Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный университет путей сообщения Императора Николая II»

Институт экономики и финансов

Кафедра «Математика»

М.М. Сирош

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

I часть

Учебное пособие

Москва – 2016

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский государственный университет путей сообщения Императора Николая II»

Институт Экономики и финансов

Кафедра «Математика»

М.М. Сирош

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

I часть

Рекомендовано редакционно-издательским советом
университета в качестве учебного пособия
для студентов направления «Экономическая безопасность»

Москва – 2016

УДК 517
С40

Сирош М.М. Математический анализ: Учебное пособие. – М.: МГУПС (МИИТ), 2016. – 76: с.

Учебное пособие предназначено для студентов направления «Экономическая безопасность», обучающихся по дисциплине «Математика». Учебное пособие удовлетворяет требованиям ФГОС третьего поколения. Пособие включает следующие разделы программы: функция, числовые последовательности, непрерывность функции, дифференциальное исчисление функции одной переменной, исследование функций и построение их графиков. Пособие состоит из шести глав. Каждая глава начинается с краткого обзора теоретических вопросов, после которого помещены примеры решения типовых задач. За ними следуют однотипные им задачи для самостоятельной работы с ответами. В конце пособия приводятся задания для самостоятельной работы (30 вариантов), охватывающие все разделы математического анализа, рассмотренные в настоящем пособии.

Рецензенты: В.М. Кесельман, к.ф.-м.н., доцент кафедры «Высшая математика 2» МТУ (МИРЭА).

Н.А. Корниенко, к.т.н., доцент кафедры «Высшая и вычислительная математика» МГУПС (МИИТ).

Глава 1. ФУНКЦИЯ

Математический анализ – часть математики, в которой функции и их обобщения изучаются методом пределов. Понятие предела тесно связано с понятием бесконечно малой величины, поэтому можно также сказать, что математический анализ изучает ***функции*** и их обобщения методом бесконечно малых.

В природе и технике всюду встречаются движения, процессы, которые описываются функциями; законы явлений природы также обычно описываются функциями. Отсюда объективная важность математического анализа как средства изучения функций.

Математический анализ в широком понимании этого термина охватывает весьма большую часть математики. В него входят дифференциальное исчисление, интегральное исчисление, теория функций действительного переменного, теория функций комплексного переменного, приближение функций, теория дифференциальных уравнений, теория интегральных уравнений, дифференциальная геометрия, вариационное исчисление, функциональный анализ и некоторые другие математические дисциплины. Современные теория чисел и теория вероятностей применяют и развивают методы математического анализа.

Всё же термин «математический анализ» часто употребляется для наименования только основ математического анализа, объединяющих в себе теорию действительного числа, теорию пределов, теорию рядов, дифференциальное и интегральное исчисление и их непосредственные приложения, такие, как теория максимумов и минимумов, теория неявных функций, ряды Фурье, интегралы Фурье.

1.1. Понятие множества.

Понятие множества является одним из основных понятий математики. Под ***множеством*** понимают совокупность (класс, собрание, семейство…) некоторых объектов, объединенных по какому-либо признаку.

Например, можно говорить о множестве студентов института, о множестве всех натуральных чисел, о множестве предприятий данной отрасли и т. д. Объекты, из которых состоит множество, называются его ***элементами*** или ***точками***. Множества принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита A, B, …, X, Y, …, а их элементы – малыми буквами a, b,…, x, y, ….

Если элемент x принадлежит множеству X, то пишут $x \in X$. Если элемент x не принадлежит множеству X , то пишут $x \notin X$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым*** и обозначается символом $\emptyset$. Например, множество действительных корней уравнения $x^2 + 4 = 0$ есть пустое множество.

Элементы множества записывают в фигурных скобках, внутри которых они перечислены (если это возможно), либо указано общее свойство, которым обладают все элементы данного множества.

Например, запись $A = \{3,4,5\}$ означает, что множество A состоит из трех чисел 3, 4 и 5; запись $A = \{x\colon 3 \le x \le 5\}$ означает, что множество A состоит из всех действительных (если не оговорено иное) чисел, удовлетворяющих неравенству $3 \le x \le 5$.

Множество A называется ***подмножеством*** множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B. Символически это обозначают так:

$A \subset B$ («A включено в B») или $B \supset A$ («множество B включает в себя множество A»).

Говорят, что множества A и B ***равны*** или ***совпадают***, и пишут $A = B$, если $A \subset B$ и $B \supset A$. По-другому, множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются ***равными***.

Операции над множествами

Объединением (или суммой) множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из этих множеств. Объединение (сумму множеств) обозначают $A \cup B$ (или $A + B$). Кратко можно записать

$$A \cup B = \{x\colon\ x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Пересечением (или произведением) множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит множеству A и множеству B. Пересечение (произведение) множеств обозначают $A \cap B$ или $(A \cdot B)$. Кратко можно записать

$$A \cap B = \{x\colon\ x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B. ***Разность*** множеств обозначают $A \setminus B$. Кратко можно записать

$$A \setminus B = \{x\colon\ x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

В дальнейшем для сокращения записей будем использовать следующие логические символы:

$\forall$ - означает «для любого», «для всякого»;

$\exists$ - «существует», «найдется»;

: - «имеет место», «такое что».

Например, запись $\forall x \in A$: a означает: «для всякого элемента x из множества A имеет место предположение a».

Кроме того, далее будут использоваться сокращенные способы записи сумм и произведений большого количества элементов:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

Числовые множества

Множества, элементами которых являются числа, называются ***числовыми***. Примерами числовых множеств являются:

$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \ldots; n; \ldots\}$ – множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}_0 = \{0; 1; 2; 3; \ldots; n; \ldots\}$ – множество целых неотрицательных чисел;

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1; \pm 2; \ldots; \pm n; \ldots\}$ – множество целых чисел;

$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}\colon m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ – множество рациональных чисел;

$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел.

Между этими множествами существует соотношение

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ содержит рациональные и иррациональные числа. Всякое рациональное число выражается или конечной десятичной дробью, или бесконечной периодической дробью. Так $\frac{1}{4} = 0{,}25$ $(= 0{,}250\ldots)$, $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ - рациональные числа.

Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются ***иррациональными***. Например, $\sqrt{2} = 1{,}4142356\ldots$, $\pi = 3{,}1415926\ldots$ - иррациональные числа.

Геометрически множество действительных чисел $\mathbb{R}$ изображается точками числовой прямой (или числовой оси) (рис. 1.1), т. е. прямой, на которой выбрано начало отсчёта, положительное направление и единица масштаба.

Рис. 1.1

Между множеством действительных чисел и точками числовой прямой существует взаимно однозначное соответствие, т. е. каждому действительному числу соответствует определённая точка числовой прямой, и наоборот, каждой точке прямой – определённое действительное число. Поэтому часто вместо «число x» говорят «точка x».

Пусть a и b – действительные числа, причем $a < b$.

Числовыми промежутками (интервалами) называются подмножества всех действительных чисел, имеющих следующий вид:

$[a; b] = \{x: a \leq x \leq b\}$ - отрезок (сегмент, замкнутый промежуток);

$(a; b) = \{x: a < x < b\}$ - интервал (открытый промежуток);

полуоткрытые интервалы (или полуоткрытые отрезки):

$[a; b) = \{x: a \leq x < b\}$, $[a; b) = \{x: a \leq x < b\}$;

бесконечные полуинтервалы:

$(-\infty; b] = \{x: x \leq b\}$, $[a; +\infty) = \{x: x \geq a\}$,

$(-\infty; b) = \{x: x < b\}$, $(a; +\infty) = \{x: x > a\}$.

бесконечные интервалы:

$(-\infty; +\infty) = \{x: -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}$.

В дальнейшем все указанные множества мы объединяем термином ***промежуток*** X.

Числа a и b называются соответственно левым и правым концами этих промежутков.

Абсолютная величина действительного числа. Окрестность точки

Абсолютной величиной (или ***модулем***) действительного числа x называется само число x, если x неотрицательно, и противоположное число $-x$, если x отрицательно:

$$|x| = \begin{cases} x, & если\ x \geq 0, \\ -x, & если\ x < 0. \end{cases}$$

Свойства абсолютных величин:

1. $|x| \geq 0$.
2. $|x| = |-x|$.
3. Пусть $a>0$, тогда неравенства $|x| \leq a$ и $-a \leq x \leq a$ равносильны.
4. $|x + y| \leq |x| + |y|$.
5. $|x - y| \geq |x| - |y|$.
6. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
7. $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$.

Пусть x_0 – любое действительное число (точка на числовой прямой).

Абсолютная величина разности двух чисел $|x - x_0|$ означает расстояние между точками x и x_0 числовой прямой как для случая $x < x_0$, так и для $x > x_0$.

Окрестностью точки x_0 называется любой интервал $(a; b;)$, содержащий точку x_0. В частности, интервал $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называется ***ε - окрестностью*** точки x_0. Число x_0 называется ***центром***, а число ε – ***радиусом***.

Если $x \in (x_0 - \varepsilon;\ x_0 + \varepsilon)$, то выполняется неравенство $|x - x_0| < \varepsilon$. Выполнение последнего неравенства означает попадание точки x в ε - окрестность точки x_0 (рис. 1.2).

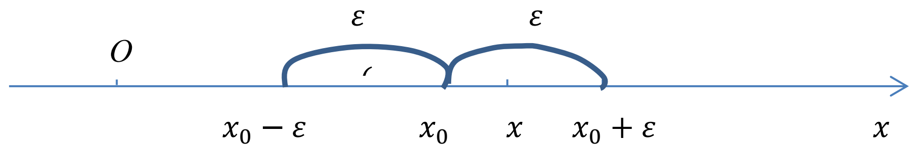


Рис. 1.2

Проколотой окрестностью точки x_0 называется любая окрестность точки x_0, без точки x_0. В частности, интервал $(x_0 - \delta;\ x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$, где $\delta > 0$, называется ***δ - окрестностью*** точки x_0. Если $x \in (x_0 - \delta;\ x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$, то выполняется неравенство
$0 < |x - x_0| < \delta$.

1.2. Определение функции. Область определения функции. Множество значений функции

Постоянной величиной называется величина, сохраняющая одно и то же значение. Например, отношение длины окружности к её диаметру есть постоянная величина, равная числу π.

Если величина сохраняет постоянное значение лишь в условиях данного процесса, то в этом случае она называется ***параметром***.

Переменной называется величина, которая может принимать различные числовые значения. Например, при равномерном движении $S = v \cdot t$, где путь S и время t – переменные величины, а v – параметр.

Пусть даны два непустых множества X и Y. Если каждому значению переменной $x \in X$ по какому-либо закону f ставится в соответствие одно и только одно значение $y \in Y$, то величина y называется ***функцией*** величины x и обозначается $y = f(x)$. При этом величина x называется ***независимой переменной*** (или ***аргументом***), величина y – ***зависимой переменной*** (или ***функцией***). Относительно самих величин x и y говорят, что они находятся в ***функциональной зависимости***.

Множество X называется ***областью определения функции*** f и обозначается $D(f)$. Множество всех $y \in Y$ называется ***множеством значений функции*** f и обозначается $E(f)$.

1.3. Числовые функции. График функции. Способы задания функции

Пусть задана функция $y = f(x)$.

Если элементами множеств X и Y являются действительные числа (т. е. $X \subset \mathbb{R}$ и $Y \subset \mathbb{R}$), то функцию f называют ***числовой функцией***.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек плоскости Oxy, для каждой из которых x является значением аргумента, а y – соответствующим значением функции.

Чтобы задать функцию $y = f(x)$, необходимо указать правило, позволяющее, зная x, находить соответствующее значение y.

Существует несколько способов задания функции: аналитический, табличный, графический, логический.

Аналитический способ. Функция задается в виде одной или нескольких формул или уравнений. Аналитический способ задания функции является наиболее совершенным, так как к нему приложены методы математического анализа, позволяющие полностью исследовать функцию $y = f(x)$.

Например, 1) $y = x^3 + \sqrt{5-x}$, 2) $y = \begin{cases} x^2, \text{если } x < 0, \\ x, \text{если } x \geq 0, \end{cases}$ 3) $y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} +1, \text{если } x > 0, \\ 0, \text{если } x = 0, \\ -1, \text{если } x < 0. \end{cases}$

Табличный способ. Функция задается таблицей, содержащей значения аргумента и соответствующие им значения функции. Например, известные таблицы значений тригонометрических функций, логарифмические таблицы. На практике часто приходится пользоваться таблицами значений функций, полученных опытным путем или в результате наблюдений (социологические опросы, ряды экспериментальных измерений, таблицы бухгалтерской отчетности и банковской деятельности и т. д.). Как правило, в таких таблицах по крайней мере одну из переменных можно принять за независимую (например, время), тогда другие величины будут являться функциями от этого аргумента.

Графический способ. На координатной плоскости изображается совокупность точек. Значения функции y, соответствующие тем или иным значениям аргумента x, непосредственно находятся из этого графика. Этот способ обычно используется в экспериментальных измерениях с употреблением самопишущих приборов (осциллографы, сейсмографы и т. д.). Преимуществом графического задания является его наглядность, недостатком – его неточность.

Логический способ. Функция описывается правилом её составления, например, функция Дирихле:

$f(x) = 1$, если x – рациональное число; $f(x) = 0$, если x – иррациональное число.

1.4. Формы задания функции

Явная функция. Функция называется ***явной***, если она задана формулой, в которой правая часть не содержит зависимой переменной.

Например, функция $y = x^3 + 2x + 3$.

Неявная функция. Функция y аргумента x называется ***неявной***, если она задана уравнением $F(x, y) = 0$, не разрешенным относительно зависимой переменной.

Например, $ln(x + y) + sinx + e^y = 0$.

Сложная функция. Пусть функция $y = f(u)$ есть функция от переменной u, определенной на множестве U с областью значений Y, а переменная u, в свою очередь, является функцией $u = g(x)$ от переменной x, определённой на множестве X с областью значений U. Тогда заданная на множестве X функция $y = f(g(x))$ называется ***сложной функцией*** аргумента x.

Например, $y = \sin(x^3 + 5)$ – сложная функция.

Параметрическая функция. Если переменные x и y связаны через третью переменную (параметр) t, то говорят, что функция задана ***параметрически***.

Например, $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

1.5. Основные характеристики функции

1. ***Область определения*** (или область допустимых значений) аргумента: множество $D(f)$.

Если функция задана аналитически $y = f(x)$, т.е. посредством формулы, и не имеется никаких ограничений, то её область определения $D(f)$ устанавливается исходя из правил выполнения математических операций, входящих в формулу f в выражении $y = f(x)$.

2. ***Область изменения*** (или область значений) функции: множество $E(f)$.

Значение функции $f(x)$ при $x = a$, где $a \in D(f)$, называется ***частным значением*** функции и обозначается $f(a)$.

3. ***Четность***. Функция $y = f\ (x)$ называется ***четной***, если для любых значений $\boldsymbol{x}$ из области определения справедливо соотношение $f\ (-x) = f(x)$, и ***нечетной***, если $f\ (-x) = -\ f(x)$. В противном случае функция $y = f\ (x)$ называется ***функцией общего вида***. График четной функции симметричен относительно оси ординат, график нечетной симметричен относительно начала координат.

Например, $y = \cos x$, $y = \sqrt{1-x^2}$ - четные функции;

$y = \sin x$, $y = x^4 \cdot \sqrt[5]{x} + 2\sin x$ – нечетные функции;

$y = x+5$, $y = \sqrt{x}$ – функции общего вида.

Определяя четность и нечетность функции, следует помнить, что:

1) сумма четных функций – функция четная;
2) сумма нечетных функций – функция нечетная;
3) произведение четных функций – функция четная;
4) произведение двух нечетных функций – функция четная;
5) произведение четной и нечетной функций – функция нечетная.

4. ***Периодичность***. Функция $y = f\ (x)$ называется ***периодической***, если существует такое число $\mathrm{T} > 0$, что для любого значения x, взятого из области определения функции, значения $x + \mathrm{T}$ и $x - \mathrm{T}$ также принадлежат области определения функции и выполняется равенство

$$f(x + \mathrm{T}) = f(x - \mathrm{T}) = f(x).$$

Число Т называется ***периодом функции***.

Например, значение функции $y = \sin x$ не изменится, если к аргументу прибавлять любое число из множества $2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Наименьшее положительное из этих чисел 2π есть по определению период функции.

5. ***Монотонность***. Функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей*** (***убывающей***) на промежутке X, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции. Возрастающие и убывающие функции называются ***монотонными***. К монотонным функциям, наряду с возрастающими и убывающими, относятся неубывающие и невозрастающие функции.

Интервалы, в которых функция монотонна, называются ***интервалами монотонности***.

6. ***Ограниченность***. Функцию $y = f(x)$, определенную на множестве D, называют ***ограниченной*** на этом множестве, если $\exists\ M > 0$ такое, что $\forall x \in D$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \le M(x)$$

или кратко можно записать:

функция $y = f(x)$ называется ***ограниченной*** на D, если $\exists\ M > 0$: $\forall x \in D \Rightarrow |f(x)| \le M(x)$.

В противном случае функция называется ***неограниченной***.

Например, функция $y = \sin x$ ограничена на всей числовой оси, ибо $|\sin x| \le 1$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

1.6. Обратная функция

Пусть функция $y = f(x)$ задана на множестве D и пусть E - множество значений этой функции. Если каждому значению $y \in Y$ соответствует единственное значение $x \in X$, то определена функция $x = \varphi(y)$ с областью определения E и множеством значений D. Такая функция $x = \varphi(y)$ называется ***обратной*** к функции $y = f(x)$ и записывается в следующем виде: $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$.

Про функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ говорят, что они являются взаимно обратными.

Чтобы найти функцию $x = \varphi(y)$, обратную к функции $y = f(x)$, достаточно решить уравнение $y = f(x)$ относительно x (если это возможно).

Любая строго монотонная функция имеет обратную. При этом, если функция возрастает (убывает), то обратная функция также возрастает (убывает).

Функции $y = f(x)$ и обратная к ней $x = \varphi(y)$ изображаются одной и той же кривой, т.е. графики их совпадают. Если мы обозначим, как обычно, независимую переменную (т. е. аргумент) через x, а зависимую переменную – через y, то функция, обратная к $y = f(x)$, запишется в виде $y = \varphi(x)$.

Это означает, что точка $M_1(x_0;\ y_0)$ кривой $y = f(x)$ становится точкой $M_2(y_0;\ x_0)$ кривой $y = \varphi(x)$. Но точки M_1 и M_2 симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 1.3). Поэтому ***графики взаимно обратных функций*** $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ ***симметричны*** относительно биссектрисы I и III-го координатных углов.

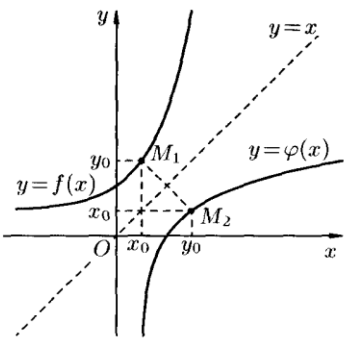


Рис. 1.3

Например, для функции $y = x^3$ обратной функцией является функция $x = \sqrt[3]{y}$.

Функции $y = a^x$ и $y = log_a x$ являются взаимно обратными.

Для функции, например, $y = x^2$, заданной на $[-1; 1]$, обратной не существует, так как одному значению функции y соответствуют два значения аргумента x.

1.7. Элементарные функции

Элементарные функции – это функции, заданные одной формулой, которые можно получить при помощи конечного числа арифметических операций (сложения, вычитания, умножения и деления), а также взятия композиции (функции от функции). Функции, определяемые несколькими различными формулами для различных интервалов изменения аргумента, называются ***неэлементарными***.

Примеры элементарных функций:

1) $y = 5^{\sin\sqrt{x}}$; 2) $y = arccos\,\frac{1}{x} + \frac{tgx}{8x^2+3}$.

Примеры неэлементарных функций:

1) $y = sign\ x = \begin{cases} 1, \text{если } x > 0, \\ 0, \text{если } x = 0, \\ -1, \text{ если } x < 0, \end{cases}$

где $sign$ (от латинского, читается «сигнум икс») означает знак числа;

2) $y = |x| = \begin{cases} x, \text{если } x \geq 0, \\ -x, \text{если } x < 0. \end{cases}$

Классификация функций

Элементарные функции делятся на алгебраические и неалгебраические (трансцендентные).

Алгебраической называется функция, в которой над аргументом проводится конечное число алгебраических действий. К числу алгебраических функций относятся:

- *целая рациональная функция* (*многочлен* или *полином*): $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$;
- *дробно-рациональная функция* – отношение двух многочленов;
- *иррациональная функция* (если в составе операций над аргументом имеется извлечение корня).

Всякая неалгебраическая функция называется ***трансцендентной***. К числу трансцендентных функций относятся функции: показательная (экспоненциальная), логарифмическая, тригонометрические, обратные тригонометрические.

Основные элементарные функции и их графики

Степенная функция

Степенной функцией называется функция вида $y = x^n$, где $n \in \mathbb{R}$.

Примеры графиков степенных функций, соответствующих различным показателям степени, представлены на рис. 1.4.

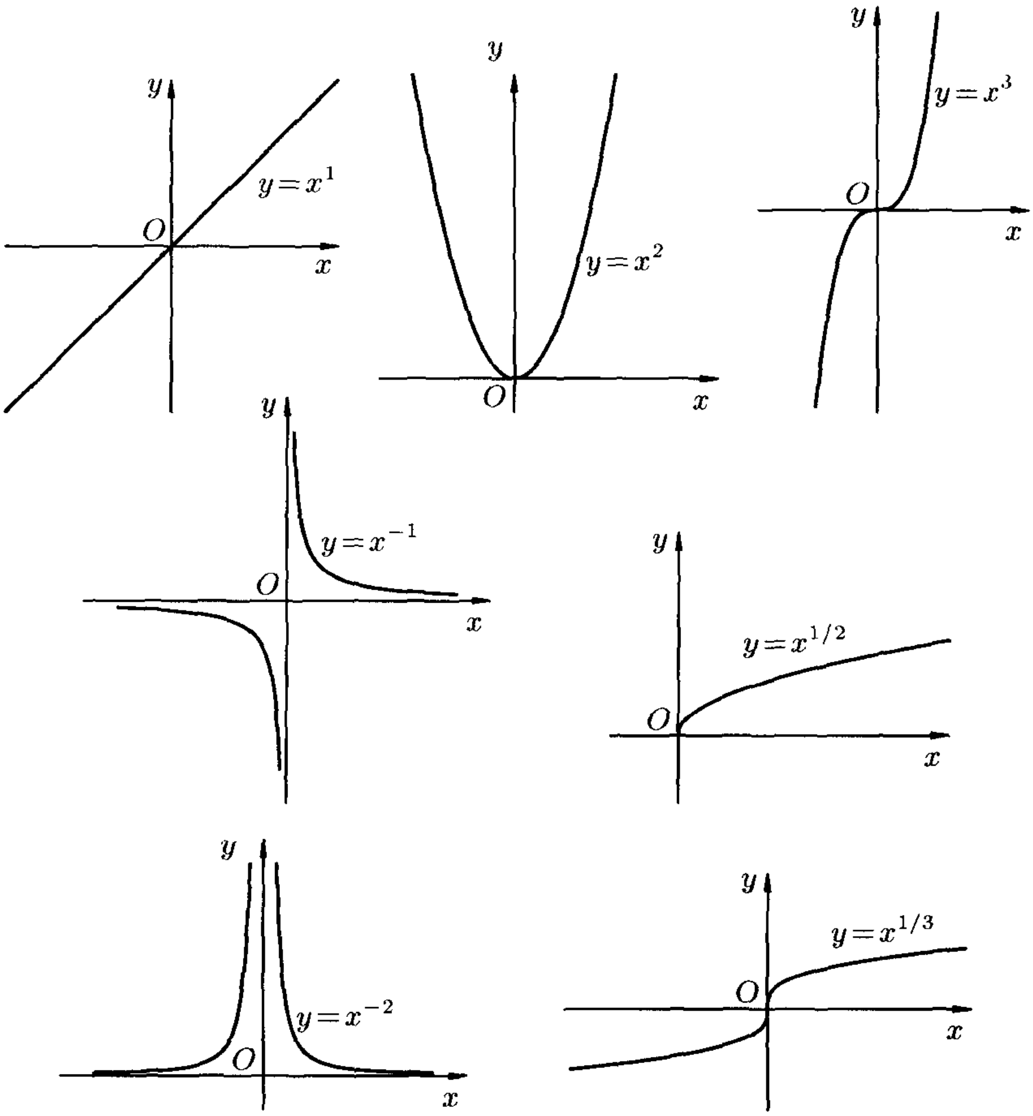
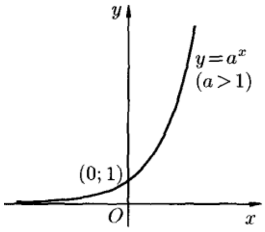


Рис. 1.4

Показательная функция

Показательной функцией называется функция вида $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$). Функция определена при всех значениях x, имеет положительные значения. График функции $y = a^x$ в зависимости от основания степени a представлен на рис. 1.5.



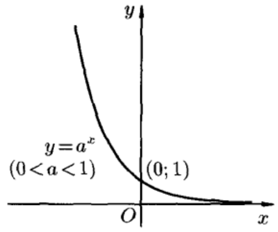
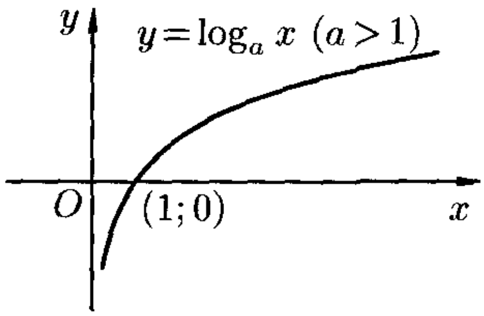


Рис. 1.5

Логарифмическая функция

Логарифмической функцией называется функция вида $y = log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$). Функция определена при $x \in (0; +\infty)$.

График функции в зависимости от основания логарифма a представлен на рис. 1.6.



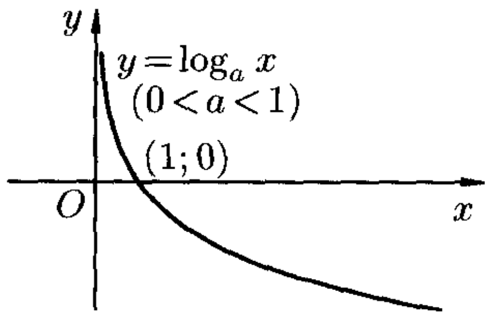
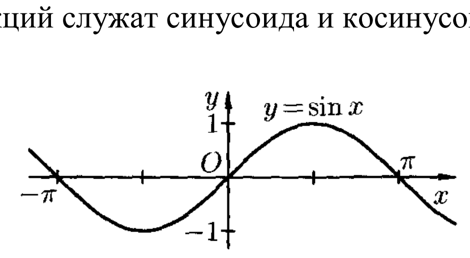


Рис. 1.6

Тригонометрические функции

Тригонометрическими функциями называются функции вида $y = sinx$, $y = cosx$, $y = tgx$, $y = ctgx$.

1) Функции $y = sinx$ (синус) и $y = cosx$ (косинус) определены для всех x, являются ограниченными ($|sinx| \leq 1$ и $|cosx| \leq 1$) и периодическими с периодом 2π . Графиками функций служат синусоида и косинусоида (рис. 1.7).



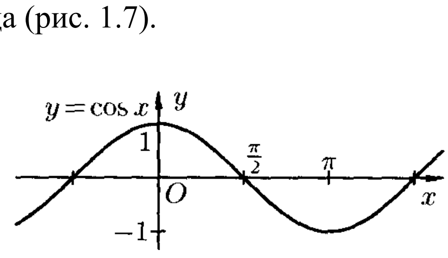


Рис. 1.7

2) Функция $y = tgx$ (тангенс) определена при $x \neq \frac{2k+1}{2}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Является периодической функцией с периодом π. Графиком функции служит тангенсоида (рис. 1.8).

3) Функция $y = ctgx$ (котангенс) определена при $x \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Является периодической функцией с периодом π. Графиком функции служит котангенсоида (рис. 1.8).

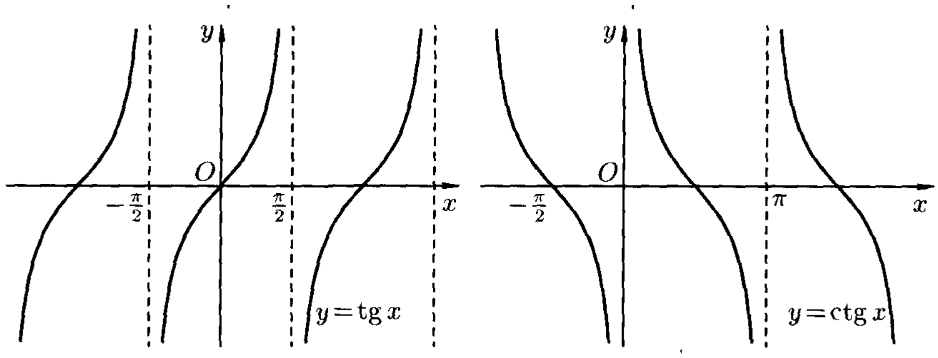


Рис. 1.8

Обратными тригонометрическими функциями называются функции $y = arcsinx$, $y = arccosx$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$.

1) Функция $y = arcsinx$ (арксинус) определена при $x \in [-1;\ 1]$. График функции изображен на рис. 1.9.
2) Функция $y = arccosx$ (арккосинус) определена при $x \in [-1;\ 1]$. График функции изображен на рис. 1.9.

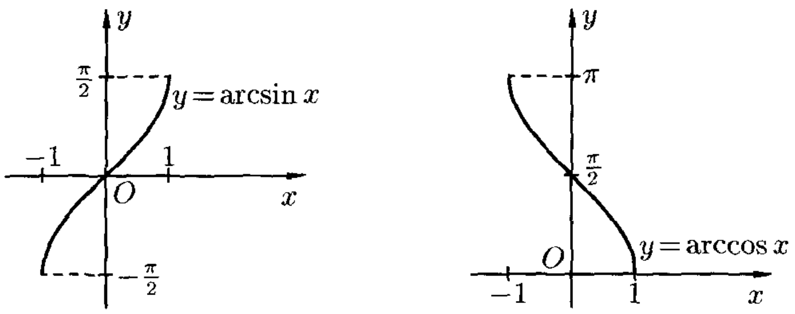


Рис. 1.9

3) Функция $y = arctgx$ (арктангенс) определена при всех значениях x. График функции изображен на рис. 1.10.
4) Функция $y = arcctgx$ (арккотангенс) определена при всех значениях x. График функции изображен 1.10.

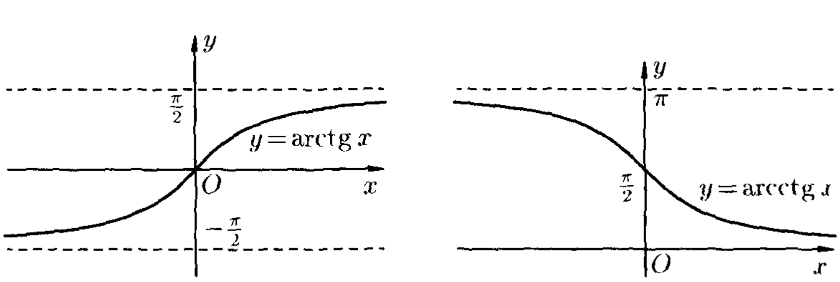


Рис. 1.10

Пример 1. Найти область определения функции у = $\frac{x^3+5}{2x-3}$.

Решение. При каждом значении x из интервала $(-\infty; +\infty)$ числитель и знаменатель являются действительными числами. Их отношение есть также действительное число при всех значениях, кроме $x = \frac{3}{2}$, при котором знаменатель обращается в нуль. Значит, областью определения функции является множество всех значений x, кроме $x = \frac{3}{2}$. Записывают это так:

$$D(f) = (-\infty; \tfrac{3}{2}) \cup (\tfrac{3}{2}; +\infty).$$

Пример 2. Найти область определения функции $y = \sqrt{x^2 - 1}$.

Решение. Данная функция определена для таких значений x, при которых подкоренное выражение неотрицательно. Значит, функция определена при $x^2 - 1 \geq 0$. Решая это неравенство, получим, что $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.Таким образом,

$$D(f) = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty).$$

Пример 3. Найти область определения функции $y = \frac{tgx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

Решение. Так как уравнение не имеет действительных корней, то знаменатель дроби определен при всех значениях x и не обращается в нуль.

Числитель tgx не определен при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, область определения функции

$$D(f) = (-\tfrac{\pi}{2} + \pi k; \tfrac{\pi}{2} + \pi k), \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 4. Найти область определения функции $y = \frac{\sqrt{x^2-8x+7}}{x-4}$.

Решение. Область определения функции определяется следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 7 \geq 0, \\ x - 4 \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 1] \cup [7; +\infty), \\ x \neq 4. \end{cases}$$

Таким образом, область определения функции $D(f) = (-\infty; 1] \cup [7; +\infty)$.

Пример 5. Найти область определения функции $y = log_x(4 - 4x + x^2)$.

Решение. Область определения функции определяется следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} 4 - 4x + x^2 > 0, \\ x \neq 1, \\ x > 0. \end{cases}$$

Решая это неравенство, получим, что $D(f) = (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$.

Пример 6. Найти область определения функции $y = arcsin\,\frac{2x}{x+1}$.

Решение. Область определения функции находится из условия: аргумент под знаком *arcsin* не может быть по модулю больше 1. Следовательно, нахождение области определения функции сводится к решению неравенства $\left|\frac{2x}{x+1}\right| \leq 1$. Решая это неравенство, найдем область определения функции $D(f) = [-\frac{1}{3}; 1]$.

Пример 7. Найти множество значений функций:

а) $y = sinx + cosx$; б) $y = \frac{6x}{x^2+1}$.

Решение. а) Преобразуем функцию

$y = \sqrt{2}\,(\frac{1}{\sqrt{2}}sinx + \frac{1}{\sqrt{2}}cosx) = \sqrt{2}\,(sin\frac{\pi}{4} \cdot sinx + cos\frac{\pi}{4} \cdot cosx) = \sqrt{2}sin(x + \frac{\pi}{4})$.

Так как синус любого угла по абсолютной величине не превосходит 1, т.е. $|sin(x + \frac{\pi}{4})| \leq 1$, то $|\sqrt{2}sin(x + \frac{\pi}{4})| \leq \sqrt{2}$, $|y| \leq \sqrt{2}$, $-\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$. Таким образом, $E(f) = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

б) Множество значений функции может быть найдено с помощью производной или через обратную функцию $x = \varphi(y)$. Её область определения $D(\varphi)$ совпадает со множеством значений $E(f)$ данной функции.

Выразим x через y. Получим обратную функцию $x = \varphi(y)$, заданную неявно квадратным уравнением $x^2y - 6x + y = 0$. Очевидно, область определения этой функции найдется из условия, чтобы дискриминант квадратного уравнения был неотрицателен, т.е. $6^2 - 4y^2 \geq 0$ или $y^2 \leq 9$, $|y| \leq 3$ и $-3 \leq y \leq 3$. Значит, $E(f) = [-3; 3]$.

Пример 8. Исследовать функции на четность и нечетность:

а) $f(x) = |x| - 5 \cdot e^{-x^2}$; б) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{x} + 2sinx$; в) $f(x) = x^2 + tgx$.

Решение. Вычислим $f(-x)$:

а) $f(-x) = |-x| - 5 \cdot e^{-(-x)^2} = |x| - 5 \cdot e^{-x^2} = f(x)$.

Следовательно, функция четная.

б) $f(-x) = (-x)^2 \cdot \sqrt[3]{-x} + 2\sin(-x) = -x^2 \cdot \sqrt[3]{x} - 2sinx = -(x^2 \cdot \sqrt[3]{x} + 2sinx) = -f(x)$.

Следовательно, функция нечетная.

в) $f(-x) = (-x)^2 + tg(-x) = x^2 - tgx$. Так как $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, то данная функция общего положения.

Пример 9. Найти наименьший период функций:

а) $y = \sin(3x - 1)$; б) $y = tg(\frac{2x-3}{9})$; в) $y = cos^2 5x$.

Решение. Воспользуемся следующим ***утверждением***:

Если $f(x)$ – периодическая функция и имеет период Т, то функция $y = A \cdot f(kx + b)$, где A, k, b – постоянные числа, а $k \neq 0$, также периодична, причем её период равен $\frac{\text{Т}}{|k|}$.

а) $y = \sin(3x - 1)$. Как известно, наименьший период функции $y = sinx$ равен Т $= 2\pi$, а $k = 3$. Тогда период данной функции равен $\text{Т}_1 = \frac{2\pi}{3}$.

б) $y = tg(\frac{2x-3}{9})$. Так как наименьший период функции $y = tgx$ равен Т $= \pi$, а $k = \frac{2}{9}$, то период данной функции равен $\text{Т}_2 = \frac{\pi}{\frac{2}{9}} = \frac{9\pi}{2}$.

в) $y = cos^2 5x$. Так как $cos^2 5x = \frac{1 - cos10x}{2}$, то наименьший период функции $y = cos^2 5x$ совпадает с наименьшим периодом функции $y = cos10x$. Так как период функции $y = cosx$ равен Т $= 2\pi$, а $k = 10$, то период данной функции будет равен $\text{Т}_3 = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найти область определения функций:

1.1. $y = \frac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt[3]{x+2}$. 1.2. $y = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$.

2. Найти множество значений функций:

2.1. $y = \sqrt{3} \sin x + cosx$. 2.2. $y = \frac{x}{x^2+1}$.

3. Исследовать функции на четность и нечетность:

3.1. $y = x^3 \sin x$. 3.2. $y = \lg \frac{1+x}{1-x}$.

4. Найти наименьший период функций:

4.1. $y = \text{tg}x + \text{ctg}x$. 4.2. $y = cos^2 \frac{x}{2}$.

Ответы: **1.1.** $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$. **1.2**. $x \in (-\infty; +\infty)$.

2.1. $E(f) = [-2; 2]$. **2.2.** $E(f) = [-0{,}5; 0{,}5]$.

3.1. Четная. **3.2**. Нечетная. **4.1**. Т $= \pi$. **4.2**. Т $= 2\pi$.

Глава 2. Числовые последовательности и пределы

2.1. Понятие числовой последовательности

Рассмотрим специальную функцию $y = f(n)$, заданную на множестве *N*. Такую функцию натурального аргумента называют ***числовой последовательностью*** $x_n = f(n)$ и обозначают $\{x_n\}$ или x_n, $n \in \mathbb{N}$. Числовую последовательность записывают и так:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots.$$

Число x_1 называется первым членом последовательности, x_2 – вторым, …, x_n – ***общим или n – м членом последовательности***.

Чаще всего последовательность задается формулой его общего члена. Она позволяет вычислить любой член последовательности по его номеру n.

Так равенства

$$x_n = \left\{\frac{1}{n}\right\},\ y_n = \left\{\frac{n-1}{n}\right\},\ z_n = \{(-1)^n \cdot n\},\ \text{где } n \in \mathbb{N},$$

задают соответственно последовательности

$$x_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\};\ y_n = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots\right\};\ z_n = \{-1, 2, -3, 4, \ldots, (-1)^n \cdot n, \ldots\}.$$

Графиком последовательности является множество точек плоскости.

Различают ограниченные и неограниченные последовательности.

Последовательность называется **ограниченной сверху**, если $\exists\ K \in \mathbb{R}$, такое, что для $\forall n\ x_n \leq K$. Аналогично последовательность **ограничена снизу**, если $\exists\ k \in \mathbb{R}$, такое, что для $\forall n\ x_n \geq k$. Если последовательность ограничена снизу и сверху, т. е. $\{x_n\} \subset [k, K]$, она называется **ограниченной**. Геометрически это означает, что все точки, изображающие члены последовательности $\{x_n\}$, лежат на отрезке $[k, K]$.

С другой стороны, последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной по модулю,** если $\exists\ C > 0$, такое, что для $\forall n\ |\ x_n\ | \leq C$. Очевидно, что в этом случае для $\forall n$ справедливо неравенство $-C \leq x_n \leq C$ и, таким образом, $\{x_n\}$ является ограниченной. Верно и обратное утверждение: если последовательность ограничена, то она ограничена и по модулю.

Пример 1. 1) Последовательность $\{a_n\} = \mathbb{N}$ ограничена снизу числом 1;

2) $\{b_n\} = -2 + \frac{3}{n}$ ограничена снизу числом 1, а сверху ограничена числом –2;

3) $\{c_n\} = n - 1$ ограничена снизу числом 0.

Если для последовательности $\{x_n\}$ справедливо неравенство $x_n \leq x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то её называют **неубывающей** последовательностью.

Если для последовательности $\{x_n\}$ справедливо неравенство $x_n < x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то её называют **возрастающей** последовательностью.

Если для последовательности $\{x_n\}$ справедливо неравенство $x_n \geq x_{n+1}$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$, то её называют **невозрастающей** последовательностью.

Если для последовательности $\{x_n\}$ справедливо неравенство $x_n > x_{n+1}$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$, то её называют **убывающей** последовательностью.

Эти названия объединяют общим термином **монотонная последовательность**. Например, последовательности (1) и (3) из примера 1 являются возрастающими.

Последовательности x_n и y_n монотонные, а z_n не является монотонной.

Если все члены последовательности равны $\{x_n\}$ равны одному и тому же числу c, то её называют ***постоянной***.

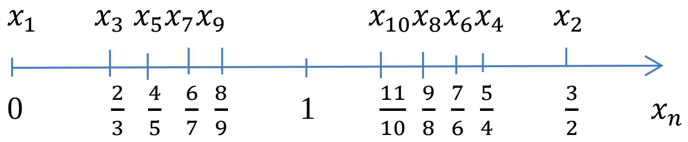
Другой способ задания числовых последовательностей – *рекуррентный способ*. В нем задается начальный элемент x_1 (первый член последовательности) и правило определения n – го элемента по $(n-1)$-му:

$$x_n = f(x_{n-1}).$$

Таким образом, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$ и т. д. При таком способе задания последовательности для определения 100-го члена надо сначала посчитать все 99 предыдущих.

2.2. Предел числовой последовательности

Рассмотрим числовую последовательность $x_n = \left\{0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \dots, 1 + \frac{(-1)^n}{n}, \dots\right\}$. Она является немонотонной и ограниченной. Изобразим её члены точками числовой оси:



Можно заметить, что члены последовательности x_n с ростом n как угодно близко приближаются к 1. При этом абсолютная величина разности $|x_n - 1\,|$ становится все меньше и меньше. Действительно,

$|x_1 - 1\,| = 1$, $|x_2 - 1\,| = \frac{1}{2}$, $|x_3 - 1\,| = \frac{1}{3}$, $|x_4 - 1\,| = \frac{1}{4}$, ..., $|x_n - 1\,| = \frac{1}{n}$,..., т. е. с ростом n $|x_n - 1\,|$ будет меньше любого сколь угодно малого положительного числа.

Число A называется ***пределом числовой последовательности*** $\{\,x_n\}$, если для любого, сколь угодно малого, положительного числа ε > 0, найдется такое число N (зависящее от ε, $N = N(ε)$), что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ верно неравенство

$$|\,x_n - A\,| < ε.$$

Если данное условие выполняется, то пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \text{ или } x_n \to A \text{ при } n \to \infty.$$

Говорят, что последовательность $\{\,x_n\}$ имеет предел A или последовательность $\{\,x_n\}$ сходится к A.

Последовательность, имеющая предел, называется ***сходящейся***, в противном случае – ***расходящейся***.

Коротко определение предела можно записать так:

$$(\lim_{n\to\infty} x_n = A) \Leftrightarrow (\forall ε > 0\ \exists N = N(ε): \forall n > N \Rightarrow |x_n - A\,| < ε).$$

Числовая последовательность имеет ***бесконечный предел***, если для любого, сколь угодно большого, положительного числа ε > 0, существует такое число N (зависящее от ε, $N = N(ε)$), что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ верно неравенство $|x_n| > ε$.

Если данное условие выполняется, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ или $x_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Пример 2. Используя определение предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 1.$$

Решение. Пусть, например, ε = 0,1. Тогда неравенство $|\,x_n - 1\,| < 0{,}1$ или

$| \, (1+\frac{(-1)^n}{n}) - 1 \, | < 0{,}1$, т. е. $\frac{1}{n} < 0{,}1$ выполняется при $n > 10$. Аналогично для $\varepsilon = 0{,}01$ неравенство $| \, x_n - 1 \, | < 0{,}01$ выполняется при $n > 100$.

Для любого $\varepsilon > 0$ неравенство $| \, x_n - 1 \, | < \varepsilon$ или $\frac{1}{n} < \varepsilon$ выполняется при $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Итак, при любом $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = \frac{1}{\varepsilon}$ (или равный целой части $\frac{1}{\varepsilon}$), что для всех $n > N$ (при $\varepsilon = 0{,}1$ для $n > 10$, при $\varepsilon = 0{,}01$ для $n > 100$ и т. д.) выполняется неравенство $| \, x_n - 1 \, | < \varepsilon$, а это и означает, что $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{(-1)^n}{n}) = 1$.

Геометрический смысл предела числовой последовательности

Неравенство $|x_n - A \, | < \varepsilon$ равносильно двойному неравенству $A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon$, соответствующему попаданию членов последовательности x_n в $\varepsilon -$ окрестность точки A.

Итак, число A есть предел числовой последовательности $\{ \, x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N, начиная с которого (при $n > N$) все члены последовательности будут заключены в $\varepsilon -$ окрестности точки A, какой бы узкой она ни была. Вне этой $\varepsilon -$ окрестности может быть лишь конечное число членов данной последовательности.

Отсюда следует, что ***сходящаяся последовательность имеет только один предел***.

Постоянная последовательность $x_n = c$, $n \in \mathbb{N}$ имеет предел, равный числу c, т. е. $\lim_{n\to\infty} c = c$. Действительно, для $\forall\varepsilon > 0$ при всех натуральных n выполняется неравенство $|x_n - A \, | < \varepsilon$. Имеем $|x_n - c \, | = | \, c - c \, | = 0 < \varepsilon$.

Примеры: 1) Последовательность $\{\frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю: если задать произвольное $\varepsilon > 0$ и выбрать $N > \frac{1}{\varepsilon}$, что всегда возможно в силу принципа Архимеда, то для всех $n > N$ имеет место соотношение $| \, \frac{1}{n} - 0 \, | = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$.

2) Последовательность $\{n\}$, $n \in \mathbb{N}$, является неограниченной и расходящейся.

3) Последовательность $\{(-1)^n\}$, $n \in \mathbb{N}$, является ограниченной и расходящейся.

4) Последовательность $\{\frac{n+1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится, и $\lim_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n}) = 1$.

5) Последовательность $\{\frac{(-1)^n}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***бесконечно малой***, если $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Последовательность $\{x_n \}$ называется ***бесконечно большой***, если $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Практическое вычисление пределов основывается на следующих теоремах.

Теорема 1. Пусть существуют конечные пределы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

1) Если существует порядковый номер N, такой, что $\forall n > N$ выполняется условие $x_n < y_n$, то $\lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty} y_n$;

2) Если существует порядковый номер N, такой что $\forall n > N$ выполняется условие $x_n = C$, $C = const$, то $\lim_{n\to\infty} x_n = C$;

3) $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n$;

4) $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$;

5) $\lim_{n\to\infty}(\frac{x_n}{y_n}) = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}$, где $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$, $y_n \neq 0$.

Теорема 2. Всякая сходящаяся числовая последовательность ограничена.

Теорема 3. Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Теорема 4. Числовая последовательность $\{x_n\}$ с общим членом $x_n = \frac{1}{n^p}$ $(p > 0,\ p \in \mathbb{R})$ сходится и $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$.

Теорема 5. Если $|q| < 1$ $(q \in \mathbb{R})$, то последовательность с общим членом $x_n = q^n$ сходится и $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

Пример 3. Вычислить пределы числовых последовательностей:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(6-n)^2-(6+n)^2}{(6+n)^2-(1-n)^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!-(2n+2)!}$.

Решение. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(6-n)^2-(6+n)^2}{(6+n)^2-(1-n)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(36-12n+n^2)-(36+12n+n^2)}{(36+12n+n^2)-(1-2n+n^2)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-24n}{14n+35} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-24}{14+\frac{35}{n}} =$

$= -\frac{24}{14} = -\frac{12}{7}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!-(2n+2)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!(1+(2n+2))}{(2n+1)!((2n+2)(2n+3)-(2n+2))} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+(2n+2)}{(2n+2)(2n+3)-(2n+2)} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+3}{4n^2+8n+4} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2(\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2})}{n^2(4+\frac{8}{n}+\frac{4}{n^2})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{4+\frac{8}{n}+\frac{4}{n^2}} = 0.$

Задачи для самостоятельного решения

1. Используя определение предела последовательности, доказать, что:

1.1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n} = \frac{2}{3}$. 2.2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n+2}{n} = 5$ 2.3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-2n^2}{2+4n^2} = -\frac{1}{2}$.

2. Вычислить пределы числовых последовательностей:

2.1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(1-n)^4-(1+n)^4}{(1+n)^3-(1-n)^3}$. 2.2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$. 2.3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$.

Ответы: **2.1**. –4; **2.2.** 1; **2.3.** 0.

Глава 3. Предел функции

3.1. Понятие предела функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена во всех точках интервала (a, b), за исключением, быть может, точки $x_0 \in (a, b)$.

Число A называется ***предел̆ом функции*** $y = f(x)$ ***при*** $\boldsymbol{x \to x_0}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для любого x , удовлетворяющего неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, при этом пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to x_0$.

С помощью логических символов определение имеет вид:

$$(\lim_{x\to x_0} f(x) = A) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x\colon |x - x_0| < \delta,\ x_n \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

Смысл определения предела функции $f(x)$ в точке x_0 состоит в том, что для всех значений x, достаточно близких к x_0, значения функции $f(x)$ как угодно мало отличаются от числа A (по абсолютной величине).

Можно дать другое, равносильное приведенному, определение: число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ ***в точке*** $\boldsymbol{x_0}$, если для любой последовательности чисел $\{x_n\} \subset (a; b)$, сходящейся к x_0, $x_n \neq x_0$, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

Если $f(x)$ определена в интервале $(a, +\infty)$, то число A называется ***пределом*** $f(x)$ ***при*** $\boldsymbol{x \to +\infty}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $b > a$, такое, что неравенство $x > b$ влечет за собой неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

При этом пишут $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ или $f(+\infty) = A$.

Аналогично определяется $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ или $f(-\infty) = A$.

Пример 1. Доказать, что: 1) $\lim\limits_{x \to 1} (2x + 3) = 5$.

Решение. Пусть $\varepsilon = 0{,}1$. Тогда неравенство $|(2x + 3) - 5| < 0{,}1$ будет выполняться при $2|x - 1| < 0{,}1$ или при $|x - 1| < 0{,}05$. Аналогично при $\varepsilon = 0{,}01$ то же неравенство будет верно при $|x - 1| < 0{,}005$.

Для любого $\varepsilon > 0$ неравенство $|(2x + 3) - 5| < \varepsilon$ будет выполняться при $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2} = \delta(\varepsilon)$.

Итак, при любом $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, что для всех $x \neq 1$ и удовлетворяющих условию $|x - 1| < \delta$ верно неравенство $|f(x) - 5| < \varepsilon$, где $f(x) = 2x + 3$, а это значит, что $\lim\limits_{x \to 1} (2x + 3) = 5$.

Односторонние пределы

В определении предела функции $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ считается, что x стремится к x_0 произвольным способом: оставаясь меньшим, чем x_0 (слева от x_0), большим, чем x_0 (справа от x_0) или колеблясь около точки x_0.

Бывают случаи, когда способ приближения аргумента x к x_0 существенно влияет на значение предела функции. Поэтому вводят понятия односторонних пределов.

Число A_1 называют ***пределом функции*** $y = f(x)$ ***слева*** в точке x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$, выполняется неравенство $|f(x) - A_1| < \varepsilon$. Предел слева записывают так:

$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ или коротко $f(x_0 - 0) = A_1$ (обозначение Дирихле).

Аналогично определяется ***предел функции справа***, запишем его с помощью символов:

$$\left(\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in (x_0;\ x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - A_2| < \varepsilon).$$

Коротко предел справа обозначают $f(x_0 + 0) = A_2$.

Пределы функции справа и слева называются ***односторонними пределами***.

Очевидно, если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то существуют и оба односторонних предела, причем, $A = A_1 = A_2$.

Справедливо и обратное утверждение: если существуют оба предела $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ и они равны, то существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и $A = f(x_0 - 0)$.

Если же $A_1 \neq A_2$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не существует.

Пример 2. Найти односторонние пределы $\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{3}{x-2}$ и $\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{3}{x-2}$ и пояснить таблицами.

Решение. Найдем предел функции справа $\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{3}{x-2}$. Все данные внесем в таблицу:

x	3	2,1	2,01	2,001	2,0001	$x\to 2+0$
$y=\frac{3}{x-2}$	3	30	300	3000	30000	$y\to+\infty$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{3}{x-2}=+\infty$.

Аналогично будем рассуждать при вычислении предела функции слева.

x	1	1,9	1,99	1,999	1,9999	$x\to 2-0$
$y=\frac{3}{x-2}$	–3	–30	–300	–3000	–30000	$y\to-\infty$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{3}{x-2}=-\infty$.

3.2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $y=f(x)$ называется ***бесконечно большой*** (б. б. ф.) при $x\to x_0$, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty.$$

Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой*** (б. м. ф.) при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

Из определения бесконечно большой и бесконечно малых функций следует, что, если $f(x)$ - бесконечно большая функция, то $\frac{1}{f(x)}$ - бесконечно малая и наоборот.

Примеры: 1) $y=\frac{1}{x-3}$ - б. б. ф. при $x\to 3$, так как $\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x-3}=+\infty$;

1) $y=2^x$ - б. б. ф., так как $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x=+\infty$;
2) $y=x^2$ - б. м. ф. при $x\to 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$;
3) $y=\sin x$ - б.м.ф. при $x\to\pi k,\ k\epsilon Z$, так как $\lim\limits_{x\to\pi k}\sin x=0$.

Обозначают: $\alpha,\beta,\gamma,\ \dots$

Связь бесконечно малых величин с пределами функций

Если функция $f(x)$ имеет при $x\to x_0$ $(x\to\infty)$ предел, равный A, то её можно представить в виде суммы этого числа A и бесконечно малой $\alpha(x)$ при $x\to x_0$ $(x\to\infty)$, т. е.

$$f(x)=A+\alpha(x).$$

Теорема. Если функцию $f(x)$ можно представить как сумму числа A и бесконечно малой $\alpha(x)$ при $x\to x_0$ $(x\to\infty)$, то число A есть предел этой функции при $x\to x_0$ $(x\to\infty)$, т. е.

$$\lim_{x\to x_0(\infty)} f(x)=A.$$

Основные свойства бесконечно малых функций

1. Сумма двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.
2. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функция есть бесконечно малая функция.
3. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Основные свойства бесконечно больших функций

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$, то $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \infty$.
2. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$.
3. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \infty$.
4. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq 0$, $g(x) \neq 0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.
5. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

3.3. Основные теоремы о пределах

Теорема 1. Если функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0, то этот предел единственный.
Теорема 2. Если существуют конечные пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0, то

1) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, где $c = const$;

4) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$;

5) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x))^n = (\lim\limits_{x\to x_0} f(x))^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 3. Если $\lim\limits_{u\to b} f(u) = c$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, то предел сложной функции $\lim\limits_{u\to b} f\big(g(x)\big) = c$.
Теорема 4. Если в некоторой окрестности точки x_0 $f(x) \leq g(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
Теорема 5. Если в некоторой окрестности точки x_0 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) =$
$= \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$.
Теорема 6. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A > 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, то

$$\lim_{x\to x_0} (f(x))^{(g(x))} = \lim_{x\to x_0} (f(x))^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} \ A^B.$$

Вычисление пределов

Предел функции не зависит от того, определена она в предельной точке или нет. Но в практике вычисления пределов элементарных функций это обстоятельство имеет существенное значение.

а) Если функция является элементарной и если предельное значение аргумента принадлежит её области определения, то вычисление предела функции сводится к простой подстановке предельного значения аргумента, ибо предел *элементарной функции f*(*x*) *при x, стремящемся к значению* x_0, *которое входит в область её определения, равен частному значению функции при* $x = x_0$, *т. е.*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Пример 3. Найти предел функции $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 5$ при $x \to -1$.

Решение. Данная функция является элементарной, она определена в предельной точке, поэтому находим предел функции как её частное значение в предельной точке:

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 2(-1) + 5 = -1 - 3 + 2 + 5 = 3.$

Пример 4. Найти пределы: 1) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3-1}{x^2-2x+1}$; 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} arctgx$; 3) $\lim\limits_{x \to +\infty} 3^x$; 4) $\lim\limits_{x \to 1} (\frac{x+1}{2x+5})^{\frac{x-1}{3x+2}}$.

Решение. Пользуясь утверждениями о пределах суммы, произведения и частного, получаем:

1) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3-1}{x^2-2x+1} = \frac{-1-1}{1+2+1} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$.

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} arctgx = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} arctgx = -\frac{\pi}{2}$.

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} 3^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} 3^x = 0$.

4) $\lim\limits_{x \to 1} (\frac{x+1}{2x+5})^{\frac{x-1}{3x+2}} = (\frac{2}{7})^0 = 1$.

б) Если аргумент стремится к бесконечности или к числу, которое не принадлежит области определения функции, то в каждом таком случае нахождение предела функции требует специального исследования.

В простейших случаях можно найти предел функции путем рассуждений, аналогичных тем, которые мы приводили при нахождении односторонних пределов.

Если предельные значения оказываются равными 0 или ∞, то могут возникнуть неопределенности разных видов. При вычислении пределов могут появляться неопределенности вида

$$\left[\frac{\infty}{\infty}\right], \left[\frac{0}{0}\right], [\infty - \infty], [0 \cdot \infty], [0^0], [(+\infty)^0], [1^\infty].$$

Раскрытие неопределённостей вида: $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $[\infty - \infty]$, $[0 \cdot \infty]$.

1. $\left[\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\right]$. Если $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – целые многочлены соответственно n – й и $m-$й степени и $P_n(x_0) = Q_m(x_0) = 0$, то для нахождения предела $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ необходимо дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ сократить один или несколько раз на двучлен $(x - x_0)$.

Пример 5. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2+2x-3}$.
Решение.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2+2x-3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[\begin{matrix}a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2),\\ ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)\end{matrix}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x+1)}{(x+3)}=\frac{3}{4}.$$

2. $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Если $P_n(x)=Q_m(x)=\infty$, то для нахождения предела $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ надо оба члена отношения предварительно разделить на x^k, где $k=\max(n,m)$, а a_0 и b_0 - старшие коэффициенты многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$. Тогда получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}0,\text{ если } n<m,\\ \frac{a_0}{b_0},\text{ если } n=m,\\ \infty,\text{ если } n>m.\end{cases}$$

Замечание. Выражения, содержащие иррациональности, приводятся к рациональному виду путем введения новой переменной или иррациональности переводятся из числителя в знаменатель путем умножения и числителя, и знаменателя на выражение, сопряжённое числителю (и наоборот).

Пример 6. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-4}{5x^2+6x-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-4}{x^3+5x-2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-4}{5x+2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{3x+1}-1}$; 5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

Решение. 1) Так как это неопределённость вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, то разделим числитель и знаменатель на x^2, после чего воспользуемся теоремами о пределах.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-4}{5x^2+6x-3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}{5+\frac{6}{x}-\frac{3}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{5}=\frac{3}{5}.$$

2) Так как это неопределённость вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, то разделим числитель и знаменатель на x^3, после чего воспользуемся теоремами о пределах.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-4}{x^3+5x-2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^3}}{1+\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{0}{1}=0.$$

3) Так как это неопределённость вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, то разделим числитель и знаменатель на x^2, после чего воспользуемся теоремами о пределах.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-4}{5x+2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}{\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{0}=\infty.$$

4) Так как это неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, то сначала умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряжённое знаменателю, после чего воспользуемся теоремами о пределах.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{3x+1}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{3x+1}+1)}{(\sqrt{3x+1}-1)(\sqrt{3x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{3x+1}+1)}{(3x+1)-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{3x+1}+1)}{3x}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3x+1}+1}{1}=\frac{1}{3}\cdot 2=\frac{2}{3}.$$

5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$. Это неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Сначала приведем выражение к рациональному виду путем введения новой переменной t^k, где k = НОК(2, 3), далее разложим числитель и знаменатель дроби на множители и сократим общий множитель, после чего воспользуемся теоремами о пределах.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\begin{bmatrix} x=t^6, \\ x\to 1, t\to 1\end{bmatrix}=\lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t^3-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t+1)}{(t-1)(t^2+t+1)}=\lim_{t\to 1}\frac{t+1}{t^2+t+1}=\frac{2}{3}.$$

3. $[\infty-\infty]$**.** Умножим и разделим данное выражение на сопряжённое, после чего используем прием, рассмотренный выше: разделим числитель и знаменатель на старшую степень x. Далее воспользуемся теоремами о пределах.

Пример 7. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$.

Решение. Это неопределённость вида $[\infty-\infty]$. Умножим числитель и знаменатель дроби на сопряжённое выражение $(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})$:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2-x}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}.$$

Теперь разделим числитель и знаменатель на $\sqrt{x}$. Получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=\frac{0}{\sqrt{1+0}+1}=0.$$

4. $[0\cdot\infty]$**.** Мы преобразуем так функцию, чтобы получить неопределенность либо $\left[\frac{0}{0}\right]$, либо $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, после чего применим известные уже приёмы.

Пример 8. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 0} sin2x\cdot ctgx$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0} sin2x\cdot ctgx=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2sinx\cdot\cos x\cdot\cos x}{sinx}=\lim\limits_{x\to 0}2cos^2x=2.$

3.4. Замечательные пределы

Первый замечательный предел

Если угол x выражен в радианах, то при вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто используют предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

называемый ***первым замечательным пределом.*** Читается: предел отношения синуса к его аргументу равен единице, когда аргумент стремится к нулю.
Справедливо также и равенство

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1.$$

Пример 9. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{4x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 6x}{x^2}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}$; 7) $\lim\limits_{n\to +\infty}\frac{1+5^{n+2}}{3-5^n}$; 8) $\lim\limits_{n\to +\infty}\frac{n^3}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}$.

Решение. 1) Чтобы использовать первый замечательный предел, надо преобразовать данную дробь так, чтобы в знаменателе был аргумент синуса. Для этого умножим и числитель, и знаменатель дроби на 5, после чего можно применить теорему о первом замечательном пределе:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5.$$

2) Аналогично умножим и числитель, и знаменатель дроби на 3 и применим теорему о первом замечательном пределе. Получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{4x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=\frac{3}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=\frac{3}{4}.$$

3) Преобразуем данную дробь, используя известную формулу тригонометрии, после чего применим теорему о первом замечательном пределе. Получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left[1-\cos x=2sin^2\frac{x}{2}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

4) Аналогично вычислим предел функции

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2\frac{5x}{2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{sin^2\frac{5x}{2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{sin^2\frac{5x}{2}}{\frac{4}{25}(\frac{5x}{2})^2}=2\cdot\frac{25}{4}\lim_{x\to 0}\frac{sin^2\frac{5x}{2}}{(\frac{5x}{2})^2}=\frac{25}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}}\right)^2=\frac{25}{2}.$$

5) Воспользуемся формулой из тригонометрии: преобразование разности косинусов в произведение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 6x}{x^2}=\left[\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 4x\cdot\sin 2x}{x^2}=$$
$$=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=2\cdot 4\cdot 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=16\cdot 1\cdot 1=16.$$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{sinx}{cosx}\cdot\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{sinx}{x}\cdot\frac{1}{cosx}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{cosx}=1\cdot 1=1\,.$

7) Умножая числитель и знаменатель дроби на 7^{-n}, получим

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+5^{n+2}}{3-5^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5^{-n}+5^2}{3\cdot 5^{-n}-1} = \frac{0+5^2}{0-1} = 25, \text{ так как } \lim_{n\to+\infty} 5^{-n} = 0.$$

8) Преобразуя знаменатель с помощью формулы для суммы квадратов натурального ряда чисел:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

получим

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{6n^3}{n(n+1)(2n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{6}{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})} = 3.$$

Второй замечательный предел

Как известно, предел числовой последовательности $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$, $n \in \mathbb{N}$, имеет предел, равный e, т. е.

$$\lim_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e \text{ , где } e \approx 2,718281\dots .$$

Можно показать, что функция $y = (1+\frac{1}{x})^x$ при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ (где x в отличие от натурального числа n «пробегает» все значения числовой оси – не только целые) имеет предел, равный числу e:

$$e = \lim_{x\to+\infty} (1+\frac{1}{x})^x.$$

Полагая $y = \frac{1}{x}$, найдем $x = \frac{1}{y}$; при $x \to +\infty$ $y \to 0$. Тогда получим еще одну запись числа e:

$$e = \lim_{y\to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}}.$$

Эти два равенства называются вторым ***замечательным пределом***. Они широко используются при вычислении пределов. В приложениях анализа большую роль играет показательная функция с основанием e. Функция $y = e^x$ называется ***экспоненциальной***, употребляется также обозначение $e^x = \exp(x)$. Число e - число Эйлера или неперово число. График функции $y = e^x$ получил название *экспоненты*. Широко используются логарифмы по основанию e, называемые *натуральными*. Натуральные логарифмы обозначаются так:

$$\log_e x = \ln x.$$

Пример 10. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+\frac{3}{x})^{2x}$; 2) $\lim\limits_{y\to 0} (1-2y)^{\frac{5}{y}}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{2x-3}{2x-1})^{4x}$.

Решение. 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+\frac{3}{x})^{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[(1+\frac{1}{\frac{x}{3}})^{\frac{x}{3}}\right]^{\frac{3}{x}\cdot 2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[(1+\frac{1}{\frac{x}{3}})^{\frac{x}{3}}\right]^6 = e^6.$

2) $\lim\limits_{y\to 0} (1-2y)^{\frac{5}{y}} = \lim\limits_{y\to 0} \left[(1-2y)^{\frac{1}{-2y}}\right]^{-2y\cdot\frac{5}{y}} = \lim\limits_{y\to 0} \left[(1-2y)^{\frac{1}{-2y}}\right]^{-10} = e^{-10}.$

3) Имеем неопределенность вида $[1^\infty]$, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-3}{2x-1}= 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} = 4x = \infty$.

<u>1 способ</u>. Выделим целую часть дроби $\frac{2x-3}{2x-1}=\frac{(2x-1)-2}{2x-1}=1-\frac{2}{2x-1}$.

Обозначим $y = -\frac{2}{2x-1}$; при $x\to\infty$ $y\to 0$, причем $x = -\frac{1}{y}+\frac{1}{2}$. Теперь, используя второй замечательный предел и теоремы о пределах, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x-1}\right)^{4x} = \lim_{y\to 0}(1+y)^{-\frac{4}{y}+2} = \lim_{y\to 0}(1+y)^{-\frac{4}{y}}\cdot\lim_{y\to 0}(1+y)^2 = \left[\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{-4}\cdot 1 =$$
$$= e^{-4}.$$

<u>2 способ</u>. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x-1}\right)^{4x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x-1}-1\right)\cdot 4x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3-2x+1}{2x-1}\right)\cdot 4x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-2}{2x-1}\right)\cdot 4x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-8x}{2x-1}} =$

$= e^{\frac{-8}{2}} = e^{-4}$.

<u>3 способ</u>. Используя известное равенство $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x+c}\right)^{bx} = e^{(a-c)\cdot b}$, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x-1}\right)^{4x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2\cdot(x-\frac{3}{2})}{2\cdot(x-\frac{1}{2})}\right)^{4x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-\frac{3}{2}}{x-\frac{1}{2}}\right)^{4x} = \left[a = -\frac{3}{2}, c = -\frac{1}{2}, b = 4\right] =$$

$$= e^{\left(-\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\cdot 4} = e^{\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot 4} = e^{-1\cdot 4} = e^{-4}.$$

3.5. Сравнение бесконечно малых функций

Как известно, сумма, разность и произведение двух б. м. ф. есть функция бесконечно малая. Отношение же двух б. м. ф. может вести себя по-разному: быть конечным числом, быть бесконечно большой функцией, бесконечно малой или вообще не стремиться ни к какому пределу.

Две б. м. ф. сравниваются между собой с помощью их отношения.

Пусть $\alpha = \alpha(x)$ и $\beta = \beta(x)$ есть б. м. ф. при $x\to x_0$, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x) = 0$.

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta} = A \neq 0$ $(A\in\mathbb{R})$, то α и β называются ***бесконечно малыми одного порядка.***
2. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta} = 0$, то $\boldsymbol{\alpha}$ называется ***бесконечно малой более высокого порядка,*** чем **β**.
3. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta} = \infty$, то $\boldsymbol{\alpha}$ называется ***бесконечно малой более низкого порядка,*** чем **β.**
4. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}$ не существует, то $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ называются ***несравнимыми бесконечно малыми***.

Замечание. Таковы же правила сравнения б. м. ф. при $x\to x_0\pm 0$ и при $x\to\pm\infty$.

Пример 11. Сравнить порядок функций $\alpha = 2x^2$ и $\beta = 7x^2$ при $x\to 0$.

Решение. При $x\to 0$ это б. м. ф. одного порядка, так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to x_0}\frac{2x^2}{7x^2} = \frac{2}{7} \neq 0.$$

Эквивалентные бесконечно малые и основные теоремы о них

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}= 1$, то α и β называются ***эквивалентными бесконечно малыми*** (при $x \to x_0$); это обозначается так: $\alpha \sim \beta$.

Например, $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}= 1$; $tg\, x \sim x$ при $x \to 0$, т. к. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\, x}{x}= 1$.

Теорема 1. Предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой, т. е. справедливы равенства:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}= \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha'}{\beta'} \text{ или } \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}= \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha'}{\beta}= \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta'}, \text{ где } \alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta' \text{ при } x \to x_0.$$

Теорема 2. Разность двух эквивалентных бесконечно малых есть бесконечно малая более высокого порядка, чем каждая из них.

Справедливо и обратное утверждение: если разность б. м. ф. α и β есть бесконечно малая высшего порядка, чем α или β, то α и β - эквивалентные бесконечно малые.

Теорема 3. Сумма конечного числа бесконечно малых функций разных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка.

Слагаемое, эквивалентное сумме бесконечно малых, называется *главной частью этой суммы*.

Замена суммы б. м. ф. её главной частью называется *отбрасыванием бесконечно малых высшего порядка.*

Пример 12. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+2x^2}{\sin 5x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+2x^2}{\sin 5x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 5x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{5x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{5} = \frac{3}{5}$.

Применение эквивалентных бесконечно малых функций при вычислении пределов

Для раскрытия неопределённостей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ часто бывает полезным применять принцип замены бесконечно малых эквивалентными и другие свойства эквивалентных бесконечно малых функций.

Составим ***таблицу эквивалентных бесконечно малых величин.***

Пусть $\alpha(x)$ бесконечно малая при $x \to 0$. Тогда

1. $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$	6. $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
2. $tg\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$	7. $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\cdot \ln a$
3. $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$	8.$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
4. $arctg\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$	9.$\log_a(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)\cdot \log_a e$
5. $1 - \cos\alpha(x) \sim \frac{(\alpha(x))^2}{2}$	10. $(1+\alpha(x))^k - 1 \sim k\cdot\alpha(x)$, $k > 0$.

Пример 13. Пользуясь методом замены бесконечно малых эквивалентными, найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 5x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^2 2x}{sin^2\frac{x}{3}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{log_4(x-2)}{2^x-8}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-\sin 2x}-1)(e^{arctg5x}-1)}{(1-\cos 3x)\ln(1+4x)}$.

Решение. Воспользуемся таблицей эквивалентных бесконечно малых величин.

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 5x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{5x}=\frac{4}{5};$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{tg^2 2x}{sin^2\frac{x}{3}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(2x)^2}{(\frac{x}{3})^2}=36;$$

3) $$\lim_{x\to 3}\frac{log_4(x-2)}{2^x-8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\begin{bmatrix}x-3=t, x=t+3,\\ x\to 3, t\to 0\end{bmatrix}=\lim_{x\to 3}\frac{log_4(1+t)}{2^{t+3}-8}=\lim_{x\to 3}\frac{log_4(1+t)}{8(2^t-1)}=$$

$$=\frac{1}{8}\lim_{x\to 3}\frac{log_4(1+t)}{(2^t-1)}=\frac{1}{8}\lim_{x\to 3}\frac{t\cdot log_4 e}{t\cdot ln2}=\frac{1}{8}\lim_{x\to 3}\frac{log_4 e}{ln2}=\frac{log_4 e}{8ln2}=\frac{1}{8ln2ln4}=\frac{1}{16ln^2 2}.$$

4) Учитывая, что $\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x=0$,

$$\sqrt{1-\sin 2x}-1\sim-\frac{1}{2}\sin 2x\sim-\frac{1}{2}\cdot 2x\sim-x;$$

$$e^{arctg5x}-1\sim arctg5x^2\sim 5x^2;$$

$$1-\cos 3x\sim\frac{(3x)^2}{2};\ \ln(1+4x)\sim 4x,$$

получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-\sin 2x}-1)(e^{arctg5x^2}-1)}{(1-\cos 3x)\ln(1+4x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(-x)\cdot 5x^2}{\frac{9x^2}{2}\cdot 4x}=-\lim_{x\to 0}\frac{5}{18}=-\frac{5}{18}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти пределы функций:

1.1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+4x-1}{3x^2+x+2}$; 1.2. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{5x-2}{x^2-x+4}$; 1.3. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^3+4}{x^2-3}$; 1.4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{x^2-7x+6}$; 1.5. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^2+2x-2}{x^2-5x+7}$;

1.6. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$; 1.7. $\lim\limits_{x\to \infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$; 1.8. $\lim\limits_{x\to \infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)$; 1.9. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$;

1.10. $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1})$.

2. Пользуясь свойством эквивалентных бесконечно малых, найти пределы функций:

2.1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x^2+x}$; 2.2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsin 3x}{arctg 6x}$; 2.3. $\lim\limits_{x\to +0}\frac{\sqrt{2x}-x}{tg\sqrt{x}}$;

2.4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{sin^2(x-1)}{x^2-1}$; 2.5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-2x}-1}{arcsin\, x}$; 2.6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\sqrt[5]{\cos 2x}-1}$.

3. Используя замечательные пределы, найти следующие пределы:

3.1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin\, 2x^2}{x^2}$; 3.2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin^2 x}{x^2}$; 3.3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{tg 3x}$; 3.4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos\, x}{x}$; 3.5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3-\sqrt{2x+9}}$;

3.6. $\lim\limits_{x\to \infty}(\frac{2x-5}{2x+1})^{x-1}$; 3.7. $\lim\limits_{t\to \infty}(\frac{t}{t+1})^t$; 3.8. $\lim\limits_{x\to \pi}(1+3tgx)^{ctgx}$; 3.9. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+\sin x}$;

3.10. $\lim\limits_{x\to \infty}(\frac{x^2+1}{x^2-3})^{x^3-5}$; 3.11. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x+1})^{\frac{1}{2x}}$; 3.12. $\lim\limits_{x\to \infty}(1+\frac{1}{x^2})^{5x}$.

Ответы: **1.1**. $\frac{2}{3}$; **1.2**. 0; **1.3**. ∞; **1.4**. $\frac{3}{5}$; **1.5**. 1; **1.6**. 1; **1.7**. 0; **1.8**. 2; **1.9**. 8; **1.10**. $\frac{1}{2}$.
2.1. 5; **2.2**. $\frac{1}{2}$; **2.3**. $\sqrt{2}$; **2.4**. 0; **2.5**. –2; **2.6**. $\frac{5}{12}$. **3.1**. 2; **3.2**. 1; **3.3**. $\frac{1}{3}$; **3.4**. 0. **3.5**. 9;
3.6. e^{-3}. **3.7**. e^{-1}. **3.8**. e^3. **3.9**. e. **3.10**. ∞. **3.11**. $\frac{1}{\sqrt{e}}$. **3.12**. 1.

Глава 4. Непрерывность функции.

4.1. Определение непрерывности функции

Функция $y = f\,(x)$ называется ***непрерывной*** в точке x_0, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента $x - x_0 = \Delta x$ соответствует бесконечно малое приращение функции $y - y_0 = \Delta y$, т. е. если

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)] = 0.$$

Этому определению равносильно следующее:

Функция $y = f\,(x)$ называется ***непрерывной*** в точке x_0, если при $x \to x_0$ предел функции существует и равен её частному значению в этой точке, т. е. если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (1)$$

Для непрерывности функции $f\,(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) *функция должна быть определена в некотором интервале, содержащем точку x_0 (т. е. в самой точке x_0 и вблизи этой точки)*;

2) *функция должна иметь одинаковые односторонние пределы*

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x);$$

3) *эти односторонние пределы должны быть равны значению функции в точке x_0, т. е.*

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

Так как $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, то равенство (1) можно переписать в виде:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) = f(x_0). \qquad (2)$$

Последнее равенство означает, что *при нахождении предела непрерывной функции* $f(x)$ *можно перейти к пределу под знаком функции, т. е. в функцию* $f(x)$ *вместо аргумента* x *подставить его предельное значение* x_0 (т. е. *для непрерывной функции символы предела и функции можно менять местами*).

Например, $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{sinx}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}} = e$. В равенстве функция и предел поменялись местами (2) в силу непрерывности функции e^x.

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot ln(1+x) = \lim\limits_{x\to 0} ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = ln(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}) = lne = 1$.

Отметим, что $ln(1+x) \sim x \ (x \to 0)$.

Функция $y = f\ (x)$ называется ***непрерывной на промежутке*** $(a;\ b)$, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Все элементарные функции непрерывны в тех интервалах, в которых они определены.

4.2. Свойства непрерывных функций

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$определены в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки. Тогда:

1) Если $f(x)$ непрерывна в окрестности точки x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то существует окрестность точки x_0, в которой функция не обращается в нуль и сохраняет свой знак (знак числа $f(x_0)$).

2) Функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (при дополнительном условии $g(x) \neq 0$) непрерывны в точке x_0.

3) Сложная функция $f(g(x))$ непрерывна в точке x_0, то есть

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right) = f\big(g(x_0)\big).$$

Можно доказать, что все элементарные функции непрерывны в каждой точке своей области определения.

4.3. Точки разрыва функции. Классификация точек разрыва

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Согласно определению, непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0 выражается соотношением

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Пользуясь односторонними пределами функции, это равенство можно заменить равносильным ему равенством

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) = f(x_0),$$

т. е. функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, тогда и только тогда, когда в этой точке существуют пределы справа и слева, они равны между собой и равны значению функции в точке x_0.

Функция $f(x)$ называется ***разрывной*** в точке x_0 или говорят, что она терпит разрыв в точке x_0, если она определена в сколь угодно близких точках, но в самой точке x_0 не удовлетворяет хотя бы одному из условий непрерывности.

Точку x_0 называют ***точкой разрыва функции*** $f(x)$, причем функция $f(x)$ может быть не определена в точке x_0.

Точки разрыва функции классифицируются в зависимости от того, какое условие непрерывности нарушено:

1) $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = A$, но $f(x_0) \neq A$ либо $f(x_0)$ не определено. В этом случае говорят, что x_0 – ***точка устранимого разрыва***;

2) $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ – конечные, но не равные между собой пределы. Такая точка называется точкой (неустранимого) ***конечного разрыва первого рода*** или точкой разрыва с конечным скачком функции (говорят, что $f(x)$ имеет в точке x_0 ***скачок***).

Скачком функции $f(x)$ в точке разрыва x_0 называется разность её односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$, если они различны.

3) Если в точке x_0 функция $f(x)$ имеет бесконечный предел справа или слева, или один из этих пределов не существует, то точка x_0 называется ***точкой разрыва второго рода***.

При отыскании точек разрыва функции можно руководствоваться следующими положениями:

1. Элементарная функция может иметь разрыв только в отдельных точках, но не может быть разрывной во всех точках какого-либо интервала.
2. Элементарная функция может иметь разрыв только в той точке, где она не определена, при условии, если она будет определена хотя бы с одной стороны от этой точки в сколь угодно близких к ней точках.
3. Неэлементарная функция может иметь разрывы как в точках, где она не определена, так и в точках, где она определена; в частности, *если функция задана несколькими аналитическими выражениями (формулами) для различных интервалов изменения аргумента, то она может иметь разрывы в тех точках, где меняется её аналитическое выражение.*

Пример 2. Показать, что элементарные функции непрерывны во всей своей области определения: 1) $y = 2x^2 - 1$; 2) $y = cosec\, x$.

Решение. Найдем область определения функции и затем убедимся, исходя из определения непрерывности, что функция будет непрерывна в этой же области.

1) $y = 2x^2 - 1$. Областью определения функции y является вся числовая ось. Далее, придадим аргументу x произвольное приращение Δx и, подставив в данное выражение функции вместо x наращенное значение $x + \Delta x$, найдем наращенное значение функции:

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^2 - 1.$$

Вычитая из этого наращенного значения функции её первоначальное значение, найдем приращение функции:

$$\Delta y = 2(x + \Delta x)^2 - 1 - (2x^2 - 1) = 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2.$$

Пусть теперь $\Delta x \to 0$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ при любом значении x. Следовательно, согласно определению непрерывности, функция y будет непрерывна при любом значении x, т. е. во всей своей области определения.

2) Тригонометрическая функция $y = cosec\, x = \frac{1}{sinx}$ определена на всей числовой оси, кроме точек $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Аналогично найдем приращение функции Δy и затем его предел при $\Delta x \to 0$:

$$\Delta y = cosec\,(x + \Delta x) - cosec\, x = \frac{1}{\sin(x+\Delta x)} - \frac{1}{sinx} = \frac{sinx - \sin(x+\Delta x)}{\sin(x+\Delta x)\cdot sinx} = \frac{2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot sinx(-\frac{\Delta x}{2})}{\sin(x+\Delta x)\cdot sinx};$$

Найдем $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot sinx(-\frac{\Delta x}{2})}{\sin(x+\Delta x)\cdot sinx} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\sin(x+\Delta x)\cdot sinx}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0} sinx\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)= \frac{2\cos x}{sin^2 x}\cdot 0 = 0$

при всех значениях x, кроме $x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Следовательно, область непрерывности и область определения элементарной функции *cosec x* полностью совпадают.

Пример 3. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 \text{ при } x \le 2, \\ x \text{ при } x > 2. \end{cases}$$

и построить её график.

Решение. Функция $f(x)$ определена на всей числовой оси. Но из этого не следует, что она и непрерывна на всей числовой оси, так как эта функция неэлементарная; она задана двумя различными формулами для различных интервалов изменения аргумента x и может иметь разрыв в точке $x = 2$, где меняется её аналитическое выражение. Исследуем поведение этой функции в окрестности этой точки. Найдем односторонние пределы функции при стремлении аргумента к этой точке слева и справа:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0}\left(-\frac{1}{2}x^2\right) = -2,$$

так как слева от точки $x = 2$ функция $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$;

$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} x = 2,$$

так как справа от точки $x = 2$ функция $f(x) = x$.

Левый и правый пределы конечны, но не равны между собой. Поэтому, вследствие невыполнения 2-го условия непрерывности, в точке $x = 2$ функция имеет разрыв (конечный).

В этой точке разрыва функция имеет скачок:

$$\lim_{x\to 2+0} x - \lim_{x\to 2-0} f(x) = 2 - (-2) = 4.$$

Во всех остальных точках числовой оси функция $f(x)$ непрерывна, так как обе формулы, которыми она задана, определяют собой элементарные непрерывные функции.

График функции показан на рис. 4.1.

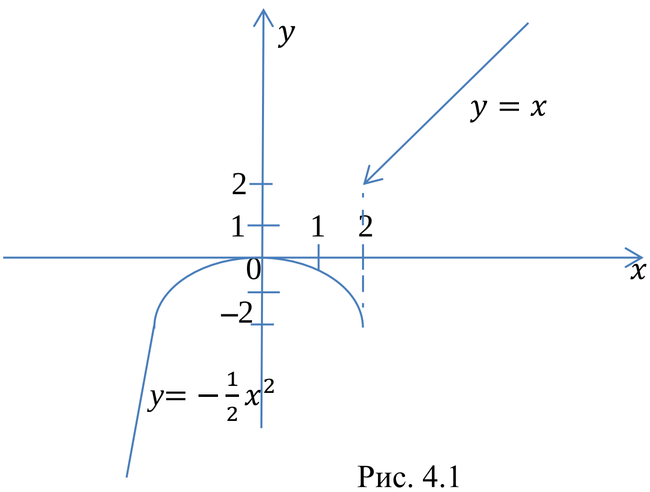


Рис. 4.1

Пример 4. Доказать непрерывность функции $y = f(x)$ в точке $x = 0$ или установить характер точки разрыва функции в этой точке:

1) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; 2) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, \text{если } x \neq 0, \\ 1, \text{если } x = 0; \end{cases}$ 3) $f(x) = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$; 4) $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$.

Решение. 1) При $x = 0$ функция $f(x)$ не определена, следовательно, она не непрерывна в этой точке. Так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ и соответственно пределы функции слева и справа от точки $x = 0$ конечны и равны, т. е. $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$, то $x = 0$ – точка (устранимого) разрыва I рода.

2) По сравнению с примером из первого пункта функция доопределена в точке $x = 0$ так, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$, следовательно, данная функция непрерывна в данной точке.

3) При $x = 0$ функция $f(x)$ не определена. Так как пределы функции слева и справа от точки $x = 0$ конечны, т. е.

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+0} = 1,\ \lim_{x\to 0+} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = 0 \text{ (так как } 2^{\frac{1}{x}} \to \infty \text{ при } x \to 0+),$$

то в точке $x = 0$ функция $f(x)$ имеет (конечный) разрыв I рода.

4) При $x = 0$ функция $f(x)$ не определена:

$$\lim_{x\to 0-} 2^{\frac{1}{x}} = 0,\ \lim_{x\to 0+} 2^{\frac{1}{x}} = \infty.$$

Так как один из односторонних пределов бесконечен, то $x = 0$ есть точка разрыва II рода.

Пример 5. Найти точки разрыва функции, если они существуют, и скачок функции в каждой точке разрыва:

1) $f(x) = \frac{3x-4}{x^2+2x+10}$; 2) $f(x) = arcctg\,\frac{1}{x}$; 3) $f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$.

Решение. 1) Элементарная функция $f(x) = \frac{3x-4}{x^2+2x+10}$ определена на всей числовой оси (хотя она дробная, но корни знаменателя комплексные ($D < 0$)). Поэтому она и непрерывна на всей числовой оси, т. е. не имеет точек разрыва.

2) Элементарная функция $f(x) = arcctg\,\frac{1}{x}$ определена, и, следовательно, непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x = 0$. В точке $x = 0$ функция имеет разрыв, поскольку она определена в любой окрестности этой точки, за исключением самой точки.

Найдем односторонние пределы функции в этой точке:

$$\lim_{x\to -0} arcctg\,\frac{1}{x} = arcctg\,(-\infty) = \pi;$$

$$\lim_{x\to +0} arcctg\,\frac{1}{x} = arcctg\,(+\infty) = 0.$$

Следовательно, функция имеет точку (конечного) разрыва I рода; при $x = 0$ она имеет скачок

$$\lim_{x\to +0} arcctg\,\frac{1}{x} - \lim_{x\to -0} arcctg\,\frac{1}{x} = 0 - \pi = -\pi.$$

3) Функция $f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$ определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x = 3$. Очевидно, что $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x > 3, \\ -1 \text{ при } x < 3. \end{cases}$ Из этого следует, что в точке $x = 3$ функция имеет разрыв.

Исследуем эту точку разрыва:

$$\lim_{x\to 3-0} \frac{|x-3|}{x-3} = -1,$$

так как при всяком значении $x < 3$ эта функция равна –1;

$$\lim_{x \to 3+0} \frac{|x-3|}{x-3} = 1,$$

так как при всяком значении $x > 3$ эта функция равна $+1$.

Следовательно, в точке $x = 3$ функция имеет (конечный) разрыв I рода (рис. 4.2); её скачок в этой точке разрыва конечный и равен

$$\lim_{x \to 3+0} \frac{|x-3|}{x-3} - \lim_{x \to 3-0} \frac{|x-3|}{x-3} = 1–(–)1 = 2.$$

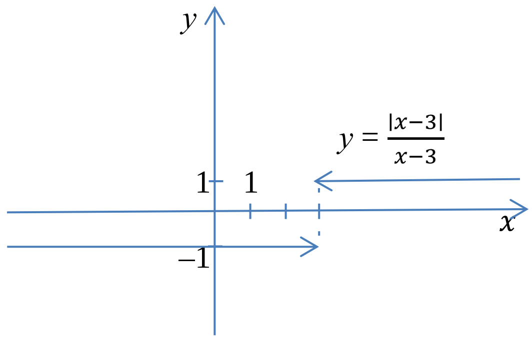


Рис. 4.2

4.4. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Первая теорема Больцано – Коши (о нуле непрерывной функции). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и на концах его имеет значения, противоположные по знаку, то $f(x)$ обращается в нуль по крайней мере в одной точке интервала $(a; b)$.

Вторая теорема Больцано – Коши (о промежуточных значениях непрерывной функции). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, причем $f(a) = A$, $f(b) = B$. Тогда, каким бы ни было число C, заключенное между числами A и B, на отрезке $[a; b]$ найдется по крайней мере одна точка c, такая, что $f(c) = C$.

Эти теоремы устанавливают, что, переходя от одного своего значения к другому, функция хотя бы один раз принимает каждое свое промежуточное значение между ее значениями на концах отрезка.

Первая теорема Вейерштрасса (об ограниченности непрерывной на отрезке функции). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она ограничена на нем сверху и снизу, т.е. существуют такие числа m и M , что для всех $x \in [a; b]$ справедливо неравенство $m \le f(x) \le$ M.

Вторая теорема Вейерштрасса (о достижении непрерывной на отрезке функции своих верхней и нижней граней). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она достигает на этом отрезке своего наименьшего значения m и наибольшего значения M.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти точки разрыва функции, если они существуют, и скачок функции в каждой точке разрыва:

1.1. $y = \frac{1}{x^3-3x^2-4x}$; 1.2. $y = \frac{x^2-x^3}{|x-1|}$; 1.3. $y = \frac{x^2-1}{x-1}$; 1.4. $y = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, \text{если } x \neq 1, \\ 2, \text{если } x = 1. \end{cases}$

2. Найти и классифицировать точки разрыва:

2.1. $y = \frac{1}{x-1}$.

Ответы: **1.1**. Функция имеет бесконечные разрывы (II рода) в точках $x = -1$, $x = 0$ и $x = 4$. **1.2**. Функция имеет точку конечного разрыва (I рода) $x = 1$, скачок равен –2; **1.3**. $x = 1 -$ точка устранимого разрыва I рода. **1.4**. Непрерывна. **2.1**. $x = 1 -$ точка разрыва II рода.

Глава 5. Производная и дифференциал функции

5.1. Задачи, приводящие к понятию производной

Понятия производной и дифференциала являются одними из основных понятий математического анализа. Вычисление производных необходимо при решении многих задач (нахождение скорости, ускорения, давления и т. д.). Важность понятия производной, в частности, определяется тем, что производная функции характеризует скорость изменения этой функции при изменении ее аргумента.

Применение дифференциала позволяет осуществить приближенные вычисления, а также проводить оценку погрешностей.

Способы нахождения производных и дифференциалов функций и их применение составляют основную задачу дифференциального исчисления. Необходимость понятия производной возникает в связи с постановкой задачи о вычислении скорости движения, о нахождении угла касательной к кривой, о производительности труда.

1. **Задача о нахождении скорости v материальной точки**. Пусть некоторая материальная точка совершает прямолинейное движение. Каждому значению времени t соответствует определенное расстояние $OM = S$ до некоторой фиксированной точки O. Это расстояние зависит от истекшего времени t, т. е. $S = S(t)$.

Это равенство называют ***законом движения точки***. Требуется найти скорость движения точки.

Если в некоторый момент времени t точка занимает положение M, то в момент времени $t + \Delta t$ (Δt – приращение времени) точка займёт положение M_1, где $OM_1 = S + \Delta S$ (ΔS – приращение расстояния) (рис. 5.1). Таким образом, перемещение точки M за время Δt будет $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$.

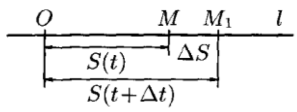


Рис. 5.1

Отношение $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ выражает ***среднюю скорость*** движения точки за время Δt:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Средняя скорость зависит от значения Δt: чем меньше Δt, тем точнее средняя скорость выражает скорость движения точки в данный момент времени t.

Предел средней скорости движения при стремлении к нулю промежутка времени Δt называется ***скоростью движения точки в данный момент времени*** (или мгновенной скоростью). Обозначив эту скорость через $\boldsymbol{v}$, получим

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \text{ или } \boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}. \qquad (5.1)$$

2.Задача о нахождении угла наклона касательной к графику функции. Дадим сначала общее определение касательной к кривой. На непрерывной кривой L возьмем две точки M и M_1 (рис. 5.2).

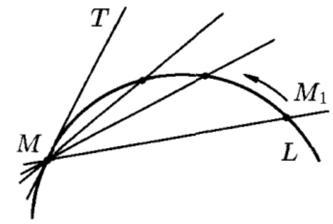


Рис. 5.2

Прямую MM_1, проходящую через эти точки, называют *секущей.*

Пусть точка M_1, двигаясь вдоль кривой L, неограниченно приближается к точке M. Тогда секущая, поворачиваясь около точки M, стремится к некоторому предельному положению MT.

Касательной к данной кривой в данной точке M называется предельное положение секущей MM_1, проходящей через точку M, когда вторая точка пересечения M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M.

Рассмотрим график непрерывной кривой $y = f(x)$, имеющий в точке $M(x;\ y)$ невертикальную касательную. Найдем её угловой коэффициент $k = tg\ \alpha$, где α – угол между касательной MT и осью Ox.

Для этого проведем через точку M и M_1 графика с абсциссой $x + \Delta x$ секущую (рис. 5.3).

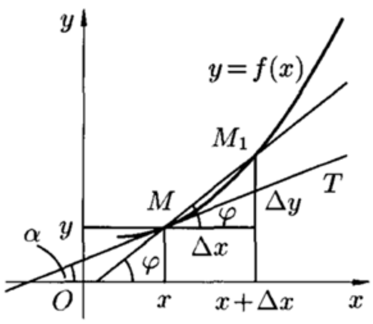


Рис. 5.3

Обозначим φ – угол между секущей MM_1 и осью Ox. На рисунке видно, что угловой коэффициент секущей равен

$$tg\ \varphi = k_{\text{сек}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

При $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности функции приращение $\Delta y \to 0$; поэтому точка M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M, а секущая MM_1, поворачиваясь около точки M, переходит в касательную. Угол $\varphi \to \alpha$, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi = \alpha$.

Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\ \varphi = tg\alpha$. Поэтому угловой коэффициент касательной равен

$$k_{\text{кас}} = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\ \varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{5.2}$$

3. Задача о производительности труда. Пусть функция $u = u(t)$ выражает количество произведенной продукции u за время t и необходимо найти производительность труда в момент t.

За период времени от t до $t + \Delta t$ количество произведенной продукции изменится от значения $u = u(t)$ до значения $u(t) + \Delta u = u(t + \Delta t)$; тогда средняя производительность труда за этот период времени $z_{ср} = \frac{\Delta u}{\Delta t}$. Очевидно, что производительность труда в момент времени t можно определить как предельное значение средней производительности за период времени от t до $t + \Delta t$ при $\Delta t \to 0$, т. е.

$$z = \lim_{\Delta t \to 0} z_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}. \quad (5.3)$$

Рассматривая три различные по характеру задачи, мы пришли к пределу (5.1) – (5.3) одного вида. Этот предел играет чрезвычайно важную роль в математическом анализе, являясь основным понятием дифференциального исчисления.

5.2. Определение производной: её геометрический и механический смысл. Уравнение касательной и нормали к кривой

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на интервале $(a; b)$.

Разность $\Delta x = x - x_0$, где x, $x_0 \in (a; b)$ называется ***приращением аргумента*** в точке x_0.

Разность $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, называется ***приращением функции*** y в точке x_0.

Если существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ или } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

то он называется ***производной функции*** y ***в точке*** x_0 и обозначается $f'(x_0)$ или $y'(x_0)$, или $y'|_{x=x_0}$.

Замечание. Для производной функции $y = f(x)$ используются следующие обозначения:

$$y',\ y'(x),\ f',\ f'(x),\ y'_x,\ f'_x,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{dy(x)}{dx},\ \frac{df}{dx},\ \frac{df(x)}{dx}.$$

Производная функции $f(x)$ есть некоторая функция $f'(x)$, *произведенная* из данной функции.

Функция $y = f(x)$, имеющая конечную производную в каждой точке интервала $(a; b)$, называется ***дифференцируемой*** в этом интервале; операция нахождения производной функции называется ***дифференцированием***.

Из задачи о касательной вытекает ***геометрический смысл производной*****:** производная $f'(x_0)$ есть ***угловой коэффициент*** (тангенс угла наклона) ***касательной***, проведенной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0, т. е. $k = tg\alpha = f'(x_0)$.

Тогда ***уравнение касательной*** к кривой $y = f(x)$ в точке x_0 примет вид

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \text{ или } y - y_0 = y'_0\,(x - x_0).$$

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется ***нормалью к кривой*** (рис. 5.4).

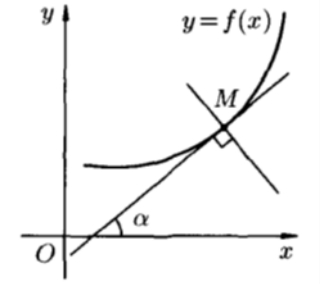


Рис. 5.4

Так как нормаль перпендикулярна касательной, то её угловой коэффициент

$$k_{\text{норм}} = -\frac{1}{k_{\text{кас}}} = -\frac{1}{y'_0}.$$

Поэтому ***уравнение нормали*** имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'_0}(x - x_0) \text{ (если } y'_0 \neq 0).$$

Если касательную к кривой в некоторой точке провести нельзя, то это означает, что функция не дифференцируема в этой точке.
Пример. Доказать, что функция $y = |x|$ не дифференцируема в точке $x = 0$.
Решение. Производная функции (если она существует) равна

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x+\Delta x| - |x|}{\Delta x}.$$

Очевидно, что при $x = 0$ производная не существует, так как отношение

$$\frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

равно 1, если $\Delta x > 0$ и равно –1, если $\Delta x < 0$, т. е. не имеет предела при $\Delta x \to 0$ (ни конечного, ни бесконечного). Геометрически это означает отсутствие касательной к кривой в точке $x = 0$ (рис. 5.5).

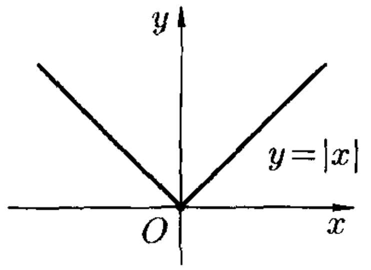


Рис. 5.5

Из задачи о скорости движения следует ***механический смысл производной***: производная пути по времени $S'(t)$ есть скорость точки в момент t: $v(t) = S'(t)$.

Из задачи о производительности труда следует, что производная объема произведенной продукции по времени $u'(t)$ есть производительность труда в момент времени t: $z(t) = u'(t)$.

Обобщая, можно сказать, что если функция $y = f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то ***производная*** y' есть ***скорость протекания этого процесса***. В этом состоит ***физический смысл производной***.

5.3. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Теорема 1. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она в этой точке непрерывна.

Доказательство:

По условию функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, т. е. существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

где $f'(x_0)$ – постоянная величина, не зависящая от Δx. Тогда на основании теоремы о связи бесконечно малых с пределами функций (см. п. 3.2) можно записать

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x), \text{ где}$$

$\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая величина при $\Delta x \to 0$ или

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x.$$

Переходя к пределу, при $\Delta x \to 0$, получаем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. А это и означает, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Обратная теорема не верна: непрерывная функция может не иметь производной. Примером является функция $y = |x|$. Она непрерывна в точке $x = 0$, ибо $\lim\limits_{x \to 0} |x| = |0| = 0$, но, как было доказано выше, не дифференцируема в этой точке.

Таким образом, непрерывность функции – необходимое, но недостаточное условие дифференцируемости функции.

В математике известны непрерывные функции, которые не дифференцируемы ни в одной точке.

Замечание. Производная непрерывной функции не обязательно непрерывна. Если функция имеет непрерывную производную на некотором промежутке X, то функция называется ***гладкой*** на этом промежутке. Если же производная функции допускает конечное число точек разрыва (причем первого рода), то такая функция на данном промежутке называется ***кусочно-гладкой***.

5.4. Вычисление производной. Основные правила дифференцирования

Производная функции $y = f(x)$ может быть найдена по определённой *схеме*. Покажем нахождение производной на примере.

Пример. Найти производную функции $y = x^2$, пользуясь определением производной.

Решение. 1) Аргументу x дадим приращение $\Delta x \neq 0$;

2) находим $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$;

3) составляем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$;

4) находим предел этого отношения

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Таким образом, $(x^2)' = 2x$. Можно доказать, что для любого (не только натурального) n

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Полезно знать частные случаи этой формулы при $n = \frac{1}{2}$ и $n = -1$:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Основные правила дифференцирования

Нахождение производной функции непосредственно по определению часто связано с определенными трудностями, поэтому на практике функции дифференцируют с помощью ряда правил и формул.

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - две дифференцируемые в некотором интервале $(a;\ b)$ функции, тогда

$$(1)\ (u \pm v)' = u' \pm v';$$

$$(2)\ (u \cdot v)' = u'v + v'u;$$

$$(3)\ (c \cdot u)',\ \text{где } c \text{ - постоянная};$$

$$(4)\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}\ (v \neq 0).$$

Производная сложной функции

Пусть функция $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f(\varphi(x))$ – сложная функция с промежуточным аргументом u и независимым аргументом x.

Теорема. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную u'_x в точке x, а функция $y = f(u)$ имеет производную y'_u в соответствующей точке $u = \varphi(x)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную y'_x в точке x, которая находится по формуле

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Итак, для нахождения производной сложной функции надо ***производную данной функции по промежуточному аргументу умножить на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу.***

Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько. Так, если $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = g(x)$, то $y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$.

Производная обратной функции

Пусть $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ – взаимно обратные функции.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ строго монотонна на интервале $(a;\ b)$ и имеет не равную нулю производную $f'(x)$ в произвольной точке этого интервала, то обратная ей функция $x = \varphi(y)$ также имеет производную $\varphi'(y)$ в соответствующей точке, определяемую равенством

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}\ \text{или}\ x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Таким образом, ***производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции.***

Пример. Найти производную функции $y = \sqrt[3]{x-1}$ через обратную функцию.

Решение. Найдем обратную функцию $x = y^3 + 1 = \varphi(y)$, тогда $x'(y) = 3y^2$. Так как $y'_x = \frac{1}{x'_y}$, то $y'_x = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

Производные основных элементарных функций (таблица производных)

Приведем производные основных элементарных функций. На практике чаще всего приходится находить производные от сложных функций. Поэтому в приведенной ниже таблице формул дифференцирования аргумент x заменён на промежуточный аргумент u, т. е. функция u считается функцией независимой переменной x: $u = u(x)$.

Таблица производных

(1) $(c)' = 0$ (c - постоянная);
(2) $(x)' = 1$;
(3) $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$, $n \in \mathbb{R}$;
(4) $(a^u)' = a^u \cdot lna \cdot u'$, где $a > 0$, $a \neq 1$;
(5) $(e^u)' = e^u \cdot\ u'$;
(6) $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot lna} \cdot u'$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $u > 0$;
(7) $(ln\, u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$;
(8) $(sin\, u)' = \cos u \cdot u'$;
(9) $(\cos u)' = -\,sin\, u \cdot u'$;
(10) $(tg\, u)' = \frac{1}{cos^2 u} \cdot u'$, где $u \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
(11) $(ctg\, u)' = -\frac{1}{sin^2 u} \cdot u'$, где $u \neq\ \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
(12) $(arcsin\, u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$, где $|\ u\ | \leq 1$;
(13) $(arccos\, u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$, где $|\ u\ | \leq 1$;
(14) $(arctg\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
(15) $(arcctg\, u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

Пример 1. Найти производные функций:
1) $y = x^2 + 3x - 5$; 2) $y = ln\, 5$; 3) $y = \log_2 x$; 4) $y = 3^x$; 5) $y = \sqrt[3]{x^2}$; 6) $y = \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{5x^3}$.

Решение. 1) Для нахождения производной данной функции воспользуемся основными правилами дифференцирования и табличной формулой для степенной функции. Производная числа равна нулю, поэтому $(5)' = 0$. В результате получим:

$$y' = (x^2\ +\ 3x - 5)' = (x^2)' + (3x)' - (5)' = 2x + 3.$$

2) Производная числа равна нулю, поэтому $y' = (ln\, 5)' = 0$, так как $ln\, 5$ – число.
3) Для нахождения производной функции $y = \log_2 x$ воспользуемся табличной формулой для логарифмической функции (при $a = 2$). Получим: $y' = (\log_2 x)' = \frac{1}{x\, ln\, 2}$.
4) Для нахождения производной функции $y = 3^x$ воспользуемся табличной формулой для показательной функции (при $a = 3$). Получим: $y' = (3^x)' = 3^x \cdot ln\, 3$.
5) Для нахождения производной функции $y = \sqrt[3]{x^2}$ воспользуемся табличной формулой для степенной функции (при $n = \frac{2}{3}$). Получим: $y' = (x^{\frac{2}{3}})' = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.
6) Вводя дробные и отрицательные показатели, преобразуем данную функцию:

$$y = \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{5x^3} = x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{1}{3}} - x^{-2} + \frac{1}{5} \cdot x^{-3}.$$

Применяя табличную производную для степенной функции при различных значениях n, получим:

$$y' = (x^{\frac{1}{2}}\ +\ 4x^{-\frac{1}{3}} - x^{-2}\ +\ \frac{1}{5} \cdot x^{-3})' = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} + 4 \cdot (-\frac{1}{3}) \cdot x^{-\frac{4}{3}} - (-2) \cdot x^{-3} + \frac{1}{5} \cdot (-3) \cdot x^{-4} =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{4}{3\sqrt[3]{x^4}} + \frac{2}{x^3} - \frac{3}{5x^4}.$$

Пример 2. Найти производные функций:
1) $y = (2x^3 + 5)^4$; 2) $y = tg^3 x$; 3) $y = cos^2 x$; 4) $y = sin^3 \frac{x}{2}$; 5) $y = ln(x^2 + 5)$.

Решение. Обозначим $2x^3 + 5 = u$, тогда $y = u^4$. По правилу дифференцирования сложной функции имеем:
$y' = (u^4)'_u \cdot u'_x = 4u^3 \cdot (2x^3\ +\ 5)'_x = 4(2x^3\ +\ 5)^3 \cdot (6x^2) = 24x^2(2x^3\ +\ 5)^3$.

2) $y' = (tg^3x)' = (u^3)'_u \cdot (tgx)'_x = 3tg^2x \cdot \frac{1}{cos^2x} = 3tg^2x \cdot \sec^2 x$.

3) $y' = (cos^2x)' = (u^2)'_u \cdot (cosx)'_x = 2\cos x \cdot (-\sin x) = -\sin 2x$.

4) Обозначим $sin\,\frac{x}{2} = u$, $\frac{x}{2} = v$, тогда $y = u^3$,

$y'_x = (sin^3\frac{x}{2})' = = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = (u^3)'_u \cdot (sin\,\frac{x}{2})'_v \cdot (\frac{x}{2})'_x = 3sin^2\frac{x}{2} \cdot cos\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cdot sin^2\frac{x}{2} \cdot cos\frac{x}{2}$.

5) $y' = (ln(x^2+5))' = \frac{1}{x^2+5} \cdot (x^2+5)'_x = \frac{1}{x^2+5} \cdot (2x) = \frac{2x}{x^2+5}$.

Пример 3. Вычислить производные функций:

1) $y = 3\,ln(x^2-5) + \sqrt{x} \cdot \sin x + e^{-2x}$; 2) $y = \frac{arcsinx}{x}$; 3) $y = 2^{x^2} + \arccos 2x$;

5) $y = x\sqrt{x} \cdot (3\ln x - 2)$.

Решение. Для нахождения производных данных функций воспользуемся основными правилами дифференцирования и таблицей производных.

1) $y' = (3\,ln(x^2-5) + \sqrt{x} \cdot \sin x + e^{-2x})' = (3\,ln(x^2-5))' + (\sqrt{x} \cdot \sin x)' + (e^{-2x})' =$
$= 3 \cdot \frac{1}{x^2-5} \cdot (x^2-5)' + (\sqrt{x})' \cdot \sin x + \sqrt{x} \cdot (\sin x)' + e^{-2x} \cdot (-2x)' = 3 \cdot \frac{1}{x^2-5} \cdot (2x) + (\sqrt{x})' \cdot \sin x +$
$+ \sqrt{x} \cdot (\sin x)' + e^{-2x} \cdot (-2) = \frac{6x}{x^2-5} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin x + \sqrt{x} \cdot \cos x - 2 \cdot e^{-2x}$.

2) $y' = (\frac{arcsinx}{x})' = \frac{(arcsinx)' \cdot x - arcsinx \cdot (x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x - arcsinx \cdot 1}{x^2} = \frac{x - \sqrt{1-x^2} \cdot arcsinx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$.

3) $y' = (2^{x^2} + \arccos 2x)' = (2^{x^2})' + (\arccos 2x)' = 2^{x^2} \cdot ln\,2 \cdot (x^2)' + (-\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}) \cdot (2x)' =$
$= 2^{x^2} \cdot ln\,2 \cdot 2x - \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} = 2ln\,2 \cdot 2^{x^2} \cdot x - \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$.

4) $y' = (x\sqrt{x} \cdot (3\ln x - 2))' = (x^{\frac{3}{2}} \cdot (3\ln x - 2))' = (x^{\frac{3}{2}})' \cdot (3\ln x - 2) + x^{\frac{3}{2}} \cdot (3\ln x - 2)' =$
$= \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot (3\ln x - 2) + x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{3}{x} = \frac{9}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot \ln x - 3x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} = \frac{9}{2} \cdot \sqrt{x} \cdot \ln x$.

Производная неявной функции

Если неявная функция задана уравнением $F(x; y) = 0$, то для нахождения производной от y по x нет необходимости разрешать уравнение относительно y: ***достаточно продифференцировать это уравнение по*** x***, рассматривая при этом*** y ***как функцию от*** x, и полученное затем уравнение разрешить относительно y'.

Производная неявной функции выражается через аргумент x и функцию y.

Пример 4. Найти производную функции y, заданной уравнением $x^2 - xy + \ln y = 2$, и вычислить её значение в точке (2; 1).

Решение. Дифференцируя обе части равенства и учитывая, что y есть функция от x,

получим $2x - (1 \cdot y + x \cdot y') + \frac{1}{y'} \cdot y' = 0$, откуда $y' = \frac{2xy - y^2}{xy-1}$.

Значение производной при $x = 2$ и $y = 1$ равно $y'(2) = 3$.

Производная функции, заданной в параметрическом виде

Пусть зависимость между аргументом x и функцией y задана параметрически в виде двух уравнений

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad (5.3)$$

где t – вспомогательная переменная, называемая параметром.

Функцию $y = f(x)$, определяемую данными параметрическими уравнениями, можно рассматривать как сложную функцию $y = y(t)$, где $t = \varphi(x)$.

Предположим, что функции (5.3) имеют имеют производные и что функция $x = x(t)$ имеет обратную $t = \varphi(x)$. По правилу дифференцирования обратной функции

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}. \qquad (5.4)$$

С учетом равенства (5.4) получаем

$$y'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Полученная формула позволяет находить производную y'_x от функции, заданной параметрически, не находя непосредственной зависимости y от x.

Пример 5. Дана функция $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2. \end{cases}$ Найти y'_x.

Решение. Имеем $x'_t = 3t^2$, $y'_t = 2t$. Тогда $y'_x = \frac{2t}{3t^2} = \frac{2}{3t}$.

Убедимся в этом, найдя непосредственно зависимость y от x. Действительно, $t = \sqrt[3]{x}$. Тогда $y = \sqrt[3]{x^2}$. Отсюда $y'_x = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, т. е. $y'_x = \frac{2}{3t}$.

Пример 6. Дана функция $\begin{cases} x = acost, \\ y = bsint. \end{cases}$ Найти y'_x.

Решение. Имеем $x'_t = -asint$, $y'_t = bcost$. Тогда $y'_x = \frac{bcost}{-asint} = -\frac{b}{a}ctgt$.

Пример 7. Составить уравнения касательной и нормали к параболе $y = x^2 - 4x$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Решение. Найдем ординату точки касания: $y_0 = y(1) = -3$. Для определения углового коэффициента касательной $y'_0 = y'(x_0)$ находим производную от y по x из уравнения параболы и вычисляем её частное значение в точке $x_0 = 1$:

$$y' = 2x - 4; \; y'_0 = y'(1) = -2.$$

Подставляя найденные значения в уравнение касательной $y - y_0 = y'_0\ (x - x_0)$, получим

$$y + 3 = -2(x - 1) \text{ или } 2x + y + 1 = 0.$$

Подставляя найденные значения в уравнение нормали $y - y_0 = -\frac{1}{y'_0}(x - x_0)$, получим

$$y + 3 = -\frac{1}{-2}(x - 1) \text{ или } x - 2y - 7 = 0.$$

Пример 8. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ в точке $M(1; -1)$.

Решение. Найдем производную неявно заданной функции:

$$2x + 2y^2 + 4xyy' + 12y^3y' = 0, \text{ т. е. } y' = -\frac{x+y^2}{2xy+6y^3}.$$

Вычислим её значение в точке $M(1; -1)$:

$$y'(1; -1) = -\frac{1+(-1)^2}{2\cdot1\cdot(-1)+6(-1)^3} = \frac{1}{4}.$$

Тогда уравнение касательной имеет вид:

$$y + 1 = \frac{1}{4}(x - 1) \text{ или } x - 4y + 5 = 0.$$

Уравнение нормали имеет вид:

$$y + 1 = -4(x - 1) \text{ или } 4x + y - 3 = 0.$$

Пример 9. Составить уравнения касательной и нормали в точке $M(1;\ 4)$ к кривой, заданной параметрически: $\begin{cases} x(t) = \frac{2+t}{t^2}, \\ y(t) = t^2. \end{cases}$

Решение. 1) Найдем значение t, при котором $x_0 = 1$, $y_0 = 4$, из решения системы $\begin{cases} \frac{2+t}{t^2} = 1, \\ t^2 = 4. \end{cases}$

Получим, что $t = 2$.

2) Найдем производную функции и вычислим её значение при $t = 2$:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t}{\frac{t^2-(2+t)\cdot 2t}{t^4}} = \frac{2t^5}{t^2-4t-2t^2} = \frac{2t^5}{-4t-t^2} = -\frac{2t^4}{4+t}.$$

$$y'_x(2) = -\frac{16}{3}.$$

Тогда уравнение касательной имеет вид:

$$y - 4 = -\frac{16}{3}(x - 1) \text{ или } 16x + 3y - 28 = 0.$$

Уравнение нормали имеет вид:

$$y - 4 = \frac{3}{16}(x - 1) \text{ или } 3x - 16y + 61 = 0.$$

Логарифмическое дифференцирование

Дифференцирование многих функций значительно упрощается, если их предварительно прологарифмировать.

Если требуется найти y' из уравнения $y = f(x)$, то можно:

а) логарифмировать обе части уравнения (по основанию e)

$$\ln y = \ln f(x) = \varphi(x);$$

б) дифференцировать обе части полученного равенства, где $\ln y$ есть сложная функция от x

$$\frac{y'}{y} = \varphi'(x);$$

в) заменить y его выражением через x и определить y':

$$y' = y \cdot \varphi'(x).$$

Логарифмическое дифференцирование полезно применять, когда заданная функция содержит логарифмирующиеся операции (умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня) и, в частности, для нахождения производной от показательно - степенной функции $y = u^v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$.

Пример 10. Найти производные функций:

1) $y = \frac{e^x(x+5)\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}}{(x+4)^3}$; 2) $y = x^x$.

Решение. Применяя логарифмическое дифференцирование, последовательно находим:

а) $\ln y = x + \ln(x+5) + \frac{2}{3}\ln(x+1) + \frac{1}{3}\ln(x-2) - 3\ln(x+4)$.

б) Дифференцируем это равенство по x:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = 1 + \frac{1}{x+5} + \frac{2}{3(x+1)} + \frac{1}{3(x-2)} - \frac{3}{x+4}.$$

в) Выражаем y':

$$y' = y\cdot(1 + \frac{1}{x+5} + \frac{2}{3(x+1)} + \frac{1}{3(x-2)} - \frac{3}{x+4}),$$

т. е.

$$y' = \frac{e^x(x+5)\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}}{(x+4)^3}\cdot(1 + \frac{1}{x+5} + \frac{2}{3(x+1)} + \frac{1}{3(x-2)} - \frac{3}{x+4}).$$

2) Применяя логарифмическое дифференцирование к функции $y = x^x$, последовательно находим:

а) $\ln y = x\cdot\ln x$.

б) $\frac{1}{y}\cdot y' = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1$.

В) $y' = y\cdot(\ln x + 1)$, т. е. $y' = x^x\cdot(\ln x + 1)$.

5.5. Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x отличную от нуля производную $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$. Тогда, по теореме о связи функции, её предела и бесконечно малой функции, можно записать

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0, \text{ или } \Delta y = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha(x)\cdot\Delta x.$$

Первое слагаемое приращения функции $f'(x)\cdot\Delta x$ называют ***главной частью приращения*** функции Δy.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется главная часть её приращения, линейная относительно приращения аргумента, и обозначается dy (или $df(x)$):

$$dy = f'(x)\cdot\Delta x.$$

Дифференциал dy называют также ***дифференциалом первого порядка.*** Найдем дифференциал независимой переменной x, т. е. дифференциал функции $y = x$.

Так как $y' = x' = 1$, то, согласно приведённой выше формуле, $dy = dx = 1\cdot\Delta x$, т.е. дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной: $dx = \Delta x$.

Поэтому формулу можно переписать так:

$$dy = f'(x)\cdot dx,$$

иными словами, ***дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной.***

Очевидно, можно записать, что $\frac{dy}{dx} = f'(x)$.

Геометрически дифференциал представляет собой приращение ординаты касательной к графику функции в точке $M(x;\, y)$ (рис. 5.6).

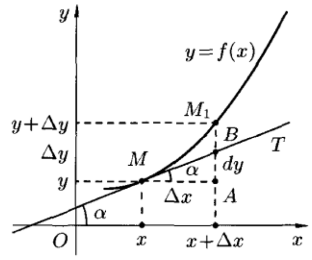


Рис. 5.6

Основные теоремы о дифференциалах

Основные теоремы о дифференциалах легко получить, используя связь дифференциала и производной функции ($dy = f'(x)\cdot dx$) и соответствующие теоремы о производных.

Теорема 1. Дифференциал суммы, произведения и частного двух дифференцируемых функций определяются следующими формулами:

$$d(u+v) = du + dv.$$
$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du.$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u\cdot dv - v\cdot du}{v^2},\ (v \neq 0).$$

Замечание. Очевидно, что $d(u-v) = du - dv$.

Теорема 2. Дифференциал сложной функции равен произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на дифференциал этого промежуточного аргумента. Т. е., если дана сложная функция $y = f(\varphi(x))$, где $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ – две дифференцируемые функции, то

$$dy = y'_u \cdot du.$$

Например, $d(\sin x) = (\sin x)'_u \cdot du = \cos x \cdot du$.

Инвариантность (неизменность) формы первого дифференциала

Дифференциал функции $y = f(x)$ определяется одной и той же формулой независимо от того, является ли её аргумент независимой переменной или является функцией другого аргумента.

Таблица дифференциалов

(1) $dc = 0$ (c - постоянная);
(2) $d(c \cdot u) = c \cdot du$;
(3) $d(u^n) = n \cdot u^{n-1} \cdot du,\ n \in \mathbb{R}$;
(4) $d(a^u) = a^u \cdot lna \cdot du$, где $a > 0,\ a \neq 1$;
(5) $d(e^u) = e^u \cdot du$;
(6) $d\,(\log_a u) = \frac{1}{u\cdot lna} \cdot du$, где $a > 0,\ a \neq 1,\ u > 0$;
(7) $d\,(ln\, u) = \frac{1}{u} \cdot du$;
(8) $d(sin\, u) = \cos u \cdot du$;
(9) $d(\cos u) = -\,sin\, u \cdot du$;
(10) $d(tg\, u) = \frac{1}{cos^2 u} \cdot du$, где $u \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$;
(11) $d(ctg\, u) = -\frac{1}{sin^2 u} \cdot du$, где $u \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$;
(12) $d(arcsin\, u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot du$, где $|\ u\ | \leq 1$;
(13) $d(arccos\, u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot du$, где $|\ u\ | \leq 1$;
(14) $d(arctg\, u) = \frac{1}{1+u^2} \cdot du$;
(15) $d(arcctg\, u) = -\frac{1}{1+u^2} \cdot du$.

Применение дифференциала к приближённым вычислениям

Если приращение Δx аргумента мало по абсолютной величине, то $\Delta y \approx dy$ и справедливо равенство:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot \Delta x.$$

Это равенство позволяет с большой точностью вычислить приближённо приращение любой дифференцируемой функции.

Дифференциал обычно находится значительно проще, чем приращение функции, поэтому данная формула широко применяется в вычислительной практике.

Пример 11. Найти приращение Δy и дифференциал dy функции $y = 3x^2 - x$ при $x = 1$ и $\Delta x = 0{,}01$.

Решение. 1) Найдем $\Delta y = 3(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x) - (3x^2 - x) = 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - x - \Delta x -$ $- 3x^2 + x = (6x - 1)\Delta x + 3(\Delta x)^2$, тогда $\Delta y = (6\cdot 1 - 1)\cdot 0{,}01 + 3\cdot (0{,}01)^2 = 0{,}05 + 0{,}0003 =$ $= 0{,}0503$;

3) Найдем d$y = f'(x)\Delta x = (6x - 1)\Delta x$, тогда d$y = (6\cdot 1 - 1)\cdot 0{,}01 = 0{,}0500$.

Погрешность вычисления $|\Delta y - dy| = 0{,}0003$. Значит, d$y \approx \Delta y$.

Пример 12. Найти дифференциал функции $y = x^3 + 5^x$.

Решение. Находим производную данной функции и, умножив её на дифференциал независимой переменной, получим искомый дифференциал данной функции:

$$dy = f'(x)\cdot dx = (x^3 + 5^x)'dx = (3x^2 + 5^x\cdot \ln 5)dx.$$

Пример 13. Вычислить приближённое значение *arcsin* 0,51.

Решение. Рассмотрим функцию $y = \arcsin x$. Полагая $x = 0{,}5$, $\Delta x = 0{,}01$ и применяя формулу $\arcsin(x + \Delta x) \approx \arcsin x + (\arcsin x)'\cdot \Delta x$, получаем

$$\arcsin 0{,}51 \approx \arcsin 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}5)^2}}\cdot 0{,}01 = \frac{\pi}{6} + 0{,}011 \approx 0{,}513.$$

Пример 14. Вычислить приближённое значение площади круга, радиус которого равен 3,02м.

Решение. Воспользуемся формулой $S = \pi R^2$. Полагая $R = 3$, $\Delta R = 0{,}02$, имеем

$$\Delta S \approx dS = S'(R)\cdot\Delta R = 2\pi R\cdot\Delta R = 2\pi\cdot 3\cdot 0{,}02 = 0{,}12\pi.$$

Следовательно, приближённое значение площади круга составляет

$$S(3{,}02) \approx 9\pi + 0{,}12\pi = 9{,}12\pi \approx 28{,}66\ (\text{м}^2).$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти дифференциалы функций:

1.1. $y = \frac{x}{2}\sqrt{49 - x^2} + \frac{49}{2}\arcsin\frac{x}{7}$. 1.2. $y = \frac{1}{12}\ln\frac{x-6}{x+6}$; 1.3. $y = \operatorname{arctg} e^{2x}$; 1.4. $y = x(\ln x - 1)$.

2. Вычислить приближённое значение:

2.1. $\sqrt[4]{15{,}8}$; 2.2. tg 46°; 2.3. ln1,01; 2.4. sin 29°.

3. Вычислить приближённое значение объема шара радиуса 2,01 м.

4. Найти выражения приращений функций и их дифференциалов и вычислить их значения при заданных x и Δx:

4.1. $y = x^3 - 3x^2 + 3x$, $x = 2$, $\Delta x = 0{,}01$. 4.2. $y = \sqrt{1 + x^2}$, $x = 0$, $\Delta x = -0{,}01$.

Ответы: **1.1**. $dy = \sqrt{49 - x^2}dx$; **1.2**. $dy = \frac{dx}{x^2-36}$; **1.3**. $dy = \frac{2e^{2x}dx}{1+e^{4x}}$; **1.4**. $dy = \ln x dx$.

2.1. 1,9938; **2.2**. 1,035; **2.3**. 0,0100; **2.4**. 0,4848. **3**. 34,04 (м^3).

4.1. $\Delta y = \Delta x\ \left[3\left(x^2 + (x-1)\Delta x - (2x-1)\right) + (\Delta x)^2\right]$; $dy = 3(x-1)^2\Delta x$; при $x = 2$, $\Delta x = 0{,}01$ $\Delta y = 0{,}030301$, $dy = 0{,}03$. **4.2**. $\Delta y = \sqrt{1 + (x + \Delta x)^2} - \sqrt{1 + x^2}$; $dy = x\ \Delta x/\sqrt{1 + x^2}$; при $x = 0$, $\Delta x = -0{,}01$ $\Delta y = 0{,}00005$, $dy = 0$.

5.6. Производные и дифференциалы высших порядков

Производной второго порядка (***второй производной***) функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной. Вторая производная обозначается так: y'' или $\frac{d^2y}{dx^2}$, или $f''(x)$.

Аналогично ***производная третьего порядка*** функции $y = f(x)$ есть производная от производной второго порядка: $y''' = (y'')'$.

Вообще, ***производной n - ого порядка*** от функции $y = f(x)$ называется производная от производной **(*n* – 1) - *ого порядка***: $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$. Обозначается производная n - ого порядка так: $y^{(n)}$ или $\frac{d^ny}{dx^n}$, или $f^{(n)}(x)$.

Производные высших порядков (вторая, третья и т. д.) вычисляются последовательным дифференцированием данной функции.

Если ***функция*** задана ***параметрически***: $x = x(t)$, $y = y(t)$,
то производные y'_x, y''_x, y'''_x, … вычисляются по формулам:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \quad y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} \text{ и т.д.}$$

Производную второго порядка можно также вычислить по формуле

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - x''_{tt} \cdot y'_t}{(x'_t)^3}.$$

Если функция задана ***неявно***, т. е. уравнением $F(x, y) = 0$, то, чтобы найти y', необходимо продифференцировать обе части равенства $F(x, y) = 0$ по независимой переменной x, считая y функцией от x. Затем полученное уравнение, в которое будут входить x, y и y', следует разрешить относительно y'. Для нахождения y'' полученное равенство дифференцируется дважды, в результате чего получается уравнение, содержащее x, y, y', y'', которое следует разрешить относительно y'', затем вместо y' подставить функцию от x и y, найденную указанным выше способом.

Пример 15. Найти значения y', y'', если функция у задана неявно уравнением $y = x + \ln y$.

Решение. Продифференцируем обе части данного равенства по x и определим y':

$$y' = 1 + \frac{1}{y} \cdot y'. \text{ Откуда } y' = \frac{y}{y-1}.$$

Продифференцируем ещё раз обе части данного равенства по x и определим y'':

$$y'' = \frac{y'(y-1) - y(y-1)'}{(y-1)^2} = \frac{y' \cdot (y-1) - y \cdot y'}{(y-1)^2} = \frac{y' \cdot y - y' - y \cdot y'}{(y-1)^2} = \frac{-y'}{(y-1)^2}.$$

Подставляя вместо y' его значение, имеем $y'' = \frac{-y}{(y-1)^3}$.

Пример 16. Найти y'', если $x^2 + y^2 = 1$.

Решение. Продифференцируем функцию по x. Имеем

$$2x + 2yy' = 0, \text{ откуда } y' = -\frac{x}{y}.$$

Тогда $y'' = -\frac{1 \cdot y - x \cdot y'}{y^2} = -\frac{y - x \cdot (-\frac{x}{y})}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3}$.

Дифференциалом второго порядка функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка: $d^2y = d(dy)$.

Аналогично определяется дифференциал третьего порядка: $d^3y = d(d^2y)$.

Вообще, $d^n y = d(d^{n-1}y)$.

Если $y = f(x)$ и x – независимая переменная, то ***дифференциалы высших порядков*** вычисляются по формулам

$d^2y = y''(dx)^2 = y''dx^2$, $d^3y = y'''(dx)^3 = y'''dx^3$, …, $d^n y = y^{(n)}(dx)^n = y^{(n)}dx^n$.

Пример 17. Найти y', y'', y''', …

$y = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 0{,}5x + 6$.

Решение. Находим последовательно производные функции

$y' = 5x^4 + 8x^3 - 2x - 0{,}5$,
$y'' = 20x^3 + 24x^2 - 2$,
$y''' = 60x^2 + 48x$,
$y^{\mathrm{IV}} = 120x + 48$,
$y^{\mathrm{V}} = 120$, $y^{\mathrm{VI}} = y^{\mathrm{VII}} = \ldots = 0$.

Пример 18. $y = \ln x$. Найти $y^{(n)}$.

Решение.

$y' = \frac{1}{x} = x^{-1}$,
$y'' = -1 \cdot x^{-2}$,
$y''' = 1 \cdot 2 \cdot x^{-3}$,
$y^{\mathrm{IV}} = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^{-4}$,
…………………,
$y^{(n)} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot (-1)^{n-1} \cdot x^{-n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}$.

Пример 19. $y = 3^x$. Найти $y^{(n)}$.

Решение.

$y' = 3^x \cdot \ln 3$,
$y'' = 3^x \cdot \ln^2 3$,
$y''' = 3^x \cdot \ln^3 3$,
……………..,
$y^{(n)} = 3^x \cdot \ln^n 3$.

Пример 20. Найти производные второго порядка функции $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

Решение. Находим последовательно производные функции

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(a\sin^3 t)'_t}{(a\cos^3 t)'_t} = \frac{3a\sin^2 t \cdot \cos t}{-3a\cos^2 t \cdot \sin t} = -\operatorname{tg} t,$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-tgt)'_t}{(acos^3t)'_t} = \frac{-\frac{1}{cos^2t}}{-3acos^2t\cdot sint} = \frac{1}{3cos^4t\cdot sint}.$$

Пример 21. Найти дифференциалы первого, второго и третьего порядков функции

$$y = (2x+7)^3.$$

Решение. $dy = f'(x)\cdot dx = ((2x+7)^3)'\cdot dx = 3(2x+7)^2\cdot 2dx = 6(2x+7)^2dx$,

$$d^2y = y''dx^2 = (6(2x+7)^2)'\cdot dx^2 = 12(2x+7)\cdot 2dx^2 = 24(2x+7)dx^2,$$

$$d^3y = y'''dx^3 = (24(2x+7))'\cdot dx^3 = 48dx^3.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти производные второго порядка функций:

1.1. $y = \frac{1}{4}x^2(2lnx - 3)$. 1.2. $y = \frac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}\sqrt{1-x^2} + x\cdot arcsin\,x$.

1.3. $y = -\frac{1}{9}xsin\,3x - \frac{2}{27}cos\,3x$. 1.4. $y = \begin{cases} x = arccos\sqrt{t}, \\ y = \sqrt{t-t^2}. \end{cases}$

2. Найти производные третьего порядка функций:

2.1. $y = \frac{x}{6(x+1)}$. 2.2. $y = \frac{1}{2}ln^2x$. 2.3. $y = (2x+3)^3\cdot\sqrt{2x+3}$.

3. Показать, что функция $y = x + sin\,2x$ удовлетворяет уравнению $y'' + 4y = 4x$.

4. Найти d^2y, если $y = ln(x+\sqrt{x^2+4})$.

5. Найти y'', если $y = tg(x+y)$.

Ответы: **1.1**. $y'' = lnx$. **1.2**. $y'' = 2\sqrt{1-x^2}$. **1.3**. $y'' = xsin\,3x$.
1.4. $y''_{xx} = -4\sqrt{t-t^2}$. **2.1**. $y''' = \frac{1}{(x+1)^4}$. **2.2**. $y''' = \frac{2lnx-3}{x^3}$.
2.3. $y''' = 105\sqrt{2x+3}$. **4**. $d^2y = \frac{-x}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}dx^2$. **5**. $y'' = -\frac{2(y^2+1)}{y^5}$.

5.7. Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема Ферма. Если дифференцируемая на промежутке X функция $y = f(x)$ достигает наибольшего или наименьшего значения во внутренней тоске c этого промежутка, то производная функции в этой точке равна нулю, т. е. $f'(c) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ферма: в точке наибольшего или наименьшего значения, достигаемого внутри промежутка X, касательная к графику функции параллельна оси абсцисс.

Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$ и на концах отрезка принимает одинаковые значения $f(a) = f(b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a;b)$, в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль, т. е. $f'(c) = 0$.

Геометрически теорема Ролля означает, что на графике функции $y = f(x)$ найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику параллельна оси Ox (рис. 5.7 и рис. 5.8). На рисунке 5.9 таких точек две.

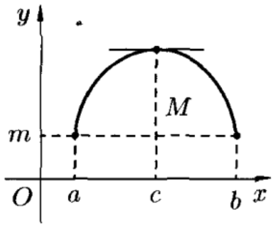


рис. 5.7

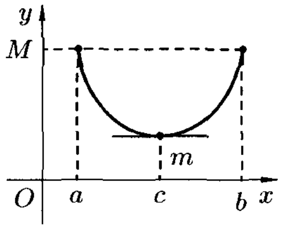


рис. 5.8

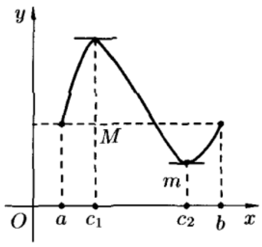


рис. 5.9

Если $f(a) = f(b) = 0$, то теорему Ролля можно сформулировать так: между двумя последовательными нулями дифференцируемой функции имеется хотя бы один нуль производной.

Теорема Коши. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, дифференцируемы на интервале $(a; b)$, причем $\varphi'(x) \neq 0$ для $x \in (a; b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a; b)$, такая, что выполняется равенство

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Теорема Лагранжа (формула о конечном приращении). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a; b)$ такая, что выполняется равенство

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа: на графике функции $y = f(x)$ найдется точка $C(c; f(c))$, в которой касательная к графику функции параллельна секущей AB (рис. 5.10).

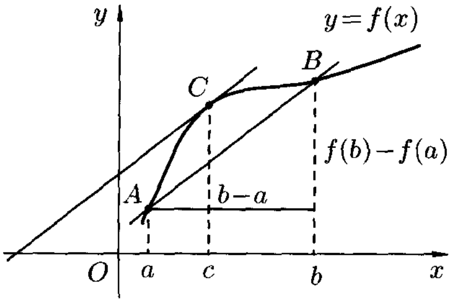


Рис. 5.10

Следствие 1. Если производная функции равна нулю на некотором промежутке, то функция постоянна на этом промежутке.

Следствие 1. Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке, то они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

Пример 22. Выполняется ли теорема Ролля для функции $y = \sqrt[3]{8x - x^2}$, если $a = 0$, $b = 8$? При каком значении c?

Решение. Функция $y = \sqrt[3]{8x - x^2}$ непрерывна при всех значениях x и имеет производную $y' = \frac{8-2x}{3\sqrt[3]{(8x-x^2)^2}}$ при $x \neq 0$, $x \neq 8$, т. е. дифференцируема в интервале (0; 8). Кроме того,

$f(0) = f(8) = 0$. Таким образом, теорема Ролля на отрезке $[0;\ 8]$ выполняется; действительно, $f'(x) = 0$ при $x = c = 0$.

Пример 23. На дуге AB кривой $y = 2x - x^2$ найти точку M, в которой касательная параллельна хорде AB, если $A(1;\ 1)$ и $B(3;\ -3)$.

Решение. Функция $y = 2x - x^2$ непрерывна и дифференцируема при всех значениях x. По теореме Лагранжа между двумя значениями $a = 1$ и $b = 3$ существует значение $x = c$, удовлетворяющее равенству $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$, где $f'(x) = 2 - 2x$. Подставив соответствующие значения, получим

$$f(3) - f(1) = f'(c)(3 - 1),$$

$$(2\cdot 3 - 3^2) - (2\cdot 1 - 1^2) = (2 - 2c)\cdot(3 - 1),\ -4 = 4(1 - c).$$

Откуда получим $c = 2$, $f(2) = 0$. Таким образом, точка M имеет координаты $(2;\ 0)$.

5.8. Приложения производной. Формула Тейлора. Правило Лопиталя

Формула Тейлора

Если функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и в этой окрестности имеет производные до $(n + 1)$ -го порядка включительно (т.е. дифференцируема $(n + 1)$ раз), то справедлива ***формула Тейлора***

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x)$ – остаточный член, являющийся бесконечно малой величиной при $x \to x_0$.

Остаточный член обычно записывают в виде

$$R_{n+1}(x) = o((x - x_0)^n) \text{ (в форме Пеано)}$$

или в виде

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \text{ (в форме Лагранжа)},$$

где c – некоторое число между x_0 и x, т. е. $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, причем $0 < \theta < 1$.

При $x_0 = 0$ получаем частный случай формулы Тейлора - ***формулу Маклорена***:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

где c – некоторое число между 0 и x, т. е. $c = \theta x$, причем $0 < \theta < 1$.

Приведем ***разложения*** некоторых ***функций по формуле Маклорена***:

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n$; $R_n = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$.
2. $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}$; $R_{2n} = (-1)^n \cos\theta x\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}$; $R_{2n+1} = (-1)^{n+1}\cos\theta x\cdot\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$.
4. $(1 + x)^m = 1 + \frac{m}{1!}\cdot x + \frac{m(m-1)}{2!}\cdot x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\cdot x^3 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{n!}\cdot x^n + R_n$;

$R_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}(1 + \theta x)^{m-n-1}$ (всюду $0 < \theta < 1$).

При $n = 0$ формула Тейлора имеет вид $f(x) = f(x_0) + f'(c)\,(x - x_0)$ или

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)\,(x - x_0),$$

т. е. совпадает с формулой Лагранжа конечных приращений. Рассмотренная ранее формула для приближенных вычислений $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$ («дифференциал функции») является частным случаем более точной формулы

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Формула Тейлора для многочлена

Если функция $f(x)$ есть многочлен $P_n(x)$ степени n:

$$f(x) = P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n,$$

то ***формула Тейлора для многочлена $P_n(x)$ степени n*** будет выглядеть так:

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P_n{}'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P_n{}''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{P_n{}^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Формулы Тейлора и Маклорена применяют для приближённых вычислений.

Пример 24. Представить функцию $f(x) = \sqrt[3]{x}$ в виде многочлена пятой степени относительно двучлена $(x - 1)$.

Решение. Вычислим значения функции $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ и её производных до пятого порядка включительно при $x_0 = 1$:

$f(1) = 1$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$, $f'(1) = \frac{1}{3}$; $f''(x) = (-\frac{2}{9})x^{\frac{-5}{3}}$, $f''(1) = -\frac{2}{9}$; $f'''(x) = \frac{10}{27}x^{\frac{-8}{3}}$, $f'''(1) = \frac{10}{27}$;

$f^{\mathrm{IV}}(x) = -\frac{80}{81}x^{\frac{-11}{3}}$, $f^{\mathrm{IV}}(1) = -\frac{80}{81}$; $f^{\mathrm{V}}(x) = \frac{880}{243}x^{\frac{-14}{3}}$, $f^{\mathrm{V}}(1) = \frac{880}{243}$.

Следовательно, по формуле Тейлора получим

$$\sqrt[3]{x} = 1 + \frac{1}{3}(x - 1) - \frac{2}{9\cdot 2!}(x - 1)^2 + \frac{10}{27\cdot 3!}(x - 1)^3 - \frac{80}{81\cdot 4!}(x - 1)^4 + \frac{880}{243\cdot 5!}(x - 1)^5 + R_5,$$

где $R_5 = \frac{f^{\mathrm{IV}}(c)}{6!}(x - 1)^6 = -\frac{12320}{729\cdot 6!}\cdot c^{\frac{-17}{3}}(x - 1)^6$, $1 < c < x$.

Пример 25. Вычислить $\sqrt{e}$ с точностью до 0,0001.
Решение. Воспользуемся формулой Маклорена для функции e^x:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n\,;\; R_n = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\ (0 < \theta < 1).$$

Полагая $x = \frac{1}{2}$, получим

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2\cdot 1!} + \frac{1}{2^2\cdot 2!} + \frac{1}{2^3\cdot 3!} + \ldots + \frac{1}{2^n\cdot n!} + R_n\,,\; R_n = \frac{e^{\frac{\theta}{2}}}{2^{n+1}\cdot(n+1)!},\ 0 < \theta < 1.$$

Так как $0 < \theta < 1$, $2 < e < 3$, то $R_n < \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2^{n+1}\cdot(n+1)!}$. Но $e^{\frac{1}{2}} < 2$, поэтому $R_n < \frac{1}{2^n\cdot(n+1)!}$. Требуется определить n так, чтобы выполнялось неравенство $R_n < 0{,}0001$.

Если $n = 3$, то $R_3 < \frac{1}{8\cdot24} = \frac{1}{192}$,
Если $n = 4$, то $R_4 < \frac{1}{16\cdot120} = \frac{1}{1920}$,
Если $n = 5$, то $R_5 < \frac{1}{3\cdot720} = 0{,}0001$.

Значит, все члены с номером больше пяти отбросим. Тогда получим

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2\cdot1!} + \frac{1}{2^2\cdot2!} + \frac{1}{2^3\cdot3!} + \frac{1}{2^4\cdot4!} + \frac{1}{2^5\cdot5!} \approx 1{,}6487.$$

Пример 26. Представить в виде многочлена третьей степени относительно $(x - 1)$ многочлен $P(x) = x^{10} - 5x^4 + 1$.
Решение. Воспользуемся формулой Тейлора для многочлена $P_n(x)$ степени n:

$$P_n(x) = P_n(1) + \frac{P_n{}'(1)}{1!}(x-1) + \frac{P_n{}''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{P_n{}'''(1)}{3!}(x-1)^3.$$

По условию $x_0 = 1$, $n = 3$. Найдем значения функции и значения первых трех производных в точке $x_0 = 1$.
$P'(x) = 10x^9 - 20x^3$, $P''(x) = 90x^8 - 60x^2$, $P'''(x) = 720x^7 - 120x$.
Поэтому $P(1) = -3$, $P'(1) = -10$, $P''(1) = 30$, $P'''(1) = 600$.
Подставим найденные значения в формулу Тейлора и получим

$$P(x) = -3 + \frac{-10}{1!}(x-1) + \frac{30}{2!}(x-1)^2 + \frac{600}{3!}(x-1)^3,$$
$$P(x) = -3 - 10(x-1) + 15(x-1)^2 + 100(x-1)^3.$$

Правило Лопиталя

Раскрытие неопределённостей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Первое правило Лопиталя

Теорема 1. ***Раскрытие неопределённости вида*** $\left[\frac{0}{0}\right]$. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и обращаются в нуль в этой точке: $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$. Пусть $\varphi'(x) \neq 0$ в окрестности точки x_0. Если существует предел $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l$, то $lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l$.

Иными словами, предел отношения двух б. м. ф. равен пределу отношения их производных, если последний существует.

Замечание **1**. Теорема 1 верна и в том случае, если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ не определены при $x = x_0$, но $lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ и $lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$. Достаточно положить $f(x_0) = lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ и $\varphi(x_0) = lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$.

***Замечание* 2**. Теорема 1 верна и когда $x \to \infty$ (положить $x = (\frac{1}{z})$):

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{z \to 0} \frac{f(\frac{1}{z})}{\varphi(\frac{1}{z})} = \lim_{z \to 0} \frac{(f(\frac{1}{z}))'}{(\varphi(\frac{1}{z}))'} = \lim_{z \to 0} \frac{f'(\frac{1}{z})(-\frac{1}{z^2})}{\varphi'(\frac{1}{z})(-\frac{1}{z^2})} = \lim_{z \to 0} \frac{f'(\frac{1}{z})}{\varphi'(\frac{1}{z})}.$$

Теорема 1 верна и когда $x \to -\infty$, $x \to +\infty$, $x \to x_0 - 0$, $x \to x_0 + 0$.

***Замечание* 3**. Если производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют тем же условиям, что и функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, то теорему 1 можно применить еще раз:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}.$$

Пример 27. Найти предел $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{xlnx}$.

Решение. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{xlnx} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)'}{(xlnx)'} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{lnx+1} = 1.$

Пример 28. Найти предел $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-\sin x}{x^3}$.

Решение. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1-cos\, x}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(1-cos\, x)'}{(3x^2)'} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} =$
$= \frac{1}{6} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6}.$

Раскрытие неопределённостей вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Второе правило Лопиталя

Теорема 2. Раскрытие неопределённости типа $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 (кроме, быть может, точки x_0), в этой окрестности $lim_{x \to x_0} f(x) = lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \infty$, $\varphi'(x) \neq 0$. Если существует предел $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l$, то $lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l$.

Замечание. Приведенное правило раскрытия неопределенности вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ аналогично правилу раскрытия неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Замечания, относящиеся к неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, остаются в силе и для всех других неопределенностей.

Пример 29. Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{ctgx} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{(\ln x)'}{(ctgx)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{sin^2 x}} = - \lim_{x \to 0} \frac{sin^2 x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$

$= - \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x \cos x}{1} = \frac{0}{1} = 0.$

Раскрытие неопределённостей различных видов

1. Неопределённости вида $[0 \cdot \infty]$, $[\infty - \infty]$ сводятся к неопределенностям вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ или $\left[\frac{0}{0}\right]$ путем тождественных преобразований и применению затем правила Лопиталя.

Пример 30. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1})=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1-\ln x)'}{((x-1)\ln x)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x\ln x+x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{(x\ln x+x-1)'}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+1+1}=\frac{1}{2}.$

Пример 31. Найти предел $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot ctgx.$

Решение. $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot ctgx=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{tgx}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(tgx)'}=$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\frac{1}{cos^2x}}=\frac{0}{1}=0.$

2. Неопределённости $[1^\infty]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$ раскрывают с помощью предварительного логарифмирования и нахождения предела логарифма степени $f(x)^{\varphi(x)}$.

Эти неопределенности сводятся к неопределенности вида $[0\cdot\infty]$ с помощью тождества

$$\lim_{x\to 0}f(x)^{\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)\cdot\ln f(x)}$$

Пример 32. $[0^0]$. Найти $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$.

Решение. $y=x^{\sin x}$, $ln\,y=\ln x^{\sin x}$. Так как $y=e^{\ln y}$, то $y=e^{\ln x^{\sin x}}=e^{\sin x\cdot\ln x}$. Тогда $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot\ln x}=[0\cdot\infty]=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{\sin x})'}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-sin^{-2}x\cos x}}=$

$=e^{-\lim_{x\to 0}\frac{sin^2x}{x\cos x}}=e^{-\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\cos x}}=e^{-\lim_{x\to 0}\frac{x}{\cos x}}=e^0=1.$

Пример 33. $[\infty^0]$. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x})^{tgx}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x})^{tgx}=e^{\lim\limits_{x\to 0}tgx\cdot ln\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln\frac{1}{x}}{ctgx}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(ln\frac{1}{x})'}{(ctgx)'}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(-\frac{1}{x^2})}{(-\frac{1}{sin^2x})}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}x(\frac{sinx}{x})^2}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\lim\limits_{x\to 0}(\frac{sinx}{x})^2}=e^{0\cdot 1}=e^0=1.$

Пример 34. $[1^\infty]$. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}$.

Решение. Логарифмируя и применяя правило Лопиталя, получаем

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{ln\,x}=[1^\infty]=e^{\lim\limits_{x\to 0}lnx\cdot ln(1+x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{\frac{1}{lnx}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(ln(1+x))'}{(\frac{1}{lnx})'}}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{xln^2x}{1+x}}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln^2x}{\frac{1}{x}+1}}=$

$=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2lnx}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{lnx}{\frac{1}{x}}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=e^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{-2\lim\limits_{x\to 0}x}=e^{-2\cdot 0}=e^0=1.$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя:

1.1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$. 1.2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$. 1.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi-2arctgx}{e^{\frac{3}{x}}-1}$.

1.4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{lnx}{1+2ln\,sinx}$. 1.5. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{tg\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$. 1.6. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)}{ctg\pi x}$.

1.7. $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot ctg\pi x)$. 1.8. $\lim\limits_{x\to 0}(arcsinx\cdot ctgx)$. 1.9. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-ctg^2x)$.

1.10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x}$. 1.11. $\lim\limits_{x\to 0}(cos2x)^{\frac{3}{x^2}}$. 1.12. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}$.

2. Вычислить с точностью до 0,001:

2.1. $sin18°$. 2.2. $\sqrt{70}$. 2.3. $\sqrt[5]{245}$. 2.4. $cos41°$. 2.5. $\sqrt[3]{e}$.

3. В какой точке дуги AB кривой $y = x^3 - 3x$ касательная параллельна хорде AB, если $A(0; 0)$, $B(3; 18)$?

4. Написать формулу Тейлора третьего порядка для функции $f(x) = x^5$ в точке $x_0 = -1$.

Ответы: **1.1**. $\frac{3}{5}$. **1.2**. 2. **1.3**. $\frac{2}{3}$. **1.4**. $\frac{1}{2}$. **1.5.** ∞. **1.6**. 0. **1.7**. $\frac{1}{\pi}$. **1.8**. 1. **1.9**. $\frac{2}{3}$.
1.10. 1. **1.11.** e^{-6}. **1.12**. 2. **2.1**. 0,309. **2.2**. 4,121. **2.3**. 3,004. **2.4**. 0,754.
2.5. 1,395. **3**. $M(\sqrt{3}; 0)$. **4**. $x^5 = -1 + \frac{5}{1}(x+1) - \frac{20}{2}(x+1)^2 + \frac{60}{6}(x+1)^3 + o((x+1)^3), x_0 \to -1$.

Глава 6. Исследование функций и построение их графиков

6.1. Возрастание и убывание функции. Экстремум функции

Одним из приложений производной является её применение к исследованию функций и построению графика функции.

Необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функции

Теорема 1 (необходимые условия). Если дифференцируемая на интервале $(a; b)$ функция $y = f(x)$ возрастает (убывает), то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для $\forall x \in (a; b)$.

Геометрически теорема 1 означает, что касательные к графику возрастающей дифференцируемой функции образуют острые углы с положительным направлением оси *Ox* или в некоторых точках параллельны оси *Ox*.

Теорема 2 (достаточные условия). Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для $\forall x \in (a; b)$, то эта функция возрастает (убывает) на интервале $(a; b)$.

Пример 1. Исследовать на возрастание и убывание функции:
1) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$; 2) $f(x) = ln(1-x^2)$.
Решение. 1) Функция $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ определена на $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$. Производная функции равна $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$. Приравняем её к нулю: $3x^2 + 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0$. Откуда получим корень кратности два: $x = -1$. Очевидно, что при любом значении аргумента $f'(x) \geq 0$. Следовательно, функция возрастает при $x \in (-\infty; +\infty)$.
2) $f(x) = ln(1-x^2)$. Найдем область определения функции:

$$1 - x^2 > 0 \text{ или } (1-x)(1+x) > 0.$$

Решив квадратное неравенство, получим, что область определения функции есть интервал $(-1; 1)$. Производная функции равна $f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$. Приравняем её к нулю: $\frac{-2x}{1-x^2} = 0$. Откуда найдем стационарную точку $x = 0$. Определим знак производной в интервалах (–1; 0), (0; 1): вычислим $f'(-\frac{1}{2}) = \frac{4}{3} > 0$, $f'(\frac{1}{2}) = -\frac{4}{3} < 0$. Следовательно, функция в интервале (–1; 0) возрастает, а в интервале (0; 1) она убывает.

Точка x_0 называется ***точкой максимума*** (***минимума***) ***функции*** $f(x)$, определённой в некоторой окрестности x_0, если существует некоторая окрестность $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ этой точки, такая, что для любого $x \in (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, справедливо неравенство

$$f(x) < f(x_0)\ (f(x) > f(x_0));$$

при этом $f(x_0)$ называют ***максимумом*** (***минимумом***) ***функции***. Точки максимума и точки минимума называют ***точками экстремума***, а ***максимум*** и ***минимум функции*** называют ***экстремумом*** функции.

Понятие экстремума всегда связано с определенной окрестностью точки из области определения функции. Поэтому функция может иметь экстремум лишь во *внутренних точках* области определения функции.

Теорема 3 (необходимое условие экстремума). Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то её производная в этой точке равна нулю: $f'(x) = 0$.

Точки, в которых $f'(x) = 0$, называются ***стационарными точками*** $f(x)$. Не всякая стационарная точка является точкой экстремума.

Например, для функции $y = x^3$ её производная $y' = 3x^2$ равна нулю при $x = 0$, но $x = 0$ не является точкой экстремума (рис. 6.1).

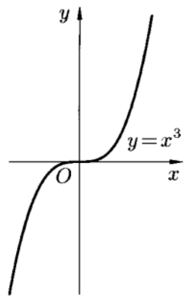


Рис. 6.1

Существуют функции, которые в точках экстремума не имеют производной. Например, непрерывная функция $y = |x|$ в точке $x = 0$ производной не имеет, но точка $x = 0$ – точка минимума (рис. 6.2).

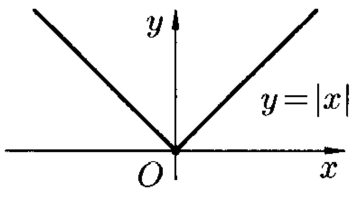


Рис. 6.2

Таким образом, непрерывная функция может иметь экстремум лишь в точках, где производная равна нулю или не существует. Такие точки называются ***критическими***. В соответствующих точках графика функции касательная параллельна оси абсцисс ($f'(x) = 0$) или оси ординат ($f'(x) = \infty$), или нет определенной касательной (например, как в угловой точке). Очевидно, что точками экстремума являются все точки, где функция меняет свое поведение и непрерывна.

Теорема 4 (**достаточное условие экстремума**). Если непрерывная функция y = $f(x)$ дифференцируема в некоторой $\delta -$ окрестности критической точки x_0 и при переходе через нее (слева направо) производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка ***максимума***; с минуса на плюс, то x_0 - точка ***минимума***.
Замечание. Если $f'(x)$ не меняет знака, то в точке x_0 нет экстремума.

Исследовать функцию на экстремум означает найти все ее экстремумы. Из теорем 3 и 4 вытекает следующее *правило исследования функции на экстремум*:

1) найти производную $f'(x)$ и критические точки функции y = $f(x)$;
2) выбрать из них лишь те, которые являются внутренними точками области определения функции;
3) исследовать знак производной $f'(x)$ слева и справа от каждой из выбранных критических точек;
4) в соответствии с теоремой 4 (достаточное условие экстремума) выписать точки экстремума (если они есть) и вычислить значения функции в них.

Пример 2. Найти экстремум функции $f(x) = (1 - x^2)^3$.
Решение. Согласно *правилу исследования функции на экстремум:*
1. Находим производную $f'(x) = 3(1 - x^2)^2(-2x) = -6x(1 - x^2)^2$ и критические точки. Полагая $f'(x) = 0$, получим $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на всей числовой оси. Поэтому точки x_1, x_2, x_3 являются критическими.
Других критических точек нет, так как производная $f'(x)$ существует всюду.

2. Исследуем критические точки, определяя знак $f'(x)$ слева и справа от каждой этой точки. Для сокращения вычислений и для наглядности это исследование удобно записать в виде таблицы:

x	–2	**–1**	$-\frac{1}{2}$	**0**	$\frac{1}{2}$	**1**	2
y'	+	0	+	0	–	0	–
y	возр.	нет экстр.	возр.	*max*	убыв.	нет экстр.	убыв.

В первой строке помещены все критические точки в порядке расположения их на числовой оси; между ними вставлены промежуточные точки, расположенные слева и справа от критических точек. Во второй строке помещены знаки производной в указанных промежуточных точках, т. е. знаки $f'(-2)$, $f'(-\frac{1}{2})$, $f'(\frac{1}{2})$ и $f'(2)$. В третьей строке – заключение о поведении функции. Исследуемая функция имеет одну точку экстремума – точку максимума $x = 0$, где $y_{max} = y(0) = 1$. До этой точки в интервале $(-\infty;\ 0)$ функция неизменно возрастает, а после нее в интервале $(0;\ +\infty)$ она неизменно убывает.

Иногда бывает удобным использовать другой достаточный признак существования экстремума, основанный на определении знака второй производной.

Теорема 5. Если в точке x_0 первая производная функции $f(x)$ равна нулю ($f'(x_0) = 0$), а вторая производная в точке x_0 существует и отлична от нуля ($f''(x_0) \neq 0$), то при $f''(x_0) < 0$ в точке x_0 функция имеет максимум, а при $f''(x_0) > 0$ в точке x_0 функция имеет минимум.

Замечание. Если $f''(x_0) = 0$, то требуется дальнейшее исследование.

Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[a;\ b]$ находят значения функции в критических точках, принадлежащих этому отрезку, и на концах отрезка, после чего сравнивают эти значения и выбирают наибольшее и наименьшее.

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$ на отрезке [–4; 4].

Решение. 1. Найдем производную: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$. Приравняем ее к нулю, откуда получим: $x = -1$ и $x = 3$. Эти точки лежат внутри отрезка [–4; 4] и являются критическими точками функции $f(x)$. Других критических точек нет, так как производная $f'(x)$ существует всюду. Вычислим значения функции в этих точках: $f(-1) = 40$, $f(3) = 8$.

2. Вычислим значения функции на концах отрезка [–4; 4]: $f(-4) = -41$, $f(4) = 15$.

3. Сравнив полученные значения, находим:

$$\max_{[-4;\,4]} f(x) = f(-1) = 40,\quad \min_{[-4;\,4]} f(x) = f(-4) = -41.$$

6.2. Интервалы выпуклости функции. Точки перегиба

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется ***выпуклым вниз*** (или **выпуклым**) на интервале $(a;\ b)$, если он расположен выше любой ее касательной на этом интервале.

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется ***выпуклым вверх*** (или **вогнутым**) на интервале $(a;\ b)$, если он расположен ниже любой ее касательной на этом интервале.

Точка графика непрерывной функции $y = f(x)$, отделяющая его выпуклую часть от вогнутой, называется ***точкой перегиба***.

На рисунке 6.3 кривая $y = f(x)$ является выпуклой в интервале $(a;\ c)$ и вогнутой в интервале $(c;\ b)$, точка M – точка перегиба.

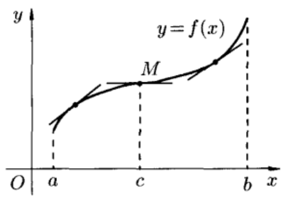


Рис. 6.3

Интервалы выпуклости и вогнутости находят с помощью следующей теоремы.

Теорема 1. Если функция $y = f(x)$ во всех точках интервала $(a;\ b)$ имеет отрицательную вторую производную, т. е. $f''(x) < 0$, то график функции в этом интервале является выпуклым. Если же $f''(x) > 0\ \forall x \in (a;\ b)$, то график функции является вогнутым.

Для нахождения точек перегиба графика функции используется следующая теорема.

Теорема 2 (**достаточное условие существования точек перегиба**). Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0, в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

Пример 4. Найти интервалы выпуклости и точку перегиба функции $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$.

Решение. Областью определения данной функции является вся числовая ось. Ищем точки, в которых $y'' = 0$ или не существует, а кривая непрерывна, и которые лежат внутри области расположения кривой:

$$y' = 15x^4 - 20x^3;\ y'' = 60x^3 - 60x^2 = 60x^2(x - 1).$$

$y'' = 0$ в точках $x = 0$ и $x = 1$. Эти точки являются искомыми, так как область расположения и область непрерывности данной кривой есть вся ось абсцисс. Других точек x, которые могли бы быть абсциссами точек перегиба, нет, так как y'' существует всюду.
2. Исследуем найденные точки, определяя знак y'', слева и справа от каждой из них. Запишем это исследование в таблицу:

x	–1	**0**	$\frac{1}{2}$	**1**	10
y''	-	0	-	0	+
y	выпукл.	нет перегиба	выпукл.	перегиб	вогн.

Из таблицы следует, что $x = 1$ есть абсцисса точки перегиба кривой: $y(1) = 2$. Поскольку эта кривая непрерывная, то во всем интервале (–∞; 1) она выпуклая, а во всем интервале (1; +∞) она является вогнутой.

Задачи для самостоятельного решения

1. Исследовать на возрастание и убывание функции:
1.1. $y = x^3 - 3x + 5$. 1.2. $y = \sqrt{(x^2-9)^3}$. 1.3. $y = \cos x - x$. 1.4. $y = x \cdot |\, x\,|$.
2. Найти экстремумы функций:
2.1. $y = x\sqrt{1-x^2}$ 2.2. $y = x^3 - 12x$. 2.3. $y = 3 - \sqrt[3]{x^2}$ 2.4. $y = x^2 \cdot e^{-x}$.
3. Найти наибольшие и наименьшие значения функций:
3.1. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$ на отрезке [0; 3]. 3.2. $y = x - lnx$ на отрезке [1; e].
4. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функций:
4.1. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$. 4.2. $y = x + 2 - \sqrt[3]{x^5}$. 4.3. $y = \frac{1}{x^2-4}$.

Ответы: **1.1.** Функция возрастает при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ и убывает при $x \in (-1; 1)$.
1.2. Функция убывает при $x \in (-\infty; -3]$ и возрастает при $x \in [3; +\infty)$. **1.3.** Функция убывает при $\forall x \in \mathbb{R}$. **1.4.** Функция возрастает при $\forall x \in \mathbb{R}$. **2.1.** $y_{min}(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2}$; $y_{max}(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2}$.
2.2. $y_{min}(2) = -16$; $y_{max}(-2) = 16$. **2.3.** $y_{max}(0) = 3$. **2.4**. $y_{min}(0) = 0$; $y_{max}(2) = \frac{4}{e^2}$.
3.1. $\max\limits_{[0;\,3]} y = y(2) = 10$, $\min\limits_{[0;\,3]} y = y(0) = -10$. **3.2.** $\max\limits_{[1;\,e]} y = y(1) = 1$, $\min\limits_{[1;\,e]} y = y(2) = 2(1 - ln2)$.
4.1. Точка перегиба (1; –2); функция выпукла при $x \in (-\infty; 1)$ и вогнута при $x \in (1; +\infty)$.
4.2. Точка перегиба (0; 2); функция выпукла при $x \in (0; +\infty)$ и вогнута при $x \in (-\infty; 0)$.
4.3. Точек перегиба нет; направление ее выпуклости меняется в точках разрыва $x = \pm 2$; функция выпукла при $x \in (-2; 2)$ и вогнута при $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

6.3. Асимптоты графика функции

Асимптотой кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой.

Асимптоты могут быть вертикальными, наклонными и горизонтальными.

Прямая $x = x_0$ называется ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$.

Прямая $y = b$ называется ***горизонтальной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

Прямая $y = kx + b$ называется ***наклонной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$, если существуют пределы

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x},\ b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx)$$

или

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x},\ b = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - kx).$$

Пример 5. Найти асимптоты кривых:

1) $y = \frac{x^2-6x+3}{x-3}$; 2) $y = x{\cdot}e^x$.

Решение. 1) а) При x = 3 данная кривая имеет бесконечный разрыв, т. е. $\lim_{x\to3}\frac{x^2-6x+3}{x-3} = \infty$. Поэтому прямая x = 3 есть ее вертикальная асимптота.

б) Горизонтальных асимптот нет, так как пределы функции $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-6x+3}{x-3}$ и $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-6x+3}{x-3}$ не являются конечными числами.

в) Найдем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-6x+3}{(x-3)x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-6x+3}{x^2-3x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 1,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-6x+3}{x-3} - 1\cdot x\right) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to+\infty}\frac{3-3x}{x-3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = -3.$$

Подставляя найденные значения k и b в уравнение $y = kx + b$, получим уравнение наклонной асимптоты: $y = x - 3$. При $x \to -\infty$ значения k и b будут те же.

2) а) Функция $y = x{\cdot}e^x$ не имеет вертикальных асимптот, так как она всюду непрерывна.

б) Найдем пределы: $\lim_{x\to+\infty} = x{\cdot}e^x = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} x{\cdot}e^x = 0$. Следовательно, при $x \to -\infty$ функция имеет горизонтальную асимптоту y = 0 (ось Ox).

в) Найдем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x{\cdot}e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$$ т. е. при $x \to +\infty$ угловой коэффициент

асимптоты не существует, вследствие чего при $x \to +\infty$ функция не имеет асимптоты;

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x{\cdot}e^x}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0,$$ тогда

$$b = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to-\infty}(x{\cdot}e^x - 0\cdot x) = \lim_{x\to-\infty} x{\cdot}e^x = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}} = 0.$$

Таким образом, при $x \to -\infty$ функция имеет горизонтальную асимптоту y = 0 (ось Ox).

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти асимптоты функций:

1.1. $y = \frac{2x^2-9}{x+2}$. 1.2. $y = x{\cdot}e^{-x}$. 1.3. $y = x{\cdot}arctg\,x$. 1.4. $y = \frac{x^5}{x^4-1}$.

Ответы: **1.1**. $x = -2$ и $y = 2x - 4$. **1.2.** y = 0 при $x \to +\infty$. **1.3**. $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ при $x \to +\infty$; $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ при $x \to -\infty$. **1.4**. $x = -1$, $x = 1$ и $y = x$.

6.4. Полное исследование функции и построение графика функции

При построении графика функции $y = f(x)$ полезно выяснить его характерные особенности. Для этого можно воспользоваться следующей общепринятой ***схемой***:

1. Найти область определения функции.
2. Найти (если это можно) точки пересечения графика с осями координат.
3. Исследовать функцию на четность и периодичность.
4. Найти интервалы знакопостоянства функции (промежутки, на которых функция $f(x) > 0$ или $f(x) < 0$).
5. Найти точки разрыва функции и ее односторонние пределы в этих точках.
6. Найти асимптоты.
7. Найти промежутки возрастания и убывания функции, экстремумы функции.
8. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости.
9. Вычислить значения функции для некоторых значений ее аргумента. Используя все полученные результаты, построить график функции.

Пример 6. Построить график функции $y = \frac{x^2+1}{x-1}$.

Решение 1. Область определения функции:

$$D(f)\colon x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty).$$

2. Найдем точки пересечения графика с осями координат. Для того, чтобы найти точки пересечения с осью Ox, приравняем функцию к нулю. Получим $\frac{x^2+1}{x-1} = 0$. Очевидно, что точек пересечения с осью Ox нет, так как числитель ни при каких значениях x в нуль не обращается (знаменатель не может быть равен нулю).

Для нахождения общей точки графика функции и оси Oy следует найти $f(0)$: $f(0) = \frac{0^2+1}{0-1} = -1$.

2. Функция не является периодической. Проверим функцию на четность:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{-x-1} = -\frac{x^2+1}{x+1} \Rightarrow f(-x) \neq f(x) \text{ и } f(-x) \neq -f(x).$$

Следовательно, функция не является ни четной, ни нечетной, она является функцией общего вида.

4. Чтобы определить интервалы знакопостоянства функции, решим два неравенства:

1) $\frac{x^2+1}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0$ (так как $x^2 + 1 > 0$ при $\forall x$). Откуда получим $x > 1$.

2) $\frac{x^2+1}{x-1} < 0 \Leftrightarrow x - 1 < 0$ (так как $x^2 + 1 > 0$ при $\forall x$). Откуда получим $x < 1$.

Значит, $y > 0$ при $x > 1$ и $y < 0$ при $x < 1$.

5. Функция непрерывна всюду, за исключением нуля знаменателя: $x = 1$. Найдем предел слева и предел функции справа в этой точке:

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty \text{ и } \lim_{x\to 1+0} \frac{x^2+1}{x-1} = +\infty.$$

Так как оба односторонних предела равны бесконечности, то $x = 1$ – точка разрыва второго рода.

6. Из п. 5 получаем, что $x = 1$ является уравнением вертикальной асимптоты.

Чтобы найти горизонтальную асимптоту, вычислим предел: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x-1} = \pm\infty$. Но он не равен конечному числу. Значит, горизонтальной асимптоты не существует. Найдем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x(x-1)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2-x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 1,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1} - 1\cdot x\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2+x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+x}{x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 1.$$

Таким образом, функция имеет наклонную асимптоту $y = x + 1$.

7. Исследуем функцию на экстремум. Для этого найдем производную первого порядка:

$$y' = \left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)' = \frac{2x(x-1)-(x^2+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}.$$

Приравнивая производную к нулю, находим критические точки: $\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} = 0$, откуда $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.

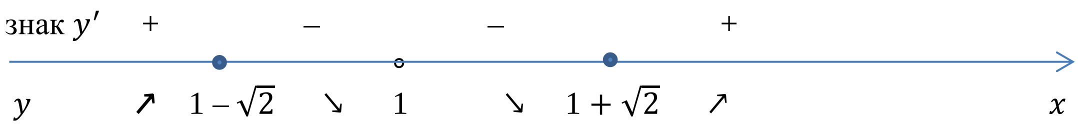


Рис. 6.4

Исследуем знак производной на каждом из промежутков, подставив в производную соответствующие значения x: $y'(-1) > 0$, $y'(0) < 0$, $y'(3) > 0$.
Из схемы (рис. 6.4) следует, что функция возрастает при $x \in (-\infty; 1-\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{2}; +\infty)$ и убывает при $x \in [1-\sqrt{2}; 1) \cup (1; 1+\sqrt{2}]$. Следовательно, $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ – точка максимума, а $x_2 = 1 + \sqrt{2}$ – точка минимума.

Найдем максимум и минимум функции (ординаты точек экстремума):

$$y_{max}(1-\sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2},\ y_{min}(1+\sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2}.$$

8. Исследуем функцию на выпуклость. Для этого найдем производную второго порядка:

$$y'' = \left(\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}\right)' = \frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

Чтобы найти критические точки второго рода, приравняем найденную производную к нулю:

$$\frac{4}{(x-1)^3} = 0.$$

Точек, в которых $y'' = 0$, нет. В точке $x = 1$ вторая производная не существует, но эта точка не входит в область определения функции, поэтому она не может быть критической точкой второго рода, значит, не может быть и точкой перегиба. Но в ней может меняться направление выпуклости функции (рис. 6.5):

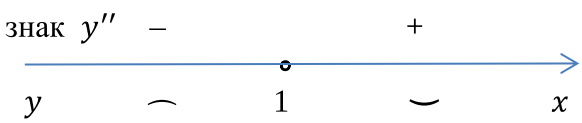


Рис. 6.5

Так как $y''(-1) < 0$ и $y''(3) > 0$, то функция выпукла при $x \in (-\infty; 1)$ и вогнута при $x \in (1; +\infty)$, как видно из рисунка 6.5. Точек перегиба нет.
9. Используя полученные данные, строим искомый график (рис. 6.6).

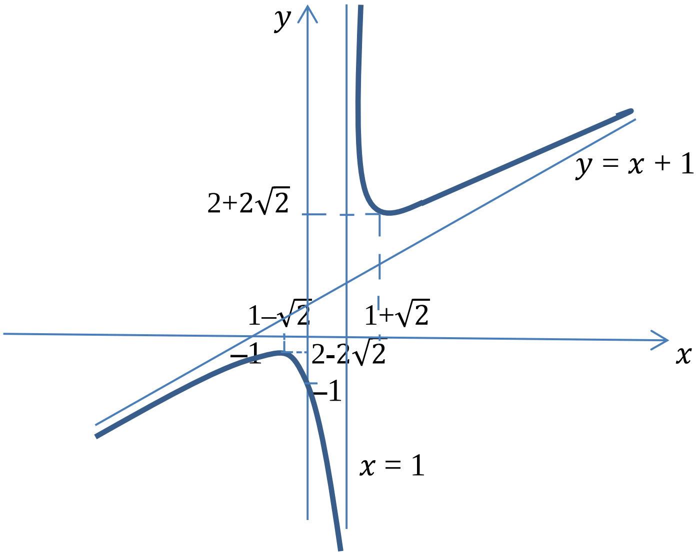


Рис. 6.6

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задача 1. Найти область определения функций.

1.1. $y = \frac{3+x}{x^2-1}$.

1.2. $y = \frac{3x-1}{4x+5}$.

1.3. $y = x + cosx$.

1.4. $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$.

1.5. $y = \sqrt{3x-1} + \frac{1}{\sqrt{4-x}}$.

1.6. $y = \sqrt{2-3x} + lgx$.

1.7. $y = \sqrt{x^2-4x+3}$.

1.8. $y = \sqrt{1-x^2}$.

1.9. $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$.

1.10. $y = \sqrt{x} - lg(2x-3)$.

1.11. $y = log_3 \sin x + \sqrt{4-x^2}$.

1.12. $y = \arcsin(2x^2 + x)$.

1.13. $y = log_2(2x-1)$.

1.14. $y = log_2 log_3 x$.

1.15. $y = \sqrt{x} + lg(2x-5)$.

1.16. $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$.

1.17. $y = \lg(x-1) + \arcsin\frac{x}{2}$.

1.18. $y = \arccos\frac{1-2x}{3}$.

1.19. $y = log_2(x^2-9)$.

1.20. $y = 2\sqrt{x} + \sqrt{6-x}$.

1.21. $y = x\sqrt{8-x^2}$.

1.22. $y = \frac{\ln(1+x)}{x-1}$.

1.23. $y = \sqrt{1-2x} + 3\arcsin\frac{3x-1}{2}$.

1.24. $y = \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{x}$.

1.25. $y = \arccos\left(\frac{x}{2}-1\right)$.

1.26. $y = \frac{x-2}{cos2x}$.

1.27. $y = \sqrt{\sin 2x}$.

1.28. $y = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$.

1.29. $y = \sqrt{\cos 2x}$.

1.30. $y = \sqrt{2^x(x^2-x-12)}$.

Задача 2. Вычислить пределы числовых последовательностей.

2.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!}$.

2.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!n!}{(n+1)!}$.

2.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n^2+5)(n-1)!}{(n+1)!}$.

2.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)\cdot n!}{(n+1)!}$.

2.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{5n^2}$.

2.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}$.

2.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^4-(1+n)^4}$.

2.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^3-(1+n)^3}$.

2.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1-n)^4-(1+n)^4}{(1+n)^3-(1-n)^3}$.

2.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n+1)^2}{(n-1)^3-(1+n)^3}$.

2.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-4n)^2}{(n-3)^3-(n+3)^3}$.

2.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^3-8n^3}{(1+2n)^2+4n^2}$.

2.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}-9n^2}{3n-\sqrt[4]{9n^4+1}}$.

2.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n^3-\sqrt{n^5+1}}{\sqrt{4n^6+3}-n}$.

2.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^5-4}-\sqrt[4]{n^4+1}}$.

2.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n-1}}$.

2.17. $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2-3}$.

2.18. $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$.

2.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^5-8}-n\sqrt{n(n^2+5)}}{\sqrt{n}}$.

2.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n(n^5+9)}-\sqrt{(n^4-1)(n^2+5)}}{n}$.

2.21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$.

2.22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$.

2.23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$.

2.24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{-n^2}$.

2.25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-6n+5}{n^2-5n+5}\right)^{3n+2}$.

2.26. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+7}\right)^{2n+5}$.

2.27. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n-1}\right)^{-n+1}$.

2.28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$.

2.29. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3}\right)^{n^3}$.

2.30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+2n+3}{2n^2+2n+1}\right)^{3n^2-7}$.

Задача 3. Вычислить пределы функций.

3.1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$.

3.2. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-3x-2}{x^2-x-2}$.

3.3. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$.

3.4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$.

3.5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^3-(1+3x)}{x+x^5}$.

3.6. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$.

3.7. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3x}{\sqrt{x}-2}$.

3.8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+x^5}$.

3.9. $\lim\limits_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

3.10. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{1+x}}{x^2-9}$.

3.11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2-5x}{\sin 3x}$.

3.12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$.

3.13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$.

3.14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$.

3.15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsin\, 3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$.

3.16. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{3arctg\, x}$.

3.17. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{lnx}$.

3.18. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{lnx}$.

3.19. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{sin^2x-tg^2x}{(x-\pi)^4}$.

3.20. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\cos 5x-\cos 3x}{sin^2x}$.

3.21. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\frac{sin\, 7x-sin\, 3x}{e^{x^2}-e^{4\pi^2}}$.

3.22. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2^x-16}{sin\, \pi x}$.

3.23. $\lim\limits_{x\to 0}(8x\cdot ctgx)$.

3.24. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2+5}\right)^{-3x^2}$.

3.25. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(sin\, x)^{tgx}$.

3.26. $\lim\limits_{x\to -2}(5+2x)^{\frac{3}{x+2}}$.

3.27. $\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos x)^{\frac{1}{sin^2x}}$.

3.28. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{5x^2+8x-2}{5x^2+3x+3}\right)^{4x+1}$.

3.29. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{7x+3}{7x-1}\right)^{2x}$.

3.30. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(tgx)^{ctgx}$.

Задача 4. Найти и классифицировать точки разрыва.

4.1. $y = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x+1}}}$.

4.2. $y = \frac{1}{4+e^{\frac{1}{x-1}}}$.

4.3. $y = \frac{4}{3+5^{\frac{3}{x-2}}}$.

4.4. $y = \frac{2^{\frac{1}{x-2}}-1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1}$.

4.5. $y = \frac{4}{(x-1)(x-5)}$.

4.6. $y = \frac{1}{1-e^{1-x}}$.

4.7. $y = \frac{sinx}{x}$.

4.8. $y = \frac{x+1}{x^3+6x^2+11x+6}$.

4.9. $y = \frac{1}{x^2+x+1}$.

4.10. $y = lg(2x+1)$.

4.11. $y = arcsin\,\frac{1}{x}$.

4.12. $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

4.13. $y = x + \frac{x+2}{|x+2|}$.

4.14. $y = \frac{2|x-1|}{x^2-x^3}$.

4.15. $y = \sqrt[x]{2}-1$.

4.16. $y = \frac{|x+1|}{x^2+x^3}$.

4.17. $y = arctg\left(\frac{1}{3-x}\right)$.

4.18. $y = ln(x-8)$.

4.19. $y = \frac{\sqrt{3x+4}-1}{2x^2-5x-7}$.

4.20. $y = \frac{|x-4|}{x^2+x-20}$.

4.21. $y = \frac{\sqrt{x+20}-5}{x^2-25}$.

4.22. $y = \frac{4}{4-x^2}$.

4.23. $y = \begin{cases} -x \text{ при } x \le -1, \\ \frac{2}{x-1} \text{ при } x > -1. \end{cases}$

4.24. $y = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} \text{ при } x \ne 1, \\ 2 \text{ при } x = 1. \end{cases}$

4.25. $y = \begin{cases} x-1 \text{ при } x \ge 0, \\ -x-1 \text{ при } x < 0. \end{cases}$

4.26. $y = \begin{cases} 2x-1 \text{ при } x \ge 0, \\ -2x-1 \text{ при } x < 0. \end{cases}$

4.27. $y = \begin{cases} \sin x & \text{при } x < 0, \\ x^2 & \text{при } 0 \le x \le 2, \\ 0 & \text{при } x > 2. \end{cases}$

4.28. $y = \begin{cases} x+4 & \text{при } x < -1, \\ x^2+2 & \text{при } -1 \le x < 1, \\ 2x & \text{при } x \ge 1. \end{cases}$

4.29. $y = \begin{cases} \cos x & \text{при } x < 0, \\ 1-x & \text{при } 0 \le x \le 2, \\ x^2 & \text{при } x > 2. \end{cases}$

4.30. $y = \begin{cases} x+3 & \text{при } x < -1, \\ 2 & \text{при } -1 < x \le 1, \\ -\frac{3}{x-4} & \text{при } x > 1. \end{cases}$

Задача 5. Найти производную функции.

5.1. $y = x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 7x - 20$.

5.2. $y = \sqrt{x} + \frac{4}{2\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$.

5.3. $y = x^5(3 - \frac{x}{2} + 3x^2)$.

5.4. $y = \frac{x^2}{x^2+4}$.

5.5. $y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

5.6. $r = \frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}$.

5.7. $y = x^2 \sin x$.

5.8. $y = \sin 2x + \cos 3x$.

5.9. $y = (\sqrt{x} - \sqrt{a})^2$.

5.10. $y = (2+3x)^4$.

5.11. $y = \sin(2x+5)$.

5.12. $y = ctg\sqrt{x}$.

5.13. $y = \frac{\sin x}{2cos^2 x}$.

5.14. $y = x^3 \cdot 3^x$.

5.15. $y = \ln\cos 3x$.

5.16. $y = \ln\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$.

5.17. $y = \ln\frac{x^2}{1-x^2}$.

5.18. $y = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

5.19. $y = x\,(1 - \ln x)$.

5.20. $y = \arcsin\sqrt{x}$.

5.21. $y = arctg\frac{2x}{1-x^2}$.

5.22. $y = x\sqrt{1-x^2} + arctg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

5.23. $y = \frac{1}{2}arctgx - \ln\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}$.

5.24. $y = x\sqrt{4-x^2} + 4arcsin\frac{x}{2}$.

5.25. $y = \sqrt[x]{x}$.

5.26. $y = tg^3 \frac{x}{3}$.

5.27. $y = log_2 sin^2 x$.

5.28. $y = x^{-x} \cdot 2^x \cdot x^2$.

5.29. $y = x^{lnx}$.

5.30. $y = \frac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-1)^3\sqrt[5]{4x-3}}$.

Задача 6. Найти производные функций, заданных неявно и параметрически.

6.1. $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

6.2. $x^y - y^x = 0$.

6.3. $x \cdot \sin y + y \cdot \sin x = 0$.

6.4. $e^x + e^y - 2^{xy} - 1 = 0$.

6.5. $\sin(y - x^2) - \ln(y - x^2) + 2\sqrt{y - x^2} = 5$.

6.6. $\frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} - \sqrt[3]{\frac{y}{x}} = 0$.

6.7. $x^{y^2} + y^2 \ln x = 4$.

6.8. $x^2 \sin y + y^2 \cos x - 2x - 3y + 1 = 0$.

6.9. $2^x + 2^y = 2^{x+y}$.

6.10. $x^4 + y^4 = e^{x+y}$.

6.11. $\cos(y + 3) = 2x + y^3$.

6.12. $x^3 + y^2 - 3xy = 0$.

6.13. $x + \ln y - x^2 e^y = 0$.

6.14. $y \cdot arctg\, y - \arcsin x = 0$.

6.15. $e^{x+y} = xy$.

6.16. $x^2 + y^2 \ln x = 4$.

6.17. $\begin{cases} x(t) = arcctg\, t, \\ y(t) = \ln(t^2 + 1). \end{cases}$

6.18. $\begin{cases} x(t) = ctg\, t, \\ y(t) = t\cos t + sint. \end{cases}$

6.19. $\begin{cases} x(t) = 2t - t^2, \\ y(t) = 3t - t^3. \end{cases}$

6.20. $\begin{cases} x(t) = 2t^3 + t, \\ y(t) = \ln t. \end{cases}$

6.21. $\begin{cases} x(t) = 2(t - sint), \\ y(t) = 2(t - \cos t). \end{cases}$

6.22. $\begin{cases} x(t) = \mathrm{arct}g\, t, \\ y(t) = \sqrt{1 + t^2}. \end{cases}$

6.23. $\begin{cases} x(t) = a\cos t, \\ y(t) = bsin\, t. \end{cases}$

6.24. $\begin{cases} x(t) = t^2, \\ y(t) = \frac{t^3}{3} - t. \end{cases}$

6.25. $\begin{cases} x(t) = e^{2t}, \\ y(t) = e^{-3t}. \end{cases}$

6.26. $\begin{cases} x(t) = t^2, \\ y(t) = t^3 + t. \end{cases}$

6.27. $\begin{cases} x(t) = 4cos^3 t, \\ y(t) = 4sin^3 t. \end{cases}$

6.28. $\begin{cases} x(t) = \frac{1-t}{(t+1)^2}, \\ y(t) = \frac{t(1-t)}{(t+1)^2}. \end{cases}$

6.29. $\begin{cases} x(t) = \frac{t}{t^2+1}, \\ y(t) = \frac{t^2}{t^2+1}. \end{cases}$

6.30. $\begin{cases} x(t) = \arccos t, \\ y(t) = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

Задача 7. Найти дифференциал функции dy.

7.1. $y = x^3 - 3x^2 - 4x.$

7.2. $y = sin^3 2x.$

7.3. $y = \ln(2x+5).$

7.4. $y = \ln(\sin\sqrt{x}).$

7.5. $y = 2^{-3x^2}.$

7.6. $y = e^{-2x}.$

7.7. $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}.$

7.8. $y = \sqrt{1+x^2}.$

7.9. $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x}}.$

7.10. $y = x^2 arctg\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-1}.$

7.11. $y = +\sqrt{8-x^2}.$

7.12. $y = x \cdot \arcsin\frac{1}{x}.$

7.13. $y = x\sqrt{4-x^2} + 4\arcsin\frac{x}{2}.$

7.14. $y = arctg\frac{x^2-1}{x}.$

7.15. $y = e^x(\cos 2x + 2\sin 2x).$

7.16. $y = e^{sin 2x}.$

7.17. $y = \sin e^{\sqrt{x}}.$

7.18. $y = 3^{arccos 2x}.$

7.19. $y = 3x^3 lnx - x^3.$

7.20. $y = \frac{3x+2}{2x+3}.$

7.21. $y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}.$

7.22. $y = \ln(5x + x^3).$

7.23. $y = x \cdot \arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{4-x^2}.$

7.24. $y = arctg\, e^{-x}.$

7.25. $y = x \cdot arctgx - \ln\sqrt{1+x^2}.$

7.26. $y = \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}}.$

7.27. $y = lntg\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{\sin x}.$

7.28. $y = arccos\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}, x > 0.$

7.29. $y = ln\,cos\, x.$

7.30. $y = \frac{cos\, x}{2-3\sin x}.$

Задача 8. Найти производные и дифференциалы высших порядков.

8.1. $y = ctgx, d^2y = ?$

8.2. $y = cos^2 x, d^2y = ?$

8.3. $y = ln(2x-3), d^2y = ?$

8.4. $y = \ln(x + \sqrt{4+x^2}, d^3y = ?$

8.5. $y = xlnx$, d^3y = ?

8.6. $y = e^x \cos 2x$, d^3y = ?

8.7. $y = xe^x$, $y^{(n)}$ = ?

8.8. $y = 5^x$, $y^{(n)}$ = ?

8.9. $y = \sin x$, $y^{(n)}$ = ?

8.10. $y = \frac{1}{3x+2}$, $y^{(n)}$ = ?

8.11. $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$, y'' = ?

8.12. $y = x^2$, y'' = ?

8.13. $y = \frac{x+1}{2x+3}$, y'' = ?

8.14. $y = \sqrt{1-x^2}$, y'' = ?

8.15. $y = (2x^2 - 7)\ln(x-1)$, y^V = ?

8.16. $y = (4x^3 + 5)e^{2x+1}$, y^V = ?

8.17. $y = (3 - x^2)ln^2x$, y''' = ?

8.18. $y = (1 + x^2)\, arctgx$, y''' = ?

8.19. $y = \frac{\ln x}{x^3}$, y^{IV} = ?

8.20. $y = e^{\frac{x}{2}} \cdot \sin 2x$, y^{IV} = ?

8.21. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, y'' = ?

8.22. $y = tg(x+y)$, y'' = ?

8.23. $e^x - e^y = y - x$, y'' = ?

8.24. $x + y = e^{x-y}$, y'' = ?

8.25. $\begin{cases} x(t) = sin\, t - t\cos t \\ y(t) = \cos t + tsin\, t, \end{cases}$ y''_{xx} = ?

8.26. $\begin{cases} x(t) = \sqrt{t-3}, \\ y(t) = \ln(t-2), \end{cases}$ y''_{xx} = ?

8.27. $\begin{cases} x(t) = \sqrt{t}, \\ y(t) = \sqrt[3]{t-1}, \end{cases}$ y''_{xx} = ?

8.28. $\begin{cases} x(t) = \sqrt{t^3-1}, \\ y(t) = \ln t\,, \end{cases}$ y''_{xx} = ?

8.29. $\begin{cases} x(t) = \cos t + sin\, t, \\ y(t) = sin\, 2t, \end{cases}$ y''_{xx} = ?

8.30. $\begin{cases} x(t) = 2(t - sin\, t), \\ y(t) = 4(2 + \cos t), \end{cases}$ y''_{xx} = ?

Задача 9. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции (9.1. – 9.18.). Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ (9.19. – 9.30.).

9.1. $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$.

9.2. $y = \frac{x}{lnx}$.

9.3. $y = (2x+1)e^{-\frac{x}{2}}$.

9.4. $y = \frac{x^3}{1+x}$.

9.5. $y = x^3(x-1)$.

9.6. $y = \frac{e^{2x}}{1+x}$.

9.7. $y = (1 + x^2)\, e^{-\frac{4x}{5}}$.

9.8. $y = x^3 e^{-\frac{3x^2}{2}}$.

9.9. $y = \sqrt{x \cdot e^{3x} + 1}$.

9.10. $y = \sqrt[4]{x^4 - 4x^3}$.

9.11. $y = xlnx - 3x$.

9.12. $y = \ln(1 + 2\cos x)$.

9.13. $y = arctg\frac{lnx}{x}$.

9.14. $y = 2x^2 lnx$.

9.15. $y = \frac{x^2}{lnx}$.

9.16. $y = \frac{1+\sqrt{x}}{3+x}$.

9.17. $y = \cos(lnx)$.

9.18. $y = \frac{1}{lnx} - \frac{1}{ln^2x}$.

9.19. $y = x^3 - 3x^2$, $[-1; 4]$.

9.20. $y = x \cdot lnx$, $[0{,}1; 1]$.

9.21. $y = 4 - x - \frac{4}{x^2}$, $[1; 4]$.

9.22. $y = \frac{x}{2+x^3}$, $[0; 3]$.

9.23. $y = \frac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}$, $[-3; 3]$.

9.24. $y = 3 - x - \frac{4}{(x+2)^2}$, $[-1; 2]$.

9.25. $y = x - 4\sqrt{x} + 5$, $[1; 9]$.

9.26. $y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}$, $[1; 5]$.

9.27. $y = \frac{4x}{x^2+4}$, $[-4; 2]$.

9.28. $y = 2\sin 2x + 3\cos 2x$, $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

9.29. $y = 3\sin x + 4\cos^3 x$, $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

9.30. $y = \frac{x+1}{e^x}$, $[-1; 1]$.

Задача 10. Составить уравнение касательной и нормали к графику функции в точке с абсциссой x_0 (10.1. – 10.22.), в точке *M* (10.23. - 10.24) и в точке, соответствующей параметру $t = t_0$ (10.25. - 10.30).

10.1. $y = \frac{3-x}{2x-3}$, $x_0 = 2$.

10.2. $y = \ln(5-2x)$, $x_0 = 2$.

10.3. $y = \sqrt{5x-9}$, $x_0 = 2$.

10.4. $y = 2x^3 - 4x^2 - 5x - 3$, $x_0 = 2$.

10.5. $y = \frac{2x+3}{2x-1}$, $x_0 = 0$.

10.6. $y = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$.

10.7. $y = 2x^2 + 3x - 1$, $x_0 = -2$.

10.8. $y = x - x^3$, $x_0 = -1$.

10.9. $y = 2x + \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$.

10.10. $y = \frac{x^2}{10} + 3$, $x_0 = 2$.

10.11. $y = \frac{x}{x^2+1}$, $x_0 = -2$.

10.12. $y = \frac{x^2-3x+3}{3}$, $x_0 = 3$.

10.13. $y = \frac{1}{3x+2}$, $x_0 = 2$.

10.14. $y = x^2 + 8\sqrt{x} - 32$, $x_0 = 4$.

10.15. $y = \frac{1+3x^2}{x^2+3}$, $x_0 = 1$.

10.16. $y = \frac{x^2-3x+6}{x^2}$, $x_0 = 3$.

10.17. $y = x + \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$.

10.18. $y = \frac{x^3+2}{x^3-2}$, $x_0 = 2$.

10.19. $y = 2x^2 + 3$, $x_0 = -1$.

10.20. $y = 3\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}$, $x_0 = 1$.

10.21. $y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$, $x_0 = 4$.

10.22. $y = \frac{3x-2x^3}{3}$, $x_0 = 1$.

10.23. $x^2 + 2xy^2 + y^4 = 4$, $M(1; -1)$.

10.24. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$, $M(-9; -8)$.

10.25. $\begin{cases} x(t) = \sqrt{2}cos^3t, \\ y(t) = \sqrt{2}sin^3t, \end{cases}$ $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

10.26. $\begin{cases} x(t) = t - \sin t\,, \\ y(t) = 1 - \cos t\,, \end{cases}$ $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

10.27. $\begin{cases} x(t) = t^2, \\ y(t) = t^3, \end{cases}$ $t_0 = 2$.

10.28. $\begin{cases} x(t) = t + 3, \\ y(t) = \sqrt{t-1}, \end{cases}$ $M(5;\ 1)$.

10.29. $\begin{cases} x(t) = sin^2t, \\ y(t) = cos^2t, \end{cases}$ $t_0 = \frac{\pi}{6}$.

10.30. $\begin{cases} x(t) = a(t\sin t + \cos t)\,, \\ y(t) = a(\sin t - t\cos t)\,, \end{cases}$ $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

Задача 11. Исследовать функцию и построить её график.

11.1. $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

11.2. $y = x^2(x-4).^2$

11.3. $y = (x+1)e^{-x}$.

11.4. $y = \frac{2x}{1+x^3}$.

11.5. $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

11.6. $y = \frac{lnx}{x}$.

11.7. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

11.8. $y = \sqrt[3]{1 - lnx}$.

11.9. $y = e^{\frac{1}{x}}$.

11.10. $y = xe^{\frac{1}{x}}$.

11.11. $y = \frac{1}{1-e^x}$.

11.12. $y = \sin x + \cos^2 x$.

11.13. $y = \frac{x^2 - x + 1}{x-1}$.

11.14. $y = \frac{4}{3+2x-x^2}$.

11.15. $y = \frac{1}{x^4-1}$.

11.16. $y = \frac{x^2+2x-7}{x^2+2x-3}$.

11.17. $y = \frac{-8x}{x^2+4}$.

11.18. $y = \frac{3x^4+1}{x^3}$.

11.19. $y = \frac{3x-2}{x^3}$.

11.20. $y = \frac{x^2-6x+9}{(x-1)^2}$.

11.21. $y = 3 - 3ln\frac{x}{x+4}$.

11.22. $y = \frac{2x+1}{(x+1)^2}$.

11.23. $y = \frac{x-1}{x^2+2}$.

11.24. $y = \frac{4x}{(x+1)^2}$.

11.25. $y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

11.26. $y = \frac{x^3}{3-x}$.

11.27. $y = \frac{x}{3-x^2}$.

11.28. $y = \frac{2x-8}{(x-3)^3}$.

11.29. $y = (1 + \frac{1}{x})^2$.

11.30. $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономического бакалавриата. Учебник.- М.: «Инфра-М», 2013 г. – 480 с.
[2] Г.И. Запорожец. Руководство к решению задач по математическому анализу. Учебное пособие. – 8-е изд., стер. - СПб.: «Лань», 2014 г. – 464 с.
[3] Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике. Учебное пособие. – 7-е изд. - СПб.: «Лань», 2005 г. – 240 с.
[4] Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1/ П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – 6-е изд. - М.: ОНИКС, 2006. – 304 с.
[5] Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике/ В.П. Минорский. - М.: Издательство Физико-математической литературы, 2009 г. – 336 с.
[6] Сборник задач по высшей математике для экономистов под редакцией В.И. Ермакова. - М.: ИНФРА-М, 2003 г. – 575 с.
[7] Шипачев В.С. Высшая математика. - М.: «Высшая школа». – 7-е изд., стер. – М.: 2005 г. – 479 с.
[8] Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов. Учебное пособие. Практикум /Под ред. Кремера Н.Ш., 2-е изд., - М.: Юнити 2010, 477 с.
[9] Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: [в 2 ч.]. Ч. 1. / Д.Т. Письменный. – 6-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2006. – 288 с.
[10] М.В. Ишханян, Л.В. Кекух, А.И. Фроловичев. Математика. Часть 1. Учебное пособие. – М.: МИИТ, 2014. – 314 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Св. план 2016 г., поз.211

Сирош Мария Михайловна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
I часть

Учебное пособие

Подписано в печать Заказ №

Усл. печ. л. Формат