hline \boxed{a_{11}} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array} \qquad (1.1.2)$$

Допустим, что не все коэффициенты при неизвестных равны нулю. Пусть, например, $a_{11} \neq 0$. Назовем этот элемент *разрешающим элементом*. Строку и столбец, в которых находится разрешающий элемент, будем называть *разрешающей строкой* и *разрешающим столбцом*. Все элементы первой строки разделим на $a_{11}$ . Получим:

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & \\ \hline 1 & \dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \ldots & \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} & \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array} \qquad (1.1.3)$$

Система (1.1.2) равносильна системе (1.1.3).

Пользуясь первой строкой таблицы (1.1.3), получим нули в первом столбце под элементом $a_{11}$ (т.е. исключим $x_1$ из остальных уравнений системы). Для этого умножим первую строку на $-a_{21}$ и прибавим ко второй строке, далее умножаем первую строку последовательно на $-a_{31},\ldots,-a_{m1}$ и прибавляем к третьей,…, $m$-й строкам таблицы (1.1.3). Приходим к системе:

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & \\ \hline 1 & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & \boxed{a'_{22}} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a'_{m2} & \ldots & a'_{mn} & b'_m \end{array} \qquad (1.1.4)$$

Система (1.1.4) равносильна системе (1.1.3).

Снова выберем разрешающий элемент $a_{22} \neq 0$, разделим второе уравнение на $a'_{22}$ и исключим $x_2$ из третьего, четвертого,... и последнего уравнений системы (1.1.4). Получим нули во втором столбце под $a'_{22}$. Приходим к системе (1.1.5). Если в процессе преобразований получится нулевая строка, то её можно отбросить.

Продолжаем процесс дальше. В результате могут встретиться случаи:

1) после некоторого шага получим строку, в которой все коэффициенты при неизвестных равны нулю, а свободный член не равен нулю. Такая строка соответствует уравнению

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \ldots + 0 \cdot x_n = b'_i \neq 0,$$

которое не имеет решений. Следовательно, система уравнений несовместна;

2) если такой строки не получим, то система уравнений совместна.

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | ... | $x_n$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $a'_{12}$ | $a'_{13}$ | … | $a'_{1n}$ | $b'_1$ |
| 0 | 1 | $a''_{23}$ | … | $a''_{2n}$ | $b''_2$ |
| 0 | 0 | $a''_{33}$ | … | $a''_{3n}$ | $b''_3$ |
| … | … | … | … | … | … |
| 0 | 0 | $a''_{m3}$ | … | $a''_{mn}$ | $b''_m$ |

(1.1.5)

В последнем случае приходим к системе:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | ... | $x_r$ | … | $x_n$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $c_{12}$ | $c_{13}$ | … | $c_{1r}$ | … | $c_{1n}$ | $d_1$ |
| 0 | 1 | $c_{23}$ | … | $c_{2r}$ | … | $c_{2n}$ | $d_2$ |
| 0 | 0 | 1 | … | $c_{3r}$ | … | $c_{3n}$ | $d_3$ |
| … | … | … | … | … | … | … | … |
| 0 | 0 | 0 | ... | 1 | … | $c_{rn}$ | $d_r$ |

(1.1.6)

На этом прямой ход схемы Гаусса заканчивается.

Если $r(A) = r(A_1) = r = n$, то система имеет единственное решение. Чтобы получить это единственное решение, необходимо в предпоследнее уравнение системы вместо $x_n$ подставить его значение из последнего уравнения и вычислить $x_{n-1}$ и так далее. Это будет обратный ход схемы Гаусса. Это единственное решение системы при $r = n$ можно получить, если продолжить преобразование расширенной матрицы системы (1.1.6) и получить нулевые элементы в разрешающих столбцах, расположенные выше разрешающих элементов:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | ... | $x_n$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | … | 0 | $d'_1$ |
| 0 | 1 | 0 | … | 0 | $d'_2$ |
| 0 | 0 | 1 | … | 0 | $d'_3$ |
| … | … | … | … | … | … |
| 0 | 0 | 0 | … | 1 | $d'_n$ |

(1.1.7)

Если $r(A) = r(A_1) = r < n$, то система приводится к виду:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | … | $x_r$ | $x_{r+1}$ | ... | $x_n$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | … | 0 | $c'_{1,r+1}$ | … | $c'_{1n}$ | $d'_1$ |
| 0 | 1 | 0 | … | 0 | $c'_{2,r+1}$ | … | $c'_{2n}$ | $d'_2$ |
| 0 | 0 | 1 | … | 0 | $c'_{3,r+1}$ | … | $c'_{3n}$ | $d'_3$ |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … |
| 0 | 0 | 0 | … | 1 | $c'_{r,r+1}$ | … | $c'_{rn}$ | $d'_r$ |

(1.1.8)

Матрица системы (1.1.8) имеет вид, который называется *нормальным ступенчатым видом*. Система (1.1.8) является неопределенной. Первые $r$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_r$ выражаем через остальные $(n-r)$ переменные $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} x_1 = -c'_{1,r+1} \cdot x_{r+1} - \cdots - c'_{1n} \cdot x_n + d'_1, \\ x_2 = -c'_{2,r+1} \cdot x_{r+1} - \cdots - c'_{2n} \cdot x_n + d'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_r = -c'_{r,r+1} \cdot x_{r+1} - \cdots - c'_{rn} \cdot x_n + d'_r. \end{cases} \tag{1.1.9}$$

Система (1.1.9) называется *общим решением системы уравнений* (1.1.8). Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ называются *главными* (или *базисными*) *переменными*, переменные $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ - *свободными переменными*. Придавая свободным переменным произвольные значения, будем получать частные решения. Придадим свободным переменным нулевые значения и найдем из системы (1.1.9) соответствующие значения базисных переменных:

$$x_1 = d'_1, x_2 = d'_2, \ldots, x_r = d'_r.$$

Получили решение системы $(d'_1, d'_2, \ldots, d'_r, 0, \ldots, 0)$, которое называется *базисным решением*.

Число главных (базисных) переменных всегда равно рангу системы $r$, а число свободных переменных равно числу $(n-r)$. Главными переменными могут быть такие переменные, коэффициенты при которых образуют один из базисных миноров матрицы системы.

Решая систему уравнений (1.1.1) методом Гаусса, целесообразно преобразовывать расширенную матрицу системы сразу к нормальному ступенчатому виду (1.1.8) по следующему алгоритму:

1) выбрать разрешающий элемент $a_{ij} \neq 0$;
2) вычислить элементы разрешающей строки делением прежней строки на разрешающий элемент по формуле

$$a'_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{ij}};$$

3) все остальные элементы матрицы $A_1$ (коэффициенты при неизвестных и свободные члены) пересчитать по правилу прямоугольника:

$$\begin{tikzcd} a_{ij} \arrow[r, dash, dashed] \arrow[d, dash] & a_{ik} \arrow[d, dash] \\ a_{qj} \arrow[ur] \arrow[r, dash, dashed] & a_{qk} \end{tikzcd}$$

$$a'_{qk} = a_{qk} - a_{qj} \cdot \left(\frac{a_{ik}}{a_{ij}}\right), \quad b'_q = b_q - a_{qj} \cdot \left(\frac{b_i}{a_{ij}}\right).$$

Рассмотрим применение этого алгоритма на примерах.

**Пример 1.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11, \\ -3x_1 + x_2 - 5x_3 = -19, \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = -4. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Решение. 1. Систему уравнений записываем в виде таблицы

(1.1.2)

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|
| 2 | −3 | 2 | 11 |
| −3 | $\boxed{1}$ | −5 | −19 |
| 4 | 5 | −1 | −4 |

2. Выбираем разрешающий элемент $a_{22} = 1 \neq 0$. Преобразовываем элементы таблицы в соответствии с описанным алгоритмом. Так как разрешающий элемент $a_{22} = 1$, то элементы разрешающей строки не изменятся; элементы разрешающего столбца, кроме $a_{22} = 1$, будут равны нулю; остальные элементы таблицы пересчитываются по правилу прямоугольника. Для элементов первой строки, например, будем иметь:

$$a'_{11} = a_{11} - a_{12} \cdot \left(\frac{a_{21}}{a_{22}}\right) = 2 - (-3) \cdot \left(\frac{-3}{1}\right) = -7;$$
$$a'_{13} = a_{13} - a_{12} \cdot \left(\frac{a_{23}}{a_{22}}\right) = 2 - (-3) \cdot \left(\frac{-5}{1}\right) = -13;$$
$$b'_1 = b_1 - b_2 \cdot \left(\frac{a_{12}}{a_{22}}\right) = 11 - (-19) \cdot \left(\frac{-3}{1}\right) = -46.$$

Таблица системы, равносильной системе (1.1.2), будет иметь вид:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|
| $\boxed{-7}$ | 0 | $-13$ | $-46$ |
| $-3$ | 1 | $-5$ | $-19$ |
| 19 | 0 | 24 | 91 |

(1.1.3)

1. Выбираем разрешающий элемент $a'_{11} = -7$ (можно в качестве разрешающего элемента взять элемент $a'_{31} = -19$). Применяя к таблице (1.1.2) алгоритм преобразования её, получим:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | $\frac{13}{7}$ | $\frac{46}{7}$ |
| 0 | 1 | $\frac{4}{7}$ | $\frac{5}{7}$ |
| 0 | 0 | $\boxed{-\frac{79}{7}}$ | $-\frac{237}{7}$ |

(1.1.4)

2. Теперь за разрешающий элемент принимаем $a''_{33} = -\frac{79}{7}$. Окончательный вид системы, равносильной заданной системе (1.1.1), будет:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | $-1$ |
| 0 | 0 | 1 | 3 |

Из последней таблицы получаем ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$. В данном примере $r(A) = r(A_1) = r = 3 = n$. Система уравнений (1.1.1) совместна и определенна (имеет единственное решение).

**Пример 2.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -4, \\ -2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 6, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение. Таблицы, фиксирующие этапы решения, будем записывать последовательно, одну за другой, отделяя горизонталями.

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|
| 3 | −2 | 1 | −4 |
| −2 | 5 | −2 | 6 |
| $\boxed{1}$ | 3 | −1 | 2 |
| 0 | −11 | 4 | −10 |
| 0 | $\boxed{11}$ | −4 | 10 |
| 1 | 3 | −1 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | $-\frac{4}{11}$ | $\frac{10}{11}$ |
| 1 | 0 | $\frac{1}{11}$ | $-\frac{8}{11}$ |

Общее решение системы:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{8}{11} - \frac{1}{11}x_3, \\ x_2 = \frac{10}{11} + \frac{4}{11}x_3. \end{cases}$$

В данном примере $r(A) = r(A_1) = r < 3 = n$. Система совместна и имеет бесконечно много решений. Базисное решение системы:

$$x_1 = -\frac{8}{11}, x_2 = \frac{10}{11}, x_3 = 0.$$

**Пример 3.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 5x_1 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение. Систему уравнений записываем в виде таблицы

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | −1 | 3 |
| 5 | 0 | 3 | 2 |
| 2 | $\boxed{-1}$ | 2 | 1 |
| 5 | 0 | 3 | 5 |
| 5 | 0 | $\boxed{3}$ | 2 |
| −2 | 1 | −2 | −1 |
| 0 | 0 | 0 | 3 |
| $\frac{5}{3}$ | 0 | 1 | $\frac{2}{3}$ |
| $\frac{4}{3}$ | 1 | 0 | $\frac{1}{3}$ |

Первое уравнение последней системы имеет вид: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 3$. Это уравнение не имеет решений. Следовательно, система уравнений несовместна. В данном примере $r(A) = 2 \neq r(A_1) = 3$.

**Упражнения для самостоятельного решения**

1. Исследовать совместность и найти общее решение и одно частное решение системы уравнений:

$$1.1.\ \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

Ответ: например, общее решение:
$x_1 = \frac{1}{11}(x_3 - 9x_4 - 2), x_2 = \frac{1}{11}(-5x_3 + x_4 + 10)$;
частное решение: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$.

$$1.2.\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases}$$

Ответ: например, общее решение:
$x_3 = 22x_1 - 33x_2 - 11$, $x_4 = -16x_1 + 24x_2 + 8$;
частное решение: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

$$1.3.\ \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13. \end{cases}$$

Ответ: общее решение: $x_3 = 1 - 3x_1 - 4x_2$, $x_4 = 1$;
частное решение: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$.

$$1.4.\ \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$$

Ответ: система несовместна.

$$1.5.\ \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12. \end{cases}$$

Ответ: система имеет единственное решение: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

$$1.6.\ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

Ответ: общее решение: $x_3 = 6 - 15x_1 + 10x_2$, $x_4 = -7 + 18x_1 - 12x_2$;
частное решение: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

## 2. МАТРИЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Будем рассматривать системы $n$ линейных уравнений с $n$ неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (1.2.1)$$

Будем полагать, что определитель матрицы системы отличен от нуля ($\det A \neq 0$). Система (1.2.1) является совместной и определённой ($r(A) = r(A_1) = r,\ r = n$). Введем обозначения матриц-столбцов:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (1.2.1) можно записать в матричном виде:

$$A \cdot X = B. \qquad (1.2.2)$$

Найдём матрицу $X$. Так как $\det A \neq 0$, то существует обратная матрица $A^{-1}$. Умножим уравнение (1.2.2) на $A^{-1}$ слева. Будем иметь:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B. \qquad (1.2.3)$$

Учитывая сочетательное свойство операции перемножения матриц и соотношение $A^{-1} \cdot A = E$, преобразуем левую часть уравнения (1.2.3): $A^{-1} \cdot (A \cdot X) = (A^{-1} \cdot A) \cdot X = E \cdot X = X$. Таким образом, решение уравнения (1.2.2) имеет вид:

$$X = A^{-1} \cdot B. \qquad (1.2.4)$$

**Пример.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 = 5. \end{cases}$$

<u>Решение.</u> Запишем систему в матричном виде $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, следовательно, обратная матрица $A^{-1}$ существует. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы $A$: $A_{11} = 4$, $A_{12} = -3$, $A_{21} = -2$, $A_{22} = 1$.

Тогда на основании формулы $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$ получим, что

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{-2} \end{pmatrix}.$$

Укажем здесь ещё один способ вычисления $A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$. Будем исходить из матричного уравнения $A \cdot A^{-1} = E$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1.2.5)$$

Для нахождения элементов матрицы $A^{-1}$ на основании (1.2.5) составим две системы линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.6) \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1.2.7)$$

Системы уравнений (1.2.6) и (1.2.7) являются совместными и определенными ($\det A \neq 0$). Решать их целесообразно совместно методом Гаусса по схеме:

$$(AE) \sim (EA^{-1}).$$

Имеем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ следовательно, } A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

По формуле (1.2.4) находим матрицу $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

Отсюда имеем $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

**Упражнения для самостоятельного решения**

1. Решить системы уравнений матричным методом.

1.1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 11. \end{cases}$ 1.2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 1, \\ 4x_1 - 7x_2 = 1. \end{cases}$

Ответы: 1.1. $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$; 1.2. $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{7}$, $x_3 = \frac{2}{7}$.

## 1.3. ФОРМУЛЫ КРАМЕРА

Если матрица $A$ линейной системы $A \cdot X = B$ квадратная и невырожденная, то эта система совместна и имеет единственное решение, которое может быть получено по формулам Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \ (i = 1, 2, ..., n),$$

где $\Delta = \det A$ - определитель данной системы; $\Delta_i$ - определитель матрицы, получаемой из матрицы $A$ заменой $i$-го столбца (т.е. столбца коэффициентов при $x_i$) столбцом $B$ свободных членов.

Основное значение формул Крамера состоит в том, что они дают явное выражение для решения системы $n$ линейных уравнений с $n$ неизвестными (с определителем, отличным от нуля) через коэффициенты уравнений и свободные члены. Практическое использование формул Крамера связано с довольно громоздкими вычислениями. Для решения системы $n$ уравнений с $n$ неизвестными приходится вычислять $(n + 1)$ определитель $n$-го порядка. К этому следует добавить, что если коэффициенты уравнений и свободные члены представляют собой лишь приближенные значения каких-либо измеряемых физических величин, то использование формул Крамера может привести к большим ошибкам.

Формулы Крамера целесообразно применять в тех случаях, когда определители легко вычисляются после преобразования столбцов или строк (в схеме Гаусса преобразования столбцов недопустимы), а также и в том случае, когда $\det A$ с трудом приводится к треугольному виду, но может быть легко вычислен другими методами.

Рассмотрим на примере применение формул Крамера.

**Пример.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 14 \neq 0,$$ следовательно, решение системы существует

и оно единственное. Вычисляем:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 14,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 28,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 42.$$

Тогда получим ответ: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{14}{14} = 1$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{28}{14} = 2$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{42}{14} = 3$.

## Упражнения для самостоятельного решения

1. Следующие системы уравнений решить с помощью формул Крамера.

$$1.1. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = -1$.

$$1.2. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

$$1.3. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = x_3 = 2, x_4 = 0$.

# 2. ЛИНЕЙНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

## 2.1. Понятие векторного пространства

Рассмотрим такое множество $R$ элементов $x, y, z, \ldots$, в котором для любых двух элементов $x \in R$ и $y \in R$ определена сумма $x + y \in R$ и для любого элемента $x \in R$ и любого действительного числа λ определено произведение $\lambda x \in R$.

Непустое множество $R$, для элементов которого определено сложение и умножение на действительные числа, называется действительным *векторным пространством* $R$ или *линейным пространством*, а элементы $R$ называются *векторами,* если выполнены следующие аксиомы:

1) *Коммутативность*. Для любых двух элементов $\vec{x}$ и $\vec{y} \in R$ справедливо равенство $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$.
2) *Ассоциативность.* Для любых элементов $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in R$ справедливо равенство $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$.
3) Существует такой элемент $\vec{0} \in R$ (нуль-элемент), что $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ для любого $\vec{x} \in R$.
4) Для каждого элемента $\vec{x} \in R$ существует такой элемент $-\vec{x}$ (называемый противоположным к $\vec{x}$), что $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$.
5) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$.
6) $\lambda \cdot (\mu \vec{x}) = (\lambda \mu) \cdot \vec{x}$.
7) $(\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x} + \mu \vec{x}$.
8) $\lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \vec{x} + \lambda \vec{y}$.

*Замечание.* Если в пространстве $R$ определено умножение элементов на действительное число, то $R$ называется *действительным линейным пространством*. Если элементы умножать на комплексные числа, то $R$ называется *комплексным линейным пространством.*

Например, множество всех геометрических векторов является линейным пространством, так как для элементов этого множества определены действия сложения и умножения на число, удовлетворяющие сформулированным аксиомам. Также линейным пространством является множество действительных чисел с операциями сложения и умножения, множество всех матриц размером $m \times n$ с операциями сложения и умножения на число. Можно говорить о векторном пространстве $P_n$ многочленов степени не выше $n$ с действительными или комплексными коэффициентами, о векторном пространстве $C$ функций, непрерывных на данном отрезке $[a; b]$, о векторном пространстве решений данной системы линейных однородных уравнений, наконец, просто о векторном пространстве строк, состоящих из $n$ (действительных или комплексных) чисел. Но множество рациональных чисел не является линейным пространством, так как произведение рационального числа на действительное не всегда рациональное число.

*Простейшие свойства векторного пространства:*

1. В каждом линейном пространстве существует только один нуль-элемент.
2. Для каждого элемента линейного пространства существует только один противоположный элемент.

3. Для каждого элемента $\vec{x} \in R$ выполняется равенство $0 \cdot \vec{x} = 0$.
4. Для любого действительного числа λ и $\vec{0} \in R$ выполняется равенство $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$.
5. Из равенства $\lambda \cdot \vec{x} = 0$ следует одно из двух равенств: $\lambda = 0$ или $\vec{x} = 0$.
6. Элемент $(-1) \cdot \vec{x}$ является противоположным для элемента $\vec{x}$.

Множество $A$ называется *подмножеством* множества $B$, если каждый его элемент является элементом множества $B$. Обозначают $A \in B$. Например, $N \in Q$ (множество натуральных чисел является подмножеством рациональных чисел).

*Подпространством* линейного пространства называют любое непустое подмножество множества $R$, элементы которого в свою очередь образуют линейное пространство относительно операций, введенных в $R$.

Например, множество всех векторов, параллельных одной и той же плоскости, является подпространством всех геометрических векторов пространства.

*n - мерным вектором* называется упорядоченная совокупность $n$ действительных чисел, записываемых в виде строки $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ или столбца

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix},$$ где $x_i$ – *i-я* компонента, или координата вектора $\vec{x}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Понятие $n$ - мерного вектора широко используется в экономике, например, некоторый набор товаров можно охарактеризовать вектором $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а соответствующие цены – вектором $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Два $n$ - мерных вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ называются *равными*, если у них равны соответствующие компоненты: $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$,…, $x_n = y_n$.

*Нулевым вектором* будем называть такой вектор $\vec{0}$, у которого все компоненты равны нулю.

## 2.2. Размерность и базис линейного пространства

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ векторного пространства $R$ называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, не равные одновременно нулю, что

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0}. \qquad (*)$$

Векторы, не являющиеся линейно зависимыми, называются *линейно независимыми*. В этом случае равенство $(*)$ выполняется лишь при

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0.$$

Если векторы линейно зависимы, т. е.

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0}$$

и, например, $\alpha_k \neq 0$, то $\vec{a}_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k}\vec{a}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_k}\vec{a}_2 - \ldots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\vec{a}_{k-1}$

или

$$\vec{a}_k = \xi_1\,\vec{a}_1 + \xi_2\,\vec{a}_2 + \ldots + \xi_{k-1}\,\vec{a}_{k-1},$$

где $\xi_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_k}$. Если последнее равенство имеет место, то говорят, что вектор $\vec{a}_k$ является линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$,…, $\vec{a}_{k-1}$, а также, что вектор $\vec{a}_k$ линейно выражается через $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$,…, $\vec{a}_{k-1}$. Таким образом, если векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$,…, $\vec{a}_k$ линейно зависимы, то, по крайней мере, один из них линейно выражается через остальные. Верно и обратное утверждение: если один из векторов линейно выражается через остальные, то все эти векторы в совокупности линейно зависимы.

Примерами линейно независимых векторов являются два неколлинеарных вектора плоскости O$xy$ или три некомпланарных вектора пространства O$xyz$. Но любые три вектора плоскости линейно зависимы. Также будут линейно зависимыми и любые четыре вектора пространства.

Пусть теперь задано $m$ векторов $n$ – мерного пространства

$$\begin{cases} \vec{x}_1 = (x_{11}; x_{12}; \ldots, x_{1n}) \\ \vec{x}_2 = (x_{21}; x_{22}; \ldots, x_{2n}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{x}_m = (x_{m1}; x_{m2}; \ldots, x_{mn}) \end{cases} \quad (1)$$

*Рангом* $r$ системы векторов называется максимальное число линейно независимых векторов системы.

Выясним, каким условиям должны удовлетворять координаты векторов, чтобы векторы были линейно зависимы или линейно независимы. Для этого приравнивают линейную комбинацию векторов к нулю:

$$\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_m\vec{x}_m = \vec{0} \quad (2)$$

или

$$\begin{cases} \alpha_1 x_{11} + \alpha_2 x_{21} + \ldots + \alpha_m x_{m1} = 0 \\ \alpha_1 x_{12} + \alpha_2 x_{22} + \ldots + \alpha_m x_{m2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ \alpha_1 x_{1n} + \alpha_2 x_{2n} + \ldots + \alpha_m x_{mn} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

По определению линейной независимости векторов линейного пространства векторы будут линейно независимы, если в равенстве (2) выполнено условие:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0,$$

то есть однородная система (3) имеет нулевые решения. А это возможно лишь тогда, когда ранг основной матрицы системы (3) равен числу векторов в системе, то есть $r = m$.

Если ранг $r$ основной матрицы однородной системы

$$M = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \ldots & x_{m1} \\ x_{12} & x_{22} & \ldots & x_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{1n} & x_{2n} & \ldots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

меньше числа $m$ векторов системы (1), то система векторов линейно зависима, то есть любой вектор из системы линейно выражается через базисные векторы.

**Теорема.** Для того чтобы система векторов была линейно независима, необходимо и достаточно, чтобы определитель, составленный из координат этих векторов, был отличен от нуля.

**Пример 1**. Дана система векторов четырехмерного пространства $\vec{x}_1$ = (1; –1; 1; 2), $\vec{x}_2$ = (0; 1; –1; 3), $\vec{x}_3$ = (2; –2; 2; 4). Требуется определить, является ли данная система линейно зависимой и, если да, то найти зависимость.

Решение. Составим векторное равенство $\alpha_1\vec{x}_1+\ \alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\ \alpha_3\vec{x}_3\ =\ \vec{0}$, в котором числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ надо определить. Записывая $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ в виде вектор-столбцов, получаем

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\2\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\3\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}2\\-2\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Задача свелась, таким образом, к решению однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_3\ =\ 0,\\ -\alpha_1+\ \alpha_2-2\alpha_3\ =\ 0,\\ \alpha_1-\ \alpha_2+2\alpha_3\ =\ 0,\\ 2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3\ =\ 0,\end{cases}$$

которая, как известно, имеет единственное нулевое решение $\alpha_1 = \ \alpha_2 = \ \alpha_3 = \ 0$, если определитель системы не равен нулю, другими словами, если ранг $r$ матрицы системы равен трем (числу векторов системы). В этом случае векторы системы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ линейно независимы. Для линейной зависимости должно существовать хотя бы одно ненулевое решение системы уравнений, тогда ранг $r$ матрицы меньше трёх.

Решаем однородную систему линейных уравнений методом Гаусса. Выпишем матрицу $A$ системы и вычислим ранг матрицы (ранг системы векторов равен рангу матрицы, составленной из координат этих векторов), приведя её к ступенчатому виду. Заметим, что в матрице $A$ компоненты векторов расположены в виде столбцов. Хотя, как известно, величина ранга не меняется при транспонировании матрицы.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&1&-2\\1&-1&2\\2&3&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&-1&0\\0&3&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Отсюда видно, что ранг матрицы равен двум, так как существует

$$M_2=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0,$$

и ранг матрицы меньше числа векторов системы. Значит, данные векторы линейно зависимы. Можно найти ненулевые значения $\alpha_1, \alpha_2,\ \alpha_3$, составив систему уравнений по последней матрице:

$$\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_3\ =\ 0,\\ \alpha_2\ =\ 0.\end{cases}$$

Пусть $\alpha_1$ и $\alpha_2$ – главные переменные, а $\alpha_3$ – свободная переменная. Тогда получим систему

$$\begin{cases}\alpha_1=-2\alpha_3,\\ \alpha_2\ =\ 0.\end{cases}$$

Придавая различные значения $\alpha_3$, получим соответствующие ненулевые решения системы, то есть различные наборы чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Например, $\alpha_3 = 1$, тогда получим частное решение (–2; 0; 1) такое, что

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В векторном виде получим равенство:

$$-2 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + 1 \cdot \vec{x}_3 = \vec{0},$$

откуда $\vec{x}_1 = \frac{1}{2}\vec{x}_3$. Согласно определению, векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ линейно зависимы.

Линейное пространство $R^n$ называется $n$ – *мерным*, если в нем можно найти $n$ линейно независимых векторов, а любые из $n + 1$ векторов уже являются линейно зависимыми.

*Размерность пространства* - это максимальное число содержащихся в нем линейно независимых векторов.

Так, размерность множества всех плоских векторов равна 2, размерность множества всех пространственных векторов равна 3; понятно, что размерность $n$ – мерного пространства, по определению, равна $n$. Записывают $\dim R^n = n$. Векторное пространство, содержащее только нулевой вектор, имеет размерность нуль.

Пространство, имеющее конечную размерность, называется *конечномерным*. Пространство, в котором можно найти сколь угодно много линейно независимых векторов, называется *бесконечномерным*.

Совокупность произвольных $n$ линейно независимых векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ $n$ – мерного пространства $R^n$ называется *базисом* $R^n$.

Все базисы конечномерного векторного пространства состоят из одинакового количества векторов.

*Теорема о единственности разложения вектора по базису*:

Каждый вектор $\vec{x}$ линейного $n$ – мерного пространства $R^n$ можно представить, и притом единственным способом, в виде линейной комбинации векторов базиса.

Доказательство:

Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ – произвольный базис $n$ – мерного пространства $R^n$ и $\vec{x} \in R$. Так как каждые $n + 1$ векторов ($n$ – мерного!) пространства $R^n$ линейно зависимы, то зависимы, в частности, и векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n, \vec{x}$, то есть существуют такие не равные одновременно нулю числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha$, что

$$\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n + \alpha\vec{x} = 0.$$

При этом $\alpha \neq 0$, ибо если $\alpha = 0$, то хоть одно из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ было бы отлично от нуля, и векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ были бы линейно зависимы. Следовательно,

$$\vec{x} = -\frac{\alpha_1}{\alpha}\vec{e}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha}\vec{e}_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha}\vec{e}_n.$$

Если ввести обозначение $x_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha}$, где $i = 1, 2, \ldots, n$, то будем иметь

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n,$$

то есть $\vec{x}$ – линейная комбинация векторов базиса.

Это разложение вектора $\vec{x}$ через $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ *единственно*. Если допустить противоположное, что $\vec{x} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \ldots + y_n\vec{e}_n$ то, вычитая из первого равенства второе, получим

$$(x_1 - y_1)\vec{e}_1 + (x_2 - y_2)\vec{e}_2 + \ldots + (x_n - y_n)\vec{e}_n = \vec{0}.$$

Ввиду линейной независимости векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ это возможно только тогда, когда $x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = \ldots = x_n - y_n = 0$, откуда $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, …, $x_n = y_n$.
Таким образом, элемент $\vec{x} \in R^n$ выражается через базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ этого пространства в виде $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$.

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *координатами* вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ и записывают $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Из теоремы следует, что два элемента $n$ – мерного пространства с заданным базисом равны тогда и только тогда, когда их координаты в этом базисе равны.

В $n$ – мерном пространстве можно выбирать различные базисы; один и тот же элемент в различных базисах будет иметь различные координаты.

Пусть в линейном пространстве $R^n$ задан базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ и произвольные элементы (векторы) $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Тогда *при сложении векторов их соответственные координаты складываются*:

если $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$ и $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \ldots + y_n\vec{e}_n$,
то $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1)\,\vec{e}_1 + (x_2 + y_2)\,\vec{e}_2 + \ldots + (x_n + y_n)\,\vec{e}_n$.

*При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число*:

$$\alpha\vec{x} = (\alpha x_1)\vec{e}_1 + (\alpha x_2)\vec{e}_2 + \ldots + (\alpha x_n)\vec{e}_n.$$

У нулевого вектора все координаты равны нулю, так как из равенства

$$\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n = \vec{0},$$

ввиду линейной независимости векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, вытекает, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Вектор, противоположный вектору $\vec{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$, равен, очевидно, $(-x_1; -x_2; \ldots; -x_n)$.

Для определения размерности линейного пространства полезно использовать следующую **теорему:**

Если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ – система линейно независимых векторов пространства $R^n$ и любой вектор $\vec{x} \in R^n$ линейно выражается через $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, то пространство $R^n$ является $n$ – мерным, а векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ – его базисом.

**Пример 1.** Доказать, что векторы $\vec{e}_1 = (1;\ 2)$ и $\vec{e}_2 = (3;\ 4)$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{x} = (7;\ 10)$ в этом базисе.

*Решение.* Чтобы векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ составили базис пространства $R^2$, они должны быть линейно независимы, то есть ранг матрицы, составленной из компонентов векторов, должен равняться двум. Получим $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Определитель этой квадратной матрицы равен

$$\Delta = -2 \neq 0.$$

Поэтому ранг матрицы $r(A) = 2$. Следовательно, векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ линейно независимы и образуют базис в $R^2$. Существует единственный набор чисел $\alpha_1$ и $\alpha_2$ такой, что $\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2$. От векторного равенства перейдем к равенствам над соответствующими компонентами, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 = 7, \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 10. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получим, что $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$. Значит, $\vec{x} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$.

**Пример 2.** Проверить, что векторы $\vec{x}_1 = (2; -1; 0; 1)$, $\vec{x}_2 = (2; 2; -1; 3)$, $\vec{x}_3 = (0; 1; -1; 0)$ образуют базис и выразить вектор $\vec{x}_4 = (4; -2; 0; 2)$ через этот базис.

Решение. Найдем ранг матрицы, составленной из координат векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ то есть}$$

$r(M) = 3$ и равен числу векторов. Поэтому векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ образуют базис в $R^3$. Разложим вектор $\vec{x}_4$ по этому базису. Существует единственный набор чисел $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ такой, что $\vec{x}_4 = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \alpha_3\vec{x}_3$ .

От векторного равенства перейдем к равенствам над соответствующими компонентами, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2 \cdot \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 = 4, \\ -\alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 + 1 \cdot \alpha_3 = -2, \\ 0 \cdot \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 3 \cdot \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 = 2. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса для нахождения $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$. Для этого составим расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Так как ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы, то по теореме Кронекера-Капелли система имеет решение. Найдем это решение, составив систему уравнений по последней матрице:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 2, \\ \alpha_2 = 0, \\ \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Получим $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Таким образом, векторы линейно зависимы и

$$\vec{x}_4 = 2 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + 0 \cdot \vec{x}_3.$$

**Пример 3.** Показать, что векторы $\vec{x}_1$= (1; 1; 0), $\vec{x}_2$ = (1; –1; 1), $\vec{x}_3$= (–3; 5; –6) образуют базис.

Решение. Векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ образуют базис, если они линейно независимы. Составим векторное равенство $\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \alpha_3\vec{x}_3 = \vec{0}$. От векторного равенства перейдем к равенствам над соответствующими компонентами, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 5\alpha_3 = 0, \\ \qquad \alpha_2 - 6\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Решаем однородную систему линейных уравнений методом Гаусса. Выпишем матрицу $A$ системы и вычислим её ранг

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $r\ (A) = 3$ и равен числу векторов. Значит, система векторов линейно независима.

Составим по последней матрице систему уравнений для нахождения чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0, \\ \quad \alpha_2 - 4\alpha_3 = 0, \\ \qquad 2\alpha_3 = 0, \end{cases}$$

откуда получим единственное нулевое решение системы $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Значит, векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ линейно независимы и, следовательно, образуют базис.

## 2.3. Переход к новому базису

Пусть в пространстве $R^n$ имеются два базиса: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ (старый) и $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n$ (новый). Каждый из векторов нового базиса можно линейно выразить через векторы старого базиса и наоборот:

$$\begin{gathered} \vec{e}'_1 = a_{11}\,\vec{e}_1 + a_{21}\,\vec{e}_2 + \ldots + a_{n1}\,\vec{e}_n, \\ \vec{e}'_2 = a_{12}\,\vec{e}_1 + a_{22}\,\vec{e}_2 + \ldots + a_{n2}\,\vec{e}_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \vec{e}'_n = a_{1n}\,\vec{e}_1 + a_{2n}\,\vec{e}_2 + \ldots + a_{nn}\,\vec{e}_n. \end{gathered}$$

Матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называют *матрицей перехода* от старого базиса к новому. Заметим, что коэффициенты разложений новых базисных векторов по старым базисным векторам образуют столбцы этой матрицы.

Определитель матрицы $A$ не равен нулю, так как в противном случае её столбцы, а, следовательно, и векторы $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n$ были бы линейно зависимы. Значит, существует обратная матрица $A^{-1}$. Справедливо и обратное утверждение: если определитель матрицы $A$

отличен от нуля, то столбцы её линейно независимы, и значит, векторы $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'$ линейно независимы, то есть образуют некоторый базис. Значит, матрицей перехода может быть любая квадратная матрица порядка $n$ с отличным от нуля определителем.

При переходе от одного базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ векторного пространства к другому базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'$, конечно, изменяются координаты вектора $\vec{x} \in R^n$.

Пусть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – в старом базисе и в то же время $\vec{x} = y_1\vec{e}_1' + y_2\vec{e}_2' + \ldots + y_n\vec{e}_n' = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – в новом.

Если подставить во второе равенство выражения $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'$ через $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, то получим:

$$\vec{x} = y_1(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \ldots + a_{n1}\vec{e}_n) + y_2(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \ldots + a_{n2}\vec{e}_n) +$$
$$+ \ldots + y_n(a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \ldots + a_{nn}\vec{e}_n) = (a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n)\vec{e}_1 +$$
$$+ (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n)\vec{e}_2 + \ldots + (a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n)\vec{e}_n.$$

Ввиду единственности разложения вектора $\vec{x}$ по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ отсюда следует, что

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n. \end{aligned}$$

В матричной форме эти равенства имеют вид:

если $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, то $\boldsymbol{X = A \cdot Y}$.

*Старые координаты вектора $\vec{x}$ получаются из новых, если матрицу перехода A умножить на столбец новых компонент.*

Если известны компоненты вектора в старом базисе, то новые координаты получатся, если последнее равенство умножить слева на обратную матрицу $A^{-1}$:

$$A^{-1} \cdot X = A^{-1} \cdot A \cdot Y, \text{ отсюда имеем } \boldsymbol{Y} = A^{-1} \cdot \boldsymbol{X}.$$

**Пример 1.** Найти координаты вектора $\vec{x} = (3; 4)$ в базисе из векторов $\vec{x}_1 = (1; -1)$, $\vec{x}_2 = (5; 3)$.

Решение. Составим матрицу перехода из компонентов нового базиса $\vec{x}_1, \vec{x}_2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ и найдем обратную матрицу } A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле $\boldsymbol{Y} = A^{-1} \cdot \boldsymbol{X}$ имеем:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -11 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-11}{8} \\ \frac{7}{8} \end{pmatrix},$$

то есть разложение вектора $\vec{x}$ по базису $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ имеет вид:

$$\vec{x} = \frac{-11}{8}\vec{x}_1 + \frac{7}{8}\vec{x}_2 = \left(\frac{-11}{8}; \frac{7}{8}\right).$$

**Пример 2.** Проверить, что векторы $\vec{x}_1 = (1; 1; 2)$, $\vec{x}_2 = (2; -1; 0)$, $\vec{x}_3 = (-1; 1; 1)$ образуют базис и выразить вектор $\vec{x}_4 = (6; -1; 3)$ через этот базис.

Решение. Выразим связь между базисами

$$\begin{cases} \vec{x}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3\,, \\ \vec{x}_2 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 0\vec{e}_3\,, \\ \vec{x}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3\,. \end{cases}$$

Матрица перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ к базису $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Найдем $A^{-1}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пусть $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ – координатный столбец вектора $\vec{x}_4$ в новом базисе. Тогда, применив формулу $Y = A^{-1} \cdot X$, получим: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Таким образом, разложение вектора $\vec{x}_4$ по базису $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ имеет вид:

$$\vec{x}_4 = \vec{x}_1 + 3\vec{x}_2 + \vec{x}_3.$$

Тот же самый результат можно было получить, записав формулу $X = A \cdot Y$ в виде системы уравнений

$$\begin{cases} 6 = y_1 + 2y_2 - y_3, \\ -1 = y_1 - y_2 + y_3, \\ 3 = 2y_1 + y_3. \end{cases}$$

и решив её, например, методом Гаусса.

## Упражнения для самостоятельного решения

1. Определить ранг системы векторов и разложить вектор $\vec{a}_1$ по новому базису, если:

$\vec{a}_1 = (2; 5; 3)$, $\vec{a}_2 = (-1; 2; 2)$, $\vec{a}_3 = (3; 8; 5)$, $\vec{a}_4 = (-9; -6; -1)$, $\vec{a}_5 = (2; -17; -14)$.

Ответ: $\vec{a}_1 = -2\vec{a}_2 + 1{,}5\vec{a}_3 + 0{,}5\vec{a}_4$.

2. Найти какую-нибудь систему базисных векторов данной системы векторов и выразить все векторы, не входящие в число базисных, через базисные векторы.

2.1. $\vec{a}_1 = (5,2,-3,1)$, $\vec{a}_2 = (4,1,-2,3)$, $\vec{a}_3 = (1,1,-1,-2)$, $\vec{a}_4 = (3,4,-1,2)$.

2.2. $\vec{a}_1 = (2,-1,3,5)$, $\vec{a}_2 = (4,-3,1,3)$, $\vec{a}_3 = (3,-2,3,4)$, $\vec{a}_4 = (4,-1,15,17)$, $\vec{a}_5 = (7,-6,-7,0)$.

Ответы: 2.1. в качестве базисных векторов можно взять, например, векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_4$; $\vec{a}_3 = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$.

*Указание:* для определения коэффициентов разложения вектора $\vec{a}_3$ по базису $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_4$ составить векторное уравнение

$$\vec{a}_3 = \vec{a}_1 \cdot x_1 + \vec{a}_2 \cdot x_2 + \vec{a}_4 \cdot x_4,$$

а затем перейти к системе уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 1, \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -2; \end{cases}$$

2.2. базисными, например, могут быть векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$;

$$\vec{a}_4 = 2\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 + 4\vec{a}_3, \ \vec{a}_5 = \vec{a}_1 + 5\vec{a}_2 - 5\vec{a}_3.$$

## 2.4. Евклидово пространство

В векторном (линейном) пространстве не вводится понятие длины вектора и угла между векторами. Поэтому аксиоматично дается понятие скалярного произведения двух элементов этого пространства и из него устанавливаются формулы для нахождения длины вектора и угла между векторами.

Линейное пространство $R$ называется *евклидовым*, если имеется правило, которое позволяет для каждых двух векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ из $R$ построить действительное число, называемое *скалярным произведением* векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ и обозначаемое $(\vec{x}, \vec{y})$ или $\vec{x} \cdot \vec{y}$, причем это правило удовлетворяет следующим четырем аксиомам:

1) $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$ $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$ (коммутативность);
2) $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$ $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E$ (дистрибутивность);
3) $(\lambda\vec{x}, \vec{y}) = \lambda(\vec{x}, \vec{y})$ $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$ , $\forall \lambda \in R$ (однородность);
4) $(\vec{x}, \vec{x}) > 0$, если $\vec{x} \neq 0$ (положительная определенность),
   $(\vec{x}, \vec{x}) = 0$, если $\vec{x} = 0$,

где буквой $E$ обозначено евклидово пространство. Если известна его размерность, то обозначают $\mathrm{E}^n$.

Скалярное произведение любого вектора $\vec{x} \in E$ на себя называется *скалярным квадратом* вектора $\vec{x}$.

*Длиной (нормой)* вектора $\vec{x}$ в евклидовом пространстве называется корень квадратный из его скалярного квадрата:

$$|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Из свойств скалярного произведения вытекают *свойства модуля*:
для всех $\vec{x}, \vec{y} \in E$ и действительных чисел $\lambda$

1) $|\vec{x}| = \vec{0}$ тогда и только тогда, когда $\vec{x} = \vec{0}$;
2) $|\lambda\vec{x}| = |\lambda| \cdot |\vec{x}|$;
3) $|(\vec{x}, \vec{y})| \leq |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|$ (неравенство Коши-Буняковского). Знак неравенства возможен тогда и только тогда, когда множество $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ линейно зависимо;
4) $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$ (неравенство треугольника).

Вектор, длина которого равна единице, называется *нормированным*. Если $\vec{x} \in E$ – ненулевой вектор, то нетрудно видеть, что $\frac{1}{|\vec{x}|} \cdot \vec{x}$ (или записывают $\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$) является нормированным вектором.

*Угол $\varphi$ между векторами* $\vec{x}$ и $\vec{y}$ определяется по формуле:

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}, \text{ где } 0 \le \varphi \le \pi.$$

Два вектора называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю ($\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$). В частности, нулевой вектор $\vec{0}$ ортогонален каждому вектору пространства *E*.

$n$ – последовательность $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \dots, \vec{x}_n$ векторов $\vec{x}_i$ евклидова векторного пространства называется *ортогональной системой,* если она не содержит нулевого вектора и векторы $\vec{x}_i$ попарно ортогональны, т. е. $\vec{x}_i \neq 0$ и $(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = 0$ при $i \neq j$; она называется *ортонормированной системой,* если, кроме того, все векторы $\vec{x}_i$ являются единичными ($|\vec{x}_i| = 1$), т. е. если

$$(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq j, \\ 1 \text{ при } i = j. \end{cases}$$

Ортонормированная система, которая одновременно является базисом векторного пространства, называется *ортонормированным базисом.*

Свойства ортогональной системы

1. Каждая ортогональная система линейно независима.
2. Если координаты двух векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ заданы относительно ортонормированного базиса *B*: $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_B$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)_B$, то их скалярное произведение равно $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$.
3. Каждое евклидово векторное пространство конечной размерности имеет ортонормированный базис.

Свойства ортонормированного базиса

Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ – ортонормированный базис в произвольном $n$ – мерном евклидовом пространстве *E*; $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ – два произвольных элемента этого пространства с заданными координатами в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, тогда справедливы следующие утверждения:

1) $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$, т.е. в ортонормированном базисе скалярное произведение любых двух элементов равно сумме произведений соответствующих координат этих элементов;

2) $x_i = (\vec{x}, \vec{e}_i)$, где $i = 1, 2, \dots, n$, т.е. координаты произвольного элемента в ортонормированном базисе равны скалярным произведениям этого элемента на соответствующие элементы базиса.

Примером ортонормированного базиса может служить декартов прямоугольный базис евклидова пространства всех свободных векторов

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1).$$

**Пример 1.** Проверить, что векторы $\vec{e}_1 = (2, 0, -2)$, $\vec{e}_2 = (1, -2, 1)$, $\vec{e}_3 = (1, 1, 1)$ образуют ортонормированный базис и для вектора $\vec{x} = (3; -2, 5)$ найти разложение по этому базису.

<u>Решение.</u> Проверим, составляют ли векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ базис в $E^3$. Для этого составим определитель из компонентов векторов и вычислим его

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0.$$

Следовательно, векторы составляют базис в $E^3$.

Проверим ортогональность векторов с помощью скалярного произведения:

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 2 + 0 - 2 = 0$, значит, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ – ортогональны,

$(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = 2 + 0 - 2 = 0$, значит, $\vec{e}_1, \vec{e}_3$ – ортогональны,

$(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = 1 - 2 + 1 = 0$, значит, $\vec{e}_2, \vec{e}_3$ – ортогональны.

Таким образом, векторы попарно ортогональны и образуют базис. Составим теперь ортонормированный базис:

$$\vec{e}_1^* = \frac{\vec{e}_1}{|\vec{e}_1|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; -\frac{1}{\sqrt{2}}), \quad \vec{e}_2^* = \frac{\vec{e}_2}{|\vec{e}_2|} = (\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}), \quad \vec{e}_3^* = \frac{\vec{e}_3}{|\vec{e}_3|} = (\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}).$$

Векторы $\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*, \vec{e}_3^*$ ортогональны и имеют единичную длину, то есть составляют ортонормированный базис, и координаты вектора $\vec{x}$ относительно этого базиса равны скалярным произведениям вектора $\vec{x}$ на соответствующие базисные векторы:

$$(\vec{x}, \vec{e}_1^*) = \frac{3}{\sqrt{2}} + 0 - \frac{5}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2},$$

$$(\vec{x}, \vec{e}_2^*) = \frac{3}{\sqrt{6}} + \frac{4}{\sqrt{6}} + \frac{5}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6},$$

$$(\vec{x}, \vec{e}_3^*) = \frac{3}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

Ответ: $\vec{x} = -\sqrt{2}\vec{e}_1^* + 2\sqrt{6}\vec{e}_2^* + 2\sqrt{3}\,\vec{e}_3^*$.

**Пример 2.** При каких значениях $m$ и $n$ базис, образованный векторами $\vec{e}_1^* = \frac{m}{3}\vec{e}_1 + \frac{1-m}{3}\vec{e}_2 + n\vec{e}_3$, $\vec{e}_2^* = \frac{1-m}{3}\vec{e}_1 + n\vec{e}_2 + \frac{m}{3}\vec{e}_3$, $\vec{e}_3^* = n\vec{e}_1 + \frac{m}{3}\vec{e}_2 + \frac{1-m}{3}\vec{e}_3$, является нормированным?

<u>Решение.</u> Из условий $|\vec{e}_i^*| = 1$ и $(\vec{e}_i^*, \vec{e}_j^*) = 0$ (при $i \neq j$) получим систему уравнений

$$\begin{cases} m^2 + (1-m)^2 + 9n^2 = 9, \\ m(1-m) + 3(1-m)n + 3mn = 0. \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим $n = -\frac{m(1-m)}{3}$. Подставив это значение $n$ в первое уравнение, имеем

$$m^2 + (1-m)^2 + m^2(1-m)^2 = 9;\ 1 - 2m(1-m) + m^2(1-m)^2 = 9;\ (1 - m + m^2)^2 = 9.$$

Так как $1 - m + m^2 > 0$ при $\forall m \in R$, то $1 - m + m^2 = 3$, т.е. $m^2 - m - 2 = 0$. Следовательно, $m_1 = -1$, $m_2 = 2$, $n_1 = -\frac{2}{3}$, $n_2 = \frac{2}{3}$. Итак, получаем два ортонормированных базиса:

$$\vec{e}_1^{(1)} = -\frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2 - \frac{2}{3}\vec{e}_3,\ \vec{e}_2^{(1)} = \frac{2}{3}\vec{e}_1 - \frac{2}{3}\vec{e}_2 - \frac{1}{3}\vec{e}_3,\ \vec{e}_3^{(1)} = -\frac{2}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{3}\vec{e}_2 + \frac{2}{3}\vec{e}_3 \text{ и}$$

$$\vec{e}_1^{(2)} = \frac{2}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{3}\vec{e}_2 + \frac{2}{3}\vec{e}_3,\ \vec{e}_2^{(2)} = -\frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{2}{3}\vec{e}_3,\ \vec{e}_3^{(2)} = \frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2 - \frac{1}{3}\vec{e}_3.$$

**Пример 3.** Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ образуют ортогональный базис евклидова пространства $E^3$ и $|\vec{e}_1| = 2$, $|\vec{e}_2| = 1$, $|\vec{e}_3| = 3$. Найти угол $\varphi$ между векторами $\vec{a} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$ и $\vec{b} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

<u>Решение</u>. Так векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ образуют ортогональный базис в $E^3$, то

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = (\vec{e}_1, \vec{e}_3) = (\vec{e}_2, \vec{e}_3) = 0.$$

Поэтому $(\vec{a}, \vec{a}) = (\vec{e}_1, \vec{e}_1) + (\vec{e}_2, \vec{e}_2) + (\vec{e}_3, \vec{e}_3) = |\vec{e}_1|^2 + |\vec{e}_2|^2 + |\vec{e}_3|^2 = 4 + 1 + 9 = 14$,

$$(\vec{b}, \vec{b}) = (\vec{e}_1, \vec{e}_1) + (\vec{e}_2, \vec{e}_2) + (\vec{e}_3, \vec{e}_3) = 14,$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{e}_1, \vec{e}_1) + (\vec{e}_2, \vec{e}_2) - (\vec{e}_3, \vec{e}_3) = |\vec{e}_1|^2 + |\vec{e}_2|^2 - |\vec{e}_3|^2 = 4 + 1 - 9 = -4.$$

Тогда $\cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{-4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = -\frac{2}{7}$.

Ответ: $\varphi = \arccos(-\frac{2}{7})$.

**Упражнения для самостоятельного решения**

1. Проверить составляют ли векторы ортонормированный базис и разложить вектор $\vec{x}$ по этому базису, если:
1) $\vec{e}_1$ = (1; 2; 5), $\vec{e}_2$ = (2; –3; –1), $\vec{e}_3$ = (2; –3; –2), $\vec{x}$ = (3; –1; 1);
2) $\vec{e}_1$ = (1; –1; 0), $\vec{e}_2$ = (2; 2; 1), $\vec{e}_3$ = (1; 1; –4), $\vec{x}$ = (2; 5; 3).
2. Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ образуют ортонормированный базис. Найти угол между векторами $\vec{x} = 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3$ и $\vec{y} = 4\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$.
3. Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ образуют ортогональный базис. Найти скалярное произведение векторов $\vec{x} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$ и $\vec{y} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 5\vec{e}_3$, если $|\vec{e}_1| = 1$, $|\vec{e}_2| = 2$, $|\vec{e}_3| = 2$.

Ответы: 1. 1) $\vec{x} = \vec{e}_1^* + 2\vec{e}_2^* + 3\vec{e}_3^*$; 2) $\vec{x} = -\frac{3}{\sqrt{2}}\vec{e}_1^* + \frac{17}{3}\vec{e}_2^* - \frac{2}{3\sqrt{2}}\vec{e}_3^*$. 2. $\arccos\sqrt{\frac{5}{42}} \approx 70°$.
3. $(\vec{x}, \vec{y}) = -90$, $|\vec{x}| = 2\sqrt{26}$, $|\vec{y}| = \sqrt{105}$.

# 3. ОДНОРОДНЫЕ И НЕОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

## 3.1. Однородные системы линейных уравнений

Рассмотрим систему $m$ линейных однородных уравнений с $n$ неизвестными. Такая система имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

то есть это система уравнений, в которых все свободные члены равны нулю.

Очевидно, что система линейных однородных уравнений всегда совместна ($r(A) = r(A_1)$ - ранг матрицы коэффициентов при неизвестных равен рангу расширенной матрицы), так как она всегда имеет, по крайней мере, нулевое (или тривиальное) решение $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Если в системе (5.1) $m = n$ (то есть число уравнений равно числу неизвестных), а её определитель отличен от нуля, то такая система имеет только одно нулевое решение, что следует из формул Крамера.

**Пример 1.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $|A| = \Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 17 \neq 0$. Так как $m = n = 3$ и $\Delta \neq 0$, то система имеет только одно нулевое решение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Важно выяснить, при каком условии однородная система (3.1.1) является неопределенной, а значит, - что бывает особенно важно – имеет ненулевые решения. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

**Теорема.** Для того чтобы однородная система имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг $r$ её матрицы коэффициентов был меньше числа неизвестных $n$.

Действительно, если $r = n$, то, как утверждалось выше, система (3.1.1) имеет единственное и, значит, только нулевое решение: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Если же $r < n$, то система (3.1.1) является неопределенной (ведь несовместной она быть не может), и значит, она имеет бесчисленное множество решений, в том числе и бесчисленное множество ненулевых решений.

<u>Следствие 1</u>. Если число уравнений однородной системы меньше числа её неизвестных, то есть $m < n$, то эта система имеет ненулевые решения.

<u>Следствие 2.</u> Для того чтобы однородная система $n$ линейных уравнений с $n$ неизвестными, то есть $m = n$, обладала ненулевыми решениями, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель $\Delta$ был равен нулю.

**Пример 2.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

<u>Решение.</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, $r(A) = 2$ $\quad \left(\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0\right)$, $\quad n = 3$.

Так как $r < n$, то система имеет бесчисленное множество решений. Найдем их. Пусть $x_1$ и $x_2$ – базисные переменные, $x_3$ – свободная переменная.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -4x_3, \\ 2x_1 - 3x_2 = -5x_3. \end{cases}$$

Найдем $x_1$ и $x_2$, например, по формулам Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4x_3 & -2 \\ -5x_3 & -3 \end{vmatrix} = 2x_3, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4x_3 \\ 2 & -5x_3 \end{vmatrix} = 3x_3.$$

Тогда получим $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -4x_3 & -2 \\ -5x_3 & -3 \end{vmatrix}}{1} = 2x_3$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4x_3 \\ 2 & -5x_3 \end{vmatrix}}{1} = 3x_3$ - общее решение, где $x_3 \epsilon$ R. Обозначим $x_3 = t$, тогда $x_1 = 2t$, $x_2 = 3t$. Запишем решение $(2t;\ 3t;\ t)$. Придавая произвольные значения $t$, получим соответствующие различные решения данной системы. Например, положив $t = 0$, получим одно частное решение: (0; 0; 0). Положив $t = 1$, получим второе частное решение: (2, 3, 1).

**Пример 3.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

<u>Решение.</u> $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $|A| = \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$. Так как $m = n = 3$ и $\Delta = 0$, то

система имеет бесчисленное множество решений. Найдем их.

Так как среди миноров определителя однородной системы есть хотя бы один минор второго порядка отличный от нуля (например, $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$), то система сводится к двум независимым уравнениям (третье является их следствием).

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases}$$

Здесь $x_1$ и $x_2$ - основные переменные, $x_3$ - свободная переменная. Тогда имеем

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = x_3, \\ x_1 + 2x_2 = -9x_3. \end{cases}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_3 & 2 \\ -9x_3 & 2 \end{vmatrix} = 20x_3, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & x_3 \\ 1 & -9x_3 \end{vmatrix} = -28x_3.$$

Тогда получим $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} x_3 & 2 \\ -9x_3 & 2 \end{vmatrix}}{4} = 5x_3$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & x_3 \\ 1 & -9x_3 \end{vmatrix}}{4} = -7x_3$ - общее решение, где $x_3 \epsilon$ R.

Обозначим $x_3 = t$, тогда $x_1 = 5t$, $x_2 = -7t$. Запишем решение ($5t$; $-7t$; $t$). Придавая произвольные значения $t$, получим соответствующие различные решения данной системы. Например, положив $t = 0$, получим одно частное решение: (0; 0; 0). Положив $t = 1$, получим второе частное решение: (5, –7, 1).

**Пример 4.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель основной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}, |A| = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0. \text{ Так как } m = n = 3$$

и $\Delta = 0$, то система имеет бесчисленное множество решений. Найдем их.

Так как все миноры второго и третьего порядков определителя однородной системы равны нулю (коэффициенты при неизвестных пропорциональны), то система сводится к одному уравнению (остальные два являются его следствиями).

Тогда получаем

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

Здесь $x_1$ - базисная переменная, $x_2$ и $x_3$ - свободные. Отсюда имеем $x_1 = -x_2 + x_3$ - общее решение, где $x_2, x_3 \epsilon$ R. Обозначим $x_2 = t_1$ $x_3 = t_2$, тогда $x_1 = -t_1 + t_2$. Запишем решение ($-t_1 + t_2$; $t_1$; $t_2$). Придавая произвольные значения $t_1$ и $t_2$, получим соответствующие различные решения данной системы. Например, положив $t_1 = 0$, $t_2 = 0$, получим одно частное решение: (0; 0; 0). Положив $t_1 = 1$, $t_2 = 1$, получим второе частное решение: (0, 1, 1).

Решения системы уравнений имеют такие свойства:

1. Пусть $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, …, $x_n = \alpha_n$ – какое-нибудь ненулевое решение системы (3.1.1). Это решение можно рассматривать как строку

$$\vec{e}_1 = (\alpha_1; \alpha_2; \ldots, \alpha_n),$$

состоящую из $n$ элементов. Тогда строка $c\vec{e}_1 = (c\alpha_1, c\alpha_2, \ldots, c\alpha_n)$ тоже будет решением системы.

2. Если строки $\vec{e}_1 = (\alpha_1; \alpha_2; \ldots, \alpha_n)$ и $\vec{e}_2 = (\beta_1; \beta_2; \ldots, \beta_n)$ – решения системы (3.1.1), то при любых $c_1$ и $c_2$ линейная комбинация

$$c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 = (c_1\alpha_1 + c_2\beta_1, c_1\alpha_2 + c_2\beta_2 , \ldots, c_1\alpha_n + c_2\beta_n)$$

этих решений тоже будет решением системы.

Убедиться в справедливости этих свойств решений однородных систем можно непосредственной подстановкой их в уравнения системы.

Очевидно, что множество решений однородной системы образует линейное векторное пространство.

Итак, любая линейная комбинация решений однородной системы (3.1.1) тоже будет её решением. Поэтому представляет интерес найти такие линейно независимые решения системы (3.1.1), через которые линейно выражались бы все остальные её решения.

Совокупность линейно независимых решений $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ системы уравнений (3.1.1) называется **фундаментальной системой решений**, если любое решение системы уравнений (3.1.1) может быть представлено в виде линейной комбинации векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.

<u>Теорема о существовании фундаментальной системы решений:</u>

Если ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

меньше числа неизвестных *n*, то система (3.1.1) имеет ненулевые решения. Число векторов, определяющих фундаментальную систему решений, находится по формуле $k = n - r$, где $r$ – ранг матрицы.

Поэтому **общее решение системы** (3.1.1) линейных однородных уравнений имеет вид: $X_{oo} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + \ldots + c_k\vec{e}_k$, где $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k$ – любая фундаментальная система решений (ФСР), $c_1, c_2, \ldots, c_k$ – произвольные числа, $k = n - r$.

Таким образом, если рассматривается линейное пространство $R^n$, векторами которого являются всевозможные системы *n* действительных чисел, то совокупность всех решений системы (3.1.1) является подпространством пространства $R^n$. Размерность этого подпространства равна *k*.

<u>Способ построения фундаментальной системы решений.</u>

Пусть система однородных уравнений имеет ранг $r < n$. Тогда существует минор $M_r$ порядка *r* матрицы *A*, не равный нулю. Пусть для определенности это будет минор

$$M_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Исходная система уравнений может быть записана в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = -a_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_n = -a_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots a_{rn}x_n. \end{cases}$$

Тогда базисные неизвестные этой системы $x_1, x_2, \cdots, x_r$ линейно выражаются через свободные: $x_{r+1}$, $x_{r+2}$, …, $x_n$. Имеем

$$\begin{cases} x_1 = \beta_{11}x_{r+1} + \beta_{12}x_{r+2} + \cdots + \beta_{1,n-r}\, x_n, \\ x_2 = \beta_{21}x_{r+1} + \beta_{22}x_{r+2} + \cdots + \beta_{2,n-r}\, x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_r = \beta_{r1}x_{r+1} + \beta_{r2}x_{r+2} + \cdots + \beta_{r,n-r}\, x_n. \end{cases}$$

Придавая свободным неизвестным значения $x_{r+1} = 1$, $x_{r+2} = 0$, …, $x_n = 0$, получим соответствующие значения первых $r$ неизвестных:

$$x_1 = \beta_{11},\ x_2 = \beta_{21},\ \dots,\ x_r = \beta_{r1}.$$

Это дает нам строку - решение системы (3.1.1.)

$$\vec{e}_1 = (\beta_{11}, \beta_{21}, \dots, \beta_{r1}, 1, 0, \dots, 0).$$

Аналогично, придавая свободным неизвестным значения

$$x_{r+1} = 0,\ x_{r+2} = 1,\ \dots,\ x_n = 0$$

и вычисляя соответствующие значения неизвестных

$$x_1 = \beta_{21},\ x_2 = \beta_{22},\ \dots,\ x_r = \beta_{r2},$$

получим второе решение системы

$$\vec{e}_2 = (\beta_{21}, \beta_{22}, \dots, \beta_{r2}, 0, 1, \dots, 0)$$

и так далее. Аналогично при $x_{r+1} = 0$, $x_{r+2} = 0$, …, $x_n = 1$ решением будет вектор-строка $\vec{e}_{n-r} = (\beta_{n-r,1}, \beta_{n-r,2}, \dots, \beta_{n-r,r}, 0, 0, \dots, 1)$. Так мы найдем всего $k = n - r$ решений системы (3.1.1.):

$$\begin{gathered} \vec{e}_1 = (\beta_{11}, \beta_{21}, \dots, \beta_{r1}, 1, 0, \dots, 0), \\ \vec{e}_2 = (\beta_{12}, \beta_{22}, \dots, \beta_{r2}, 0, 1, \dots, 0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \vec{e}_{n-r} = (\beta_{1,n-r}, \beta_{2,n-r}, \dots, \beta_{r,n-r}, 0, 0, \dots, 1). \end{gathered}$$

Векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, …, $\vec{e}_{n-r}$ линейно независимы, так как матрица $B$, составленная из компонентов этих векторов, имеет ранг, равный $k = n - r$, то есть равный числу векторов.

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{r1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{r2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n-r,1} & \beta_{n-r,2} & \dots & \beta_{n-r,r} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этой матрице есть отличный от нуля минор $k$ – го порядка, например, содержащий последние $k$ столбцов.

*Замечание.* Для того чтобы получить фундаментальную систему решений, можно было бы придавать свободным неизвестным и какие угодно другие значения, лишь бы соответствующий определитель $k$ – го порядка был не равен нулю. Так можно найти сколько угодно фундаментальных систем решений, каждая из которых состоит из $k = n - r$ строк. Но удобнее всего взять, как было показано выше, в векторном пространстве $R^n$ *канонический базис*, то есть множество векторов

$$B = \{\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1)\}.$$

**Пример.** Найти общее решение однородной системы уравнений. Указать базис пространства решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Определим ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычитаем из 3-й строки 2-ю, а из 4-й строки 1-ю:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Так как элементы 3-й строки пропорциональны соответствующим элементам 1-й строки, а элементы 4-й строки пропорциональны элементам 2-й строки, то 3-ю и 4-ю строки можно вычеркнуть:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ранг матрицы $A$ равен 2 и $k = n - r = 4 - 2 = 2$. Значит, размерность подпространства решений равна 2. То есть фундаментальная система решений состоит из двух решений. Так как $r = 2$, то из четырех уравнений возьмем два:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Пусть $x_1$ и $x_2$ – главные неизвестные, $x_3$ и $x_4$ – свободные неизвестные. Тогда выразим $x_1$ и $x_2$ через $x_3$ и $x_4$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 - x_4, \\ x_1 - x_2 = -x_3 + x_4. \end{cases}$$

Полагая $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, получим систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 - x_2 = -1. \end{cases}$$

Следовательно, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ и $\vec{e}_1 = (0;\ 1;\ 1;\ 0)$. Полагая теперь $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, получим систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1, \\ x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

Тогда $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ и $\vec{e}_2 = (0; -1; 0; 1)$.

Таким образом, векторы $\vec{e}_1 = (0;\ 1;\ 1;\ 0)$, $\vec{e}_2 = (0; -1; 0; 1)$ – *фундаментальная система решений*. Они образуют базис пространства решений, размерность которого равна $k = 2$.
*Общее решение системы* уравнений будет иметь вид:
в векторной форме: $X_{oo} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2$ или

в координатной форме: $X_{oo} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

т. е. $X_{oo} = (0;\ c_1 - c_2;\ c_1;\ c_2)$, где $c_1$, $c_2$ – произвольные действительные числа.

**Пример.** Найти фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 6x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + \ 4x_3 + 9x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 + 13x_4 = 0. \end{cases}$$

<u>Решение.</u> Найдём ранг системы векторов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 9 \\ 3 & 1 & 7 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & -5 & 10 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, ранг $r$ = 2, $n$ = 4, то есть $r < n$, тогда $k = n - r = 4 - 2 = 2$. Значит, размерность подпространства решений равна 2. То есть фундаментальная система решений состоит из двух решений. Система, соответствующая последней матрице, имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 6x_4 = 0, \\ \qquad x_2 - 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, имеем две базисные переменные и две свободные. Пусть $x_1$ и $x_2$ – базисные переменные, а $x_3$ и $x_4$ – свободные. Тогда выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = x_3 - 6x_4, \\ \qquad x_2 = 2x_3 - x_4. \end{cases}$$

Полагая $x_3$ = 1, $x_4$ = 0, получим систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ \qquad x_2 = 2. \end{cases}$$

Следовательно, $x_1$ = – 3, $x_2$ = 2 и $\vec{e}_1$ = (–3; 2; 1; 0). Полагая теперь $x_3$ = 0, $x_4$ = 1, получим систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -6, \\ \qquad x_2 = -1. \end{cases}$$

Тогда $x_1$ = – 4, $x_2$ = –1 и $\vec{e}_2$ = (–4; –1; 0; 1).

Таким образом, векторы $\vec{e}_1$ = (–3; 2; 1; 0), $\vec{e}_2$ = (–4; –1; 0; 1) – *фундаментальная система решений*. Они образуют базис пространства решений, размерность которого равна $k$ = 2. *Общее решение системы уравнений* будет иметь вид:

в векторной форме: $X_{oo} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2$ или

в координатной форме: $X_{oo} = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

т. е. $X_{oo} = (-3c_1 - 4c_2;\ 2c_1 - c_2;\ c_1;\ c_2)$, где $c_1$, $c_2$ – произвольные действительные числа.

**Упражнения для самостоятельного решения**

1. Решить системы однородных линейных уравнений:

$$1.1.\quad \begin{cases} -5x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 6x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 7x_3 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

$$1.2.\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = -\frac{1}{3}x_3$, $x_2 = -\frac{2}{3}x_3$, $x_3 \epsilon$ R.

2. Найти фундаментальную систему решений однородной системы уравнений:

$$2.1.\quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\vec{e}_1 = (\frac{5}{7}; \frac{11}{7}; 1; 0)$, $\vec{e}_2 = (\frac{1}{7}; \frac{5}{7}; 0; 1)$.

$$2.2.\quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 0, \\ 5x_1 - 5x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\vec{e}_1 = (7; 13; 5; 0)$, $\vec{e}_2 = (-9; -16; 0; 5)$.

$$2.3.\quad \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 0, \\ -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 5x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\vec{e}_1 = (-\frac{1}{13}; \frac{10}{13}; 1; 0; 0)$, $\vec{e}_2 = (-\frac{5}{13}; \frac{11}{13}; 0; 1; 0)$, $\vec{e}_3 = (-\frac{10}{13}; \frac{9}{13}; 0; 0; 1)$.

## 3.2. Неоднородные системы линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

и соответствующую ей систему однородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{3.2.2}$$

Заметим, что исследование произвольных систем линейных уравнений было рассмотрено ранее. Предположим, что система (3.2.1) совместна и ранг $r$ матрицы $A$ системы меньше числа неизвестных $n$, то есть система имеет бесчисленное множество решений.

Пусть $\vec{e}_1 = (\alpha_1; \alpha_2; \ldots, \alpha_n)$ – какое-то фиксированное решение системы (3.2.1) и $\vec{e}_2 = (\beta_1; \beta_2; \ldots, \beta_n)$ – любое другое её решение. Тогда разность

$$\vec{e}_1 - \vec{e}_2 = (\alpha_1 - \beta_1; \alpha_2 - \beta_2; \ldots, \alpha_n - \beta_n)$$

будет решением системы (3.2.2):

если $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + \alpha_n a_{in} = b_i$ и $a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_{in} = b_i$,
то $a_{i1}(\alpha_1 - \beta_1) + a_{i2}(\alpha_2 - \beta_2) + \ldots + a_{in}(\alpha_n - \beta_n) = b_i - b_i = 0$.

Пусть $\vec{e}_3 = (\gamma_1; \gamma_2; \ldots, \gamma_n)$ – произвольное решение системы (3.2.2), тогда строка $\vec{e}_1 + \vec{e}_3 = (\alpha_1 + \gamma_1; \alpha_2 + \gamma_2; \ldots, \alpha_n + \gamma_n)$ будет удовлетворять системе (3.2.1):

если $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{in}\alpha_n = b_i$ и $a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \ldots + a_{in}\gamma_n = 0$, то
$a_{i1}(\alpha_1 + \gamma_1) + a_{i2}(\alpha_2 + \gamma_2) + \ldots + a_{in}(\alpha_n + \gamma_n) = b_i + 0 = b_i$.

Отсюда следует, что все решения системы (3.2.1) можно получить, прибавляя к одному какому-нибудь её решению всевозможные решения однородной системы (3.2.2). Другими словами, *общее решение неоднородной системы* (3.2.1) *равно сумме общего решения однородной системы и произвольного, но фиксированного решения системы* (3.2.1): если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k$ – фундаментальная система решений однородной системы (3.2.2) и $\vec{e}_0$ – произвольное фиксированное решение неоднородной системы (3.2.1), то общее решение системы (3.2.1) имеет вид:

$$c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + \ldots + c_k\vec{e}_k + \vec{e}_0,$$

где $c_1$, $c_2$, …, $c_k$ – произвольные числа. Если обозначить $\vec{e}_0 = X^*$, а $X_{\text{он}}$ – общее решение неоднородной системы линейных уравнений, то кратко можно записать: $X_{\text{он}} = X_{\text{оо}} + X^*$.

**Пример.** Найти общее решение неоднородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 1, \end{cases}$$

используя фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

Решение. 1. Применяя метод Гаусса к расширенной матрице системы, получим общее решение в виде выражения главных неизвестных через свободные

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы равны, то есть $r = 2$. Значит, система совместна и имеет бесчисленное множество решений.

Выпишем базисный минор $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$, следовательно, основными неизвестными будут $x_1$ и $x_4$, а свободными – $x_2$, $x_3$, $x_5$, $x_6$. По преобразованной матрице запишем эквивалентную систему уравнений и получим *общее решение неоднородной системы уравнений:*

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 \qquad\qquad\qquad = 2, \\ \qquad\qquad 3x_4 - 3x_5 + 3x_6 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} + x_2 - x_3, \\ x_4 = -\frac{1}{3} + x_5 - x_6. \end{cases}$$

Пусть $x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = 0$, тогда получим частное решение системы уравнений

$$\vec{e}_0 = X^* = (\tfrac{2}{3}; 0; 0; -\tfrac{1}{3}; 0; 0).$$

2.Найдем фундаментальную систему решений. Запишем однородную систему в виде

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_4 - 3x_5 + 3x_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3, \\ x_4 = x_5 - x_6. \end{cases}$$

Тогда:
при $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$ получим базисный вектор $\vec{e}_1 = (1; 1; 0; 0; 0; 0)$;
при $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$ получим базисный вектор $\vec{e}_2 = (-1; 0; 1; 0; 0; 0)$;
при $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_5 = 1$, $x_6 = 0$ получим базисный вектор $\vec{e}_3 = (0; 0; 0; 1; 1; 0)$;
при $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 1$ получим базисный вектор $\vec{e}_4 = (0; 0; 0; -1; 0; 1)$.

Векторная форма записи общего решения неоднородной системы уравнений

$$X_{\text{он}} = \vec{e}_0 + c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3 + c_4\vec{e}_4.$$

Координатная форма записи общего решения неоднородной системы уравнений

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Упражнения для самостоятельного решения**

1. Найти общее решение неоднородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 = 22, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 7x_4 = 18, \end{cases}$$

используя фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

Ответ: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{106}{19} \\ \frac{100}{19} \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{37}{19} \\ -\frac{41}{19} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{31}{19} \\ -\frac{21}{19} \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Найти общее решение неоднородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 13x_4 + 8x_5 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 11x_4 + 11x_5 = 5 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 + 4x_5 = 1, \end{cases}$$

используя фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

$$\text{Ответ: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где $c_1$, $c_2$, $c_3$ – произвольно задаваемые действительные числа.

# 4. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

## 4.1. Понятие линейного оператора

Рассмотрим два линейных векторных пространства: $R^n$ размерности $n$ и $R^m$ размерности $m$.

Если задан закон (правило), по которому каждому вектору $\vec{x}$ пространства $R^n$ ставится в соответствие единственный вектор $\vec{y}$ пространства $R^m$, то говорят, что задан *оператор (преобразование, отображение)* $\tilde{A}(\vec{x})$, действующий из $R^n$ в $R^m$, и записывают $\vec{y} = \tilde{A}(\vec{x})$.

Оператор (преобразование) $\tilde{A}$ называется *линейным*, если для любых двух векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ пространства $R^n$ и любого действительного числа $\lambda$ справедливы равенства:

1) $\tilde{A}(\vec{x}+\vec{y}) = \tilde{A}(\vec{x}) + \tilde{A}(\vec{y})$ - свойство аддитивности оператора;
2) $\tilde{A}(\lambda\vec{x}) = \lambda\tilde{A}(\vec{x})$ - свойство однородности оператора.

Вектор $\vec{y} = \tilde{A}(\vec{x})$ называется *образом* вектора $\vec{x}$, а сам вектор $\vec{x}$ – *прообразом* вектора $\vec{y}$.

Если пространства $R^n$ и $R^m$ совпадают, то оператор $A$ отображает пространство $R^n$ в себя.

Матрица $A = (a_{ij})$, $(i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ называется *матрицей оператора A* в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, а ранг $r$ матрицы $A$ – *рангом оператора A*.

Можно показать, что каждому линейному оператору $\tilde{A}$ в некотором базисе пространства $R^n$ соответствует матрица $A$, по которой можно пересчитывать любой вектор в его *образ* в этом же базисе. Справедливо и обратное: всякой матрице $A$ $n$ – го порядка соответствует линейный оператор $\tilde{A}$ $n$ – мерного пространства.

*Связь между вектором* $\vec{x}$ *и его образом* $\vec{y} = \tilde{A}(\vec{x})$ можно выразить в матричной форме уравнением

$$\vec{\boldsymbol{y}} = A\cdot\vec{\boldsymbol{x}}, \tag{4.1.1}$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица линейного оператора,

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Выражение (4.1.1) через компоненты векторов имеет вид:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{4.1.2}$$

**Пример.** В пространстве $R^3$ линейный оператор $\tilde{A}$ задан в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найти образ $\vec{y} = \tilde{A}(\vec{x})$ вектора $\vec{x} = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3$.

Решение. По формуле (4.1.2) получаем

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\vec{y} = -5\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 + 8\vec{e}_3$.

## Действия над линейными операторами.

1. *Суммой двух линейных операторов $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$* называется оператор ( $\tilde{A} + \tilde{B}$), определяемый равенством:

$$(\tilde{A} + \tilde{B})(\vec{x}) = \tilde{A}(\vec{x}) + \tilde{B}(\vec{x}).$$

2. *Произведением линейного оператора $\tilde{A}$ на число $\lambda$* называется оператор $\lambda \tilde{A}$, определяемый равенством:

$$\lambda \tilde{A}(\vec{x}) = \lambda(\tilde{A}(\vec{x})).$$

3. *Произведением линейных операторов $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$* называется оператор $\tilde{A} \cdot \tilde{B}$, определяемый равенством:

$$(\widetilde{A} \cdot \widetilde{B})(\vec{x}) = \tilde{A}(\tilde{B}(\vec{x})).$$

Операторы ( $\tilde{A} + \tilde{B}$), $\lambda\tilde{A}$, $(\widetilde{A} \cdot \widetilde{B})$, полученные в результате этих действий, также удовлетворяют свойствам аддитивности и однородности, т. е. являются *линейными*.

4. *Нулевым* $\tilde{O}(\vec{x})$ и *тождественным* $\tilde{E}(\vec{x})$ называются операторы, действующие по правилу:

$$\tilde{O}(\vec{x}) = \vec{0},$$
$$\tilde{E}(\vec{x}) = \vec{x}.$$

Для разных базисов матрицы одного и того же оператора будут различными. Связь между ними дается следующей теоремой.

**Теорема.** Матрицы $A$ и $A^*$ линейного оператора $\tilde{A}$ соответственно в базисах $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ и $\vec{e}_1^{\,*}, \vec{e}_2^{\,*}, \ldots, \vec{e}_n^{\,*}$ связаны соотношением:

$$A^* = C^{-1} \cdot A \cdot C, \qquad (4.1.3)$$

где $C$ – матрица перехода от старого базиса $\{\vec{e}_n\}$ к новому $\{\vec{e}_n^{\,*}\}$.

Пусть $\tilde{A}$ – линейный оператор пространства $R$. Совокупность $D$ всевозможных векторов вида $\tilde{A}(\vec{x})$, где $\vec{x} \in R$, называется *областью значений* или *образом* оператора $\tilde{A}$ (im$\tilde{A}$), а совокупность $M$ всевозможных векторов $\vec{x}$, для которых $\tilde{A}(\vec{x}) = 0$, называется его *ядром* (ker$\tilde{A}$).

Область значений и ядро линейного оператора являются подпространствами в $R$.

Размерность области значений (образа) оператора $\tilde{A}$ совпадает с рангом матрицы $A$ и называется *рангом* оператора $\tilde{A}$. Размерность ядра $M$ называется *дефектом* оператора $\tilde{A}$.

Сумма ранга и дефекта линейного оператора $\tilde{A}$ равна размерности $n$ пространства $R$.

**Пример 1.** Выяснить, является ли оператор $\tilde{A}(\vec{x})$ = $(3x_1 - x_3;\ x_3;\ x_1 - x_2)$ линейным, если вектор $\vec{x}$ = $(x_1;\ x_2;\ x_3)$.

Решение. По условию вектор $\vec{x}$ = $(x_1;\ x_2;\ x_3)$. Пусть вектор $\vec{y}$ = $(y_1;\ y_2;\ y_3)$. Тогда по определению операций над векторами:

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1;\ x_2 + y_2;\ x_3 + y_3),\ \lambda\vec{x} = (\lambda x_1;\ \lambda x_2;\ \lambda x_3).$$

Найдем образы векторов:

$$\tilde{A}(\vec{x} + \vec{y}) = (3(x_1 + y_1) - (x_3 + y_3);\ x_3 + y_3;\ (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)) =$$
$$= ((3x_1 - x_3) + (3y_1 - y_3);\ x_3 + y_3;\ (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)) =$$
$$= (3x_1 - x_3;\ x_3;\ x_1 - x_2) + (3y_1 - y_3;\ y_3;\ y_1 - y_2);$$
$$\tilde{A}(\lambda\vec{x}) = (3\lambda x_1 - \lambda x_3;\ \lambda x_3;\ \lambda x_1 - \lambda x_2) = \lambda\,(3x_1 - x_3;\ x_3;\ x_1 - x_2).$$

Так как $\tilde{A}(\vec{x} + \vec{y}) = \tilde{A}(\vec{x}) + \tilde{A}(\vec{y})$, $\tilde{A}(\lambda\vec{x}) = \lambda\tilde{A}(\vec{x})$, то оператор $\tilde{A}$ является линейным.

**Пример 2.** Найти матрицу линейного оператора $\vec{y}$ = $\tilde{A}(\vec{x})$ = $(3x_1 + x_2 - x_3;\ 2x_3;\ x_2 + 5x_3)$ где $\vec{x}$ = $(x_1;\ x_2;\ x_3)$ в том базисе, в котором даны координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

Решение. Запишем связь между координатами векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ и соответственно матрицу линейного оператора $\tilde{A}$:

$$\begin{cases} y_1 = 3x_1 + x_2 - x_3, \\ y_2 = \qquad\qquad 2x_3, \\ y_3 = \qquad x_2 + 5x_3, \end{cases} \text{следовательно, } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Пример 3.** Найти (в том же базисе) координаты вектора $\vec{y}$ = $\tilde{A}(\vec{x})$, если оператор $\tilde{A}$ задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \vec{x} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3.$$

Решение. По формуле $\vec{\boldsymbol{y}}$ = A·$\vec{\boldsymbol{x}}$ получим $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix}$,

т.е. $\vec{y}$ = (3; 15; 2).

**Пример 4.** В пространстве $R^3$ линейный оператор $\tilde{A}$ задан в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $A^*$ оператора $\tilde{A}$ в базисе:

$$\vec{e}_1^{\,*} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3,\ \vec{e}_2^{\,*} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_3,\ \vec{e}_3^{\,*} = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3.$$

Решение. Матрица перехода $C$ от старого базиса $\{\vec{e}_n\}$ к новому $\{\vec{e}_n^{\,*}\}$

имеет вид: $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, а обратная к ней матрица $C^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 13 & 9 \\ 0 & 5 & 5 \\ 2 & -7 & -6 \end{pmatrix}$.

Следовательно, по формуле $A^* = C^{-1} \cdot A \cdot C$ получим:

$$A^* = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 13 & 9 \\ 0 & 5 & 5 \\ 2 & -7 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16{,}2 & 21{,}4 & 35{,}8 \\ 6{,}0 & 9{,}0 & 14{,}0 \\ -8{,}8 & -11{,}6 & -19{,}2 \end{pmatrix}.$$

**Упражнения для самостоятельного решения**

1. Выяснить, является ли оператор $\tilde{A}(\vec{x})$ линейным, если вектор $\vec{x} = (x_1;\, x_2;\, x_3)$:
   1.1. $\tilde{A}(\vec{x}) = (x_2 - 2x_3;\, x_1 + x_2;\, x_1)$; 1.2. $\tilde{A}(\vec{x}) = (x_1 - x_2;\, 2x_1 + x_3;\, x_2 - 2x_3)$.
2. Найти матрицу $A^*$ линейного оператора $\tilde{A}$ в базисе $\vec{e}_1^{\,*}, \vec{e}_2^{\,*}, \vec{e}_3^{\,*}$, заданного матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, если $\vec{e}_1^{\,*} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{e}_2^{\,*} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$,
$$\vec{e}_3^{\,*} = 3\vec{e}_1 + 3\vec{e}_3.$$

Ответы: 1.1. Да. 1.2. Да. 2. $A = \begin{pmatrix} -2 & 11 & 7 \\ -4 & 14 & 8 \\ 5 & -15 & -8 \end{pmatrix}$.

## 4.2. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

Ненулевой вектор $\vec{x}$ называется *собственным вектором* линейного оператора $\tilde{A}$ (квадратной матрицы $A$), если найдется такое действительное число $\lambda$, что

$$\tilde{A}(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$$

или

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}.$$

Число $\lambda$ называется *собственным значением* (или *собственным числом*) оператора $\tilde{A}$ (матрицы $A$), соответствующим вектору $\vec{x}$.

Множество всех собственных значений оператора $\tilde{A}$ (матрицы $A$) называется *спектром линейного оператора* $\tilde{A}$ (матрицы $A$).

Из определения следует, что собственный вектор после действия на него оператором $\tilde{A}$, переходит в тот же вектор, умноженный на число, то есть в вектор, коллинеарный самому себе.

Из матричного равенства $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ следуют равенства, связывающие компоненты вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \lambda x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = \lambda x_n. \end{cases} \tag{4.2.1}$$

Перепишем эту систему в виде:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases} \tag{4.2.2}$$

или

$$(A - \lambda E)\,\vec{x} = \vec{0}, \tag{4.2.3}$$

где $E$ – единичная матрица той же размерности, что и матрица $A$.

Система (4.2.2) однородная и для существования ненулевых решений такой системы необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы равнялся нулю:

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.2.4)$$

Уравнение $|A - \lambda E| = 0$ называется *характеристическим уравнением линейного оператора* $\tilde{A}$ (матрицы $A$), а многочлен вида $p(\lambda) = (-1)^n|A-\lambda E|$ – *характеристическим многочленом*.

Характеристический многочлен линейного оператора не зависит от выбора базиса. Это свойство многочлена имеет место потому, что величина определителя матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса.

Собственные значения могут быть действительными различными, действительными кратными или комплексными числами.

**Свойства собственных значений и собственных векторов**

1) Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы.

2) Если матрица оператора симметричная, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$ , $\forall\ i,j = 1,2,..., n$ , то собственные значения ее действительные.

3) Если собственные векторы матрицы образуют базис, то в этом базисе матрица оператора имеет *диагональный вид*, причем ее диагональными элементами являются собственные числа, то есть

$$A^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

И обратно, если матрица линейного оператора в некотором базисе является диагональной, то все векторы этого базиса – собственные векторы оператора с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Для нахождения собственных значений и собственных векторов матрицы $A$ нужно найти все различные корни характеристического уравнения

$$|A-\lambda E| = 0$$

и для каждого такого корня найти фундаментальную систему решений однородной системы уравнений

$$(A-\lambda E)\,X = 0,$$

совокупность которых образует линейно независимую систему собственных векторов.

Каждому собственному значению $\lambda_i$ соответствует хотя бы один собственный вектор, так как однородная система, определитель которой равен нулю, имеет хотя бы одно ненулевое решение.

**Пример 1.** Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\tilde{A}$ (матрицы $A$):

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad б)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение: $a$) 1. Составим характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } (2-\lambda)\cdot(3-\lambda) - 20 = 0,$$

откуда $\lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0$ и собственные значения матрицы $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 7$.

1. Найдем собственный вектор $\vec{x}^{(1)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = -2$:

$$(A + 2E)\,\vec{x} = \vec{0} \text{ или } \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ т. е. } \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 = 0. \end{cases}$$

Так как ранг системы уравнений равен $r = 1$, поэтому одно из неизвестных $x_1$ или $x_2$ можно задать произвольно. Например, полагая $x_2 = c_1$, найдем ($x_1 = -\frac{5}{4}\,c_1$, $x_2 = c_1$), т. е. вектор $\vec{x}^{(1)} = (-\frac{5}{4}\,c_1;\ c_1)$ при любом $c_1 \neq 0$ есть собственный вектор оператора $\tilde{A}$ (матрицы $A$) с собственным значением $\lambda_1 = -2$.

2. Аналогично найдем собственный вектор $\vec{x}^{(2)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 7$:

$$(A - 7E)\,\vec{x} = \vec{0} \text{ или } \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ т. е. } \begin{cases} -5x_1 + 5x_2 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 = 0. \end{cases}$$

Так как ранг системы уравнений равен $r = 1$, значит, одно из неизвестных $x_1$ или $x_2$ можно задать произвольно. Пусть $x_2 = c_2$, тогда найдем ($x_1 = c_2$; $x_2 = c_2$), т. е. вектор $\vec{x}^{(2)} = (c_2;\ c_2)$ при любом $c_2 \neq 0$ есть собственный вектор оператора $\tilde{A}$ (матрицы $A$) с собственным значением $\lambda_2 = 7$.

Решение: б) 1. Составим характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -8 \\ -4 & 7-\lambda & -4 \\ -8 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая любым способом определитель, получим уравнение:

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 - 81\lambda + 729 = 0.$$

Решая это уравнение, получим:

$$\lambda^2(\lambda - 9) - 81(\lambda - 9) = 0 \text{ или } (\lambda - 9)(\lambda^2 - 81) = 0,$$

откуда собственные значения оператора $\tilde{A}$ (матрицы $A$): $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = -9$.

2.Найдем собственный вектор $\vec{x}^{(1)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$:

$$(A - 9E)\,\vec{x} = \vec{0} \text{ или } \begin{pmatrix} -8 & -4 & -8 \\ -4 & -2 & -4 \\ -8 & -4 & -8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решая полученную систему методом Гаусса, получим:

$$\begin{cases} -8x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0, \\ 0 = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Так как ранг системы уравнений $r = 1$, то для получения ее решений нужно рассматривать $m - r = 3 - 1 = 2$ свободные (неосновные) переменные, например, $x_2$ и $x_3$.

Полагая $x_2 = c_1$ и $x_3 = c_2$, найдем вектор $\vec{x}^{(1)}$ = ($-\frac{1}{2}c_1 - c_2$; $c_1$; $c_2$), который при любых $c_1$ и $c_2$, удовлетворяющих условию ${c_1}^2 + {c_2}^2 \neq 0$, есть собственный вектор оператора $\tilde{A}$ (матрицы $A$) с собственным значением $\lambda = 9$.

3. Аналогично находим, что вектор $\vec{x}^{(2)}$ = ($c_3$; $\frac{1}{2}c_3$; $c_3$) при любом $c_3 \neq 0$ есть собственный вектор оператора $\tilde{A}$ (матрицы $A$) с собственным значением $\lambda = -9$.

**Пример 2.** Привести к диагональному виду матрицу $A$ линейного оператора $\tilde{A}$:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix};\quad б)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. $a$) В примере 1, $a$ найдены собственные значения оператора $\tilde{A}$ (матрицы $A$) $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 7$ и его собственные векторы $\vec{x}^{(1)}$ = ($-\frac{5}{4}c_1$; $c_1$), $\vec{x}^{(2)}$ = ($c_2$; $c_2$), где $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$. Следовательно, в базисе ($\vec{x}^{(1)}$, $\vec{x}^{(2)}$), состоящем из собственных векторов, матрица $A$ будет иметь диагональный вид, т.е.

$$A^* = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Это означает, что при переходе от старого базиса $\left(\vec{e}_1 = \binom{2}{4};\ \vec{e}_2 = \binom{5}{3}\right)$ к базису $\left(\vec{x}^{(1)};\ \vec{x}^{(2)}\right)$, состоящему из собственных векторов, т.е., например, при матрице перехода $C = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ (полученной при $c_1 = 4$, $c_2 = 1$) и обратной к ней $C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$, матрица $A$ в соответствии с формулой (4.1.3.) станет диагональной:

$$A^* = C^{-1}\cdot A\cdot C = \begin{pmatrix} \frac{-1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

б) В примере 1, б найдены собственные значения оператора $\tilde{A}$ (матрицы $A$): $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = -9$ и его собственные векторы $\vec{x}^{(1)}$ = ($-\frac{1}{2}c_1 - c_2$; $c_1$; $c_2$), $\vec{x}^{(2)}$ = ($c_3$; $\frac{1}{2}c_3$; $c_3$),

где ${c_1}^2 + {c_2}^2 \neq 0$. Следовательно, в базисе, состоящем из *трёх* собственных векторов, матрица $A$ будет иметь диагональный вид:

$$A^* = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Это означает, что при переходе от старого базиса $\left(\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix};\ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix};\ \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ к базису, состоящему из собственных векторов (полученных, например, при $c_1 = 2$, $c_2 = 0$, $c_3 = 2$ и $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = 2$), т. е. при матрице перехода $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ матрица $A$ в соответствии с формулой (4.1.3) станет диагональной:

$$A^* = C^{-1}\cdot A\cdot C = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

**Пример 3.** Привести к диагональному виду матрицу $A$ линейного оператора $\tilde{A}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1. Составим характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -3 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая любым способом определитель, получим уравнение:

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 21\lambda - 18 = 0 \text{ или } (\lambda - 2)(\lambda - 3)^2 = 0.$$

Решая это уравнение, получим собственные значения: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

2.Найдем собственный вектор $\vec{x}^{(1)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 2$:

$$(A - 2E)\,\vec{x} = \vec{0} \text{ или } \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решая полученную систему методом Гаусса, получим:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Так как ранг системы уравнений $r = 2$, то для получения ее решений нужно рассматривать $m - r = 3 - 2 = 1$ свободную (неосновную) переменную, например, $x_3$.

Полагая $x_3 = c_1$, найдем вектор $\vec{x}^{(1)} = (0;\ -c_1;\ c_1)$, который при любом $c_1 \neq 0$ есть собственный вектор оператора $\tilde{A}$ (матрицы $A$) с собственным значением $\lambda_1 = 2$.

3. Аналогично находим, что вектор $\vec{x}^{(2)} = (\frac{1}{2}\ c_2; -\frac{3}{2}\ c_2;\ \ c_2)$ при любом $c_2 \neq 0$ есть собственный вектор оператора $\tilde{A}$ (матрицы $A$) с собственным значением $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

Так как два линейно независимых собственных вектора, получаемых при любых парах значений $c_1 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$, не могут образовать базис в пространстве $R^3$, то матрица $A$ не может быть приведена к диагональному виду.

### Упражнения для самостоятельного решения

1. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\tilde{A}$ (матрицы $A$):

1.1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

1.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1.4. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Привести, если это возможно, к диагональному виду матрицу $A$ линейного оператора $\tilde{A}$:

2.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. 2.2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

2.3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$. 2.4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Составить матрицу $C$ перехода к базису из собственных векторов и найти матрицу $A^* = C^{-1} \cdot A \cdot C$.

Ответы: 1.1. $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$; $(-2c_1;\ c_1)$, $(c_2;\ c_2)$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$.

1.2. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$; $(4c_1;\ -c_1)$, $(c_2;\ -c_2)$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$.

1.3. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -3$; $(-2c_1;\ c_1;\ c_1)$, $(0;\ c_2;\ c_2)$, $(6c_3;\ -7c_3;\ 5c_3)$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, $c_3 \neq 0$.

1.4. $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$; $(-2c_1;\ 0;\ c_1)$, $(0;\ c_2;\ 0)$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$.

2.1.Не приводится. 2.2. $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. 2.3. $A^* = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2.4. Не приводится.

3. $C = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A^* = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

## 4.3 Ортогональные и симметрические матрицы линейных преобразований

Квадратная матрица $A$ называется *симметрической* (*симметричной*), если она не меняется при транспонировании, то есть $A = A^{\mathrm{T}}$ или $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall\ i = 1, \dots, n, j =$ 1,2,..., $n$. Например, $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 6 \\ 5 & 8 & 4 \\ 6 & 4 & 9 \end{pmatrix}$.

Свойства симметрических матриц

1. Собственные значения симметрической матрицы – действительные числа.
2. Любая симметрическая матрица имеет, по крайней мере, один набор попарно перпендикулярных собственных векторов.
3. Симметрическая матрица может быть приведена к диагональному виду.

Квадратная матрица $A$ называется *ортогональной,* если при транспонировании она совпадает со своей обратной матрицей, то есть $Q^{-1} = Q^T$.

Свойства ортогональной матрицы $Q$

1. $Q^{-1} \cdot Q^T = E$.
2. Определитель $|Q| = 1$ или $|Q| = -1$.
3. В ортогональной матрице как строки, так и столбцы образуют ортонормированную систему векторов (пункт 4.4).
4. С помощью ортогональной матрицы $Q$ симметрическая матрица $A$ может быть приведена к диагональному виду
$$Q^T A Q = A^*,$$
где $A^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$; $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – собственные значения матрицы $A$.
5. Симметрическая матрица $A$ может быть представлена через ортогональную и диагональную матрицы в виде $A = QA^*Q^T$.

На основании перечисленных свойств симметрических и ортогональных матриц составим *план приведения симметрической матрицы к диагональному виду*:
1. Найти все собственные значения матрицы $A$.
2. Сформировать базис из ортогональных собственных векторов.
3. Составить матрицу перехода $C$ к базису из собственных векторов.
4. Нормировать столбцы матрицы $C$ (т. е. каждый собственный вектор разделить на его длину), в результате получая матрицу $Q$.
5. Транспонируя матрицу $Q$, получить обратную матрицу $Q^{-1}$.
6. Вычислить диагональную матрицу по формуле $A^* = Q^{-1}AQ$.

**Пример 1.** Привести симметрическую матрицу $A$ к диагональному виду с помощью ортогональной матрицы $Q$, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

Решение. Составим характеристическое уравнение
$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 16-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$
которое можно привести к виду:
$$-\lambda(3-\lambda)(16-\lambda) - 4(16-\lambda) = 0 \text{ или}$$
$$(16-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0,\ (16-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+1) = 0.$$
Собственные значения матрицы $A$: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 16$.

1. Найдем собственный вектор $\vec{x}^{(1)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = -1$
$$(A - \lambda_1 E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \ \text{ или } \ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

и запишем соответствующую линейную систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 = 0, \\ 17x_3 = 0. \end{cases}$$

Так как ранг системы уравнений $r$ = 2, то для получения ее решений нужно рассматривать $m - r$ = 3 – 2 = 1 свободную (неосновную) переменную, например, $x_2$.

Полагая $x_2$ = $c_1$, найдем вектор $\vec{x}^{(1)}$ = (–2$c_1$; $c_1$; 0), который при любом $c_1 \neq 0$ есть собственный вектор оператора $\tilde{A}$ (матрицы $A$) с собственным значением $\lambda_1 = -1$ .

2. Найдем собственный вектор $\vec{x}^{(2)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 4$:

$$(A - \lambda_2 E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \text{ или } \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которое соответствует линейной системе

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 - x_2 = 0, \\ 12x_3 = 0. \end{cases}$$

Так как ранг системы уравнений $r$ = 2, то для получения ее решений нужно рассматривать $m - r$ = 3 – 2 = 1 свободную (неосновную) переменную, например, $x_1$.

Полагая $x_1$ = $c_2$, найдем вектор $\vec{x}^{(2)}$ = ($c_2$; 2$c_2$; 0), который при любом $c_2 \neq 0$ есть собственный вектор оператора $\tilde{A}$ (матрицы $A$) с собственным значением $\lambda_2$ = 4 .

3. Найдем собственный вектор $\vec{x}^{(3)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_3 = 16$

$$(A - \lambda_3 E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \text{ или } \begin{pmatrix} -16 & 2 & 0 \\ 2 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

и запишем соответствующую линейную систему

$$\begin{cases} -16x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 - 13x_2 = 0, \\ 0 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = c_3. \end{cases}$$

Так как ранг системы уравнений $r$ = 2, то для получения ее решений нужно рассматривать $m - r$ = 3 – 2 = 1 свободную (неосновную) переменную, например, $x_3$.

Полагая $x_3$ = $c_3$, найдем третий собственный вектор $\vec{x}^{(3)}$ = (0; 0; $c_3$), который при любом $c_3 \neq 0$ есть собственный вектор оператора $\tilde{A}$ (матрицы $A$) с собственным значением $\lambda_3$ = 16 .

Положим $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ и получим попарно ортогональные собственные векторы:

$$\vec{x}^{(1)} = (-2; 1; 0), \quad \vec{x}^{(2)} = (1; 2; 0), \quad \vec{x}^{(3)} = (0; 0; 1),$$

которые образуют ортогональный базис. Матрица перехода $C$ к этому базису:

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что заданная матрица – симметрическая. Можно было найти $C^{-1}$, и тогда диагональная матрица равна $A^* = C^{-1} \cdot A \cdot C$. Однако быстрее нормировать базис, разделив каждую координату вектора на длину вектора и составить матрицу $Q$. Получим ортонормированный базис

$$\vec{x}^{(1)}{}_n = (-\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}; 0), \quad \vec{x}^{(2)}{}_n = (\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}; 0), \quad \vec{x}^{(3)}{}_n = (0; 0; \frac{1}{\sqrt{5}}).$$

Матрица $Q = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ – ортогональная матрица.

По свойству $Q^{-1} = Q^T$ запишем обратную матрицу:

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Вычислив произведение трех матриц, получим диагональную матрицу

$$A^* = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим пример, в котором собственные числа не все различны.

**Пример 2.** Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\tilde{A}$ (матрицы $A$):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$p(\lambda) = -|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 3) = 0,$$

Собственные значения матрицы $A$: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$.

1. Найдем собственный вектор $\vec{x}^{(1)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:

$$(A - \lambda E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \text{ или } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

и запишем  соответствующую линейную систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ -x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Так как ранг системы уравнений $r = 1$, то для получения ее решений нужно рассматривать $m - r = 3 - 1 = 2$ свободных (неосновных) переменных, например, $x_2$ и $x_3$.

Задавая $x_2 = c_1$, $x_3 = c_2$, где ${c_1}^2 + {c_2}^2 \neq 0$, получим фундаментальную систему решений

$$Xo.o. = c_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Следовательно, можно указать два линейно независимых вектора, соответствующих собственному значению $\lambda_1 = 1$, которые являются фундаментальными решениями однородной системы $(*)$ при $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ и при $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, т. е.

$$\vec{x}^{(1)} = X^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \text{ и } \vec{x}^{(2)} = X^{(2)} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Эти векторы являются ортогональными, в чем легко убедиться, хотя заданная матрица не является симметрической. Полученные линейно независимые ортогональные векторы – собственные векторы матрицы $A$ , соответствующие собственному значению $\lambda_1 = 1$.

Второй вектор имеет длину (норму), равную единице и, следовательно, является нормированным.

Нормируем первый вектор, разделив все его координаты на длину, равную $\sqrt{2}$. Получим

$$X^{(1)}{}_n = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix} \text{ и } X^{(2)}{}_n = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

2. Найдем собственный вектор $\vec{x}^{(2)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_3 = 3$:

$$(A - \lambda E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \text{ или } \begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

и запишем  соответствующую линейную систему:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = 0, \\ -x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Так как ранг системы уравнений $r = 2$, то для получения ее решений нужно рассматривать $m - r = 3 - 2 = 1$ свободную (неосновную) переменную, например, $x_1 = c_3$. Тогда $x_2 = - c_3$, $x_3 = c_3$, тогда выпишем соответствующий собственный вектор

$$\vec{x}^{(3)} = (c_3; - c_3; c_3) \text{ или } X^{(3)} = c_3\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

и нормируем его: $X^{(3)}{}_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

Матрица $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ – ортогональная матрица.

По свойству $Q^{-1} = Q^T$ запишем обратную матрицу:

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Вычислив произведение трех матриц, получим в ортонормированном базисе собственных векторов диагональную матрицу:

$$A^* = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Если собственные значения симметрической матрицы в трёхмерном линейном пространстве все одинаковы: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$, то матрица определяет преобразование подобия с коэффициентом $\lambda$. В этом случае все векторы пространства являются собственными векторами. В качестве нового базиса можно взять любую тройку единичных попарно ортогональных векторов, например,

$$\vec{x}^{(1)} = (1; 0; 0),\ \vec{x}^{(2)} = (0; 1; 0),\ \vec{x}^{(3)} = (0; 0; 1).$$

**Упражнения для самостоятельного решения**

1. Привести симметрическую матрицу $A$ к диагональному виду с помощью

ортогональной матрицы $Q$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Ответ: $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $A^* = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

# 5. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

## 5.1. Матрица квадратичной формы

*Квадратичной формой* $L(x_1;\ x_2;\ \dots;\ x_n)$ *от* $n$ *переменных* называется сумма, каждый член которой является либо квадратом одной из переменных, либо произведением двух разных переменных, взятых с некоторым коэффициентом:

$$L(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j, \qquad (5.1.1)$$

где коэффициенты $a_{ij}$ квадратичной формы – действительные числа, причем $a_{ij} = a_{ji}$.

Симметрическая матрица $A = (a_{ij})$ $(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n})$, составленная из этих коэффициентов, называется *матрицей квадратичной формы*.

Мы будем рассматривать квадратичные формы с двумя переменными:

$$L\,(x_1,\ x_2) = a_{11}{x_1}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}{x_2}^2 \qquad (5.1.2)$$

и с тремя переменными:

$$L\,(x_1,\ x_2, x_3) = a_{11}{x_1}^2 + a_{22}{x_2}^2 + a_{33}{x_3}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{13}x_1x_3 \qquad (5.1.3)$$

Квадратичные формы можно записать в матричной форме, введя в рассмотрение матрицу $A$ квадратичной формы.

Для (5.1.2) матрица имеет вид: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Для (5.1.3) матрица имеет вид: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Очевидно, что матрица квадратичной формы является симметрической матрицей. Если для переменных введем матрицу – столбец $X$ и транспонированную $X^T$ матрицу – строку, то в *матричной записи* квадратичная форма будет иметь вид:

$$L = X^T A X, \qquad (5.1.4)$$

где $X^T = \left(x_1,\ x_2, \dots, x_n\right)$ и $X = (x_1,\ x_2, \dots, x_n)^T$– соответственно вектор-строка и вектор – столбец переменных.

**Пример 1.** Дана квадратичная форма $L\,(x_1,\ x_2) = {x_1}^2 + 4{x_2}^2 - 6x_1x_2$. Записать её в матричной форме.

<u>Решение.</u> Найдем матрицу квадратичной формы. Её диагональные элементы равны коэффициентам при квадратах переменных, а остальные элементы равны половине коэффициентов при произведениях различных переменных квадратичной формы и должны быть размещены симметрично главной диагонали. Поэтому

$$L\,(x_1,\ x_2) = (x_1,\ x_2)\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X^T A X.$$

**Пример 2.** Дана квадратичная форма

$L\,(x_1,\ x_2, x_3) = 4{x_1}^2 + {x_2}^2 + 5{x_3}^2 - 12x_1x_2 - 10x_1x_3$.

Записать её в матричной форме.

Решение. Найдем матрицу квадратичной формы

$$L\,(x_1,\ x_2, x_3) = (x_1,\ x_2, x_3)\begin{pmatrix} 4 & -6 & -5 \\ -6 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = X^T AX.$$

Ранг матрицы $A$ квадратичной формы называют *рангом квадратичной формы*.

Если ранг совпадает с числом переменных квадратичной формы (т. е. $r\,(A) = n$ или $\det\,(A) \neq 0$), то её называют *невырожденной.*

Если $r\,(A) < n$, то квадратичная форма – *вырожденная*.

**Пример 3.** Установить, является ли невырожденной квадратичная форма

$$L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = 3{x_1}^2 + 8x_1x_3?$$

Решение. Найдем матрицу квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и найдем ранг матрицы $A$.

Так как величина ранга не зависит от элементарных преобразований матрицы, то, отбрасывая нулевую строку, найдем минор второго порядка $\text{M}_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 \neq 0 \Rightarrow r\,(A) = 2$, то есть ранг матрицы меньше трех переменных, входящих в квадратичную форму. Следовательно, данная квадратичная форма вырожденная.

## 5.2. Канонический и нормальный вид квадратичной формы

В квадратичной форме $L = X^T AX$ можно выполнить линейное преобразование переменных $X = CY$, где $X = (x_1,\ x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1,\ y_2, \dots, y_n)^T$, $C_{n\times n} = (c_{ij})$ – невырожденная квадратная матрица $n$ – го порядка. Учитывая линейное преобразование переменных, получим равенство:

$$L = X^T AX = (CY)^T ACY = Y^T C^T ACY = Y^T (C^T AC)Y = Y^T A^* Y, \tag{5.2.1}$$

Новая матрица квадратичной формы:

$$A^* = C^T AC. \tag{5.2.2}$$

Первоначальная квадратичная форма и полученная из неё с помощью невырожденного линейного преобразования квадратичная форма (5.2.1) называются *эквивалентными квадратичными формами*.

**Пример.** Дана квадратичная форма

$$L\,(x_1,\ x_2) = {x_1}^2 + 3{x_2}^2 + 4x_1x_2.$$

Найти эквивалентную квадратичную форму $L\,(y_1,\ y_2)$, используя линейное преобразование переменных: $x_1 = y_1 - 2y_2,\ x_2 = y_1 + y_2$.

Решение. Найдем матрицу квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Заданное линейное преобразование в матричной форме: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Следовательно, матрица $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Тогда получим новую матрицу:

$$A^* = C^T A C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $L\,(y_1,\, y_2) = 8{y_1}^2 - {y_2}^2 - 2y_1y_2$.

Наиболее простой формой, эквивалентной данной квадратичной форме, является каноническая квадратичная форма.

Квадратичная форма $L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j$ называется *канонической* (или имеет *канонический вид*), если все её коэффициенты $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$:

$$L = a_{11}{x_1}^2 + a_{22}{x_2}^2 + \ldots + a_{nn}{x_n}^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, {x_i}^2,$$

а её матрица является диагональной.

Квадратичная форма с действительными коэффициентами имеет *нормальный вид*, если в её каноническом виде все коэффициенты равны 1 или – 1.

*Ранг квадратичной формы* равен числу отличных от нуля коэффициентов канонической формы и не меняется при линейных преобразованиях.

**Теорема.** Любая квадратичная форма с помощью невырожденного линейного преобразования переменных может быть приведена к каноническому виду.

Если квадратичная форма зависит от двух переменных $L\,(x_1,\, x_2)$ и $\lambda_1,\, \lambda_2$ – собственные значения её матрицы, то канонический вид квадратичной формы в новых переменных имеет вид: $L = \lambda_1{y_1}^2 + \lambda_2{y_2}^2$.

Если квадратичная форма зависит от трёх переменных $L\,(x_1,\, x_2,\, x_3)$ и $\lambda_1,\, \lambda_2,\, \lambda_3$ – собственные значения её матрицы, то канонический вид квадратичной формы в новых переменных имеет вид: $L = \lambda_1{y_1}^2 + \lambda_2{y_2}^2 + \lambda_3{y_3}^2$.

Возможны два способа приведения квадратичных форм к каноническому виду.

*Первый способ*. Метод Лагранжа состоит в том, что путем тождественных преобразований в квадратичной форме последовательно выделяются полные квадраты по всем переменным.

*Второй способ.* Матрица квадратичной формы всегда симметрическая, поэтому она имеет действительные собственные значения и сводится к диагональному виду с помощью линейного ортогонального преобразования

$$X = QY,$$

где $Q$ – ортогональная матрица.

Чтобы найти линейное преобразование переменных, приводящих квадратичную форму к каноническому виду, нужно найти собственные векторы, нормировать их и записать матрицу $Q$.

**Пример 1.** Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$L\,(x_1,\, x_2) = 3{x_1}^2 + 3{x_2}^2 - 4x_1x_2.$$

Решение. *Первый способ*. Сгруппируем все члены, содержащие $x_1$, и дополним их до полного квадрата:

$$L\,(x_1,\ x_2) = 3(x_1{}^2 - \tfrac{4}{3}\ x_1x_2 + \tfrac{4}{9}\ x_2{}^2) - \tfrac{4}{3}\ x_2{}^2 + 3x_2{}^2 = 3(x_1 - \tfrac{2}{3}\ x_2{}^2) + \tfrac{5}{3}\ x_2{}^2$$

Введя новые переменные $z_1 = x_1 - \frac{2}{3}\,x_2,\, z_2 = x_2,$ получим канонический вид

$$L\,(z_1,\ z_2) = 3z_1{}^2 + \tfrac{5}{3}z_2{}^2.$$

*Второй способ.* Матрица данной квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение:

$$|\,A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3-\lambda)^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0.$$

Собственные значения $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 5$. Квадратичная форма в новом базисе из собственных векторов имеет канонический вид $L = y_1{}^2 + 5y_2{}^2$.

*Замечание.* Канонический вид квадратичной формы зависит от выбора линейного преобразования переменных, то есть от выбора системы координат. Если, например, взять

$L = 1$, то уравнения $y_1{}^2 + 5y_2{}^2 = 1$ и $3z_1{}^2 + \frac{5}{3}z_2{}^2 = 1$ являются уравнениями одного и того же эллипса в разных системах координат.

Найдем собственные векторы. Для этого в систему уравнений

$$\begin{cases} (3-\lambda)x_1 - 2x_2 = 0, \\ -2x_1 + (3-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

подставим собственные значения.

1. Найдем собственный вектор $\vec{x}^{(1)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 1$:

$$(A - \lambda_1 E)\,\vec{x} = \vec{0} \ \text{ или } \ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решая полученную систему методом Гаусса, получим:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0, \\ -2x_1 + 2x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Так как ранг системы уравнений $r = 1$, то для получения ее решений нужно рассматривать $m - r = 2 - 1 = 1$ свободную (неосновную) переменную, например, $x_2$.

Полагая $x_2 = c_1$, найдем вектор $\vec{x}^{(1)} = (c_1;\ c_1)$, который при любом $c_1 \neq 0$ есть собственный вектор оператора $\tilde{A}$ (матрицы $A$) с собственным значением $\lambda_1 = 1$.
Пусть $c_1 = 1$, тогда $\vec{x}^{(1)} = \overrightarrow{e_1} = (1;\,1)$.

2. Найдем собственный вектор $\vec{x}^{(2)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 5$:

$$(A - \lambda_2 E)\,\vec{x} = \vec{0} \ \text{ или } \ \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решая полученную систему методом Гаусса, получим:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow x_1 = -\,x_2.$$

Так как ранг системы уравнений $r$ = 1, то для получения ее решений нужно рассматривать $m - r$ = 2 – 1 = 1 свободную (неосновную) переменную, например, $x_2$.

Полагая $x_2 = c_2$, найдем вектор $\vec{x}^{(2)} = (-c_2;\ c_2)$, который при любом $c_2 \neq 0$ есть собственный вектор оператора $\tilde{A}$ (матрицы $A$) с собственным значением $\lambda_1$ = 5.
Пусть $c_2 = 1$, тогда $\vec{x}^{(2)} = \overrightarrow{e_2}$ = (–1; 1). Очевидно, что векторы $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ ортогональны, т. е. $\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2}$ = 0. Нормируя $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$, запишем ортонормированный базис:

$$\overrightarrow{e_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ и } \overrightarrow{e_2} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Матрица $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Следовательно, преобразование координат получено:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_2,\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2.$$

Заметим, что в случае ортогональных преобразований легко получить обратное преобразование переменных, воспользовавшись свойством:

$$Q^{-1} = Q^T.$$

Обратная матрица равна $Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $Y = Q^{-1}X$. Поэтому выполняются соотношения:

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} x_2,\ y_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} x_2.$$

Ответ: канонический вид $L = {y_1}^2 + 5{y_2}^2$; $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} x_2,\ y_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} x_2$.

**Пример 2.** Привести квадратичную форму

$$L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = {x_1}^2 + 5{x_2}^2 + {x_3}^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3\,.$$

к каноническому виду и указать соответствующее ортогональное преобразование.

Решение. Выпишем матрицу квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ в заданном базисе $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$. Чтобы привести квадратичную форму к диагональному виду, нужно перейти к базису из собственных векторов.

Уравнение для собственных значений

$$|\,A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

Если вычесть из третьего столбца первый, то из третьего столбца можно вынести за знак определителя множитель $\lambda + 2$ . Прибавляя после этого к первой строке третью, получим:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2+\lambda \\ 1 & 5-\lambda & 0 \\ 3 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (\lambda + 2) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 5-\lambda & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Вычислив последний определитель, получим уравнение:

$$-(\lambda + 2)((4-\lambda)(5-\lambda)-2) = 0 \text{ или } (\lambda + 2)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = 0,$$

из которого определим собственные числа: $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 6,\ \lambda_3 = 3$. Тогда канонический вид квадратичной формы $L = -2{y_1}^2 + 6{y_2}^2 + 3{y_3}^2$. Заметим, что нумерация собственных значений произвольная. Например, если взять $\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 3$, то канонический вид будет $L = 6{y_1}^2 - 2{y_2}^2 + 3{y_3}^2$. Для каждого такого варианта обозначений меняется соответственно расположение (нумерация) базисных собственных векторов (то есть система координат), а смысл квадратичной формы не меняется.

Найдём теперь ортонормированный базис и преобразование переменных. Составим систему уравнений

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1 + x_2 + 3x_3 = 0,\\ x_1 + (5-\lambda)x_2 + x_3 = 0,\\ 3x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0,\end{cases}$$

в которую последовательно подставим собственные значения.

1. Найдем собственный вектор $\vec{x}^{(1)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = -2$

$$(A - \lambda_1 E)\cdot\vec{x} = \vec{0} \text{ или } \begin{pmatrix}3 & 1 & 3\\ 1 & 7 & 1\\ 3 & 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

и запишем соответствующую линейную систему

$$\begin{cases}3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0,\\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0,\\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0.\end{cases}$$

Выпишем матрицу системы и проведем в ней элементарные преобразования:

$$\begin{pmatrix}3 & 1 & 3\\ 1 & 7 & 1\\ 3 & 1 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3 & 1 & 3\\ 1 & 7 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 7 & 1\\ 3 & 1 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 7 & 1\\ 0 & -20 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 7 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Получим систему эквивалентную исходной:

$$\begin{cases}x_1 + x_3 = 0,\\ x_2 = 0,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1 = -x_3,\\ x_2 = 0,\end{cases}$$

Так как ранг системы уравнений $r = 2$, то для получения ее решений нужно рассматривать $m - r = 3 - 2 = 1$ свободную (неосновную) переменную, например, $x_3$.

Полагая $x_3 = c_1$, найдем вектор $\vec{x}^{(1)} = (-c_1;\ 0;\ c_1)$, который при любом $c_1 \neq 0$ есть собственный вектор оператора $\tilde{A}$ (матрицы $A$) с собственным значением $\lambda_1 = -2$.

Пусть $c_1 = 1$, тогда $\vec{x}^{(1)} = {\vec{e}_1}' = (-1;\ 0;\ 1)$.

2. Найдем собственный вектор $\vec{x}^{(2)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 6$:

$$(A - \lambda_2 E)\cdot\vec{x} = \vec{0} \text{ или } \begin{pmatrix}-5 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 3 & 1 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

и запишем соответствующую линейную систему

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Выпишем матрицу системы и проведем в ней элементарные преобразования:

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Получим систему эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = 2x_3. \end{cases}$$

Так как ранг системы уравнений $r$ = 2, то для получения ее решений нужно рассматривать $m - r$ = 3 – 2 = 1 свободную (неосновную) переменную, например, $x_3$.

Полагая $x_3 = c_2$, найдем вектор $\vec{x}^{(2)} = (c_2;\ 2c_2; c_2)$, который при любом $c_2 \neq 0$ есть собственный вектор оператора $\tilde{A}$ (матрицы $A$) с собственным значением $\lambda_1 = 6$ .

Пусть $c_2 = 1$, тогда $\vec{x}^{(2)} = \vec{e}_2{}' = (1; 2; 1)$.

Аналогично для собственного числа $\lambda_3 = 3$ получим собственный вектор $\vec{x}^{(3)} = (c_3; -c_3; c_3)$, который при $c_3 = 1$, будет равен $\vec{x}^{(3)} = \vec{e}_3{}' = (1; -1; 1)$.

Получили собственные векторы $\vec{e}_1{}' = (-1; 0; 1)$, $\vec{e}_2{}' = (1; 2; 1)$, $\vec{e}_3{}' = (1; -1; 1)$. Легко увидеть, что они попарно ортогональны.

Нормируя собственные векторы, разделив координаты каждого вектора на его норму, получим ортонормированный базис векторов:

$$\vec{x}_1{}^{(1)}{}_n = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ и } \vec{x}_2{}^{(2)}{}_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \vec{x}_3{}^{(3)}{}_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Матрица $Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ – ортогональная матрица.

По свойству $Q^{-1} = Q^T$ запишем обратную матрицу:

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

И так как $Y = Q^{-1}X$, записываем ортогональное преобразование переменных:

$$y_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3,$$

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_3, \qquad (*)$$

$$y_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3.$$

Ответ: квадратичная форма имеет канонический вид $L = -2{y_1}^2 + 6{y_2}^2 + 3{y_3}^2$.

Если среди собственных чисел матрицы квадратичной формы есть равные, то среди собственных векторов, соответствующих одному собственному числу, нужно выбрать необходимый набор линейно независимых векторов и провести их ортогонализацию.

Квадратичная форма $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *положительно (отрицательно) определенной*, если при всех значениях переменных, из которых хотя бы одно отлично от нуля, $L(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$ ($L(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0$).

Квадратичная форма $L = X^T AX$ *положительно определена* тогда и только тогда, когда:

а) все собственные значения $\lambda_i$ матрицы $A$ положительны;

б) все главные (угловые) миноры матрицы $A$ положительны (критерий Сильвестра).

Квадратичная форма $L = X^T AX$ *отрицательно определена* тогда и только тогда, когда:

а) все собственные значения $\lambda_i$ матрицы $A$ отрицательны;

б) все главные (угловые) миноры матрицы $A$ нечетного порядка отрицательны, а миноры матрицы четного порядка положительны (критерий Сильвестра).

Если квадратичная форма *знакоопределенная,* то все главные (угловые) миноры ее матрицы отличны от нуля.

**Пример.** Исследовать на знакоопределённость квадратичную форму

$$L\,(x_1, x_2, x_3) = 2{x_1}^2 + {x_2}^2 + 4{x_3}^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Решение. *Первый способ.* Матрица $A$ квадратичной формы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем её собственные значения: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 3 \pm \sqrt{7}$. Они все положительные, значит, квадратичная форма $L\,(x_1, x_2, x_3)$ положительно определённая.

*Второй способ.* Так как все главные (угловые) миноры матрицы $A$ положительны, т. е.

$\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 > 0$, то по критерию

Сильвестра квадратичная форма $L\,(x_1, x_2, x_3)$ положительно определённая.

## Упражнения для самостоятельного решения

1. Написать квадратичную форму $L$ в матричном виде:
   а) $L = 3{x_1}^2 + {x_2}^2 - x_1x_2$;
   б) $L = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 - 2x_1x_2 + 5x_1x_3$.
2. Привести к каноническому виду квадратичные формы:
   а) $L = 2{x_1}^2 - 3{x_3}^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$;
   б) $L = {x_1}^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$.
3. Исследовать на знакоопределённость квадратичную форму

$$L = {x_1}^2 + 4{x_2}^2 + 3{x_3}^2 + 2x_1x_2.$$

Ответы: 1.а. $L = (x_1,\ x_2)\begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$;

1.б. $L = (x_1,\ x_2, x_3)\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

2.а. $L = 2{y_1}^2 - 2{y_2}^2 - 3{y_3}^2$, если $y_1 = x_1 - x_2 + x_3$, $y_2 = x_2 + x_3$, $y_3 = x_3$;
2.б. $L = {y_1}^2 - {y_2}^2 + {y_3}^2$, если $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_2 - x_3$, $y_3 = x_3$.
3. Положительно определённая.

# 6. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом); в) методом Гаусса.

1.1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7. \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9. \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12. \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33, \\ 7x_1 - 5x_2 = 24, \\ 4x_1 + 11x_3 = -9. \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12, \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33, \\ 4x_1 + x_3 = 12. \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 6, \\ 5x_2 + 4x_3 = -20, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -22. \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$

1.12. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$

1.14. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$

1.15. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22. \end{cases}$

1.16. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15. \end{cases}$

1.17. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$

1.18. $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9. \end{cases}$

1.19. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19. \end{cases}$

1.20. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -11, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16. \end{cases}$

1.21. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19. \end{cases}$

1.22. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

1.23. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$

1.24. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8. \end{cases}$

1.25. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

1.26. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

1.27. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -19. \end{cases}$

1.28. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -16, \\ x_1 + 3x_3 = -6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

1.29. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -9, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -2, \\ 3x_2 - 7x_3 = -6. \end{cases}$

1.30. $\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10. \end{cases}$

2. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом); в) методом Гаусса.

2.1. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 + 3x_3 = -2. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 = 5. \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 1, \\ 5x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 2. \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 1. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 6, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

2.8. $\begin{cases} 5x_1 - 9x_2 - 4x_3 = 6, \\ x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 4x_1 - 3x_2 = 1. \end{cases}$

2.10. $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -3, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 1, \\ 4x_1 - 4x_2 - 9x_3 = 0. \end{cases}$

2.11. $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - x_3 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$

2.12. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

2.13. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$

2.14. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 9x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$

2.14. $\begin{cases} 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 7. \end{cases}$

2.16. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases}$

2.17. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 1, \\ 7x_1 - 9x_2 - x_3 = 3, \\ 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$

2. 18. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

2.19. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ -2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

2.20. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$

2.21. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 8x_3 = 4. \end{cases}$

2.22. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 - 9x_2 - 8x_3 = 1. \end{cases}$

2.23. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_3 = 5. \end{cases}$

2.24. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

2.25. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$

2.26. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$

2.27. $\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$

2.28. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$

2.29. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - 5x_3 = 9. \end{cases}$

2.30. $\begin{cases} 4x_1 - 9x_2 + 5x_3 = 1, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 = 11, \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 5. \end{cases}$

3. Решить однородные системы линейных алгебраических уравнений.

3.1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 11x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 10x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

3.6. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

3.8. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

3.11. $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

3.12. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

3.13. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

3.14. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 8x_1 - x_2 + 7x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

3.15. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

3.16. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

3.17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

3.18. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

3.19. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

3.20. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

3.21. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 5x_1 - 8x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

3.22. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

3.23. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

3.24. $\begin{cases} 7x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

3.25. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

3.26. $\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

3.27. $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

3.28. $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

3.29. $\begin{cases} 8x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

3.30. $\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

4. Найти фундаментальную систему решений однородной системы уравнений

4.1. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

4.2. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 5x_1 - 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 - 4x_5 = 0, \\ 8x_1 + 15x_2 + x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

4.3. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

4.4. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 0x_4 + 7x_5 = 0, \\ 3x_1 - 0x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$

4.5. $\begin{cases} 2x_1 - 0x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 8x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 0x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$

4.6. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 - x_4 - 4x_5 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

4.7. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 7x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 - 0x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

4.8. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 0x_4 + 3x_5 = 0, \\ -x_1 - 5x_2 + 6x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$

4.9. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 7x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 - 0x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

4.10. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0, \\ -x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 0x_4 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

4.11. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 0x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 0, \\ 0x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$

4.12. $\begin{cases} 4x_1 - 0x_2 + 2x_3 + 6x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 - 0x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 - 6x_4 + 3x_5 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 + 0x_3 - 3x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

4.13. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 0x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 0x_4 - x_5 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$

4.14. $\begin{cases} 0x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 - 0x_5 = 0. \end{cases}$

4.15. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 0x_4 + 2x_5 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - 0x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 0x_5 = 0. \end{cases}$

4.16. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 - 0x_2 - x_3 + 7x_4 - 5x_5 = 0, \\ 0x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

4.17. $\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

4.18. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 0x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 0x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 0x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

4.19. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 6x_4 + 7x_5 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 - 0x_4 + 3x_5 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

4.20. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ -x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 5x_4 - 3x_5 = 0, \\ 5x_1 - 0x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

4.21. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 0x_3 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - 0x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 - 3x_5 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 + x_3 + 0x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

4.22. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 = 0, \\ -3x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 0x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

4.23. $\begin{cases} 6x_1 - 7x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 + 0x_3 - 3x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

4.24. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$

4.25. $\begin{cases} 2x_1 - 0x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 0x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 0x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 0x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

4.26. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 0x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - 0x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 5x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

4.27. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 0x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ -x_1 - 4x_2 - 2x_3 + x_4 + 9x_5 = 0, \\ 5x_1 - 0x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0, \\ 7x_1 + x_2 + 0x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$

4.28. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 0x_4 - 2x_5 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

4.29. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$

4.30. $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 0x_5 = 0, \\ 2x_1 + 8x_2 - 8x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 0x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

5. Проверить, образуют ли векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ ортонормированный базис, и найти разложение вектора $\vec{x}$ по этому базису

5.1. $\vec{e}_1 = (2; 1; 1)$, $\vec{e}_2 = (-2; 3; 2)$, $\vec{e}_3 = (1; 1; -2)$, $\vec{x} = (14; 0; 7)$.

5.2. $\vec{e}_1 = (1; 1; 0)$, $\vec{e}_2 = (3; -3; 4)$, $\vec{e}_3 = (-2; 2; 3)$, $\vec{x} = (1; 2; 3)$.

5.3. $\vec{e}_1 = (1; -1; 1)$, $\vec{e}_2 = (3; 3; 0)$, $\vec{e}_3 = (1; -1; -2)$, $\vec{x} = (-1; -2; -3)$.

5.4. $\vec{e}_1 = (2; 1; -2)$, $\vec{e}_2 = (-1; 4; 1)$, $\vec{e}_3 = (1; 0; 1)$, $\vec{x} = (1; 2; 3)$.

5.5. $\vec{e}_1 = (1; -2; 0)$, $\vec{e}_2 = (0; 0; 4)$, $\vec{e}_3 = (2; 1; 0)$, $\vec{x} = (-1; -2; 0)$.

5.6. $\vec{e}_1 = (2; 3; 4)$, $\vec{e}_2 = (4; 6; -1)$, $\vec{e}_3 = (1; 2; -3)$, $\vec{x} = (4; 4; 1)$.

5.7. $\vec{e}_1 = (2; 3; 5)$, $\vec{e}_2 = (2; -3; 1)$, $\vec{e}_3 = (-9; -4; 6)$, $\vec{x} = (1; 2; 3)$.

5.8. $\vec{e}_1 = (0; -2; 1)$, $\vec{e}_2 = (2; -2; -1)$, $\vec{e}_3 = (-2; 3; 2)$, $\vec{x} = (-4; -23; 1)$.

5.9. $\vec{e}_1 = (1; 4; 3)$, $\vec{e}_2 = (2; 1; 5)$, $\vec{e}_3 = (3; 4; 2)$, $\vec{x} = (6; 9; 10)$.

5.10. $\vec{e}_1 = (1; 3; 2)$, $\vec{e}_2 = (1; 1; 1)$, $\vec{e}_3 = (2; 5; 2)$, $\vec{x} = (2; 14; 5)$.

5.11. $\vec{e}_1 = (1; 2; 4)$, $\vec{e}_2 = (1; -1; 1)$, $\vec{e}_3 = (1; 1; 4)$, $\vec{x} = (1; -5; -2)$.

5.12. $\vec{e}_1 = (1; 2; 4)$, $\vec{e}_2 = (3; 6; 8)$, $\vec{e}_3 = (2; 1; -1)$, $\vec{x} = (4; 2; 2)$.

5.13. $\vec{e}_1 = (2; 3; 4)$, $\vec{e}_2 = (1; 2; -3)$, $\vec{e}_3 = (4; 6; -1)$, $\vec{x} = (4; 4; 1)$.

5.14. $\vec{e}_1 = (-1; 2; -3)$, $\vec{e}_2 = (2; -1; 2)$, $\vec{e}_3 = (-1; 2; -2)$, $\vec{x} = (4; 1; 4)$.

5.15. $\vec{e}_1 = (-1; 3; 1)$, $\vec{e}_2 = (2; -2; 1)$, $\vec{e}_3 = (4; -1; -2)$, $\vec{x} = (-1; 11; 2)$.

5.16. $\vec{e}_1 = (3; -2; 1)$, $\vec{e}_2 = (-3; 2; -1)$, $\vec{e}_3 = (-3; 2; -1)$, $\vec{x} = (-6; 12; -4)$.

5.17. $\vec{e}_1 = (1; 4; 2)$, $\vec{e}_2 = (2; -2; 3)$,

5.18. $\vec{e}_1 = (-1; 2; 4)$, $\vec{e}_2 = (-1; 1; 3)$,

$\vec{e}_3 = (-2; 1; 0)$, $\vec{x} = (13; 4; 15)$.

5.19. $\vec{e}_1 = (2; 0; -3)$, $\vec{e}_2 = (1; -1; 2)$,
$\vec{e}_3 = (5; -1; 2)$, $\vec{x} = (-1; 3; -9)$.

5.21. $\vec{e}_1 = (1; -1; 2)$, $\vec{e}_2 = (2; 0; -3)$,
$\vec{e}_3 = (5; -1; 2)$, $\vec{x} = (-1; 3; -9)$.

5.23. $\vec{e}_1 = (4; 2; 1)$, $\vec{e}_2 = (1; -1; 3)$,
$\vec{e}_3 = (3; -2; -1)$, $\vec{x} = (9; 4; -5)$.

5.25. $\vec{e}_1 = (3; -1; 1)$, $\vec{e}_2 = (1; 1; -2)$,
$\vec{e}_3 = (1; -1; 2)$, $\vec{x} = (9; 1; -5)$.

5.27. $\vec{e}_1 = (-2; 2; -3)$, $\vec{e}_2 = (1; 3; 4)$,
$\vec{e}_3 = (3; -1; 2)$, $\vec{x} = (2; 4; -5)$.

5.29. $\vec{e}_1 = (-1; 2; -3)$, $\vec{e}_2 = (-1; 2; -3)$,
$\vec{e}_3 = (2; -1; 2)$, $\vec{x} = (9; 4; -5)$.

$\vec{e}_3 = (-1; 4; -1)$, $\vec{x} = (-8; 14; 9)$.

5.20. $\vec{e}_1 = (-1; 2; -2)$, $\vec{e}_2 = (2; 3; 1)$,
$\vec{e}_3 = (4; -2; 0)$, $\vec{x} = (10; 14; 0)$.

5.22. $\vec{e}_1 = (5; -1; 2)$, $\vec{e}_2 = (-6; -3; -2)$,
$\vec{e}_3 = (1; 2; -1)$, $\vec{x} = (7; 2; 3)$.

5.24. $\vec{e}_1 = (1; 3; 4)$, $\vec{e}_2 = (3; -1; 2)$,
$\vec{e}_3 = (-2; 2; -3)$, $\vec{x} = (2; 6; -9)$.

5.26. $\vec{e}_1 = (2; 4; 1)$, $\vec{e}_2 = (1; -1; 1)$,
$\vec{e}_3 = (3; 2; -1)$, $\vec{x} = (-4; -3; 1)$.

5.28. $\vec{e}_1 = (1; 1; -2)$, $\vec{e}_2 = (1; -1; 2)$,
$\vec{e}_3 = (3; -1; 1)$, $\vec{x} = (9; 1; -5)$.

5.30. $\vec{e}_1 = (1; -1; 2)$, $\vec{e}_2 = (3; -1; 1)$,
$\vec{e}_3 = (1; 1; -2)$, $\vec{x} = (9; 2; -5)$.

6. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей

6.1. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

6.3. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

6.5. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

6.7. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

6.9. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

6.11. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

6.13. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6.15. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6.17. $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

6.2. $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

6.4. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

6.6. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

6.8. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

6.10. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

6.12. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

6.14. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

6.16. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

6.18. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

6.19. $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

6.20. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6.21. $\begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

6.22. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

6.23. $\begin{pmatrix} 9 & -6 & -6 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & 2 & -13 \end{pmatrix}$.

6.24. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

6.25. $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

6.26. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

6.27. $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

6.28. $\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 2 & 13 & -4 \\ 2 & -2 & 11 \end{pmatrix}$.

6.29. $\begin{pmatrix} 19 & 2 & -2 \\ 6 & 15 & -6 \\ 2 & -2 & 11 \end{pmatrix}$.

6.30. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.

7.1. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

7.2. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

7.3. $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3$.

7.4. $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3$.

7.5. $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3$.

7.6. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

7.7. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.

7.8. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

7.9. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$.

7.10. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 10x_2x_3$.

7.11. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

7.12. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$.

7.13. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 8x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 12x_2x_3$.

7.14. $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 8x_2x_3$.

7.15. $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$.

7.16. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = 4x_1{}^2 + 5x_2{}^2 + 4x_3{}^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3.$

7.17. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1{}^2 + 5x_2{}^2 + 7x_3{}^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 12x_2x_3.$

7.18. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1{}^2 + 8x_2{}^2 + 7x_3{}^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 16x_2x_3.$

7.19. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1{}^2 + x_2{}^2 + 4x_3{}^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3.$

7.20. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1{}^2 + x_2{}^2 + 4x_3{}^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3.$

7.21. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1{}^2 + 2x_2{}^2 + x_3{}^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$

7.22. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1{}^2 + 2x_3{}^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$

7.23. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = 4x_1{}^2 - 3x_2{}^2 + 2x_3{}^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3.$

7.24. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = 4x_1{}^2 + x_3{}^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$

7.25. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = 4x_1{}^2 + 3x_2{}^2 - 4x_3{}^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3.$

7.26. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1{}^2 + 3x_2{}^2 - x_3{}^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$

7.27. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1{}^2 - 3x_2{}^2 - 4x_3{}^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3.$

7.28. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1{}^2 + 3x_2{}^2 - x_3{}^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$

7.29. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1{}^2 - x_2{}^2 + 2x_3{}^2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$

7.30. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1{}^2 - x_3{}^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3.$

8. Привести квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием.

8.1. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = 2x_1{}^2 + 2x_2{}^2 + 2x_3{}^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3.$

8.2. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = 4x_2{}^2 - 3x_3{}^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3.$

8.3. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = 4x_1{}^2 + 4x_2{}^2 + x_3{}^2 - 2x_1x_2 + 2\sqrt{3}x_2x_3.$

8.4. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = 2x_1{}^2 + 9x_2{}^2 + 2x_3{}^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3.$

8.5. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = -4x_1{}^2 - 4x_2{}^2 + 2x_3{}^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3.$

8.6. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1{}^2 + x_2{}^2 + 4x_3{}^2 + 2x_1x_2 - 2\sqrt{3}x_2x_3.$

8.7. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = 4x_1{}^2 + 4x_2{}^2 + x_3{}^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$

8.8. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = 3x_1{}^2 + x_2{}^2 - \frac{3}{2}x_3{}^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 - x_1x_3 + \sqrt{3}x_2x_3.$

8.9. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = -x_1{}^2 - x_2{}^2 - 3x_3{}^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 6x_2x_3.$

8.10. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1{}^2 - 7x_2{}^2 + x_3{}^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3.$

8.11. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = 3x_1{}^2 - 7x_2{}^2 + 3x_3{}^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_2x_3.$

8.12. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 - \frac{4}{3}x_1x_2 - \frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3.$

8.13. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = 3x_1{}^2 - 7x_2{}^2 + 3x_3{}^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_2x_3.$

8.14. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = -\frac{1}{2}x_1{}^2 + 5x_2{}^2 - \frac{1}{2}x_3{}^2 - 4x_1x_2 + 3x_1x_3 + 4x_2x_3.$

8.15. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1{}^2 + x_2{}^2 - x_3{}^2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$

8.16. $L(x_1, x_2, x_3) = -2x_1{}^2 + 2x_2{}^2 - 2x_3{}^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3.$

8.17. $L(x_1, x_2, x_3) = -2x_1{}^2 + 2x_2{}^2 - 2x_3{}^2 - 4x_1x_2 + 5\sqrt{2}x_1x_3 + \sqrt{2}x_2x_3.$

8.18. $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1{}^2 + 3x_2{}^2 + 2x_3{}^2 - 8x_1x_2 - 4\sqrt{2}x_1x_3 + 2\sqrt{2}x_2x_3.$

8.19. $L(x_1, x_2, x_3) = -4x_1{}^2 + x_2{}^2 - 4x_3{}^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$

8.20. $L(x_1, x_2, x_3) = 10x_1{}^2 + 14x_2{}^2 + 7x_3{}^2 - 10x_1x_2 - \sqrt{2}x_1x_3 - 5\sqrt{2}x_2x_3.$

8.21. $L(x_1, x_2, x_3) = \frac{3}{2}x_1{}^2 - 5x_2{}^2 + \frac{3}{2}x_3{}^2 + 4x_1x_2 - x_1x_3 - 4x_2x_3.$

8.22. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1{}^2 + x_2{}^2 + 2x_3{}^2 + 4x_1x_2 + 2\sqrt{2}x_1x_3 - 2\sqrt{2}x_2x_3.$

8.23. $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_2{}^2 - 3x_3{}^2 - 2\sqrt{3}x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4\sqrt{3}x_2x_3.$

8.24. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + \frac{4}{3}x_1x_2 + \frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3.$

8.25. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1{}^2 + x_3{}^2 + 8x_1x_2 + 4\sqrt{2}x_1x_3 - 2\sqrt{2}x_2x_3.$

8.26. $L(x_1, x_2, x_3) = 5x_1{}^2 + 13x_2{}^2 + 5x_3{}^2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3.$

8.27. $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1{}^2 + 2x_2{}^2 + 2x_3{}^2 + \frac{2}{3}x_1x_2 + \frac{4\sqrt{2}}{3}x_2x_3.$

8.28. $L(x_1, x_2, x_3) = 5x_1{}^2 + 4x_2{}^2 + 2x_3{}^2 - 4x_1x_2 - 2\sqrt{2}x_1x_3 + 4\sqrt{2}x_2x_3.$

8.29. $L(x_1, x_2, x_3) = -2x_1{}^2 + 5x_2{}^2 - 2x_3{}^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3.$

8.30. $L(x_1, x_2, x_3) = -3x_1{}^2 + 9x_2{}^2 + 3x_3{}^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3.$

## Дополнительные задачи для самостоятельной работы

1. Проверить совместность системы уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

В случае совместности решить систему:
а) по формулам Крамера;
б) матричным методом (с помощью обратной матрицы);
в) методом Гаусса.
Коэффициенты системы уравнений и свободные члены взять из табл.1.

2. Проверить совместность системы уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

В случае совместности решить систему:
а) по формулам Крамера;
б) матричным методом (с помощью обратной матрицы);
в) методом Гаусса.

Коэффициенты системы уравнений и свободные члены взять из табл.2.

3. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0. \end{cases}$$

Коэффициенты системы уравнений взять из табл. 3.

4. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0. \end{cases}$$

Коэффициенты системы уравнений взять из табл. 4.

5. Вектор $\vec{x} = \{x_1; x_2; x_3\}$ задан в базисе $(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3})$. Найти его координаты в базисе $(\overrightarrow{f_1}; \overrightarrow{f_2}; \overrightarrow{f_3})$, если:

$$\begin{cases} \overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + a \cdot \overrightarrow{e_3}, \\ \overrightarrow{f_2} = b \cdot \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}, \\ \overrightarrow{f_3} = -\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}. \end{cases}$$

Исходные данные взять из табл. 5.

6. Найти общее решение однородной системы уравнений. Указать базис пространства решений.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = 0. \end{cases}$$

Коэффициенты системы уравнений взять из табл. 6.

7. Найти общее решение неоднородной системы уравнений, используя фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы. Выделить частное решение.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = b_3. \end{cases}$$

Коэффициенты системы уравнений и свободные члены взять из табл. 7.

Таблица 1.

| № вар | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $b_1$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | $b_2$ | $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ | $b_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 3 | 7 | 2 | 3 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 6 |
| 2 | 2 | -1 | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 | -4 | 4 | 1 | 4 | -3 |
| 3 | 1 | 2 | 4 | 6 | 3 | -1 | 1 | 12 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 2 | -1 | 3 | -4 | 1 | 3 | -1 | 11 | 1 | -2 | 2 | -7 |
| 5 | 3 | -2 | 4 | 12 | 3 | 4 | -2 | 6 | 2 | -1 | -1 | -9 |
| 6 | 8 | 3 | -6 | -4 | 1 | 1 | -1 | 2 | 4 | 1 | -3 | -5 |
| 7 | 4 | 1 | -3 | 9 | 1 | 1 | -1 | -2 | 8 | 3 | -6 | 12 |
| 8 | 2 | 3 | 4 | 33 | 7 | -5 | 0 | 24 | 4 | 0 | 11 | 39 |
| 9 | 2 | 3 | 4 | 12 | 7 | -5 | 1 | -33 | 4 | 0 | 1 | -7 |
| 10 | 1 | 4 | -1 | 6 | 0 | 5 | 4 | -20 | 3 | -2 | 5 | -22 |
| 11 | 3 | -2 | 4 | 21 | 3 | 4 | -2 | 9 | 2 | -1 | -1 | 10 |
| 12 | 3 | -2 | -5 | 5 | 2 | 3 | -4 | 12 | 1 | -2 | 3 | -1 |
| 13 | 4 | 1 | 4 | 19 | 2 | -1 | 2 | 11 | 1 | 1 | 2 | 8 |
| 14 | 2 | -1 | 2 | 0 | 4 | 1 | 4 | 6 | 1 | 1 | 2 | 4 |
| 15 | 2 | -1 | 2 | 8 | 1 | 1 | 2 | 11 | 4 | 1 | 4 | 22 |
| 16 | 2 | -1 | -3 | -9 | 1 | 5 | 1 | 20 | 3 | 4 | 2 | 15 |
| 17 | 2 | -1 | -3 | 0 | 3 | 4 | 2 | 1 | 1 | 5 | 1 | -3 |
| 18 | -3 | 5 | 6 | -8 | 3 | 1 | 1 | -4 | 1 | -4 | -2 | -9 |
| 19 | 3 | 1 | 1 | -4 | -3 | 5 | 6 | 36 | 1 | -4 | -2 | -19 |
| 20 | 3 | -1 | 1 | -11 | 5 | 1 | 2 | 8 | 1 | 2 | 4 | 16 |
| 21 | 3 | -1 | 1 | 9 | 5 | 1 | 2 | 11 | 1 | 2 | 4 | 19 |
| 22 | 2 | 3 | 1 | 4 | 2 | 1 | 3 | 0 | 3 | 2 | 1 | 1 |
| 23 | 2 | 3 | 1 | 12 | 2 | 1 | 3 | 16 | 3 | 2 | 1 | 8 |
| 24 | 1 | -2 | 3 | 14 | 2 | 3 | -4 | -16 | 3 | -2 | -5 | -8 |
| 25 | 3 | 4 | -2 | 11 | 2 | -1 | -1 | 4 | 3 | -2 | 4 | 11 |
| 26 | 1 | 5 | -6 | -15 | 3 | 1 | 4 | 13 | 2 | -3 | 1 | 9 |
| 27 | 4 | -1 | 0 | -6 | 3 | 2 | 5 | -14 | 1 | -3 | 4 | -19 |
| 28 | 5 | 2 | -4 | -16 | 1 | 0 | 3 | -6 | 2 | -3 | 1 | 9 |
| 29 | 1 | 4 | -1 | -9 | 4 | -1 | 5 | -2 | 0 | 3 | -7 | -6 |
| 30 | 7 | 4 | -1 | 13 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 | -3 | 1 | -10 |

Таблица 2.

| № вар | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $b_1$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | $b_2$ | $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ | $b_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 | -4 | 8 | 2 | 4 | -5 | 11 | 1 | -2 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 2 | -5 | 2 | 0 | 3 | -2 |
| 3 | 2 | -1 | 4 | 15 | 3 | -1 | 1 | 8 | 5 | -2 | 5 | 0 |
| 4 | 3 | -3 | 2 | 2 | 4 | -5 | 2 | 1 | 1 | -2 | 0 | 5 |
| 5 | 3 | 2 | -4 | 8 | 2 | 4 | -5 | 1 | 5 | 6 | -9 | 2 |
| 6 | 3 | 1 | 2 | -3 | 2 | 2 | 5 | 5 | 5 | 3 | 7 | 1 |
| 7 | 4 | -7 | -2 | 0 | 2 | -3 | -4 | 6 | 2 | -4 | 2 | 2 |
| 8 | 5 | -9 | -4 | 6 | 1 | -7 | -5 | 1 | 4 | -2 | 1 | 2 |
| 9 | 1 | -5 | 1 | 3 | 3 | 2 | -1 | 7 | 4 | -3 | 0 | 1 |
| 10 | 5 | -5 | -4 | -3 | 1 | -1 | 5 | 1 | 4 | -4 | -9 | 0 |
| 11 | 7 | -2 | -1 | 2 | 6 | -4 | -5 | 3 | 1 | 2 | 4 | 5 |
| 12 | 4 | -3 | 1 | 3 | 1 | 1 | -1 | 4 | 3 | -4 | 2 | 2 |
| 13 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | -3 | 9 | 1 | -1 | 1 | 2 |
| 14 | 6 | 3 | -5 | 0 | 9 | 4 | -7 | 3 | 3 | 1 | -2 | 5 |
| 15 | 8 | -1 | 3 | 2 | 4 | 1 | 6 | 1 | 4 | -2 | -3 | 7 |
| 16 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 1 | 5 | 6 | 3 | 4 | 9 | 0 |
| 17 | 2 | -3 | -4 | 1 | 7 | -9 | -1 | 3 | 5 | -6 | 3 | 7 |
| 18 | 5 | 6 | -2 | 2 | 2 | 3 | -1 | 9 | 3 | 3 | -1 | 1 |
| 19 | 3 | 1 | -2 | 6 | 5 | -3 | 2 | 4 | -2 | 5 | -4 | 0 |
| 20 | 2 | 1 | 1 | 2 | 5 | 1 | 3 | 4 | 7 | 2 | 4 | 1 |
| 21 | 1 | -2 | -3 | 3 | 1 | 3 | -5 | 0 | 2 | 1 | -8 | 4 |
| 22 | 1 | -4 | -2 | 0 | 3 | -5 | -6 | 2 | 4 | -9 | -8 | 1 |
| 23 | 4 | 1 | -3 | 1 | 3 | 1 | -1 | 2 | 1 | 0 | -2 | 5 |
| 24 | 3 | -5 | 3 | 4 | 1 | 2 | 1 | 8 | 2 | -7 | 2 | 1 |
| 25 | 1 | -2 | 3 | 6 | 2 | 3 | -4 | 2 | 3 | 1 | -1 | 5 |
| 26 | 5 | -1 | -2 | 1 | 3 | -4 | 1 | 7 | 2 | 3 | -3 | 4 |
| 27 | 2 | 8 | -7 | 0 | 2 | -5 | 6 | 1 | 4 | 3 | -1 | 7 |
| 28 | 3 | 4 | 1 | 2 | 1 | 5 | -3 | 4 | 2 | -1 | 4 | 5 |
| 29 | 2 | -3 | 2 | 5 | 3 | 4 | -7 | 2 | 5 | 1 | -5 | 9 |
| 30 | 4 | -9 | 5 | 1 | 7 | -4 | 1 | 11 | 3 | 5 | -4 | 5 |

Таблица 3.

| № вар. | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | -3 | 4 | 4 | -11 | 10 |
| 2 | 3 | -1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 |
| 3 | 1 | 3 | 2 | 2 | -1 | 3 | 3 | -5 | 4 |
| 4 | 4 | -1 | 10 | 1 | 2 | -1 | 2 | -3 | 4 |
| 5 | 2 | 5 | 1 | 4 | 6 | 3 | 1 | -1 | -2 |
| 6 | 3 | -1 | -3 | 2 | 3 | 1 | 1 | 1 | 3 |
| 7 | 1 | -1 | 2 | 2 | 1 | -3 | 3 | 0 | 2 |
| 8 | 2 | -1 | -5 | 1 | 2 | -3 | 5 | 1 | 4 |
| 9 | 5 | -5 | 4 | 3 | 1 | 3 | 1 | 7 | -1 |
| 10 | 1 | 3 | -1 | 2 | 5 | -2 | 1 | 1 | 5 |
| 11 | 2 | 1 | 3 | 3 | -1 | 2 | 1 | 3 | 4 |
| 12 | 1 | -2 | -1 | 2 | 3 | 2 | 3 | -2 | 5 |
| 13 | 2 | 1 | -1 | 3 | -2 | 4 | 1 | -5 | 3 |
| 14 | 4 | 1 | 3 | 8 | -1 | 7 | 2 | 4 | -5 |
| 15 | 1 | 4 | -3 | 2 | 5 | 1 | 1 | -7 | 2 |
| 16 | 1 | -2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 2 | -3 | 5 |
| 17 | 1 | 2 | 3 | 2 | -1 | -1 | 3 | 3 | 2 |
| 18 | 3 | 2 | 0 | 1 | -1 | 2 | 4 | -2 | 5 |
| 19 | 2 | -1 | 3 | 1 | 2 | -5 | 3 | 1 | 1 |
| 20 | 3 | 2 | -1 | 2 | -1 | 3 | 4 | 3 | 4 |
| 21 | 1 | -3 | -4 | 5 | -8 | -2 | 2 | 1 | -1 |
| 22 | 3 | 5 | -1 | 2 | 4 | -3 | 1 | -3 | 1 |
| 23 | 3 | -2 | 1 | 2 | -3 | 2 | 4 | 1 | -4 |
| 24 | 7 | 1 | -3 | 3 | -2 | 3 | 1 | -1 | 2 |
| 25 | 1 | 2 | -4 | 2 | -1 | -3 | 1 | 3 | 1 |
| 26 | 7 | -6 | 1 | 4 | 5 | 0 | 1 | -2 | 3 |
| 27 | 5 | -4 | 2 | 0 | 3 | -2 | 4 | 1 | -3 |
| 28 | 6 | 5 | -4 | 1 | 1 | -1 | 3 | 4 | 3 |
| 29 | 8 | 1 | -3 | 1 | 5 | 1 | 4 | -7 | 2 |
| 30 | 1 | 7 | -3 | 3 | -5 | 1 | 3 | 4 | -2 |

Таблица 4.

| № вар. | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | -3 | 4 | 3 | 2 | -1 | 8 | -1 | 3 |
| 2 | 5 | -6 | 4 | 3 | -3 | 1 | 2 | -3 | 3 |
| 3 | 1 | 2 | -5 | 2 | -4 | 1 | 3 | -2 | -4 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 2 | -3 | 4 | 3 | -2 | 5 |
| 5 | 1 | 2 | 4 | 5 | 1 | 2 | 4 | -1 | -2 |
| 6 | 3 | -1 | 1 | 2 | 3 | -4 | 5 | 2 | -3 |
| 7 | 1 | -2 | 1 | 3 | 3 | 5 | 4 | 1 | 6 |
| 8 | 2 | 1 | -3 | 1 | 2 | -4 | 1 | -1 | 1 |
| 9 | 2 | -1 | 2 | 4 | 1 | 5 | 2 | 2 | 3 |
| 10 | 4 | 1 | 4 | 3 | -2 | -1 | 7 | -1 | 3 |
| 11 | 3 | -2 | 1 | 2 | 3 | -5 | 5 | 1 | -4 |
| 12 | 5 | 1 | 2 | 3 | 2 | -3 | 2 | -1 | 1 |
| 13 | 1 | 2 | -5 | 1 | -2 | -4 | 2 | 0 | -9 |
| 14 | 1 | -3 | 5 | 1 | 2 | -3 | 2 | -1 | 2 |
| 15 | 2 | -1 | 2 | 3 | 2 | -3 | 5 | 1 | -1 |
| 16 | 2 | -1 | 3 | 1 | -3 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 17 | 1 | -3 | -2 | 3 | -1 | 4 | 2 | -2 | 1 |
| 18 | 5 | 1 | -2 | 3 | -1 | 1 | 2 | 2 | -3 |
| 19 | 3 | 2 | -3 | 2 | -3 | 1 | 5 | -1 | -2 |
| 20 | 4 | -1 | 5 | 2 | -3 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 21 | 1 | 5 | 1 | 2 | -3 | -7 | 3 | 2 | -6 |
| 22 | 3 | 4 | -1 | 1 | -5 | 2 | 4 | -1 | 1 |
| 23 | 2 | 4 | -3 | 1 | -3 | 2 | 3 | 1 | -1 |
| 24 | 7 | -6 | -1 | 3 | -3 | 4 | 4 | -3 | -5 |
| 25 | 5 | -3 | 2 | 2 | 4 | -3 | 3 | -7 | 5 |
| 26 | 1 | -8 | 7 | 3 | 5 | -4 | 4 | -3 | 3 |
| 27 | 5 | 8 | -5 | 7 | 5 | -1 | 2 | -3 | 4 |
| 28 | 5 | 1 | -6 | 4 | 3 | -7 | 1 | -2 | 1 |
| 29 | 2 | -1 | 4 | 7 | -5 | 3 | 5 | -4 | -1 |
| 30 | 2 | 2 | -1 | 5 | 4 | -6 | 3 | 2 | -5 |

Таблица 5.

| № вар. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $a$ | $b$ | № вар. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | -1 | 3 | 2 | 2 | 16 | 12 | 3 | -1 | $2/3$ | -2 |
| 2 | 1 | 2 | 4 | 3 | $3/2$ | 17 | 1 | -4 | 8 | -3 | $3/4$ |
| 3 | 1 | 3 | 6 | 4 | $4/3$ | 18 | 1 | 4 | -8 | -3 | $3/4$ |
| 4 | 2 | 4 | 1 | $3/2$ | 3 | 19 | 7 | -5 | 10 | -4 | $4/5$ |
| 5 | 6 | 3 | 1 | $4/3$ | 4 | 20 | 5 | -5 | 4 | $4/5$ | -4 |
| 6 | 1 | 4 | 8 | 5 | $5/4$ | 21 | 1 | -6 | 6 | -5 | $5/6$ |
| 7 | 8 | 4 | 1 | $5/4$ | 5 | 22 | 6 | 6 | 2 | $5/5$ | -5 |
| 8 | 2 | 5 | 10 | 6 | $6/5$ | 23 | 1 | 7 | -7 | -6 | $6/7$ |
| 9 | 10 | 5 | 1 | $6/5$ | 6 | 24 | 7 | 7 | 2 | $6/7$ | -6 |
| 10 | 1 | 6 | 12 | 7 | $7/6$ | 25 | 3 | -8 | 8 | -7 | $7/8$ |
| 11 | -12 | 6 | 1 | $7/6$ | 7 | 26 | 1 | -9 | 9 | -8 | $8/9$ |
| 12 | -1 | 7 | 14 | 8 | $8/7$ | 27 | 9 | 9 | 2 | $8/9$ | -8 |
| 13 | -3 | 2 | 4 | -1 | $1/2$ | 28 | 3 | -10 | 10 | -9 | $9/10$ |
| 14 | 2 | 4 | 3 | $1/2$ | -1 | 29 | 10 | 10 | 7 | $9/10$ | -9 |
| 15 | 2 | 6 | -3 | -2 | $2/3$ | 30 | 1 | 9 | 18 | 10 | $10/9$ |

Таблица 6.

| № вар | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $a_{14}$ | $a_{15}$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | $a_{24}$ | $a_{25}$ | $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ | $a_{34}$ | $a_{35}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 1 | -4 | 2 | 1 | 2 | -2 | -3 | -7 | 2 | 1 | 11 | 0 | 34 | -5 |
| 2 | 7 | 2 | -1 | -2 | 2 | 1 | -3 | 1 | -1 | -1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 10 | 1 | -1 | 5 | -1 | 8 | -2 | 2 | 3 | -3 | -12 | -4 | 4 |
| 4 | 6 | -9 | 21 | -3 | -12 | -4 | 6 | -14 | 2 | 8 | 2 | -3 | 7 | -1 | -4 |
| 5 | 2 | -1 | 2 | -1 | 1 | 1 | 10 | -3 | -2 | -1 | 4 | 19 | -4 | -5 | -1 |
| 6 | 5 | -2 | 9 | -4 | -1 | 1 | 4 | 2 | 2 | -5 | 6 | 2 | 11 | -2 | -6 |
| 7 | 12 | -1 | 7 | 11 | -1 | 24 | -2 | 14 | 22 | -2 | 1 | 1 | 1 | -1 | 2 |
| 8 | 1 | 2 | 1 | 4 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | -5 | 1 | 3 | -1 | 6 | -1 |
| 9 | 2 | 3 | 3 | -3 | -1 | 1 | 6 | -1 | 1 | 2 | 1 | 16 | -6 | 6 | 7 |
| 10 | 1 | 2 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 2 | -1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 |
| 11 | 8 | 1 | 1 | -1 | 2 | 3 | -3 | -2 | 1 | -3 | 5 | 4 | 3 | -2 | 5 |
| 12 | 1 | 3 | -1 | 12 | -1 | 2 | -2 | 1 | -10 | 1 | 3 | 1 | 0 | 2 | 0 |
| 13 | 7 | -14 | 3 | -1 | 1 | 1 | -2 | 1 | -3 | 7 | 5 | -10 | 1 | 5 | -13 |
| 14 | 1 | 2 | 3 | 1 | -1 | 2 | -2 | -6 | -4 | 1 | 3 | -2 | 3 | 3 | -1 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 2 | 1 | -2 | -1 | -2 | 1 | 2 | 5 | -2 | -1 |
| 16 | 2 | 2 | -2 | 1 | -3 | 3 | -1 | 2 | -1 | 2 | 1 | -3 | 4 | -2 | 5 |
| 17 | 1 | 2 | -3 | 10 | -1 | -1 | -2 | 3 | 10 | 1 | 1 | 6 | -9 | 30 | -3 |
| 18 | 2 | 1 | -1 | 7 | 5 | 1 | -2 | 3 | -5 | -7 | 3 | -1 | 2 | 2 | -2 |
| 19 | 2 | -2 | -3 | -7 | 2 | 1 | 11 | 0 | 34 | -5 | 1 | -5 | -2 | -16 | 3 |
| 20 | 3 | 1 | -8 | 2 | 1 | 1 | 11 | -12 | 0 | -5 | 1 | -5 | 2 | 1 | 3 |
| 21 | 1 | 3 | -5 | 9 | -1 | 2 | 7 | -3 | -7 | 2 | 1 | 4 | 2 | -16 | 3 |
| 22 | 5 | 2 | -1 | 3 | 4 | 3 | 1 | -3 | 3 | 5 | 6 | 3 | -2 | 4 | 5 |
| 23 | 3 | 2 | -2 | -1 | 4 | 7 | 5 | -3 | -2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | -7 |
| 24 | 6 | 3 | -2 | 4 | 7 | 7 | 4 | -3 | 2 | 4 | 1 | 1 | -1 | -2 | -3 |
| 25 | 3 | -5 | 2 | 5 | 0 | 7 | -4 | 1 | 3 | 0 | 5 | 7 | -4 | -9 | 0 |
| 26 | 1 | 1 | 3 | -2 | 3 | 2 | 2 | 5 | -1 | 3 | 1 | 1 | 4 | -5 | 6 |
| 27 | 1 | 2 | 3 | -2 | 1 | 1 | 2 | 7 | -4 | 1 | 1 | 2 | 11 | -6 | 1 |
| 28 | 6 | 3 | 2 | 3 | 4 | 4 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 29 | 3 | 2 | 4 | 1 | 2 | 3 | 2 | -2 | 1 | 0 | 3 | 2 | 16 | 1 | 6 |
| 30 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | -2 | -3 | 1 | -1 | 2 | -1 | -2 | 3 | 0 |

Таблица 7.

| № вар. | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $a_{14}$ | $a_{15}$ | $b_1$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | $a_{24}$ | $a_{25}$ | $b_2$ | $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ | $a_{34}$ | $a_{35}$ | $b_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | -2 | -3 | 0 | 4 | 2 | 5 | -1 | -4 | 0 | 9 | 1 | 3 | 1 | -1 | 0 | 5 |
| 2 | 1 | -4 | 2 | 0 | 3 | 5 | 2 | -7 | 4 | 1 | 0 | 9 | 1 | -3 | 2 | 1 | -3 | 4 |
| 3 | 1 | 2 | -3 | -4 | 0 | 1 | 3 | 7 | -2 | -1 | 0 | 4 | 2 | 5 | 1 | 3 | 0 | 3 |
| 4 | 1 | -5 | 3 | 4 | 0 | 4 | 2 | -9 | 2 | 0 | 1 | 7 | 1 | -4 | -1 | -4 | 1 | 3 |
| 5 | 1 | 3 | -1 | -2 | 0 | 1 | 2 | 7 | -4 | -3 | 0 | 3 | 1 | 4 | -3 | -1 | 0 | 2 |
| 6 | 1 | 1 | 4 | 0 | 2 | 0 | 3 | 4 | 1 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | -3 | 3 | -2 | 1 |
| 7 | 1 | -2 | 2 | 3 | 0 | 0 | 2 | -3 | 1 | 4 | 0 | 1 | 3 | -5 | 3 | 7 | 0 | 1 |
| 8 | 1 | -1 | 4 | 3 | 0 | 0 | 3 | -2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 2 | -1 | -3 | -3 | 2 | 1 |
| 9 | 1 | -2 | 2 | 3 | 0 | 0 | 3 | -5 | 1 | 4 | 0 | 1 | 2 | -3 | -1 | 1 | 0 | 1 |
| 10 | 1 | -3 | 4 | 0 | 3 | 2 | 3 | -8 | 1 | 2 | 0 | 5 | 2 | -5 | -3 | 2 | -3 | 3 |
| 11 | 1 | -3 | 1 | 2 | 0 | 4 | 2 | -5 | 4 | 3 | 0 | 7 | 1 | -2 | 3 | 1 | 0 | 3 |
| 12 | 1 | -1 | 3 | 4 | 0 | 0 | 4 | -3 | 1 | 0 | 2 | 1 | 3 | -2 | -2 | -4 | 2 | 1 |
| 13 | 1 | 4 | -2 | -3 | 0 | 2 | 2 | 9 | -1 | -4 | 0 | 5 | 1 | 5 | 1 | -1 | 0 | 3 |
| 14 | 1 | -2 | 3 | 0 | 4 | 1 | 4 | -7 | 2 | 1 | 0 | 3 | 3 | -5 | -1 | 1 | -4 | 2 |
| 15 | 1 | -1 | 3 | 4 | 0 | 0 | 2 | -1 | 2 | 1 | 0 | 1 | 4 | -3 | 8 | 9 | 0 | 1 |
| 16 | 1 | 1 | -3 | -4 | 0 | 1 | 4 | 5 | -2 | 0 | -1 | 3 | 3 | 4 | 1 | 4 | -1 | 2 |
| 17 | 1 | -4 | 2 | 3 | 0 | 5 | 2 | -7 | 4 | 1 | 0 | 9 | 1 | -3 | 2 | -2 | 0 | 4 |
| 18 | 1 | 2 | -2 | 0 | -3 | 4 | 2 | 5 | -1 | -4 | 0 | 9 | 1 | 3 | 1 | -4 | 3 | 5 |
| 19 | 1 | -5 | 3 | 4 | 0 | 4 | 2 | -9 | 2 | 1 | 0 | 7 | 1 | -4 | -1 | -3 | 0 | 3 |
| 20 | 1 | 2 | -3 | -4 | 0 | 1 | 3 | 7 | -2 | 0 | 1 | 4 | 2 | 5 | 1 | 4 | 1 | 3 |
| 21 | 1 | 1 | 4 | 2 | 0 | 0 | 3 | 4 | 1 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | -3 | 1 | 0 | 1 |
| 22 | 1 | 3 | -1 | 0 | -2 | 1 | 2 | 7 | -4 | -3 | 0 | 3 | 1 | 4 | -3 | -3 | 2 | 2 |
| 23 | 1 | -1 | 4 | 3 | 0 | 0 | 3 | -2 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | -1 | -3 | -1 | 0 | 1 |
| 24 | 1 | -2 | 2 | 3 | 0 | 0 | 2 | -3 | 1 | 0 | 4 | 1 | 3 | -5 | 3 | 3 | 4 | 1 |
| 25 | 1 | -3 | 4 | 3 | 0 | 2 | 3 | -8 | 1 | 2 | 0 | 5 | 2 | -5 | -3 | -1 | 0 | 3 |
| 26 | 1 | -2 | 2 | 0 | 3 | 0 | 3 | -5 | 1 | 4 | 0 | 1 | 2 | -3 | -1 | 4 | -3 | 1 |
| 27 | 1 | -1 | 3 | 4 | 0 | 0 | 4 | -3 | 1 | 2 | 0 | 1 | 3 | -2 | -2 | -2 | 0 | 1 |
| 28 | 1 | -3 | 1 | 2 | 0 | 4 | 2 | -5 | 4 | 0 | 3 | 7 | 1 | -2 | 3 | -2 | 3 | 3 |
| 29 | 1 | -2 | 3 | 4 | 0 | 1 | 4 | -7 | 2 | 1 | 0 | 3 | 3 | -5 | -1 | -3 | 0 | 2 |
| 30 | 1 | 4 | -2 | 0 | -3 | 2 | 2 | 9 | -1 | -4 | 0 | 5 | 1 | 5 | 1 | -4 | 3 | 3 |

ЛИТЕРАТУРА

1. Бугров Н.С., Никольский С.М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. - М.: Дрофа, 2005.

2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1/ П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. - М.: ОНИКС, 2003.

3. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые её приложения: Учеб. пособие для вузов. 4-е изд., испр. -М: Наука, 1985.

4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра, М.: Наука - Физматлит, 1999.

5. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. 3-е изд., перераб. -М.: Наука, 1970.

6. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике/ В.П. Минорский - М.: Физматлит, 2003.

7. Проскуряков И.Б. Сборник задач по линейной алгебре. - М.: Наука, 1978 (и последующие издания).

8. Ефимов А.В. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях: учебное пособие для втузов /Под ред. А.В. Ефимова А.С. Поспелова.- М.: Физматлит, Ч. 1- 2001.

9. Стренг Г. Линейная алгебра и её применения. - М.: Мир 1980, 454 с.

10. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов. Учеб. пособие. Практикум /Под ред. Кремера Н.Ш., 2-е изд., - М.: Юнити 2010, - 477 с.

11. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике. Типовые расчёты: Учебное пособие. 7-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2005. – 240 с.

12. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономического бакалавриата: Учебник.– М.: ИНФРА – М, 2013. – 472 с.

13. Кекух Л.В. Элементы линейной алгебры: Учебное пособие. – М.: МИИТ, 2007. – 88 с.

14. Новосельцева В.И. Линейная алгебра: Учебное пособие. – М.: МИИТ, 2012, – 140 с.

СОДЕРЖАНИЕ

| | Стр. |
|---|---|
| 1. Произвольные системы линейных уравнений………………………………… | 3 |
| 1.1. Метод Гаусса…………………………………………………………………… | 3 |
| 1.2. Матричный метод решения систем линейных уравнений………………….. | 10 |
| 1.3.Формулы Крамера……………………………………………………………… | 11 |
| 2. Линейные векторные пространства ……………………………………….. | 13 |
| 2.1. Понятие линейного векторного пространства………………………………. | 13 |
| 2.2. Размерность и базис линейного векторного пространства…………………. | 14 |
| 2.3. Переход к новому базису……………………………………………………… | 20 |
| 2.4. Евклидово пространство……………………………………………………… | 23 |
| 3. Однородные и неоднородные системы линейных уравнений……………… | 26 |
| 3.1.Однородные системы линейных уравнений…………………………………. | 26 |
| 3.2.Неоднородные системы линейных уравнений………………………………. | 33 |
| 4. Линейные преобразования и линейные операторы…………………………... | 36 |
| 4.1.Понятие линейного оператора………………………………………………… | 36 |
| 4.2. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора…….. | 39 |
| 4.3. Ортогональные и симметрические матрицы линейного оператора………… | 44 |
| 5. Квадратичные формы………………………………………………………... | 50 |
| 5.1.Матрица квадратичной формы………………………………………………… | 50 |
| 5.2. Канонический и нормальный вид квадратичной формы……………………. | 51 |
| 6. Задачи для самостоятельной работы………………………………………….. | 58 |
| 7. Литература……………………………………………………………………. | 76 |

УДК 512

С40

Сирош М.М. Элементы линейной алгебры: Учебное пособие. – М.: МГУПС (МИИТ), 2014. – 76 с.

Учебное пособие предназначено для студентов направления 080100.62 «Экономика», обучающихся по дисциплине «Линейная алгебра». Учебное пособие удовлетворяет требованиям ФГОС третьего поколения и написано в соответствие с примерной образовательной программой дисциплины «Линейная алгебра», одобренной УМО по классическому университетскому образованию. Пособие включает следующие разделы программы: системы линейных уравнений, линейные векторные пространства, линейные отображения и линейные операторы. Излагается теория векторных пространств с её приложениями к решению систем линейных уравнений, теория линейных операторов, в том числе в евклидовых пространствах, и рассматриваются наиболее важные вопросы теории квадратичных форм.

В каждом разделе кратко изложены основные теоретические сведения, приведены решения типовых примеров и задачи для самостоятельного решения с ответами. Учебное пособие содержит также индивидуальные задания для самостоятельного решения по каждому разделу.

Рецензенты: А.А. Клячко, к.ф.-м.н., доцент кафедры «Высшая алгебра» МГУ имени М.В. Ломоносова;
Н.А. Корниенко, к.т.н., доцент кафедры «Высшая математика» МИИТа.

Св.план 2014 г., поз.147

Сирош Мария Михайловна

Элементы линейной алгебры

Учебное пособие

Подписано в печать Заказ №

Усл. печ. л. Формат Тираж 200 экз.