Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Московский государственный университет
путей сообщения»

Институт экономики и финансов

Кафедра «Математика»

М.М. Сирош

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

I часть

Учебное пособие

Москва – 2015

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Московский государственный университет путей сообщения»

Институт Экономики и финансов

Кафедра «Математика»

М.М. Сирош

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

I часть

Рекомендовано редакционно-издательским советом
университета в качестве учебного пособия
для студентов направления «Экономическая безопасность»

Москва – 2015

УДК 512
С 40

Сирош М.М. Элементы линейной алгебры: Учебное пособие. – М.: МГУПС (МИИТ), 2015. – 138 с.

Учебное пособие предназначено для студентов направления «Экономическая безопасность», обучающихся по дисциплине «Математика». Учебное пособие удовлетворяет требованиям ФГОС третьего поколения. Пособие включает следующие разделы программы: матрицы и определители, системы линейных уравнений, векторные пространства, линейные отображения и линейные операторы, аналитическую геометрию на плоскости и геометрию прямых и плоскостей в пространстве.

Каждый раздел начинается с краткого обзора теоретических вопросов, после которого помещены разобранные задачи, предназначенные для решения на семинарских занятиях. За ними следуют однотипные им задачи для самостоятельной работы с ответами. В конце пособия приводятся контрольные задания (30 вариантов), охватывающие все разделы линейной алгебры, рассмотренные в настоящем пособии.

Рецензенты: А.А. Клячко, к.ф.-м.н., доцент кафедры «Высшая алгебра» МГУ имени М.В. Ломоносова;
Н.А. Корниенко, к.т.н., доцент кафедры «Высшая и вычислительная математика» МИИТа.

1. МАТРИЦЫ И ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ.

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов.

Обозначение матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или $A = (a_{ij})$ (i = 1, 2,..., m; j = 1, 2,..., n). Числа m и n называются порядками матрицы. Числа a_{ij} называются элементами матрицы. Первый индекс элемента указывает номер строки, второй - номер столбца, на пересечении которых стоит этот элемент.

Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ (i =1,2,...,m; j =1,2,...,n) считаются равными тогда и только тогда, когда их соответствующие элементы равны:

$$a_{ij} = b_{ij} \ (i = 1,2,...,m;\ j = 1,2\ ,...,n).$$

Матрица называется *квадратной*, если число её строк равно числу столбцов, т.е. $m = n$. При этом число $m = n$ называется порядком матрицы.

Для квадратной матрицы вводятся понятия главной и побочной диагоналей. Главной диагональю матрицы называется диагональ $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, идущая из левого верхнего угла матрицы в правый нижний её угол. Побочной диагональю называется диагональ $a_{n1}, a_{(n-1)2}, \dots, a_{1n}$, идущая из левого нижнего угла матрицы в правый верхний угол.

Квадратная матрица называется *диагональной*, если все её элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю.

Диагональная матрица порядка n имеет вид:

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

Если $d_1 = d_2 = \dots = d_n = d$, то при $d = 1$ получается единичная матрица E n - го порядка, а при $d = 0$ - нулевая матрица O:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},\ O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что понятие нулевой матрицы можно ввести и для неквадратных матриц (нулевой матрицей называется любая матрица, все элементы которой равны нулю).

Перейдём к определению основных операций над матрицами.

А. Сложение матриц. Суммой $A + B$ двух матриц $A = (a_{ij})$ (i = 1,2,...,m; j = 1,2,...,n) и $B = (b_{ij})$ (i = 1,2,...,m; j= 1,2,...,n) одних и тех же порядков m и n называется матрица $C = (c_{ij})$ тех же порядков m и n, элементы которой определяются формулой

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad (1)$$

Операция составления суммы матриц называется их сложением. Итак, по определению:

$$A + B = C.$$

Из формулы (1.1) следует, что операция сложения матриц обладает теми же свойствами, что и операция сложения действительных чисел, а именно:

1) переместительным свойством:

$$A + B = B + A;$$

2) сочетательным свойством:

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

Пример. Сложить матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 2-3 \\ 3+5 & 4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Б. Умножение матрицы на число. Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ (i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ... , n) на число λ называется матрица $C = (c_{ij})$ (i = 1, 2,..., m; j = 1, 2,..., n), элементы c_{ij} которой определяются формулой

$$c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} \qquad (2)$$

Для обозначения произведения матрицы на число используется запись:

$$C = \lambda \cdot A \text{ или } C = A \cdot \lambda.$$

Операция составления произведения матрицы на число называется умножением матрицы на это число.

Из формулы (1.2) следует, что умножение матрицы на число обладает следующими свойствами:

1) сочетательным свойством относительно числового множителя:

$$(\lambda \cdot \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A);$$

2) распределительным свойством относительно суммы матриц:

$$\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B;$$

3) распределительным свойством относительно суммы чисел:

$$(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A.$$

Замечание. Разностью двух матриц A и B одинаковых порядков m и n называется матрица C тех же порядков m и n, которая в сумме с матрицей B даёт матрицу A:

$$C = A - B, \text{ если } C + B = A.$$

Разность двух матриц может быть получена по правилу:

$$C = A - B = A + (-1) \cdot B,$$

Значит, её элементы $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Пример. Умножить матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ на число } \lambda = 3.$$

Решение.

$$A = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\cdot 3 & 2\cdot 3 & -1\cdot 3 \\ 4\cdot 3 & 0\cdot 3 & 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 12 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

В. Перемножение матриц.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ (i = 1, 2,..., m; j = 1,2,...,n) на матрицу $B = (b_{ij})$ (i = 1, 2,..., n; j = 1, 2,..., p) называется матрица $C = (c_{ij})$ (i = 1, 2,..., m; j = 1,2,..., p), элементы которой определяются формулой

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \quad + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} \cdot b_{kj}, \qquad (3)$$

$$(i = 1, 2,...,m; j = 1,2,...,n).$$

Правило составления элементов матрицы C: элемент c_{ij}, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы $C = A \cdot B$, равен сумме попарных произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B.

Операция составления произведения матриц называется перемножением этих матриц.

Из определения произведения матриц следует, что перемножать можно только те матрицы, у которых число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Для того, чтобы оба произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$ были определены и имели одинаковый порядок, необходимо и достаточно, чтобы обе матрицы A и B были квадратными одного и того же порядка.

Свойства операции перемножения матриц, которые следуют из формулы (3):

1) сочетательное свойство: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;

2) распределительное свойство относительно суммы матриц:

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \text{ и } A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

Пример. Перемножить матрицы.

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. $A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Произведение $A \cdot B$ имеет смысл, так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Произведение $B \cdot A$ не имеет смысла, так как число столбцов матрицы B (два) не равно числу строк матрицы A (три).

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 12 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 4 & 3 \\ 8 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оба произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$ имеют смысл, так как условие перемножения матриц выполняется.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$B\cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Оба произведения определены и имеют одинаковый порядок, но $A\cdot B \neq B\cdot A$.

Умножение матриц, вообще говоря, не обладает переместительным свойством, $A\cdot B \neq B\cdot A$, но для единичной и нулевой матриц справедливы соотношения:

$$A\cdot E = E\cdot A = A,\ A\cdot O = \cdot\ O\ A = O.$$

Если для квадратных матриц одинаковых порядков $A\cdot B=B\cdot A$, то такие матрицы называются коммутирующими.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Перемножить матрицы, определить, существуют ли оба произведения А·В и В·А.

1.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A\cdot B = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$, $B\cdot A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A\cdot B = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix}$, произведения $B\cdot A$ не существует, так как число столбцов матрицы B не равно числу строк матрицы A.

1.3. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = (3\ 2\ 1)$.

Ответ: $A\cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $B\cdot A = (10)$.

1.4. $A= \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B= \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Ответ: произведения $A\cdot B$ не существует,

$$B\cdot A = \begin{pmatrix} 10 & 15 & -5 \\ 11 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

1.5. $A= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \\ 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = (5 \quad 1 \quad 0 \quad -3)$.

Ответ: произведения $A\cdot B$ не существует, $B\cdot A = (11 \quad -1)$.

1.6. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A{\cdot}B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B{\cdot}A = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить $A{\cdot}B - B{\cdot}A$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A{\cdot}B - B{\cdot}A = \begin{pmatrix} 2 & -9 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \\ 7 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Найти произведения матриц:

3.1. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3.2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, ИХ СВОЙСТВА И ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Определителем (детерминантом) матрицы $A = (a_{ij})$ n-го порядка (i = 1, 2,..., n; j = 1,2,...,n) называется сумма всех произведений элементов этой матрицы, взятых по одному из каждого столбца и каждой строки, т.е. сумма вида:

$$\sum_{\alpha,\beta,\ldots,\omega} (-1)^{N(\alpha,\beta,\ldots,\omega)} \tag{1}$$

где $\alpha, \beta, \ldots, \omega$ - некоторая перестановка чисел 1, 2, 3,..., n; $N(\alpha, \beta, \ldots, \omega)$ - число инверсий в перестановке $\alpha, \beta, \ldots, \omega$**.** Число слагаемых в сумме (1) равно числу перестановок чисел 1, 2, 3,..., n, т.е. $n!$.

Два числа, входящих в перестановку, образуют инверсию, если большее число этой пары предшествует меньшему. Число пар, образующих инверсию, называется числом инверсий перестановки. Например, $N(2, 1, 3) = 1$, так как в перестановке 2,1,3 только одна пара (2,1) образует инверсию; $N(1, 4, 3, 2) = 3$, так как три пары образуют инверсию: (4, 3), (4, 2), и (3, 2).

Определитель матрицы обозначается $|A|$, или Δ, или $detA$, или

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

В случае $n = 1$ $\Delta = |a_{11}| = a_{11}$. В случае $n = 2$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}, \tag{2}$$

так как в этом случае возможны только две перестановки: (1, 2) и (2,1); а $N(1, 2) = 0$, $N(2,1) = 1$.
Для $n = 3$ получается формула

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}. \qquad (3)$$

При вычислении определителей третьего порядка удобно пользоваться правилом определения знаков его слагаемых, изображенным на следующей схеме:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

<u>Свойства определителей:</u>

1. При транспонировании, т.е. при замене каждой строки определителя столбцом с тем же номером, определитель не меняется.
2. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет лишь знак.
3. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.
4. Умножение некоторой строки (столбца) определителя на некоторое число равносильно умножению определителя на это число.
5. Если все элементы некоторой строки (столбца) равны нулю, то и определитель равен нулю.
6. Если элементы двух строк (столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.
7. Если все элементы i-й строки определителя представлены в виде суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки, кроме i-й, такие же как и в данном определителе; (i -я строка в первом определителе состоит из первых слагаемых, а во втором определителе - из вторых слагаемых. Это свойство справедливо и в отношении j -го столбца.
8. Если к некоторой строке (столбцу) определителя прибавить другую строку (столбец), умноженную на произвольное число, или линейную комбинацию других строк (столбцов), то величина определителя не изменится.
9. Если одна из строк (столбцов) определителя есть линейная комбинация других строк (столбцов), то определитель равен нулю.
10. Определитель треугольного вида, у которого все элементы, расположенные выше (ниже) главной диагонали нули, равен произведению элементов главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \qquad (4)$$

11. Определитель треугольного вида, у которого все элементы, расположенные выше (ниже) побочной диагонали, нули, равен произведению числа $(-1)^{n\cdot(n-1)/2}$ и элементов побочной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \dots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}} \cdot a_{1n} \cdot a_{2(n-1)} \cdot \ldots \cdot a_{n1} \qquad (5)$$

Минором M_{ij}, соответствующим элементу a_{ij} определителя n-го порядка, называется определитель $(n–1)$-го порядка, получающийся из исходного определителя вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Например, для определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}, M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

Минор, взятый со знаком $(–1)^{i+j}$, называется алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} исходного определителя:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

12. Сумма произведений элементов любой строки (столбца) определителя на их алгебраические дополнения равна этому определителю:

$$\Delta_n = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}, \qquad (6)$$

$$(\Delta_n = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj}). \qquad (7)$$

Формулы (6) и (7) называются соответственно разложением определителя по элементам i-ой строки и разложением определителя по элементам j -го столбца.

13. Сумма произведений элементов любой строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.

Основные методы вычисления определителей

1. Непосредственное вычисление в соответствии с определением. Этот метод применяется, как правило, для вычисления определителей не выше третьего порядка.

Пример. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Воспользуемся формулой (3):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot(-1) + 0\cdot3\cdot5 + 1\cdot2\cdot0 - 1\cdot1\cdot5 - 1\cdot3\cdot0 -$$

$$- 0\cdot2\cdot(-1) = -6.$$

2. Вычисление определителя с помощью разложения его по элементам строки или столбца.

Пример. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 9 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение. Если определитель разложить по какой-либо строке (столбцу), то его вычисление сведётся к вычислению четырёх определителей третьего порядка, но это не лучший путь решения задачи. Преобразуем заданный определитель с целью получения в какой-либо строке (столбце) нескольких нулей: если из второй строки вычесть первую, из третьей - удвоенную первую, из четвёртой - утроенную первую, то получим определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \end{vmatrix},$$

равный исходному. Разложим его по первому столбцу:

$$\Delta = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix}.$$

Задача свелась к вычислению определителя третьего порядка. Преобразуем и его, вычтя из второй строки первую. Тогда получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -5 + 4 = -1.$$

3. Метод приведения к треугольному виду.

Пример. Вычислить определитель

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 0 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 5 & 0 & \dots & 5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 5 & 5 & 5 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычитая первую строку из всех остальных и применяя формулу (4), получим:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & \dots & 5 \\ 0 & -5 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -5 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -5 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}\cdot 5^n.$$

4. Метод рекуррентных соотношений. Этот метод заключается в следующем. Разлагая определитель по строке или столбцу, выражаем его через определители того же вида, но более низких порядков. Это выражение называется рекуррентным соотношением. Далее, пользуясь рекуррентным соотношением, вычисляем несколько определителей того же типа низшего порядка с целью выявления закономерности для вычисления определителей данного типа. Замеченную закономерность можно доказать по методу математической индукции, пользуясь рекуррентным соотношением.

Пример.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение. Разложим определитель Δ_n по первой строке:

$$\Delta_n = 3\cdot\Delta_{n-1} + 2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot\Delta_{n-1} - 2\cdot\Delta_{n-2}.$$

Получили рекуррентное соотношение:

$$\Delta_n = 3\cdot\Delta_{n-1} - 2\cdot\Delta_{n-2} \qquad (8)$$

Вычислим: $\Delta_1 = 3$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$,

$$\Delta_3 = 3\cdot\Delta_2 - 2\cdot\Delta_1 = 3\cdot7 - 2\cdot3 = 15,$$

$$\Delta_4 = 3\cdot\Delta_3 - 2\cdot\Delta_2 = 3\cdot15 - 2\cdot7 = 31.$$

Замечаем, что: $\Delta_1 = 2^2 - 1$, $\Delta_2 = 2^3 - 1$, $\Delta_3 = 2^4 - 1$, $\Delta_4 = 2^5 - 1$. Докажем, что $\Delta_n = 2^{n+1} - 1$.

Пусть эта формула верна при $n = k$.

Покажем, что она будет верна и при $n = k + 1$. Действительно, используя формулу (2.8), получим:

$$\Delta_{k+1} = 3\cdot\Delta_k - 2\cdot\Delta_{k-1} = 3\cdot(2^{k+1} - 1) - 2\cdot(2^k - 1) = 2^{k+2} - 1.$$

Метод математической индукции проведен полностью.

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить число инверсий в перестановке.

1.1. (7,6,9,1,2,3,5,4,8). Ответ: 18.

1.2. (n, n–1, n–2, ..., 2, 1). Ответ: $C_n^2 = n\cdot(n-1)/2$.

2. Выяснить, какие из приведенных ниже произведений входят в определители соответствующих порядков и с какими знаками:

2.1. $a_{43}\cdot a_{21}\cdot a_{35}\cdot a_{12}\cdot a_{54}$.

Ответ: входит со знаком минус.

2.2. $a_{61}\cdot a_{23}\cdot a_{45}\cdot a_{36}\cdot a_{12}\cdot a_{54}$.

Ответ: входит со знаком плюс.

2.3. $a_{27}\cdot a_{36}\cdot a_{51}\cdot a_{74}\cdot a_{25}\cdot a_{43}\cdot a_{62}$.

Ответ: не является членом определителя.

2.4. $a_{35}\cdot a_{16}\cdot a_{72}\cdot a_{27}\cdot a_{55}\cdot a_{61}\cdot a_{44}$.

Ответ: входит со знаком минус.

3.Используя свойства определителя, показать, что:

1) Уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{vmatrix} = 0 \text{ имеет корни } x = a \text{ и } x = b;$$

2) каждый из определителей

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix} \text{ равен нулю.}$$

4. Разлагая по третьей строке, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Ответ: $8\cdot a + 15\cdot b + 12\cdot c - 19\cdot d$.

5. Разлагая по второму столбцу, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

Ответ: $2\cdot a - 8\cdot b + c + 5\cdot d$.

6. Вычислить определители:

$$6.1. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix},\ 6.2. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$6.3. \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix},\ 6.4. \begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}.$$

Ответы: 6.1. –8; 6.2. –3; 6.3. –9; 6.4. 18.

7. Вычислить определители n-го порядка приведением к треугольному виду:

$$7.1. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix};\ 7.2. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix};$$

$$7.3. \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}.$$

Ответы: 7.1. $n!$. *Указание*: ко всем строкам, начиная со второй, прибавить первую; 7.2. $(-1)^{n-1}\cdot(n-1)$. *Указание*: все столбцы прибавить к первому, затем первую строку вычесть из всех остальных; 7.3. $(-1)^{n-1}\cdot n!$. *Указание*: вычесть последнюю строку из всех предыдущих.

8.Вычислить следующие определители методом рекуррентных соотношений:

$$8.1. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix},$$

$$8.2. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}.$$

Ответы: 8.1. $n + 1$; 8.2. $\Delta_n = x^{n-1} + 2\cdot x^{n-2} + \ldots + (n-1)\cdot x + n$.
Указание: Разложить определитель по последнему столбцу.

3. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Пусть A - квадратная матрица n-го порядка, а E - единичная квадратная матрица n-го порядка.

Матрица B называется правой обратной по отношению к матрице A, если $A\cdot B = E$.

Матрица C называется левой обратной по отношению к матрице A, если $C\cdot A=E$.

Для матрицы A, определитель A которой отличен от нуля, существуют левая и правая обратные матрицы и они равны:

$$C = C\cdot E = C\cdot(A\cdot B) = (C\cdot A)\cdot B = E\cdot B = B.$$

Квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля, называется невырожденной (или неособенной), в противном случае - вырожденной (или особенной). Вырожденные матрицы обратных матриц не имеют. Всякая невырожденная матрица A имеет единственную обратную матрицу A^{-1} такую, что

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E.$$

Обратную матрицу A^{-1} можно вычислить по формуле

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}/\Delta & A_{21}/\Delta & \ldots & A_{n1}/\Delta \\ A_{12}/\Delta & A_{22}/\Delta & \ldots & A_{n2}/\Delta \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n}/\Delta & A_{2n}/\Delta & \ldots & A_{nn}/\Delta \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где $\Delta = \det A$, а A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A.

Правило составления матрицы A: каждый элемент матрицы A заменяется его алгебраическим дополнением, затем полученная матрица транспонируется и каждый её элемент делится на определитель $detA$.

Для невырожденных матриц справедливы соотношения:

$$(A^{-1})^{-1} = A \text{ и } (AB)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}.$$

Пример. Найти матрицу, обратную матрице A.

1. $A = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

Решение. Вычислим определитель матрицы A:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Так как определитель матрицы A отличен от нуля, то матрица A^{-1} существует. Найдём алгебраические дополнения всех элементов данной матрицы:

$$A_{11} = -1,\ A_{12} = -4,\ A_{21} = -2,\ A_{22} = -7.$$

Теперь на основании формулы (3.1) можно записать

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Решение. Имеем $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$

Поэтому для матрицы A существует обратная матрица A^{-1}.
Вычисляем:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

Следовательно,

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Рекомендуется самостоятельно проверить справедливость равенств:

$$A\cdot A^{-1} = E \text{ и } A^{-1}\cdot A = E.$$

(Другой способ вычисления обратной матрицы приведен позже).

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти матрицу A^{-1}:

1.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. 1.2. $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

1.2.$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. 1.4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

1.5. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 1.6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Проверить справедливость равенств:

$$A\cdot A^{-1} = E \text{ и } A^{-1}\cdot A = E.$$

4. РАНГ МАТРИЦЫ

Минором k-го порядка матрицы $A = (a_{ij})$ (i = 1,2,..., m; j = 1,2,..., n) (не обязательно квадратной) называется определитель с элементами, расположенными на пересечениях любых "k" строк и любых "k" столбцов матрицы ($1 \le k \le \min(m, n)$). При $k = 1$ под минором первого порядка понимается $|a_{ij}|$ матрицы A. Так, для матрицы

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & d \\ -1 & 6 \end{vmatrix} \text{ - миноры второго порядка;}$$

$$\begin{vmatrix} b & c & d \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b & d \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & c & d \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix} \text{ - миноры третьего порядка.}$$

Рангом матрицы A называется наивысший порядок её минора, отличного от нуля. Ранг матрицы обозначается одним из символов $r(A)$, $rankA$, $rangA$.

Справедливы следующие утверждения:

1. Если каждый элемент матрицы равен нулю, то ранг такой матрицы тоже равен нулю.
2. Если к матрице приписать строку или столбец из нулей, то её ранг не изменится.
3. Если все миноры k -го порядка матрицы равны нулю, то равны нулю и все миноры более высокого порядка (если таковые существуют).

Задача нахождения ранга матрицы, если пользоваться только определением, требует, как правило, вычисления большого количества определителей (у матрицы с "m" строками и "n" столбцами $C_m^k \cdot C_n^k$ миноров k-го порядка). На практике эту задачу решают с помощью так называемого гауссовского алгоритма, основанного на элементарных преобразованиях матрицы.

Под *элементарными преобразованиями матрицы* понимаются:

1. Умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля.
2. Прибавление к строке (столбцу) другой строки (другого столбца), умноженной на любое число.
3. Перемена местами двух строк (столбцов).

Применяя к матрице A цепочку элементарных преобразований, получим матрицу B. При элементарных преобразованиях матрицы её ранг не изменяется:

$$r(A) = r(B).$$

Поэтому при нахождении ранга матрицы A целесообразно провести такие элементарные преобразования, которые привели бы к матрице, ранг которой найти несложно. Такими матрицами являются: трапециевидная, ступенчатая и нормальная ступенчатая матрицы. Наименее трудоёмкой является процедура преобразования матрицы к трапециевидной матрице, которая в общем случае имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & a_{r(r+1)} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Число ненулевых строк трапециевидной матрицы равно её рангу. Любую матрицу элементарными преобразованиями всегда можно привести к трапециевидной.
Пример. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 \\ -3 & 5 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -5 & 0 \\ -5 & 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Элементарными преобразованиями приведём матрицу A к трапециевидной. Принимая во внимание, что $a_{11} \neq 0$ добиваемся обращения в нуль всех элементов первого столбца, стоящих под a_{11}. Для этого прибавляем ко второй строке первую, умноженную на минус три; к третьей - первую, умноженную на минус три; к четвёртой - первую, умноженную на минус пять. Исходная матрица принимает вид, показанный на второй позиции схемы:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 \\ -3 & 5 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -5 & 0 \\ -5 & 7 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -7 & -3 \\ 0 & -8 & -14 & -6 \\ 0 & -8 & -14 & -6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знак " $\sim$ " указывает, что соединяемые им матрицы получаются одна из другой элементарными преобразованиями и, значит, имеют один и тот же ранг. Учитывая, что $a_{22} \neq 0$, добиваемся обращения в нуль всех элементов второго столбца, стоящих под a_{22}. Таким образом, исходную матрицу преобразовали к трапециевидной, ранг которой равен двум. Следовательно, ранг исходной матрицы $r(A)$ тоже равен двум.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найти ранг матрицы, преобразуя её к трапециевидной:

1.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$. Ответ: $r(A) = 2$.

1.2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$. Ответ: $r(B) = 3$.

1.3. $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Ответ: $r(C) = 3$.

2. Доказать, что любую матрицу ранга r элементарными преобразованиями можно привести к виду, у которого диагональные элементы $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \ldots = a_{rr} = 1$, а остальные элементы равны нулю.

5. ПРОИЗВОЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

5.1. Метод Гаусса

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь $x_1, x_2, \dots, x_n$ - неизвестные; $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ - коэффициенты при неизвестных; $b_1, b_2, \dots, b_m$ - свободные члены. В системе уравнений (1) число уравнений не предполагается равным числу неизвестных. Решением системы (1) называется совокупность n значений неизвестных $x_1 = x_{10}$, $x_2 = x_{20}, \dots$, $x_n = x_{n0}$ при подстановке которой в систему (1) все её уравнения обращаются в тождества. Система, имеющая хотя бы одно решение, называется *совместной*; система, не имеющая ни одного решения, называется *несовместной*. Совместная система, имеющая единственное решение, называется *определенной*; совместная система, имеющая более одного решения, называется *неопределенной*.

Матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и}$$

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

называются соответственно *основной матрицей системы* и *расширенной матрицей системы* (1).

Для совместности системы (1) необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы этой системы был равен рангу её расширенной матрицы (теорема Кронекера-Капелли):

$$r(A) = r(A_1) = r.$$

В этом случае число r называется *рангом* системы (1).

Если $b_1 = b_2 = \dots = b_m$, то система линейных уравнений (1) называется *однородной*.

Однородная система уравнений всегда совместна, так как имеет, например, нулевое решение:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \dots,\ x_n = 0.$$

Совместность однородной системы следует также из равенства $r(A) = r(A_1)$.

Задание системы уравнений всегда подразумевает, что надо получить какую-то информацию о множестве её решений: либо решить систему (т.е. найти все множество решений), либо - частный случай того же аспекта - исследовать её, т.е. выяснить, существует ли хотя бы одно решение (совместна ли система) и если существует, то единственно ли оно (является ли система определённой).

Две системы называются *равносильными*, если множества их решений совпадают, т.е. каждое решение первой системы есть решение второй, и обратно. Если нас интересует множество решений системы, то замена данной системы на равносильную не влияет на результат, который должен быть получен. При элементарных преобразованиях строк (но не столбцов) расширенная матрица системы переходит в расширенную матрицу равносильной системы.

Метод (или схема) Гаусса решения системы линейных уравнений заключается в приведении расширенной матрицы данной системы элементарными преобразованиями строк к некоторому специальному виду (прямой ход схемы Гаусса) и нахождению затем множества решений системы с полученной расширенной матрицей (обратный ход схемы Гаусса).

Запишем систему (1) в виде таблицы:

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & ... & x_n & \\ \hline \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \qquad (2)$$

Допустим, что не все коэффициенты при неизвестных равны нулю. Пусть, например, $a_{11} \neq 0$. Назовем этот элемент *разрешающим элементом*. Строку и столбец, в которых находится разрешающий элемент, будем называть *разрешающей строкой* и *разрешающим столбцом*. Все элементы первой строки разделим на a_{11}.
Получим

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & ... & x_n & \\ \hline 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} & \frac{b_1}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \qquad (3)$$

Система (2) равносильна системе (3).

Пользуясь первой строкой таблицы (3), получим нули в первом столбце под элементом a_{11} (т.е. исключим x_1 из остальных уравнений системы). Для этого умножим первую строку на $-a_{21}$ и прибавим ко второй строке, далее умножаем первую строку последовательно на $-a_{31},\ldots,-a_{m1}$ и прибавляем к третьей,…, m-й строкам таблицы (3). Приходим к системе:

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & ... & x_n & \\ \hline 1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & \boxed{a'_{22}} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} & b'_m \end{array} \qquad (4)$$

Система (4) равносильна системе (3).

Снова выберем разрешающий элемент $a_{22} \neq 0$, разделим второе уравнение на a'_{22} и исключим x_2 из третьего, четвертого,... и последнего уравнений системы (4). Получим нули во втором столбце под a'_{22}. Приходим к системе (5). Если в процессе преобразований получится нулевая строка, то её можно отбросить.

Продолжаем процесс дальше. В результате могут встретиться случаи:

1) после некоторого шага получим строку, в которой все коэффициенты при неизвестных равны нулю, а свободный член не равен нулю. Такая строка соответствует уравнению

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + ... + 0 \cdot x_n = b'_i \neq 0,$$

которое не имеет решений. Следовательно, система уравнений несовместна;

2) если такой строки не получим, то система уравнений совместна.

$$\begin{array}{ccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & \\
\hline
1 & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\
0 & 1 & a''_{23} & \dots & a''_{2n} & b''_2 \\
0 & 0 & a''_{33} & \dots & a''_{3n} & b''_3 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & a''_{m3} & \dots & a''_{mn} & b''_m
\end{array} \qquad (5)$$

В последнем случае приходим к системе:

$$\begin{array}{ccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_r & \dots & x_n & \\
\hline
1 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1r} & \dots & c_{1n} & d_1 \\
0 & 1 & c_{23} & \dots & c_{2r} & \dots & c_{2n} & d_2 \\
0 & 0 & 1 & \dots & c_{3r} & \dots & c_{3n} & d_3 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & c_{rn} & d_r
\end{array} \qquad (6)$$

На этом прямой ход схемы Гаусса заканчивается.

Если $r(A) = r(A_1) = r = n$, то система имеет единственное решение. Чтобы получить это единственное решение, необходимо в предпоследнее уравнение системы вместо x_n подставить его значение из последнего уравнения и вычислить x_{n-1} и так далее. Это будет обратный ход схемы Гаусса. Это единственное решение системы при $r = n$ можно получить, если продолжить преобразование расширенной матрицы системы (6) и получить нулевые элементы в разрешающих столбцах, расположенные выше разрешающих элементов:

$$\begin{array}{ccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & \\
\hline
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & d'_1 \\
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & d'_2 \\
0 & 0 & 1 & \dots & 0 & d'_3 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & d'_n
\end{array} \qquad (7)$$

Если $r(A) = r(A_1) = r < n$, то система приводится к виду:

$$\begin{array}{cccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_r & x_{r+1} & \dots & x_n & \\
\hline
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & c'_{1,r+1} & \dots & c'_{1n} & d'_1 \\
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & c'_{2,r+1} & \dots & c'_{2n} & d'_2 \\
0 & 0 & 1 & \dots & 0 & c'_{3,r+1} & \dots & c'_{3n} & d'_3 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & c'_{r,r+1} & \dots & c'_{rn} & d'_r
\end{array} \qquad (8)$$

Матрица системы (8) имеет вид, который называется *нормальным ступенчатым видом*. Система (8) является неопределенной. Первые r переменных $x_1, x_2, \dots, x_r$ выражаем через остальные $(n - r)$ переменные $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} x_1 = -c'_{1,r+1} \cdot x_{r+1} - \dots - c'_{1n} \cdot x_n + d'_1, \\ x_2 = -c'_{2,r+1} \cdot x_{r+1} - \dots - c'_{2n} \cdot x_n + d'_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_r = -c'_{r,r+1} \cdot x_{r+1} - \dots - c'_{rn} \cdot x_n + d'_r. \end{cases} \qquad (9)$$

Система (9) называется *общим решением системы уравнений* (8). Переменные $x_1, x_2, \dots, x_r$ называются *главными* (или *базисными*) *переменными*, переменные $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ - *свободными переменными*. Придавая свободным переменным произвольные значения, будем получать частные решения. Придадим свободным переменным нулевые значения и найдем из системы (9) соответствующие значения базисных переменных:

$$x_1 = d'_1, x_2 = d'_2, \dots, x_r = d'_r.$$

Получили решение системы $(d'_1, d'_2, \dots, d'_r, 0, \dots, 0)$, которое называется *базисным решением*.

Число главных (базисных) переменных всегда равно рангу системы r, а число свободных переменных равно числу $(n - r)$. Главными переменными могут быть такие переменные, коэффициенты при которых образуют один из базисных миноров матрицы системы.

Решая систему уравнений (1) методом Гаусса, целесообразно преобразовывать расширенную матрицу системы сразу к нормальному ступенчатому виду (8) по следующему алгоритму:

1) выбрать разрешающий элемент $a_{ij} \neq 0$;
2) вычислить элементы разрешающей строки делением прежней строки на разрешающий элемент по формуле

$$a'_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{ij}};$$

3) все остальные элементы матрицы A_1 (коэффициенты при неизвестных и свободные члены) пересчитать по правилу прямоугольника:

$$\begin{array}{ccc} a_{ij} & \longrightarrow & a_{ik} \\ | & \nearrow & | \\ a_{qj} & \longrightarrow & a_{qk} \end{array} \qquad a'_{qk} = a_{qk} - a_{qj} \cdot \left(\frac{a_{ik}}{a_{ij}}\right),$$

$$b'_q = b_q - a_{qj} \cdot \left(\frac{b_i}{a_{ij}}\right).$$

Рассмотрим применение этого алгоритма на примерах.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11, \\ -3x_1 + x_2 - 5x_3 = -19, \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$$

Решение. 1). Систему уравнений записываем в виде таблицы

x_1	x_2	x_3	
2	-3	2	11
-3	$\boxed{1}$	-5	-19
4	5	-1	-4

2). Выбираем разрешающий элемент $a_{22} = 1 \neq 0$. Преобразовываем элементы таблицы в соответствии с описанным алгоритмом. Так как разрешающий элемент $a_{22} = 1$, то элементы разрешающей строки не изменятся; элементы разрешающего столбца, кроме $a_{22} = 1$, будут равны нулю; остальные элементы таблицы пересчитываются по правилу прямоугольника. Для элементов первой строки, например, будем иметь:

$$a'_{11} = a_{11} - a_{12}\cdot\left(\frac{a_{21}}{a_{22}}\right) = 2 - (-3)\cdot\left(\frac{-3}{1}\right) = -7;$$
$$a'_{13} = a_{13} - a_{12}\cdot\left(\frac{a_{23}}{a_{22}}\right) = 2 - (-3)\left(\frac{-5}{1}\right) = -13;$$
$$b'_1 = b_1 - b_2\left(\frac{a_{12}}{a_{22}}\right) = 11 - (-19)\left(\frac{-3}{1}\right) = -46.$$

Таблица системы будет иметь вид:

x_1	x_2	x_3	
$\boxed{-7}$	0	−13	−46
−3	1	−5	−19
19	0	24	91

3). Выбираем разрешающий элемент $a'_{11} = -7$ (можно в качестве разрешающего элемента взять элемент $a'_{31} = -19$). Применяя к таблице алгоритм преобразования её, получим:

x_1	x_2	x_3	
1	0	$\frac{13}{7}$	$\frac{46}{7}$
0	1	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{7}$
0	0	$\boxed{-\frac{79}{7}}$	$-\frac{237}{7}$

4). Теперь за разрешающий элемент принимаем $a''_{33} = -\frac{79}{7}$. Окончательный вид системы, равносильной заданной системе, будет:

x_1	x_2	x_3	
1	0	0	1
0	1	0	−1
0	0	1	3

Из последней таблицы получаем ответ:

$$x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 3.$$

В данном примере $r(A) = r(A_1) = r = 3 = n$. Система уравнений совместная и определенная (имеет единственное решение).

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -4, \\ -2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 6, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение. Таблицы, фиксирующие этапы решения, будем записывать последовательно, одну за другой, отделяя горизонталями.

x_1	x_2	x_3	
3	−2	1	−4
−2	5	−2	6
$\boxed{1}$	3	−1	2

0	−11	4	−10
0	$\boxed{11}$	−4	10
1	3	−1	2
0	0	0	0
0	1	$-\frac{4}{11}$	$\frac{10}{11}$
1	0	$\frac{1}{11}$	$-\frac{8}{11}$

Общее решение системы:

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{8}{11} - \dfrac{1}{11}x_3, \\ x_2 = \dfrac{10}{11} + \dfrac{4}{11}x_3. \end{cases}$$

В данном примере $r(A) = r(A_1) = r < 3 = n$. Система совместна и имеет бесконечно много решений. Базисное решение системы:

$$x_1 = -\frac{8}{11}, x_2 = \frac{10}{11}, x_3 = 0.$$

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 5x_1 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение. Систему уравнений записываем в виде таблицы

x_1	x_2	x_3	
1	2	−1	3
5	0	3	2
2	$\boxed{-1}$	2	1
5	0	3	5
5	0	$\boxed{3}$	2
−2	1	−2	−1
0	0	0	3
$\frac{5}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$
$\frac{4}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$

Первое уравнение последней системы имеет вид:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 3.$$

Это уравнение не имеет решений. Следовательно, система уравнений не совместна. В данном примере

$$r(A) = 2 \neq r(A_1) = 3.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Исследовать совместность и найти общее решение и одно частное решение системы уравнений:

$$1.1.\ \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

Ответ: например, общее решение:
$x_1 = \frac{1}{11}(x_3 - 9x_4 - 2), x_2 = \frac{1}{11}(-5x_3 + x_4 + 10)$;

частное решение: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$.

$$1.2.\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases}$$

Ответ: например, общее решение:
$x_3 = 22x_1 - 33x_2 - 11$, $x_4 = -16x_1 + 24x_2 + 8$;

частное решение: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

$$1.3.\ \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13. \end{cases}$$

Ответ: общее решение: $x_3 = 1 - 3x_1 - 4x_2$, $x_4 = 1$;

частное решение: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$.

$$1.4.\ \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$$

Ответ: система не совместна.

$$1.5.\ \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12. \end{cases}$$

Ответ: система имеет единственное решение: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

$$1.6.\ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

Ответ: общее решение: $x_3 = 6 - 15x_1 + 10x_2$,
$x_4 = -7 + 18x_1 - 12x_2$;

частное решение: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

5.2. Матричный метод решения систем линейных уравнений

Будем рассматривать системы n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1}$$

Будем полагать, что определитель матрицы системы отличен от нуля ($detA \neq 0$). Система (1) является совместной и определённой ($r(A) = r(A_1) = r$, $r = n$). Введем обозначения матриц-столбцов:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (1) можно записать в матричном виде:

$$A \cdot X = B \tag{2}$$

Найдём матрицу X. Так как $detA \neq 0$, то существует обратная матрица A^{-1}. Умножим уравнение (2) на A^{-1} слева. Будем иметь:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \tag{3}$$

Учитывая сочетательное свойство операции перемножения матриц и соотношение $A^{-1} \cdot A = E$, преобразуем левую часть уравнения (3):

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = (A^{-1} \cdot A) \cdot X = E \cdot X = X.$$

Таким образом, решение уравнения (2) имеет вид:

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{4}$$

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 = 5. \end{cases}$$

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

следовательно, обратная матрица A^{-1} существует. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = 4, A_{12} = -3, A_{21} = -2, A_{22} = 1.$$

Тогда на основании формулы $A^{-1} = \frac{1}{detA} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$ получим, что

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{-2} \end{pmatrix}.$$

Укажем здесь ещё один способ вычисления обратной матрицы $A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$. Будем исходить из матричного уравнения $A \cdot A^{-1} = E$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Для нахождения элементов матрицы A^{-1} на основании (5) составим две системы линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Системы уравнений (6) и (7) являются совместными и определенными ($detA \neq 0$). Решать их целесообразно совместно методом Гаусса по схеме:

$$(A|E) \sim (E|A^{-1}).$$

Имеем:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right), \text{ следовательно, } A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

По формуле (4) находим искомую матрицу

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Отсюда имеем $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить системы уравнений матричным методом.

1.1. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 11. \end{cases}$$

1.2. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 1, \\ 4x_1 - 7x_2 = 1. \end{cases}$$

Ответы: 1.1. $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$;
1.2. $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{7}$, $x_3 = \frac{2}{7}$.

5.3. Формулы Крамера

Если матрица A линейной системы $A \cdot X = B$ квадратная и невырожденная, то эта система совместна и имеет единственное решение, которое может быть получено по формулам Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \ (i = 1; 2; \ldots; n),$$

где $\Delta = detA$ - определитель данной системы; Δ_i - определитель матрицы, получаемой из матрицы A заменой i-го столбца (т.е. столбца коэффициентов при x_i) столбцом B свободных членов.

Основное значение формул Крамера состоит в том, что они дают явное выражение для решения системы n линейных уравнений с n неизвестными (с определителем, отличным от нуля) через коэффициенты уравнений и свободные члены. Практическое использование формул Крамера связано с довольно громоздкими вычислениями. Для решения системы n уравнений с n неизвестными приходится вычислять $(n + 1)$ определитель n-го порядка. К этому следует добавить, что если коэффициенты уравнений и свободные члены представляют собой лишь приближенные значения каких-либо измеряемых физических величин, то использование формул Крамера может привести к большим ошибкам.

Формулы Крамера целесообразно применять в тех случаях, когда определители легко вычисляются после преобразования столбцов или строк (в схеме Гаусса преобразования столбцов недопустимы), а также и в том случае, когда $\det A$ с трудом приводится к треугольному виду, но может быть легко вычислен другими методами.

Рассмотрим на примере применение формул Крамера.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение.

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 14 \neq 0$, следовательно, решение системы

существует и оно единственное. Вычисляем:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 14,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 28,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 42.$$

Тогда получим ответ: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{14}{14} = 1$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{28}{14} = 2$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{42}{14} = 3$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Следующие системы уравнений решить с помощью формул Крамера.

$$1.1. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = -1$.

$$1.2. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = -2,\ \ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1.$

$$1.3. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = x_3 = 2,\ x_4 = 0.$

6. ЛИНЕЙНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

6.1. Понятие векторного пространства

Рассмотрим такое множество R элементов $x,\ y,\ z,\ \ldots$, в котором для любых двух элементов $x \in R$ и $y \in R$ определена сумма $x + y \in R$ и для любого элемента $x \in R$ и любого действительного числа λ определено произведение $\lambda x \in R$.

Непустое множество R, для элементов которого определено сложение и умножение на действительные числа, называется действительным *векторным пространством* R или *линейным пространством*, а элементы R называются *векторами,* если выполнены следующие аксиомы:

1) *Коммутативность*. Для любых двух элементов $\vec{x}$ и $\vec{y} \in R$ справедливо равенство

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}.$$

2) *Ассоциативность.* Для любых элементов $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in R$ справедливо равенство

$$(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}).$$

3) Существует такой элемент $\vec{0} \in R$ (нуль-элемент), что $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ для любого $\vec{x} \in R$.

4) Для каждого элемента $\vec{x} \in R$ существует такой элемент $-\vec{x}$ (называемый противоположным к $\vec{x}$), что

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}.$$

5) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

6) $\lambda \cdot (\mu \vec{x}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{x}$.

7) $(\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$.

8) $\lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$.

Замечание. Если в пространстве R определено умножение элементов на действительное число, то R называется *действительным линейным пространством*. Если элементы умножать на комплексные числа, то R называется *комплексным линейным пространством.*

Например, множество всех геометрических векторов является линейным пространством, так как для элементов этого множества определены действия сложения и умножения на число, удовлетворяющие сформулированным аксиомам. Также линейным пространством является множество действительных чисел с операциями сложения и умножения, множество всех матриц размером $m \times n$ с операциями сложения и умножения на число. Можно говорить о векторном пространстве P_n многочленов степени не выше n с действительными или комплексными коэффициентами, о векторном пространстве C функций, непрерывных на данном отрезке $[a;\ b]$, о векторном пространстве решений данной системы линейных однородных уравнений, наконец, просто о векторном пространстве строк, состоящих из n (действительных или комплексных) чисел. Но множество рациональных чисел не является линейным пространством, так как произведение рационального числа на действительное не всегда рациональное число.

Простейшие свойства векторного пространства:

1. В каждом линейном пространстве существует только один нуль-элемент.
2. Для каждого элемента линейного пространства существует только один противоположный элемент.
3. Для каждого элемента $\vec{x} \in R$ выполняется равенство $0\cdot \vec{x} = 0$.
4. Для любого действительного числа λ и $\vec{0} \in R$ выполняется равенство $\lambda\cdot\vec{0} = \vec{0}$.
5. Из равенства $\lambda\cdot\vec{x} = 0$ следует одно из двух равенств: $\lambda = 0$ или $\vec{x} = 0$.
6. Элемент $(-1)\cdot \vec{x}$ является противоположным для элемента $\vec{x}$.

Множество A называется *подмножеством* множества B, если каждый его элемент является элементом множества B. Обозначают $A \in B$. Например, $N \in Q$ (множество натуральных чисел является подмножеством рациональных чисел).

Подпространством линейного пространства называют любое непустое подмножество множества R, элементы которого в свою очередь образуют линейное пространство относительно операций, введенных в R.

Например, множество всех векторов, параллельных одной и той же плоскости, является подпространством всех геометрических векторов пространства.

n - мерным вектором называется упорядоченная совокупность n действительных чисел, записываемых в виде строки $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ или столбца

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, где x_i – *i-я* компонента, или координата вектора $\vec{x}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Понятие n - мерного вектора широко используется в экономике, например, некоторый набор товаров можно охарактеризовать вектором $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а соответствующие цены – вектором $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Два n - мерных вектора

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ и } \vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

называются *равными*, если у них равны соответствующие компоненты: $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$,…, $x_n = y_n$.

Нулевым вектором будем называть такой вектор $\vec{0}$, у которого все компоненты равны нулю.

6.2. Размерность и базис линейного пространства

Векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$,…, $\vec{a}_k$ векторного пространства R называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа α_1,α_2,…, α_k, не равные одновременно нулю, что

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0} \qquad (1)$$

Векторы, не являющиеся линейно зависимыми, называются *линейно независимыми***.** В этом случае равенство (1) выполняется лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$.

Если векторы линейно зависимы, т. е.

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0}$$

и, например, $\alpha_k \neq 0$, то $\vec{a}_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k}\vec{a}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_k}\vec{a}_2 - \ldots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\vec{a}_{k-1}$

или $\vec{a}_k = \xi_1 \vec{a}_1 + \xi_2 \vec{a}_2 + \ldots + \xi_{k-1} \vec{a}_{k-1}$, где $\xi_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_k}$.

Если последнее равенство имеет место, то говорят, что вектор $\vec{a}_k$ является линейной комбинацией векторов
$\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$,…, $\vec{a}_{k-1}$, а также, что вектор $\vec{a}_k$ линейно выражается через $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$,…, $\vec{a}_{k-1}$. Таким образом, если векторы
$\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$,…, $\vec{a}_k$ линейно зависимы, то, по крайней мере, один из них линейно выражается через остальные. Верно и обратное утверждение: если один из векторов линейно выражается через остальные, то все эти векторы в совокупности линейно зависимы.

Примерами линейно независимых векторов являются два неколлинеарных вектора плоскости Oxy или три некомпланарных вектора пространства Oxyz. Но любые три вектора плоскости линейно зависимы. Также будут линейно зависимыми и любые четыре вектора пространства.

Пусть теперь задано m векторов n – мерного пространства

$$\begin{cases} \vec{x}_1 = (x_{11}; x_{12}; \ldots, x_{1n}) \\ \vec{x}_2 = (x_{21}; x_{22}; \ldots, x_{2n}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{x}_m = (x_{m1}; x_{m2}; \ldots, x_{mn}) \end{cases} \tag{1}$$

Рангом r системы векторов называется максимальное число линейно независимых векторов системы.

Выясним, каким условиям должны удовлетворять координаты векторов, чтобы векторы были линейно зависимы или линейно независимы. Для этого приравнивают линейную комбинацию векторов к нулю:

$$\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_m\vec{x}_m = \vec{0} \tag{2}$$

Или

$$\begin{cases} \alpha_1 x_{11} + \alpha_2 x_{21} + \ldots + \alpha_m x_{m1} = 0 \\ \alpha_1 x_{12} + \alpha_2 x_{22} + \ldots + \alpha_m x_{m2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \\ \alpha_1 x_{1n} + \alpha_2 x_{2n} + \ldots + \alpha_m x_{mn} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

По определению линейной независимости векторов линейного пространства векторы будут линейно независимы, если в равенстве (2) выполнено условие:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0,$$

то есть однородная система (3) имеет нулевые решения. А это возможно лишь тогда, когда ранг основной матрицы системы (3) равен числу векторов в системе, то есть $r = m$.

Если ранг r основной матрицы однородной системы

$$M = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \ldots & x_{m1} \\ x_{12} & x_{22} & \ldots & x_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{1n} & x_{2n} & \ldots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

меньше числа m векторов системы (1), то система векторов линейно зависима, то есть любой вектор из системы линейно выражается через базисные векторы.

Теорема. Для того чтобы система векторов была линейно независима, необходимо и достаточно, чтобы определитель, составленный из координат этих векторов, был отличен от нуля.

Пример 1. Дана система векторов четырехмерного пространства

$\vec{x}_1$= (1; –1; 1; 2), $\vec{x}_2$ = (0; 1; –1; 3), $\vec{x}_3$= (2; –2; 2; 4). Требуется определить, является ли данная система линейно зависимой и, если да, то найти зависимость.

Решение. Составим векторное равенство

$$\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_3\vec{x}_3 = \vec{0},$$

в котором числа α_1, α_2, α_3 надо определить.

Записывая $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ в виде вектор-столбцов, получаем

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\2\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\3\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}2\\-2\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Задача свелась, таким образом, к решению однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0, \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0, \end{cases}$$

которая, как известно, имеет единственное нулевое решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, если определитель системы не равен нулю, другими словами, если ранг *r* матрицы системы равен трем (числу векторов системы). В этом случае векторы системы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ линейно независимы. Для линейной зависимости должно существовать хотя бы одно ненулевое решение системы уравнений, тогда ранг *r* матрицы меньше трёх.

Решаем однородную систему линейных уравнений методом Гаусса. Выпишем матрицу *A* системы и вычислим ранг матрицы (ранг системы векторов равен рангу матрицы, составленной из координат этих векторов), приведя её к ступенчатому виду. Заметим, что в матрице *A* компоненты векторов расположены в виде столбцов. Хотя, как известно, величина ранга не меняется при транспонировании матрицы.

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\-1 & 1 & -2\\1 & -1 & 2\\2 & 3 & 4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 3 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что ранг матрицы равен двум, так как существует

$$M_2 = \begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

и ранг матрицы меньше числа векторов системы. Значит, данные векторы линейно зависимы.

Можно найти ненулевые значения α_1, α_2, α_3, составив систему уравнений по последней матрице:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0, \\ \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Пусть α_1 и α_2 - главные переменные, а α_3 - свободная переменная. Тогда получим систему

$$\begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha_3, \\ \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Придавая различные значения α_3, получим соответствующие ненулевые решения системы, то есть различные наборы чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Например, $\alpha_3 = 1$, тогда получим частное решение (–2; 0; 1) такое, что

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В векторном виде получим равенство:

$$-2 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + 1 \cdot \vec{x}_3 = \vec{0},$$

откуда $\vec{x}_1 = \frac{1}{2}\vec{x}_3$. Согласно определению, векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ являются линейно зависимыми.

Линейное пространство R^n называется n – *мерным*, если в нем можно найти n линейно независимых векторов, а любые из $n + 1$ векторов уже являются линейно зависимыми.

Размерность пространства - это максимальное число содержащихся в нем линейно независимых векторов.

Так, размерность множества всех плоских векторов равна 2, размерность множества всех пространственных векторов равна 3; понятно, что размерность n - мерного пространства, по определению, равна n. Записывают

$$\dim R^n = n.$$

Векторное пространство, содержащее только нулевой вектор, имеет размерность нуль.

Пространство, имеющее конечную размерность, называется *конечномерным*. Пространство, в котором можно найти сколь угодно много линейно независимых векторов, называется *бесконечномерным*.

Совокупность произвольных n линейно независимых векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ n – мерного пространства R^n называется *базисом* R^n.

Все базисы конечномерного векторного пространства состоят из одинакового количества векторов.

<u>*Теорема о единственности разложения вектора по базису*</u>:

Каждый вектор $\vec{x}$ линейного n - мерного пространства R^n можно представить, и притом единственным способом, в виде линейной комбинации векторов базиса.

<u>Доказательство:</u>

Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ – произвольный базис n – мерного пространства R^n и $\vec{x} \in R$. Так как каждые $n + 1$ векторов

(n - мерного!) пространства R^n линейно зависимы, то зависимы, в частности, и векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n, \vec{x}$, то есть существуют такие не равные одновременно нулю числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha$, что

$$\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n + \alpha\vec{x} = 0.$$

При этом $\alpha \neq 0$, ибо если $\alpha = 0$, то хоть одно из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ было бы отлично от нуля, и векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ были бы линейно зависимы. Следовательно,

$$\vec{x} = -\frac{\alpha_1}{\alpha}\vec{e}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha}\vec{e}_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha}\vec{e}_n.$$

Если ввести обозначение $x_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha}$, где $i = 1, 2, \ldots, n$, то будем иметь

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n,$$

то есть $\vec{x}$ - линейная комбинация векторов базиса.

Это разложение вектора $\vec{x}$ через $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2,\ldots$, $\vec{e}_n$ *единственно*. Если допустить противоположное, что

$$\vec{x} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \ldots + y_n\vec{e}_n$$

то, вычитая из первого равенства второе, получим

$$(x_1 - y_1)\vec{e}_1 + (x_2 - y_2)\vec{e}_2 + \ldots + (x_n - y_n)\vec{e}_n = \vec{0}.$$

Ввиду линейной независимости векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2,\ldots, \vec{e}_n$ это возможно только тогда, когда

$$x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = \ldots = x_n - y_n = 0,$$

откуда $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$.

Таким образом, элемент $\vec{x} \in R^n$ выражается через базис $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2,\ldots$, $\vec{e}_n$ этого пространства в виде

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n.$$

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *координатами* вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2,\ldots$, $\vec{e}_n$ и записывают $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Из теоремы следует, что два элемента n - мерного пространства с заданным базисом равны тогда и только тогда, когда их координаты в этом базисе равны.

В n - мерном пространстве можно выбирать различные базисы; один и тот же элемент в различных базисах будет иметь различные координаты.

Пусть в линейном пространстве R^n задан базис
$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2,\ldots$, $\vec{e}_n$ и произвольные элементы (векторы) $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Тогда *при сложении векторов их соответственные координаты складываются*:

если $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$ и $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \ldots + y_n\vec{e}_n$,

то $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1)\,\vec{e}_1 + (x_2 + y_2)\,\vec{e}_2 + \ldots + (x_n + y_n)\,\vec{e}_n$.

При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число:

$$\alpha\vec{x} = (\alpha x_1)\vec{e}_1 + (\alpha x_2)\vec{e}_2 + \ldots + (\alpha x_n)\vec{e}_n.$$

У нулевого вектора все координаты равны нулю, так как из равенства

$$\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n = \vec{0},$$

ввиду линейной независимости векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2,\ldots$, $\vec{e}_n$, вытекает, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Вектор, противоположный вектору $\vec{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$, равен, очевидно, $(-x_1; -x_2; \ldots; -x_n)$.

Для определения размерности линейного пространства полезно использовать следующую теорему:

Теорема. Если $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2,\ldots$, $\vec{e}_n$ – система линейно независимых векторов пространства R^n и любой вектор
$\vec{x} \in R^n$ линейно выражается через $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$, то пространство R^n является n - мерным, а векторы $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ – его базисом.

Пример 1. Доказать, что векторы $\vec{e}_1 = (1; 2)$ и $\vec{e}_2 = (3; 4)$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{x} = (7; 10)$ в этом базисе.

Решение. Чтобы векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ составили базис пространства R^2, они должны быть линейно независимы, то есть ранг матрицы, составленной из компонентов векторов, должен равняться двум. Получим $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Определитель этой квадратной матрицы равен

$$\Delta = -2 \neq 0.$$

Поэтому ранг матрицы $r(A) = 2$. Следовательно, векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ линейно независимы и образуют базис в R^2. Существует единственный набор чисел α_1 и α_2 такой, что $\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2$. От векторного равенства перейдем к равенствам над соответственными компонентами, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 = 7, \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 10. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получим, что $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$. Значит, $\vec{x} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$.

Пример 2. Проверить, что векторы
$\vec{x}_1$ = (2; –1; 0; 1), $\vec{x}_2$ = (2; 2; –1; 3), $\vec{x}_3$ = (0; 1; –1; 0) образуют базис и выразить вектор $\vec{x}_4$= (4; –2; 0; 2) через этот базис.

Решение. Найдем ранг матрицы, составленной из координат векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то есть $r(M)$ = 3 и равен числу векторов. Поэтому векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ образуют базис в R^3. Разложим вектор $\vec{x}_4$ по этому базису. Существует единственный набор чисел α_1, α_2, α_3 такой, что $\vec{x}_4 = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \alpha_3\vec{x}_3$.

От векторного равенства перейдем к равенствам над соответствующими компонентами, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\cdot\alpha_1 + 2\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 = 4, \\ -\alpha_1 + 2\cdot\alpha_2 + 1\cdot\alpha_3 =-2, \\ 0\cdot\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 3\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 = 2. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса для нахождения α_1, α_2, α_3. Для этого составим расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Так как ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы, то по теореме Кронекера-Капелли система имеет решение. Найдем это решение, составив систему уравнений по последней матрице:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 2, \\ \alpha_2 = 0, \\ \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Получим $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Таким образом, векторы линейно зависимы и $\vec{x}_4 = 2 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + 0 \cdot \vec{x}_3 = 2 \cdot \vec{x}_1$.

Пример 3. Показать, что векторы

$$\vec{x}_1 = (1;\ 1;\ 0),\ \vec{x}_2 = (1;\ –1;\ 1),\ \vec{x}_3 = (–3;\ 5;\ –6)$$

образуют базис.

Решение. Векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ образуют базис, если они линейно независимы. Составим векторное равенство

$$\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \alpha_3\vec{x}_3 = \vec{0}.$$

От векторного равенства перейдем к равенствам над соответствующими компонентами, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 5\alpha_3 = 0, \\ \qquad \alpha_2 - 6\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Решаем однородную систему линейных уравнений методом Гаусса. Выпишем матрицу A системы и вычислим её ранг

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $r\ (A) = 3$ и равен числу векторов. Значит, система векторов линейно независима. Составим по последней матрице систему уравнений для нахождения чисел α_1, α_2, α_3:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0, \\ \qquad \alpha_2 - 4\alpha_3 = 0, \\ \qquad\quad 2\alpha_3 = 0, \end{cases}$$

откуда получим единственное нулевое решение системы $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Значит, векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ линейно независимы и, следовательно, образуют базис.

6.3. Переход к новому базису

Пусть в пространстве R^n имеются два базиса: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ (старый) и $\vec{e}_1^{\,\prime}$, $\vec{e}_2^{\,\prime}$, …, $\vec{e}_n^{\,\prime}$ (новый). Каждый из векторов нового базиса можно линейно выразить через векторы старого базиса и наоборот:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1^{\,\prime} &= a_{11}\,\vec{e}_1 + a_{21}\,\vec{e}_2 + \ldots + a_{n1}\,\vec{e}_n, \\ \vec{e}_2^{\,\prime} &= a_{12}\,\vec{e}_1 + a_{22}\,\vec{e}_2 + \ldots + a_{n2}\,\vec{e}_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \vec{e}_n^{\,\prime} &= a_{1n}\,\vec{e}_1 + a_{2n}\,\vec{e}_2 + \ldots + a_{nn}\,\vec{e}_n. \end{aligned}$$

Матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называют *матрицей перехода* от старого базиса к новому. Заметим, что коэффициенты разложений новых базисных векторов по старым базисным векторам образуют столбцы этой матрицы.

Определитель матрицы A не равен нулю, так как в противном случае её столбцы, а, следовательно, и векторы $\vec{e}_1^{'}$, $\vec{e}_2^{'}$, …, $\vec{e}_n^{'}$ были бы линейно зависимы. Значит, существует обратная матрица A^{-1}. Справедливо и обратное утверждение: если определитель матрицы A отличен от нуля, то столбцы её линейно независимы, и значит, векторы $\vec{e}_1^{'}$, $\vec{e}_2^{'}$, …, $\vec{e}_n^{'}$ линейно независимы, то есть образуют некоторый базис. Значит, матрицей перехода может быть любая квадратная матрица порядка n с отличным от нуля определителем.

При переходе от одного базиса $\vec{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ векторного пространства к другому базису $\vec{e}_1^{'}$, $\vec{e}_2^{'}$, …, $\vec{e}_n^{'}$, конечно, изменяются координаты вектора $\vec{x} \in R^n$.

Пусть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – в старом базисе и в то же время $\vec{x} = y_1\vec{e}_1^{'} + y_2\vec{e}_2^{'} + \ldots + y_n\vec{e}_n = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – в новом.

Если подставить во второе равенство выражения $\vec{e}_1^{'}$, $\vec{e}_2^{'}$, …, $\vec{e}_n^{'}$ через $\vec{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$, то получим:

$\vec{x} = y_1(a_{11}\,\vec{e}_1 + a_{21}\,\vec{e}_2 + \ldots + a_{n1}\,\vec{e}_n) + y_2(a_{12}\,\vec{e}_1 + a_{22}\,\vec{e}_2 + \ldots + + a_{n2}\,\vec{e}_n) + \ldots + y_n(a_{1n}\,\vec{e}_1 + a_{2n}\,\vec{e}_2 + \ldots + a_{nn}\,\vec{e}_n) = (a_{11}y_1 + + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n)\,\vec{e}_1 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n)\,\vec{e}_2 + + \ldots + (a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n)\,\vec{e}_n$.

Ввиду единственности разложения вектора $\vec{x}$ по базису $\vec{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ отсюда следует, что

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n. \end{aligned}$$

В матричной форме эти равенства имеют вид:

$$\text{если } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то $X = A \cdot Y$.

Старые координаты вектора $\vec{x}$ получаются из новых, если матрицу перехода A умножить на столбец новых компонент.

Если известны компоненты вектора в старом базисе, то новые координаты получатся, если последнее равенство умножить слева на обратную матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot X = A^{-1} \cdot A \cdot Y, \text{ отсюда имеем } Y = A^{-1} \cdot X.$$

Пример 1. Найти координаты вектора $\vec{x} = (3; 4)$ в базисе из векторов $\vec{x}_1 = (1; –1)$, $\vec{x}_2 = (5; 3)$.

Решение. Составим матрицу перехода из компонентов нового базиса $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ и найдем обратную матрицу } A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле $Y = A^{-1} \cdot X$ имеем:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -11 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-11}{8} \\ \frac{7}{8} \end{pmatrix},$$

то есть разложение вектора $\vec{x}$ по базису $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ имеет вид:

$$\vec{x} = \frac{-11}{8}\vec{x}_1 + \frac{7}{8}\vec{x}_2 = (\frac{-11}{8}; \frac{7}{8}).$$

Пример 2. Проверить, что векторы $\vec{x}_1 = (1; 1; 2)$, $\vec{x}_2 = (2; –1; 0)$, $\vec{x}_3 = (–1; 1; 1)$ образуют базис и выразить вектор $\vec{x}_4 = (6; –1; 3)$ через этот базис.

Решение. Выразим связь между базисами

$$\begin{cases} \vec{x}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2 \cdot \vec{e}_3, \\ \vec{x}_2 = 2 \cdot \overline{e}_1 - \vec{e}_2 + 0 \cdot \overline{e}_3, \\ \vec{x}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3. \end{cases}$$

Матрица перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ к базису $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Найдем A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пусть $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ – координатный столбец вектора $\vec{x}_4$ в новом базисе. Тогда, применив формулу $Y = A^{-1} X$,

получим: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Таким образом, разложение вектора $\vec{x}_4$ по базису $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ имеет вид:

$$\vec{x}_4 = \vec{x}_1 + 3\vec{x}_2 + \vec{x}_3.$$

Тот же самый результат можно было получить, записав формулу $X = A \cdot Y$ в виде системы уравнений

$$\begin{cases} 6 = y_1 + 2y_2 - y_3, \\ -1 = y_1 - y_2 + y_3, \\ 3 = 2y_1 + y_3. \end{cases}$$

и решив её, например, методом Гаусса.

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить ранг системы векторов и разложить вектор $\vec{a}_1$ по новому базису, если:

$\vec{a}_1 = (2; 5; 3)$, $\vec{a}_2 = (–1; 2; 2)$, $\vec{a}_3 = (3; 8; 5)$, $\vec{a}_4 = (–9; –6; –1)$, $\vec{a}_5 = (2; –17; –14)$.

Ответ: $\vec{a}_1 = –2\vec{a}_2 + 1{,}5\vec{a}_3 + 0{,}5\vec{a}_4$.

6.4. Евклидово пространство

В векторном (линейном) пространстве не вводится понятие длины вектора и угла между векторами. Поэтому аксиоматично дается понятие скалярного произведения двух элементов этого пространства и из него устанавливаются формулы для нахождения длины вектора и угла между векторами.

Линейное пространство R называется *евклидовым*, если имеется правило, которое позволяет для каждых двух векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ из R построить действительное число, называемое *скалярным произведением* векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ и обозначаемое $(\vec{x}, \vec{y})$ или $\vec{x} \cdot \vec{y}$, причем это правило удовлетворяет следующим четырем аксиомам:

1) $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in E$ (коммутативность);
2) $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})\ \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E$ (дистрибутивность);
3) $(\lambda\vec{x}, \vec{y}) = \lambda(\vec{x}, \vec{y})\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in E$, $\forall \lambda \in R$ (однородность);

4) $(\vec{x},\ \vec{x}) > 0$, если $\vec{x} \neq 0$ (положительная определенность), $(\vec{x},\ \vec{x}) = 0$, если $\vec{x} = 0$, где буквой E обозначено евклидово пространство. Если известна его размерность, то обозначают E^n.

Скалярное произведение любого вектора $\vec{x} \in E$ на себя называется *скалярным квадратом* вектора $\vec{x}$.

Длиной (нормой) вектора $\vec{x}$ в евклидовом пространстве называется корень квадратный из его скалярного квадрата:

$$|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x},\vec{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Из свойств скалярного произведения вытекают *свойства модуля*: для всех $\vec{x},\ \vec{y} \in E$ и действительных чисел λ

1) $|\vec{x}| = \vec{0}$ тогда и только тогда, когда $\vec{x} = \vec{0}$;
2) $|\lambda\vec{x}| = |\lambda| \cdot |\vec{x}|$;
3) $|(\vec{x},\ \vec{y})| \leq |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|$ (неравенство Коши-Буняковского). Знак неравенства возможен тогда и только тогда, когда множество $\{\vec{x},\vec{y}\}$ линейно зависимо;
4) $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$ (неравенство треугольника).

Вектор, длина которого равна единице, называется *нормированным*. Если $\vec{x} \in E$ – ненулевой вектор, то нетрудно видеть, что $\frac{1}{|\vec{x}|} \cdot \vec{x}$ (или записывают $\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$) является нормированным вектором.

Угол φ между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$ определяется по формуле:

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{x},\vec{y})}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}, \text{ где } 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Два вектора называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю ($\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$). В частности, нулевой вектор $\vec{0}$ ортогонален каждому вектору пространства *E*.

Последовательность $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \ \dots,\ \vec{x}_n$ векторов $\vec{x}_i$ евклидова векторного пространства называется *ортогональной системой,* если она не содержит нулевого вектора и векторы $\vec{x}_i$ попарно ортогональны, т. е. $\vec{x}_i \neq 0$ и $(\vec{x}_i,\ \vec{x}_j) = 0$ при $i \neq j$; она называется *ортонормированной системой,* если, кроме того, все векторы $\vec{x}_i$ являются единичными ($|\vec{x}_i| = 1$), т. е. если

$$(\vec{x}_i,\ \vec{x}_j) = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq j, \\ 1 \text{ при } i = j. \end{cases}$$

Ортонормированная система, которая одновременно является базисом векторного пространства, называется *ортонормированным базисом.*

Свойства ортогональной системы

1. Каждая ортогональная система линейно независима.
2. Если координаты двух векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ заданы относительно ортонормированного базиса *B*:
$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_{\text{B}}$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)_{\text{B}}$, то их скалярное произведение равно $(\vec{x},\ \vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$.
3. Каждое евклидово векторное пространство конечной размерности имеет ортонормированный базис.

<u>Свойства ортонормированного базиса</u>

Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ – ортонормированный базис в произвольном n – мерном евклидовом пространстве E;
$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – два произвольных элемента этого пространства с заданными координатами в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, тогда справедливы следующие утверждения:
1) $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$, т.е. в ортонормированном базисе скалярное произведение любых двух элементов равно сумме произведений соответствующих координат этих элементов;
2) $x_i = (\vec{x}, \vec{e}_i)$, где $i = 1, 2, \ldots, n$, т.е. координаты произвольного элемента в ортонормированном базисе равны скалярным произведениям этого элемента на соответствующие элементы базиса.

Примером ортонормированного базиса может служить декартов прямоугольный базис евклидова пространства всех свободных векторов

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ \vec{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0),\ \ldots,\ \vec{e}_n = (0, 0, \ldots, 1).$$

Пример. Проверить, что векторы $\vec{e}_1 = (2, 0, -2)$,
$\vec{e}_2 = (1, -2, 1)$, $\vec{e}_3 = (1, 1, 1)$ образуют ортонормированный базис и для вектора $\vec{x} = (3; -2, 5)$ найти разложение по этому базису.

Решение. Проверим, составляют ли векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ базис в E^3. Для этого составим определитель из компонентов векторов и вычислим его

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0.$$

Следовательно, векторы составляют базис в E^3.
Проверим ортогональность векторов с помощью скалярного произведения:

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 2 + 0 - 2 = 0$, значит, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ – ортогональны,
$(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = 2 + 0 - 2 = 0$, значит, $\vec{e}_1, \vec{e}_3$ – ортогональны,
$(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = 1 - 2 + 1 = 0$, значит, $\vec{e}_2, \vec{e}_3$ – ортогональны.

Таким образом, векторы попарно ортогональны и образуют базис. Составим теперь ортонормированный базис:

$$\vec{e}_1^* = \frac{\vec{e}_1}{|\vec{e}_1|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \vec{e}_2^* = \frac{\vec{e}_2}{|\vec{e}_2|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right),$$
$$\vec{e}_3^* = \frac{\vec{e}_3}{|\vec{e}_3|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Векторы $\vec{e}_1^*$, $\vec{e}_2^*$, $\vec{e}_3^*$ ортогональны и имеют единичную длину, то есть составляют ортонормированный базис, и координаты вектора $\vec{x}$ относительно этого базиса равны скалярным произведениям вектора $\vec{x}$ на соответственные базисные векторы:

$$(\vec{x}, \vec{e}_1^*) = \frac{3}{\sqrt{2}} + 0 - \frac{5}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2},$$
$$(\vec{x}, \vec{e}_2^*) = \frac{3}{\sqrt{6}} + \frac{4}{\sqrt{6}} + \frac{5}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6},$$
$$(\vec{x}, \vec{e}_3^*) = \frac{3}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

Ответ: $\vec{x} = -\sqrt{2}\vec{e}_1^* + 2\sqrt{6}\vec{e}_2^* + 2\sqrt{3}\,\vec{e}_3^*$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Проверить составляют ли векторы ортонормированный базис и разложить вектор $\vec{x}$ по этому базису, если:

1. $\vec{e}_1 = (1; 2; 5)$, $\vec{e}_2 = (2; -3; -1)$, $\vec{e}_3 = (2; -3; -2)$,
$\vec{x} = (3; -1; 1)$.
2. $\vec{e}_1 = (1; -1; 0)$, $\vec{e}_2 = (2; 2; 1)$, $\vec{e}_3 = (1; 1; -4)$,
$\vec{x} = (2; 5; 3)$.

Ответы: 1. $\vec{x} = \vec{e}_1^* + 2\vec{e}_2^* + 3\,\vec{e}_3^*$; 2. $\vec{x} = -\frac{3}{\sqrt{2}}\vec{e}_1^* + \frac{17}{3}\vec{e}_2^* - \frac{2}{3\sqrt{2}}\vec{e}_3^*$.

7. ОДНОРОДНЫЕ И НЕОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

7.1. Системы однородных линейных уравнений

Рассмотрим систему m линейных однородных уравнений с n неизвестными. Такая система имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

то есть это система уравнений, в которых все свободные члены равны нулю.

Очевидно, что система линейных однородных уравнений всегда совместна ($r(A) = r(A_1)$ - ранг матрицы коэффициентов при неизвестных равен рангу расширенной матрицы), так как она всегда имеет, по крайней мере, нулевое (или тривиальное) решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Если в системе $m = n$ (то есть число уравнений равно числу неизвестных), а её определитель отличен от нуля, то такая система имеет только одно нулевое решение, что следует из формул Крамера.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $|A| = \Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 17 \neq 0$.

Так как $m = n = 3$ и $\Delta \neq 0$, то система имеет только одно нулевое решение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Важно выяснить, при каком условии однородная система является неопределенной, а значит, - что бывает особенно важно - имеет ненулевые решения. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. Для того чтобы однородная система имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг r её матрицы коэффициентов был меньше числа неизвестных n.

Действительно, если $r = n$, то, как утверждалось выше, система имеет единственное и, значит, только нулевое решение: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Если же $r < n$, то система является неопределенной (ведь несовместной она быть не может), и значит, она имеет бесчисленное множество решений, в том числе и бесчисленное множество ненулевых решений.

Следствие 1. Если число уравнений однородной системы меньше числа её неизвестных, то есть $m < n$, то эта система имеет ненулевые решения.

Следствие 2. Для того чтобы однородная система n линейных уравнений с n неизвестными, то есть $m = n$, обладала ненулевыми решениями, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель Δ был равен нулю.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, $r(A) = 2$ ($\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$),

$n = 3$. Так как $r < n$, то система имеет бесчисленное множество решений. Найдем их. Пусть x_1 и x_2 – базисные переменные, x_3 – свободная переменная.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -4x_3, \\ 2x_1 - 3x_2 = -5x_3. \end{cases}$$

Найдем x_1 и x_2, например, по формулам Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4x_3 & -2 \\ -5x_3 & -3 \end{vmatrix} = 2x_3, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4x_3 \\ 2 & -5x_3 \end{vmatrix} = 3x_3.$$

Тогда получим $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -4x_3 & -2 \\ -5x_3 & -3 \end{vmatrix}}{1} = 2x_3$,

$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4x_3 \\ 2 & -5x_3 \end{vmatrix}}{1} = 3x_3$ - общее решение, где $x_3 \in \mathrm{R}$.

Обозначим $x_3 = t$, тогда $x_1 = 2t$, $x_2 = 3t$. Запишем решение $(2t;\ 3t;\ t)$. Придавая произвольные значения t, получим соответствующие различные решения данной системы. Например, положив $t = 0$, получим одно частное решение: (0; 0; 0). Положив $t = 1$, получим второе частное решение: (2, 3, 1).

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $|A| = \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

Так как $m = n = 3$ и $\Delta = 0$, то система имеет бесчисленное множество решений. Найдем их.

Так как среди миноров определителя однородной системы есть хотя бы один минор второго порядка отличный от нуля (например, $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$), то система сводится к двум независимым уравнениям (третье является их следствием).

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases}$$

Здесь x_1 и x_2 - основные переменные, x_3 - свободная переменная. Тогда имеем

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = x_3, \\ x_1 + 2x_2 = -9x_3. \end{cases}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_3 & 2 \\ -9x_3 & 2 \end{vmatrix} = 20x_3,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & x_3 \\ 1 & -9x_3 \end{vmatrix} = -28x_3.$$

Тогда получим $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} x_3 & 2 \\ -9x_3 & 2 \end{vmatrix}}{4} = 5x_3,$

$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & x_3 \\ 1 & -9x_3 \end{vmatrix}}{4} = -7x_3$ - общее решение, где $x_3 \epsilon$ R.

Обозначим $x_3 = t$, тогда $x_1 = 5t$, $x_2 = -7t$. Запишем решение $(5t;\ -7t;\ t)$. Придавая произвольные значения t, получим соответствующие различные решения данной системы. Например, положив $t = 0$, получим одно частное решение: (0; 0; 0). Положив $t = 1$, получим второе частное решение: (5, –7, 1).

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель основной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix},\ |A| = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как $m = n = 3$ и $\Delta = 0$, то система имеет бесчисленное множество решений. Найдем их.

Так как все миноры второго и третьего порядков определителя однородной системы равны нулю (коэффициенты при неизвестных пропорциональны), то система сводится к одному уравнению (остальные два являются его следствиями).

Тогда получаем

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

Здесь x_1 - базисная переменная, x_2 и x_3 - свободные. Отсюда имеем $x_1 = -x_2 + x_3$ - общее решение,

где $x_2, x_3 \epsilon$ R. Обозначим $x_2 = t_1$ $x_3 = t_2$,

тогда $x_1 = -t_1 + t_2$. Запишем решение $(-t_1 + t_2;\ t_1;\ t_2)$. Придавая произвольные значения t_1 и t_2, получим соответствующие различные решения данной системы. Например, положив $t_1 = 0$, $t_2 = 0$, получим одно частное решение: (0; 0; 0). Положив $t_1 = 1$, $t_2 = 1$, получим второе частное решение: (0, 1, 1).

<u>Свойства решений системы уравнений</u>:

1. Пусть $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, …, $x_n = \alpha_n$ – какое-нибудь ненулевое решение исходной системы. Это решение можно рассматривать как строку

$$\vec{e}_1 = (\alpha_1; \alpha_2; \ldots, \alpha_n),$$

состоящую из n элементов.

Тогда строка $c \cdot \vec{e}_1 = (c \cdot \alpha_1, c \cdot \alpha_2, \ldots, c \cdot \alpha_n)$ тоже будет решением системы.

2. Если строки $\vec{e}_1 = (\alpha_1; \alpha_2; \ldots, \alpha_n)$

и $\vec{e}_2 = (\beta_1; \beta_2; \ldots, \beta_n)$ – решения системы, то при любых c_1 и c_2 линейная комбинация этих решений

$$c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 = (c_1\alpha_1 + c_2\beta_1, c_1\alpha_2 + c_2\beta_2, \ldots, c_1\alpha_n + c_2\beta_n)$$

тоже будет решением системы.

Убедиться в справедливости этих свойств решений однородных систем можно непосредственной подстановкой их в уравнения системы.

Очевидно, что множество решений однородной системы образует линейное векторное пространство.

Итак, любая линейная комбинация решений однородной системы тоже будет её решением. Поэтому представляет интерес найти такие линейно независимые решения системы (1), через которые линейно выражались бы все остальные её решения.

Совокупность линейно независимых решений $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ системы уравнений (1) называется **фундаментальной системой решений**, если любое решение системы уравнений (1) может быть представлено в виде линейной комбинации векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.

<u>Теорема о существовании фундаментальной системы решений:</u>

Если ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

меньше числа неизвестных *n*, то система (1) имеет ненулевые решения. Число векторов, определяющих фундаментальную систему решений, находится по формуле $k = n - r$, где r – ранг матрицы.

Поэтому *общее решение системы* (1) линейных однородных уравнений имеет вид:

$$X_{oo} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + \ldots + c_k\vec{e}_k,$$

где $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k$ – любая фундаментальная система решений (ФСР), c_1, c_2, …, c_k – произвольные числа,

$k = n - r$.

Таким образом, если рассматривается линейное пространство R^n, векторами которого являются всевозможные системы *n* действительных чисел, то совокупность всех решений системы (1) является подпространством пространства R^n. Размерность этого подпространства равна *k*.

<u>Способ построения фундаментальной системы решений.</u>

Пусть система однородных уравнений имеет ранг $r<n$. Тогда существует минор M_r порядка *r* матрицы *A*, не равный нулю. Пусть для определенности это будет минор

$$M_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Исходная система уравнений может быть записана в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = -a_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_n = -a_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots a_{rn}x_n, \end{cases}$$

Тогда базисные неизвестные этой системы $x_1, x_2, \cdots, x_r$ линейно выражаются через свободные: $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$.

Имеем

$$\begin{cases} x_1 = \beta_{11}x_{r+1} + \beta_{12}x_{r+2} + \dots + \beta_{1,n-r}\,x_n, \\ x_2 = \beta_{21}x_{r+1} + \beta_{22}x_{r+2} + \dots + \beta_{2,n-r}\,x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_r = \beta_{r1}x_{r+1} + \beta_{r2}x_{r+2} + \dots + \beta_{r,n-r}\,x_n. \end{cases}$$

Придавая свободным неизвестным значения

$$x_{r+1} = 1,\ x_{r+2} = 0,\ \dots,\ x_n = 0,$$

получим соответствующие значения первых r неизвестных:

$$x_1 = \beta_{11},\ x_2 = \beta_{21},\ \dots,\ x_r = \beta_{r1}.$$

Это дает нам строку - решение системы (1)

$$\vec{e}_1 = (\beta_{11}, \beta_{21}, \dots, \beta_{r1}, 1, 0, \dots, 0).$$

Аналогично, придавая свободным неизвестным значения

$$x_{r+1} = 0,\ x_{r+2} = 1,\ \dots,\ x_n = 0$$

и вычисляя соответствующие значения неизвестных

$$x_1 = \beta_{21},\ x_2 = \beta_{22},\ \dots,\ x_r = \beta_{r2},$$

получим второе решение системы

$$\vec{e}_2 = (\beta_{21}, \beta_{22}, \dots, \beta_{r2}, 0, 1, \dots, 0)$$

и так далее. Аналогично при $x_{r+1} = 0$, $x_{r+2} = 0$, …, $x_n = 1$ решением будет вектор-строка $\vec{e}_{n-r} = (\beta_{n-r,1}, \beta_{n-r,2}, \dots, \beta_{n-r,r}, 0, 0, \dots, 1)$.
Так мы найдем всего $k = n - r$ решений системы:

$$\begin{gathered} \vec{e}_1 = (\beta_{11}, \beta_{21}, \dots, \beta_{r1}, 1, 0, \dots, 0), \\ \vec{e}_2 = (\beta_{12}, \beta_{22}, \dots, \beta_{r2}, 0, 1, \dots, 0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.., \\ \vec{e}_{n-r} = (\beta_{1,n-r}, \beta_{2,n-r}, \dots, \beta_{r,n-r}, 0, 0, \dots, 1). \end{gathered}$$

Векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, …, $\vec{e}_{n-r}$ линейно независимы, так как матрица B, составленная из компонентов этих векторов, имеет ранг, равный $k = n - r$, то есть равный числу векторов.

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{r1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{r2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n-r,1} & \beta_{n-r,2} & \dots & \beta_{n-r,r} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этой матрице есть отличный от нуля минор k – го порядка, например, содержащий последние k столбцов.

Замечание. Для того чтобы получить фундаментальную систему решений, можно было бы придавать свободным неизвестным и какие угодно другие значения, лишь бы соответствующий определитель k – го порядка был не равен нулю. Так можно найти сколько угодно фундаментальных систем решений, каждая из которых состоит из $k = n - r$ строк. Но удобнее всего взять, как было показано выше, в векторном пространстве R^n *канонический базис*, то есть множество векторов

$$B = \{\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1)\}.$$

Пример. Найти общее решение однородной системы уравнений. Указать базис пространства решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Определим ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычитаем из 3-й строки 2-ю, а из 4-й строки 1-ю:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Так как элементы 3-й строки пропорциональны соответствующим элементам 1-й строки, а элементы 4-й строки пропорциональны элементам 2-й строки, то 3-ю и 4-ю строки можно вычеркнуть:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ранг матрицы A равен 2 и $k = n - r = 4 - 2 = =2$. Значит, размерность подпространства решений равна 2. То есть фундаментальная система решений состоит из двух решений.

Так как $r = 2$, то из четырех уравнений возьмем два:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Пусть x_1 и x_2 – главные неизвестные, x_3 и x_4 – свободные неизвестные. Тогда выразим x_1 и x_2 через x_3 и x_4:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 - x_4, \\ x_1 - x_2 = -x_3 + x_4. \end{cases}$$

Полагая $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, получим систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 - x_2 = -1. \end{cases}$$

Следовательно, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ и $\vec{e}_1 = (0; 1; 1; 0)$. Полагая теперь $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, получим систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1, \\ x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

Тогда $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ и $\vec{e}_2 = (0; -1; 0; 1)$.
Таким образом, векторы $\vec{e}_1 = (0; 1; 1; 0)$, $\vec{e}_2 = (0; -1; 0; 1)$ - *фундаментальная система решений*. Они образуют базис пространства решений, размерность которого равна $k = 2$. *Общее решение системы* уравнений будет иметь вид:

<u>в векторной форме</u>: $X_{oo} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2$ или

<u>в координатной форме</u>: $X_{oo} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

т. е. $X_{oo} = (0;\ c_1 - c_2;\ c_1;\ c_2)$, где c_1, c_2 – произвольные действительные числа.

Пример. Найти фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 6x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 + 13x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Найдём ранг системы векторов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 9 \\ 3 & 1 & 7 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & -5 & 10 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, ранг $r = 2$, $n = 4$, то есть $r < n$,
тогда $k = n - r = 4 - 2 = 2$. Значит, размерность подпространства решений равна 2. То есть фундаментальная система решений состоит из двух решений. Система, соответствующая последней матрице, имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 6x_4 = 0, \\ \qquad x_2 - 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, имеем две базисные переменные и две свободные. Пусть x_1 и x_2 – базисные переменные, а x_3 и x_4 – свободные. Тогда выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = x_3 - 6x_4, \\ \qquad x_2 = 2x_3 - x_4. \end{cases}$$

Полагая $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, получим систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ \qquad x_2 = 2. \end{cases}$$

Следовательно, $x_1 = -3$, $x_2 = 2$ и $\vec{e}_1 = (-3;\ 2;\ 1;\ 0)$. Полагая теперь $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, получим систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -6, \\ \qquad x_2 = -1. \end{cases}$$

Тогда $x_1 = -4$, $x_2 = -1$ и $\vec{e}_2 = (-4;\ -1;\ 0;\ 1)$.
Таким образом, векторы

$$\vec{e}_1 = (-3;\ 2;\ 1;\ 0),\ \vec{e}_2 = (-4;\ -1;\ 0;\ 1)$$

– *фундаментальная система решений*. Они образуют базис пространства решений, размерность которого равна $k = 2$. *Общее решение системы уравнений* будет иметь вид:

<u>в векторной форме</u>: $X_{oo} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2$ или

в координатной форме: $X_{oo} = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

т. е. $X_{oo} = (-3c_1 - 4c_2;\ 2c_1 - c_2;\ c_1;\ c_2)$, где c_1, c_2 – произвольные действительные числа.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить системы однородных линейных уравнений:

1.1. $$\begin{cases} -5x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 6x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 7x_3 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

1.2. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = -\frac{1}{3}x_3$, $x_2 = -\frac{2}{3}x_3$, $x_3 \epsilon$ R.

2. Найти фундаментальную систему решений однородной системы уравнений:

2.1. $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\vec{e}_1 = (\frac{5}{7}; \frac{11}{7}; 1; 0)$, $\vec{e}_2 = (\frac{1}{7}; \frac{5}{7}; 0; 1)$.

2.2. $$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 0, \\ 5x_1 - 5x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\vec{e}_1 = (7; 13; 5; 0)$, $\vec{e}_2 = (-9; -16; 0; 5)$.

2.3. $$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 0, \\ -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 5x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\vec{e}_1 = (-\frac{1}{13}; \frac{10}{13}; 1; 0; 0)$, $\vec{e}_2 = (-\frac{5}{13}; \frac{11}{13}; 0; 1; 0)$,

$\vec{e}_3 = (-\frac{10}{13}; \frac{9}{13}; 0; 0; 1)$.

7.2. Неоднородные системы линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

и соответствующую ей систему однородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Заметим, что исследование произвольных систем линейных уравнений было рассмотрено ранее. Предположим, что система (1) совместна и ранг r матрицы A системы меньше числа неизвестных n, то есть система имеет бесчисленное множество решений.

Пусть $\vec{e}_1 = (\alpha_1; \alpha_2; \dots, \alpha_n)$ – какое-то фиксированное решение системы (1) и $\vec{e}_2 = (\beta_1; \beta_2; \dots, \beta_n)$ – любое другое её решение. Тогда разность

$$\vec{e}_1 - \vec{e}_2 = (\alpha_1 - \beta_1; \alpha_2 - \beta_2; \dots, \alpha_n - \beta_n)$$

будет решением системы (2), если

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + \alpha_n a_{in} = b_i \text{ и}$$

$$a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_{in} = b_i, \text{ то}$$

$$a_{i1}(\alpha_1 - \beta_1) + a_{i2}(\alpha_2 - \beta_2) + \dots + a_{in}(\alpha_n - \beta_n) = b_i - b_i = 0.$$

Пусть $\vec{e}_3 = (\gamma_1; \gamma_2; \dots, \gamma_n)$ – произвольное решение системы (2), тогда сумма

$$\vec{e}_1 + \vec{e}_3 = (\alpha_1 + \gamma_1; \alpha_2 + \gamma_2; \dots, \alpha_n + \gamma_n)$$

будет удовлетворять системе (1), если

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = b_i \text{ и}$$

$$a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \dots + a_{in}\gamma_n = 0, \text{ то}$$

$$a_{i1}(\alpha_1 + \gamma_1) + a_{i2}(\alpha_2 + \gamma_2) + \dots + a_{in}(\alpha_n + \gamma_n) = b_i + 0 = b_i.$$

Отсюда следует, что все решения системы (1) можно получить, прибавляя к одному какому-нибудь её решению всевозможные решения однородной системы (2). Другими словами, *общее решение неоднородной системы* (1) *равно сумме общего решения однородной системы и произвольного, но фиксированного решения системы* (1): если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$ – фундаментальная система решений однородной системы (2) и $\vec{e}_0$ - произвольное фиксированное решение неоднородной системы (1), то общее решение системы (1) имеет вид:

$$c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + \dots + c_k\vec{e}_k + \vec{e}_0,$$

где $c_1, c_2, \dots, c_k$ – произвольные числа.

Если обозначить $\vec{e}_0 = X^*$, а $X_{\text{он}}$ – общее решение неоднородной системы линейных уравнений, то кратко можно записать:

$$X_{\text{он}} = X_{\text{оо}} + X^*.$$

Пример. Найти общее решение неоднородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 1, \end{cases}$$

используя фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

Решение. 1. Применяя метод Гаусса к расширенной матрице системы, получим общее решение в виде выражения главных неизвестных через свободные

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы равны, то есть $r = 2$. Значит, система совместна и имеет бесчисленное множество решений.

Выпишем базисный минор $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$, следовательно, основными неизвестными будут x_1 и x_4, а свободными – x_2, x_3, x_5, x_6. По преобразованной матрице запишем эквивалентную систему уравнений и получим *общее решение неоднородной системы уравнений*:

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 & = 2, \\ & 3x_4 - 3x_5 + 3x_6 = -1 \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} + x_2 - x_3, \\ x_4 = -\frac{1}{3} + x_5 - x_6. \end{cases}$$

Пусть $x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = 0$, тогда получим частное решение системы уравнений

$$\vec{e}_0 = X^* = (\tfrac{2}{3};\ 0;\ 0;\ -\tfrac{1}{3};\ 0;\ 0).$$

2. Найдем фундаментальную систему решений. Запишем однородную систему в виде

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 & = 0, \\ & 3x_4 - 3x_5 + 3x_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3, \\ x_4 = x_5 - x_6. \end{cases}$$

Тогда:

при $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$ получим базисный вектор

$$\vec{e}_1 = (1;\ 1;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0);$$

при $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$ получим базисный вектор

$$\vec{e}_2 = (-1;\ 0;\ 1;\ 0;\ 0;\ 0);$$

при $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_5 = 1$, $x_6 = 0$ получим базисный вектор

$$\vec{e}_3 = (0;\ 0;\ 0;\ 1;\ 1;\ 0);$$

при $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 1$ получим базисный вектор

$$\vec{e}_4 = (0;\ 0;\ 0;\ -1;\ 0;\ 1).$$

<u>Векторная форма записи общего решения неоднородной системы уравнений</u>

$$X_{\text{он}} = \vec{e}_0 + c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3 + c_4\vec{e}_4.$$

<u>Координатная форма записи общего решения неоднородной системы уравнений</u>

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} +.c_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти общее решение неоднородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 = 22, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 7x_4 = 18, \end{cases}$$

используя фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

$$\text{Ответ: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{106}{19} \\ \frac{100}{19} \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{37}{19} \\ -\frac{41}{19} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{31}{19} \\ -\frac{21}{19} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Найти общее решение неоднородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 13x_4 + 8x_5 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 11x_4 + 11x_5 = 5 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 + 4x_5 = 1, \end{cases}$$

используя фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

$$\text{Ответ: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где c_1, c_2, c_3 – произвольно задаваемые действительные числа.

8. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

8.1. Понятие линейного оператора

Рассмотрим два линейных векторных пространства: R^n и R^m.

Если задан закон (правило), по которому каждому вектору $\vec{x}$ пространства R^n ставится в соответствие единственный вектор $\vec{y}$ пространства R^m, то говорят, что задан *оператор (преобразование, отображение)* $\tilde{A}(\vec{x})$, действующий из R^n в R^m, и записывают $\overrightarrow{y}= \tilde{A}(\vec{x})$.

Оператор (преобразование) $\tilde{A}$ называется *линейным*, если для любых двух векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ пространства R^n и любого действительного числа λ справедливы равенства:

1) $\tilde{A}(\vec{x}+ \vec{y}) = \tilde{A}(\vec{x}) + \tilde{A}(\vec{y})$ - свойство аддитивности оператора;
2) $\tilde{A}(\lambda\vec{x}) = \lambda\, \tilde{A}(\vec{x})$ - свойство однородности оператора.

Вектор $\vec{y} = \tilde{A}(\vec{x})$ называется *образом* вектора $\vec{x}$, а сам вектор $\vec{x}$ – *прообразом* вектора $\vec{y}$.

Если пространства R^n и R^m совпадают, то оператор A отображает пространство R^n в себя.

Матрица $A = (a_{ij})$, $(i,\ j = 1,2,\ldots,n)$ называется *матрицей оператора* A в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$, а ранг r матрицы A - *рангом оператора* A.

Можно показать, что каждому линейному оператору $\tilde{A}$ в некотором базисе пространства R^n соответствует матрица A, по которой можно пересчитывать любой вектор в его *образ* в этом же базисе. Справедливо и обратное: всякой матрице A n - го порядка соответствует линейный оператор $\tilde{A}$ n - мерного пространства.

Связь между вектором $\vec{x}$ *и его образом* $\vec{y} = \tilde{A}(\vec{x})$ можно выразить в матричной форме уравнением

$$\vec{y} = A\cdot\vec{x}, \tag{1}$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица линейного оператора, а

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix},\ \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Выражение (1) через компоненты векторов имеет вид:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

Пример. В пространстве R^3 линейный оператор $\tilde{A}$ задан в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найти образ $\vec{y} = \tilde{A}(\vec{x})$ вектора $\vec{x} = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3$.
Решение. По формуле (2) получаем

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\vec{y} = -5\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 + 8\vec{e}_3$.

Действия над линейными операторами.

1. *Суммой двух линейных операторов* $\tilde{A}$ *и* $\tilde{B}$ называется оператор ($\tilde{A} + \tilde{B}$), определяемый равенством:

$$(\tilde{A} + \tilde{B})(\vec{x}) = \tilde{A}(\vec{x}) + \tilde{B}(\vec{x}).$$

2. *Произведением линейного оператора* $\tilde{A}$ *на число* λ называется оператор $\lambda\ \tilde{A}$, определяемый равенством:

$$\lambda\ \tilde{A}(\vec{x}) = \lambda(\tilde{A}(\vec{x})).$$

3. *Произведением линейных операторов* $\tilde{A}$ *и* $\tilde{B}$ называется оператор $\tilde{A}\cdot\tilde{B}$, определяемый равенством:

$$(\tilde{A}\,\tilde{B})(\vec{x}) = \tilde{A}(\tilde{B}(\vec{x})).$$

Операторы $(\tilde{A} + \tilde{B})$, $\lambda\tilde{A}$, $(\tilde{A}\cdot\tilde{B})$, полученные в результате этих действий, также удовлетворяют свойствам аддитивности и однородности, т. е. являются *линейными*.

4. *Нулевым* $\tilde{O}(\vec{x})$ и *тождественным* $\tilde{E}(\vec{x})$ называются операторы, действующие по правилу:

$$\tilde{O}(\vec{x}) = \vec{0},$$
$$\tilde{E}(\vec{x}) = \vec{x}.$$

Для разных базисов матрицы одного и того же оператора будут различными. Связь между ними дается следующей теоремой.

Теорема. Матрицы A и A^* линейного оператора $\tilde{A}$ соответственно в базисах $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ и $\vec{e}_1^{\,*}, \vec{e}_2^{\,*}, \ldots, \vec{e}_n^{\,*}$ связаны соотношением:

$$A^* = C^{-1}\cdot A\cdot C, \qquad (3)$$

где C - матрица перехода от старого базиса $\{\vec{e}_n\}$ к новому $\{\vec{e}_n^{\,*}\}$.

Пусть $\tilde{A}$ – линейный оператор пространства R. Совокупность D всевозможных векторов вида $\tilde{A}(\vec{x})$, где $\vec{x} \in R$, называется *областью значений* или *образом* оператора $\tilde{A}(\mathrm{im}\tilde{A})$, а совокупность M всевозможных векторов $\vec{x}$, для которых $\tilde{A}(\vec{x}) = 0$, называется его *ядром* $(\ker\tilde{A})$.

Область значений и ядро линейного оператора являются подпространствами в R.

Размерность области значений (образа) оператора $\tilde{A}$ совпадает с рангом матрицы A и называется *рангом* оператора $\tilde{A}$. Размерность ядра M называется *дефектом* оператора $\tilde{A}$.

Сумма ранга и дефекта линейного оператора $\tilde{A}$ равна размерности n пространства R.

Пример. В пространстве R^3 линейный оператор $\tilde{A}$ задан в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу A^* оператора $\tilde{A}$ в базисе:

$$\vec{e}_1^{\,*} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3,\ \vec{e}_2^{\,*} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_3,\ \vec{e}_3^{\,*} = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3.$$

Решение. Матрица перехода C от старого базиса $\{\vec{e}_n\}$ к новому $\{\vec{e}_n^{\,*}\}$ имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

а обратная к ней матрица:

$$C^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 13 & 9 \\ 0 & 5 & 5 \\ 2 & -7 & -6 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, по формуле $A^* = C^{-1}\cdot A\cdot C$ получим:

$$A^* = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 13 & 9 \\ 0 & 5 & 5 \\ 2 & -7 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 16{,}2 & 21{,}4 & 35{,}8 \\ 6{,}0 & 9{,}0 & 14{,}0 \\ -8{,}8 & -11{,}6 & -19{,}2 \end{pmatrix}.$$

8.2. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

Ненулевой вектор $\vec{x}$ называется *собственным вектором* линейного оператора $\tilde{A}$ (квадратной матрицы A), если найдется такое действительное число λ, что

$$\tilde{A}(\vec{x}) = \lambda\vec{x} \text{ или } A\vec{x} = \lambda\vec{x}.$$

Число λ называется *собственным значением* (или *собственным числом*) оператора $\tilde{A}$ (матрицы A), соответствующим вектору $\vec{x}$.

Множество всех собственных значений оператора $\tilde{A}$ (матрицы A) называется *спектром линейного оператора* $\tilde{A}$ (матрицы A).

Из определения следует, что собственный вектор после действия на него оператором $\tilde{A}$, переходит в тот же вектор, умноженный на число, то есть в вектор, коллинеарный самому себе.

Из матричного равенства $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ следуют равенства, связывающие компоненты вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \lambda x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = \lambda x_n. \end{cases} \tag{1}$$

Перепишем эту систему в виде:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases} \tag{2}$$

или

$$(A - \lambda E) \cdot \vec{x} = \vec{0}, \tag{3}$$

где E – единичная матрица той же размерности, что и матрица A.

Система (2) однородная и для существования ненулевых решений такой системы необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы равнялся нулю:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Уравнение $|A - \lambda E| = 0$ называется *характеристическим уравнением линейного оператора* $\tilde{A}$ (матрицы A), а многочлен вида $p(\lambda) = (-1)^n|A - \lambda E|$ – *характеристическим многочленом*.

Характеристический многочлен линейного оператора не зависит от выбора базиса. Это свойство многочлена имеет место потому, что величина определителя матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса.

Собственные значения могут быть действительными различными, действительными кратными или комплексными числами.

Свойства собственных значений и собственных векторов

1) Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы.

2) Если матрица оператора симметричная, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$,
$\forall i, j = 1,2,\ldots,n$, то собственные значения ее действительные.

3) Если собственные векторы матрицы образуют базис, то в этом базисе матрица оператора имеет *диагональный вид*, причем ее диагональными элементами являются собственные числа, то есть

$$A^{*}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

И обратно, если матрица линейного оператора в некотором базисе является диагональной, то все векторы этого базиса - собственные векторы оператора с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Для нахождения собственных значений и собственных векторов матрицы A нужно найти все различные корни характеристического уравнения

$$|A-\lambda E| = 0$$

и для каждого такого корня найти фундаментальную систему решений однородной системы уравнений

$$(A-\lambda E)\,X = 0,$$

совокупность которых образует линейно независимую систему собственных векторов.

Каждому собственному значению λ_i соответствует хотя бы один собственный вектор, так как однородная система, определитель которой равен нулю, имеет хотя бы одно ненулевое решение.

Пример 1. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\tilde{A}$ (матрицы A):

$$a)\ A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 4 & 3\end{pmatrix};\ \text{б})\ A=\begin{pmatrix}1 & -4 & -8\\ -4 & 7 & -4\\ -8 & -4 & 1\end{pmatrix}.$$

Решение: $a)\ A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 4 & 3\end{pmatrix}$.

1. Составим характеристическое уравнение

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix}2-\lambda & 5\\ 4 & 3-\lambda\end{vmatrix} = 0 \text{ или } (2-\lambda)\cdot(3-\lambda) - 20 = 0,$$

откуда $\lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0$ и собственные значения матрицы $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 7$.

2. Найдем собственный вектор $\vec{x}^{(1)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = -2$:

$$(A+2E)\,\vec{x} = \vec{0} \text{ или } \begin{pmatrix}4 & 5\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}, \text{ т. е.}$$

$$\begin{cases}4x_1 + 5x_2 = 0,\\ 4x_1 + 5x_2 = 0.\end{cases}$$

Так как ранг системы уравнений равен $r = 1$, поэтому одно из неизвестных x_1 или x_2 можно задать произвольно. Например, полагая $x_2 = c_1$, найдем ($x_1 = -\frac{5}{4}c_1$, $x_2 = c_1$), т. е. вектор $\vec{x}^{(1)}$ = ($-\frac{5}{4}c_1$; c_1) при любом $c_1 \neq 0$ есть собственный вектор оператора $\tilde{A}$ (матрицы A) с собственным значением $\lambda_1 = -2$.

3. Аналогично найдем собственный вектор $\vec{x}^{(2)}$, соответствующий собственному значению λ_2 = 7:

$$(A - 7E)\,\vec{x} = \vec{0} \text{ или } \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ т. е.}$$

$$\begin{cases} -5x_1 + 5x_2 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 = 0. \end{cases}$$

Так как ранг системы уравнений равен $r = 1$, значит, одно из неизвестных x_1 или x_2 можно задать произвольно. Пусть $x_2 = c_2$, тогда найдем ($x_1 = c_2$; $x_2 = c_2$), т. е. вектор $\vec{x}^{(2)} = (c_2; c_2)$ при любом $c_2 \neq 0$ есть собственный вектор оператора $\tilde{A}$ (матрицы A) с собственным значением $\lambda_2 = 7$.

Решение: б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Составим характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -8 \\ -4 & 7-\lambda & -4 \\ -8 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая любым способом определитель, получим уравнение:

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 - 81\lambda + 729 = 0.$$

Решая это уравнение, получим:

$$\lambda^2(\lambda - 9) - 81(\lambda - 9) = 0 \text{ или } (\lambda - 9)(\lambda^2 - 81) = 0,$$

откуда собственные значения оператора $\tilde{A}$ (матрицы A):

$\lambda_1 = \lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = -9$.

2. Найдем собственный вектор $\vec{x}^{(1)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$:

$$(A - 9E)\,\vec{x} = \vec{0} \text{ или } \begin{pmatrix} -8 & -4 & -8 \\ -4 & -2 & -4 \\ -8 & -4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решая полученную систему методом Гаусса, получим:

$$\begin{cases} -8x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0, \\ 0 = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Так как ранг системы уравнений $r = 1$, то для получения ее решений нужно рассматривать $m - r = 3 - 1 = 2$ свободные (неосновные) переменные, например, x_2 и x_3.

Полагая $x_2 = c_1$ и $x_3 = c_2$, найдем вектор

$$\vec{x}^{(1)} = \left(-\frac{1}{2}c_1 - c_2;\ c_1;\ c_2\right),$$

который при любых c_1 и c_2 (где ${c_1}^2 + {c_2}^2 \neq 0$) есть собственный вектор оператора $\tilde{A}$ (матрицы A) с собственным значением $\lambda = 9$.

3. Аналогично находим, что вектор $\vec{x}^{(2)} = (c_3;\ \frac{1}{2}c_3;\ c_3)$ при любом $c_3 \neq 0$ есть собственный вектор оператора $\tilde{A}$ (матрицы A) с собственным значением $\lambda = -9$.

Пример 2. Привести к диагональному виду матрицу A линейного оператора $\tilde{A}$:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix};\ б)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. a) В примере 1,a найдены собственные значения оператора $\tilde{A}$ (матрицы A) $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 7$ и его собственные векторы $\vec{x}^{(1)} = (-\frac{5}{4}c_1;\ c_1)$, $\vec{x}^{(2)} = (c_2;\ c_2)$, где $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$. Следовательно, в базисе $(\vec{x}^{(1)},\ \vec{x}^{(2)})$, состоящем из собственных векторов, матрица A будет иметь диагональный вид, т.е.

$$A^* = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Это означает, что при переходе от старого базиса
$\left(\vec{e}_1 = \binom{2}{4};\ \vec{e}_2 = \binom{5}{3}\right)$ к базису $\left(\vec{x}^{(1)};\ \vec{x}^{(2)}\right)$, состоящему из собственных векторов, т.е., например, при матрице перехода $C = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ (полученной при $c_1 = 4$, $c_2 = 1$) и обратной к ней $C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$, матрица A в соответствии с формулой (3) станет диагональной:

$$A^* = C^{-1} \cdot A \cdot C = \begin{pmatrix} \frac{-1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

б) В примере 1,б найдены собственные значения оператора $\tilde{A}$ (матрицы A): $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = -9$ и его собственные векторы

$$\vec{x}^{(1)} = (-\frac{1}{2}c_1 - c_2;\ c_1;\ c_2),\ \vec{x}^{(2)} = (c_3;\ \frac{1}{2}c_3;\ c_3),$$

где $c_1{}^2 + c_2{}^2 \neq 0$. Следовательно, в базисе, состоящем из трёх собственных векторов, матрица A будет иметь диагональный вид:

$$A^* = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Это означает, что при переходе от старого базиса $\left(\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix};\ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix};\ \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ к базису, состоящему из собственных векторов (полученных, например, при $c_1 = 2$, $c_2 = 0$, $c_3 = 2$ и $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = 2$),

т. е. при матрице перехода $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ матрица A в соответствии с формулой (3) станет диагональной:

$$A^* = C^{-1} \cdot A \cdot C = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Привести к диагональному виду матрицу A линейного оператора $\tilde{A}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1. Составим характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -3 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая любым способом определитель, получим уравнение:

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 21\lambda - 18 = 0 \text{ или } (\lambda - 2)(\lambda - 3)^2 = 0.$$

Решая это уравнение, получим собственные значения: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

2. Найдем собственный вектор $\vec{x}^{(1)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 2$:

$$(A - 2E)\,\vec{x} = \vec{0} \text{ или } \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решая полученную систему методом Гаусса, получим:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Так как ранг системы уравнений $r = 2$, то для получения ее решений нужно рассматривать $m - r = 3 - 2 = 1$ свободную (неосновную) переменную, например, x_3.

Полагая $x_3 = c_1$, найдем вектор $\vec{x}^{(1)} = (0;\ -c_1;\ c_1)$, который при любом $c_1 \neq 0$ есть собственный вектор оператора $\tilde{A}$ (матрицы A) с собственным значением $\lambda_1 = 2$.

3. Аналогично находим, что вектор $\vec{x}^{(2)} = (\frac{1}{2}c_2; -\frac{3}{2}c_2;\ c_2)$ при любом $c_2 \neq 0$ есть собственный вектор оператора $\tilde{A}$ (матрицы A) с собственным значением $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

Так как два линейно независимых собственных вектора, получаемых при любых парах значений $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ не могут образовать базис в пространстве R^3, то матрица A не может быть приведена к диагональному виду.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\tilde{A}$ (матрицы A):

1.1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. 1.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Привести, если это возможно, к диагональному виду матрицу A линейного оператора $\tilde{A}$:

2.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. 2.2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

2.3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$. 2.4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Составить матрицу C перехода к базису из собственных векторов и найти матрицу $A^* = C^{-1} \cdot A \cdot C$.

Ответы:1.1. $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$; $(-2c_1; c_1)$, $(c_2; c_2)$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$.

1.2. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -3$; $(-2c_1; c_1; c_1)$, $(0; c_2; c_2)$,

$(6c_3; -7c_3; 5c_3)$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, $c_3 \neq 0$. 2.1. Не приводится. 2.2. $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

2.3. $A^* = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. 2.4. Не приводится.

3. $C = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A^* = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8.3. Ортогональные и симметрические матрицы линейных преобразований

Квадратная матрица A называется *симметрической* (*симметричной*), если она не меняется при транспонировании, то есть $A = A^{\mathrm{T}}$ или $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall\, i = 1, \dots, n, j = 1,2,\dots, n$. Например, $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 6 \\ 5 & 8 & 4 \\ 6 & 4 & 9 \end{pmatrix}$.

Свойства симметрических матриц

1. Собственные значения симметрической матрицы – действительные числа.
2. Любая симметрическая матрица имеет, по крайней мере, один набор попарно перпендикулярных собственных векторов.
3. Симметрическая матрица может быть приведена к диагональному виду.

Квадратная матрица A называется *ортогональной,* если при транспонировании она совпадает со своей обратной матрицей, то есть $Q^{-1} = Q^T$.

Свойства ортогональной матрицы Q

1. $Q^{-1} \cdot Q^T = E$.
2. Определитель $|Q| = 1$ или $|Q| = -1$.
3. В ортогональной матрице как строки, так и столбцы образуют ортонормированную систему векторов.
4. С помощью ортогональной матрицы Q симметрическая матрица A может быть приведена к диагональному виду

$$Q^T A Q = A^*,$$

где $A^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$; $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – собственные значения матрицы A.

5. Симметрическая матрица A может быть представлена через ортогональную и диагональную матрицы в виде $A = Q \cdot A^* \cdot Q^T$.

На основании перечисленных свойств симметрических и ортогональных матриц составим *план приведения симметрической матрицы к диагональному виду*:

1. Найти все собственные значения матрицы A.
2. Сформировать базис из ортогональных собственных векторов.
3. Составить матрицу перехода C к базису из собственных векторов.
4. Нормировать столбцы матрицы C (т. е. каждый собственный вектор разделить на его длину), в результате получая матрицу Q.
5. Транспонируя матрицу Q, получить обратную матрицу Q^{-1}.
6. Вычислить диагональную матрицу по формуле

$A^* = Q^{-1}AQ$.

Пример 1. Привести симметрическую матрицу A к диагональному виду с помощью ортогональной матрицы Q, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 16-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

которое можно привести к виду:

$$-\lambda(3-\lambda)(16-\lambda) - 4(16-\lambda) = 0 \text{ или}$$
$$(16-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0,\ (16-\lambda)(\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0.$$

Собственные значения матрицы A: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 16$.

1. Найдем собственный вектор $\vec{x}^{(1)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = -1$

$$(A - \lambda_1 E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \text{ или } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

и запишем соответствующую линейную систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 = 0, \\ 17x_3 = 0. \end{cases}$$

Так как ранг системы уравнений $r = 2$, то для получения ее решений нужно рассматривать $m - r = 3 - 2 = 1$ свободную (неосновную) переменную, например, x_2.

Полагая $x_2 = c_1$, найдем вектор $\vec{x}^{(1)} = (-2c_1;\ c_1;\ 0)$, который при любом $c_1 \neq 0$ есть собственный вектор оператора $\tilde{A}$ (матрицы A) с собственным значением $\lambda_1 = -1$.

2. Найдем собственный вектор $\vec{x}^{(2)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 4$:

$$(A - \lambda_2 E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \text{ или } \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которое соответствует линейной системе

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 - x_2 = 0, \\ 12x_3 = 0. \end{cases}$$

Так как ранг системы уравнений $r = 2$, то для получения ее решений нужно рассматривать

$m - r = 3 - 2 = 1$ свободную (неосновную) переменную, например, x_1.

Полагая $x_1 = c_2$, найдем вектор $\vec{x}^{(2)} = (c_2;\ 2c_2;\ 0)$, который при любом $c_2 \neq 0$ есть собственный вектор оператора $\tilde{A}$ (матрицы A) с собственным значением $\lambda_2 = 4$.

3. Найдем собственный вектор $\vec{x}^{(3)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_3 = 16$

$$(A - \lambda_3 E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \text{ или } \begin{pmatrix} -16 & 2 & 0 \\ 2 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

и запишем соответствующую линейную систему

$$\begin{cases} -16x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 - 13x_2 = 0, \\ 0 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = c_3. \end{cases}$$

Так как ранг системы уравнений $r = 2$, то для получения ее решений нужно рассматривать $m - r = 3 - 2 = 1$ свободную (неосновную) переменную, например, x_3.

Полагая $x_3 = c_3$, найдем третий собственный вектор $\vec{x}^{(3)} = (0;\ 0;\ c_3)$, который при любом $c_3 \neq 0$ есть собственный вектор оператора $\tilde{A}$ (матрицы A) с собственным значением $\lambda_3 = 16$.

Положим $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ и получим попарно ортогональные собственные векторы:

$$\vec{x}^{(1)} = (-2;\ 1;\ 0),\ \vec{x}^{(2)} = (1;\ 2;\ 0),\ \vec{x}^{(3)} = (0;\ 0;\ 1),$$

которые образуют ортогональный базис. Матрица перехода C к этому базису:

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что заданная матрица – симметрическая. Можно было найти C^{-1}, и тогда диагональная матрица равна $A^* = C^{-1} \cdot A \cdot C$. Однако быстрее нормировать базис, разделив каждую координату вектора на длину вектора и составить матрицу Q. Получим ортонормированный базис

$$\vec{x}^{(1)}{}_n = \left(-\tfrac{2}{\sqrt{5}};\ \tfrac{1}{\sqrt{5}};\ 0\right),\ \vec{x}^{(2)}{}_n = \left(\tfrac{1}{\sqrt{5}};\ \tfrac{2}{\sqrt{5}};\ 0\right),\ \vec{x}^{(3)}{}_n = \left(0;\ 0;\ \tfrac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \text{ – ортогональная матрица.}$$

По свойству $Q^{-1} = Q^T$ запишем обратную матрицу:

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Вычислив произведение трех матриц, получим диагональную матрицу

$$A^* = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим пример, в котором собственные числа не все различны.

Пример 2. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\tilde{A}$ (матрицы A):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$p(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 3) = 0.$$

Собственные значения матрицы A: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$.

1. Найдем собственный вектор $\vec{x}^{(1)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:

$$(A - \lambda E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \text{ или } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и запишем соответствующую линейную систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ -x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Так как ранг системы уравнений $r = 1$, то для получения ее решений нужно рассматривать $m - r = 3 - 1 = 2$ свободных (неосновных) переменных, например, x_2 и x_3.

Задавая $x_2 = c_1$, $x_3 = c_2$, где $c_1{}^2 + c_2{}^2 \neq 0$, получим фундаментальную систему решений

$$Xo.o. = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, можно указать два линейно независимых вектора, соответствующих собственному значению $\lambda_1 = 1$, которые являются фундаментальными решениями однородной системы (*) при $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ и при $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, т. е.

$$\vec{x}^{(1)} = X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \vec{x}^{(2)} = X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Эти векторы являются ортогональными, в чем легко убедиться, хотя заданная матрица не является симметрической. Полученные линейно независимые ортогональные векторы - собственные векторы матрицы A, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = 1$.

Второй вектор имеет длину (норму), равную единице и, следовательно, является нормированным.

Нормируем первый вектор, разделив все его координаты на длину, равную $\sqrt{2}$. Получим

$$X^{(1)}{}_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } X^{(2)}{}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Найдем собственный вектор $\vec{x}^{(2)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_3 = 3$:

$$(A-\lambda E)\cdot\vec{x}=\vec{0} \text{ или } \begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

и запишем соответствующую линейную систему:

$$\begin{cases}-x_1-x_2=0,\\ -x_1-x_2=0,\\ x_1-x_2-2x_3=0.\end{cases}$$

Так как ранг системы уравнений $r = 2$, то для получения ее решений нужно рассматривать $m - r = 3 - 2 = 1$ свободную переменную, например, $x_1 = c_3$. Тогда $x_2 = -c_3$, $x_3 = c_3$, тогда выпишем соответствующий собственный вектор

$$\vec{x}^{(3)}=(c_3;-c_3;c_3) \text{ или } X^{(3)}=c_3\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$$

и нормируем его: $X^{(3)}{}_n=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$.

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix} \text{ – ортогональная матрица.}$$

По свойству $Q^{-1} = Q^T$ запишем обратную матрицу:

$$Q^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

Вычислив произведение трех матриц, получим в ортонормированном базисе собственных векторов диагональную матрицу:

$$A^*=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Если собственные значения симметрической матрицы в трёхмерном линейном пространстве все одинаковы:

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda,$$

то матрица определяет преобразование подобия с коэффициентом λ. В этом случае все векторы пространства являются собственными векторами. В качестве нового базиса можно взять любую тройку единичных попарно ортогональных векторов, например,

$$\vec{x}^{(1)} = (1;\ 0;\ 0),\ \vec{x}^{(2)} = (0;\ 1;\ 0),\ \vec{x}^{(3)} = (0;\ 0;\ 1).$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Привести симметрическую матрицу A к диагональному виду с помощью ортогональной матрицы Q, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Ответ: $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $A^* = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

9. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

9.1. Матрица квадратичной формы

Квадратичной формой $L(x_1; x_2;\ ...;\ x_n)$ от n переменных называется сумма, каждый член которой является либо квадратом одной из переменных, либо произведением двух разных переменных, взятых с некоторым коэффициентом:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j, \tag{1}$$

где коэффициенты a_{ij} квадратичной формы – действительные числа, причем $a_{ij} = a_{ji}$.

Симметрическая матрица $A = (a_{ij})$ ($i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$), составленная из этих коэффициентов, называется *матрицей квадратичной формы*.

Мы будем рассматривать квадратичные формы с двумя переменными:

$$L(x_1, x_2) = a_{11}x_1{}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2{}^2 \tag{2}$$

и с тремя переменными:

$$L(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1{}^2 + a_{22}x_2{}^2 + a_{33}x_3{}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \\ + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{13}x_1x_3 \tag{3}$$

Квадратичные формы можно записать в матричной форме, введя в рассмотрение матрицу A квадратичной формы.

Для (2) матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Для (3) матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что матрица квадратичной формы является симметрической матрицей. Если для переменных введем матрицу - столбец X и транспонированную X^T матрицу - строку, то в *матричной записи* квадратичная форма будет иметь вид:

$$L = X^T AX, \tag{4}$$

где $X^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$– соответственно вектор-строка и вектор - столбец переменных.

Пример 1. Дана квадратичная форма

$$L(x_1, x_2) = x_1{}^2 + 4x_2{}^2 - 6x_1x_2.$$

Записать её в матричной форме.

Решение. Найдем матрицу квадратичной формы. Её диагональные элементы равны коэффициентам при квадратах переменных, а остальные элементы равны половине коэффициентов при произведениях различных переменных квадратичной формы и должны быть размещены симметрично главной диагонали. Поэтому

$$L(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X^T \cdot A \cdot X.$$

Пример 2. Дана квадратичная форма

$L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1{}^2 + x_2{}^2 + 5x_3{}^2 - 12x_1x_2 - 10x_1x_3$. Записать её в матричной форме.

Решение. Найдем матрицу квадратичной формы

$$L\,(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 4 & -6 & -5 \\ -6 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = X^T AX.$$

Ранг матрицы A квадратичной формы называют *рангом квадратичной формы*.

Если ранг совпадает с числом переменных квадратичной формы (т. е. $r\,(A) = n$ или det $(A) \neq 0$), то её называют *невырожденной.*

Если $r\,(A) < n$, то квадратичная форма – *вырожденная*.

Пример 3. Установить, является ли невырожденной квадратичная форма

$$L\,(x_1, x_2,\ x_3) = 3x_1{}^2 + 8x_1x_3?$$

Решение. Найдем матрицу квадратичной формы

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и найдем ранг матрицы A.

Так как величина ранга не зависит от элементарных преобразований матрицы, то, отбрасывая нулевую строку, найдем минор второго порядка

$$M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2,$$

то есть ранг матрицы меньше трех переменных, входящих в квадратичную форму. Следовательно, данная квадратичная форма вырожденная.

9.2. Канонический и нормальный вид квадратичной формы

В квадратичной форме $L = X^T AX$ можно выполнить линейное преобразование переменных

$X = C{\cdot}Y$, где $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$,

$C_{n\times n} = (c_{ij})$ - невырожденная квадратная матрица n - го порядка. Учитывая линейное преобразование переменных, получим равенство:

$$L = X^TAX = (CY)^TACY = Y^TC^TACY = Y^T(C^TAC)Y = Y^TA^*Y \ (1)$$

Новая матрица квадратичной формы:

$$A^* = C^TAC. \qquad (2)$$

Первоначальная квадратичная форма и полученная из неё с помощью невырожденного линейного преобразования квадратичная форма называются *эквивалентными квадратичными формами*.

Пример. Дана квадратичная форма

$$L(x_1, x_2) = {x_1}^2 + 3{x_2}^2 + 4x_1x_2.$$

Найти эквивалентную квадратичную форму $L(y_1, y_2)$, используя линейное преобразование переменных:

$$x_1 = y_1 - 2y_2,\ x_2 = y_1 + y_2.$$

Решение. Найдем матрицу квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Заданное линейное преобразование в матричной форме

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрица $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда получим новую матрицу:

$$A^* = C^TAC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $L\ (y_1, y_2) = 8{y_1}^2 - {y_2}^2 - 2y_1y_2$.

Наиболее простой формой, эквивалентной данной квадратичной форме, является каноническая квадратичная форма.

Квадратичная форма $L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_ix_j$ называется *канонической* (или имеет *канонический вид*), если все её коэффициенты $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$:

$$L = a_{11}{x_1}^2 + a_{22}{x_2}^2 + \dots + a_{nn}{x_n}^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, {x_i}^2,$$

а её матрица является диагональной.

Квадратичная форма с действительными коэффициентами имеет *нормальный вид*, если в её каноническом виде все коэффициенты равны 1 или –1.

Ранг квадратичной формы равен числу отличных от нуля коэффициентов канонической формы и не меняется при линейных преобразованиях.

Теорема. Любая квадратичная форма с помощью невырожденного линейного преобразования переменных может быть приведена к каноническому виду.

Если квадратичная форма зависит от двух переменных $L\ (x_1, x_2)$ и $\lambda_1,\ \lambda_2$ – собственные значения её матрицы, то канонический вид квадратичной формы в новых переменных имеет вид:

$$L = \lambda_1{y_1}^2 + \lambda_2{y_2}^2.$$

Если квадратичная форма зависит от трёх переменных $L(x_1, x_2,\ x_3)$ и $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ – собственные значения её матрицы, то канонический вид квадратичной формы в новых переменных имеет вид:

$$L = \lambda_1{y_1}^2 + \lambda_2{y_2}^2 + \lambda_3{y_3}^2.$$

Возможны два способа приведения квадратичных форм к каноническому виду.

Первый способ. Метод Лагранжа состоит в том, что путем тождественных преобразований в квадратичной форме последовательно выделяются полные квадраты по всем переменным.

Второй способ. Матрица квадратичной формы всегда симметрическая, поэтому она имеет действительные собственные значения и сводится к диагональному виду с помощью линейного ортогонального преобразования

$$X = QY,$$

где Q – ортогональная матрица.

Чтобы найти линейное преобразование переменных, приводящих квадратичную форму к каноническому виду, нужно найти собственные векторы, нормировать их и записать матрицу Q.

Пример 1. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$L(x_1, x_2) = 3{x_1}^2 + 3{x_2}^2 - 4x_1x_2.$$

Решение. *Первый способ.* Сгруппируем все члены, содержащие x_1, дополним их до полного квадрата:

$$L(x_1, x_2) = 3({x_1}^2 - \frac{4}{3}\, x_1x_2 + \frac{4}{9}\, {x_2}^2) - \frac{4}{3}\, {x_2}^2 + 3{x_2}^2 = 3{(x_1 - \frac{2}{3}\, x_2)}^2 + \frac{5}{3}\, {x_2}^2.$$

Введя новые переменные $z_1 = x_1 - \frac{2}{3}\, x_2$, $z_2 = x_2$, получим канонический вид

$$L(z_1, z_2) = 3{z_1}^2 + \frac{5}{3}{z_2}^2.$$

Второй способ. Матрица данной квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3-\lambda)^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0.$$

Собственные значения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$. Квадратичная форма в новом базисе из собственных векторов имеет канонический вид $L = {y_1}^2 + 5{y_2}^2$.

Замечание. Канонический вид квадратичной формы зависит от выбора линейного преобразования переменных, то есть от выбора системы координат. Если, например, взять $L = 1$, то уравнения ${y_1}^2 + 5{y_2}^2 = 1$ и $3{z_1}^2 + \frac{5}{3}{z_2}^2 = 1$ являются уравнениями одного и того же эллипса в разных системах координат.

Найдем собственные векторы. Для этого в систему уравнений

$$\begin{cases} (3-\lambda)x_1 - 2x_2 = 0, \\ -2x_1 + (3-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

подставим собственные значения.

1. Найдем собственный вектор $\vec{x}^{(1)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 1$:

$$(A - \lambda_1 E)\,\vec{x} = \vec{0} \text{ или } \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решая полученную систему методом Гаусса, получим:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0, \\ -2x_1 + 2x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Так как ранг системы уравнений $r = 1$, то для получения ее решений нужно рассматривать $m - r = 2 - 1 = 1$ свободную (неосновную) переменную, например, x_2.

Полагая $x_2 = c_1$, найдем вектор $\vec{x}^{(1)} = (c_1;\ c_1)$, который при любом $c_1 \neq 0$ есть собственный вектор оператора $\tilde{A}$ (матрицы A) с собственным значением $\lambda_1 = 1$.

Пусть $c_1 = 1$, тогда $\vec{x}^{(1)} = \vec{e_1} = (1; 1)$.

2. Найдем собственный вектор $\vec{x}^{(2)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 5$:

$$(A-\lambda_2 E)\,\vec{x}=\vec{0} \text{ или } \begin{pmatrix}-2 & -2\\ -2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Решая полученную систему методом Гаусса, получим:

$$\begin{cases} 2x_1-2x_2=0,\\ -2x_1-\ 2x_2=0,\end{cases} \Rightarrow x_1=-\,x_2.$$

Так как ранг системы уравнений r = 1, то для получения ее решений нужно рассматривать $m - r$ = 2 – 1 = 1 свободную переменную, например, x_2.

Полагая $x_2=c_2$, найдем вектор $\vec{x}^{(2)}=(-c_2;\ c_2)$, который при любом $c_2\neq 0$ есть собственный вектор оператора $\tilde{A}$ (матрицы A) с собственным значением λ_1 = 5.

Пусть $c_2=1$, тогда $\vec{x}^{(2)}=\overrightarrow{e_2}=(-1;\ 1)$. Очевидно, что векторы $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ ортогональны, т. е., $\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}=0$. Нормируя $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$, запишем ортонормированный базис:

$$\overrightarrow{e_1}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ и } \overrightarrow{e_2}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Матрица $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$. Следовательно, преобразование

координат получено:

$$x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}y_1-\frac{1}{\sqrt{2}}y_2,\ x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_2.$$

Заметим, что в случае ортогональных преобразований легко получить обратное преобразование переменных, воспользовавшись свойством:

$$Q^{-1}=\ Q^T.$$

Обратная матрица равна $Q^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, $Y=Q^{-1}X$.

Поэтому выполняются соотношения:

$$y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2,\ y_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2.$$

Ответ: канонический вид $L={y_1}^2+5{y_2}^2$;

$y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2,\ y_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2.$

Пример 2. Привести квадратичную форму

$$L(x_1,x_2,\ x_3)={x_1}^2+5{x_2}^2+{x_3}^2+2x_1x_2+6x_1x_3\ +2x_2x_3\,.$$

к каноническому виду и указать соответствующее ортогональное преобразование.

Решение. Выпишем матрицу квадратичной формы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 5 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

в заданном базисе $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$. Чтобы привести квадратичную форму к диагональному виду, нужно перейти к базису из собственных векторов.

Уравнение для собственных значений

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

Если вычесть из третьего столбца первый, то из третьего столбца можно вынести за знак определителя множитель $\lambda + 2$. Прибавляя после этого к первой строке третью, получим:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2+\lambda \\ 1 & 5-\lambda & 0 \\ 3 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda + 2)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 5-\lambda & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Вычислив последний определитель, получим уравнение:

$$-(\lambda + 2)((4-\lambda)(5-\lambda)-2) = 0 \text{ или}$$

$$(\lambda + 2)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = 0,$$

из которого определим собственные числа: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 3$. Тогда канонический вид квадратичной формы:

$$L = -2{y_1}^2 + 6{y_2}^2 + 3{y_3}^2.$$

Заметим, что нумерация собственных значений произвольная. Например, если взять $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$, то канонический вид будет $L = 6{y_1}^2 - 2{y_2}^2 + 3{y_3}^2$. Для каждого такого варианта обозначений меняется соответственно расположение (нумерация) базисных собственных векторов (то есть система координат), а смысл квадратичной формы не меняется.

Найдём теперь ортонормированный базис и преобразование переменных. Составим систему уравнений

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + (5-\lambda)x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0, \end{cases}$$

в которую последовательно подставим собственные значения.

1. Найдем собственный вектор $\vec{x}^{(1)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = -2$:

$$(A-\lambda_1 E)\cdot\vec{x} = \vec{0} \text{ или } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

и запишем соответствующую линейную систему

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Выпишем матрицу системы и проведем в ней элементарные преобразования:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & -20 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 7 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Получим систему, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases}x_1 + x_3 = 0,\\ x_2 = 0,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1 = -x_3,\\ x_2 = 0,\end{cases}$$

Так как ранг системы уравнений r = 2, то для получения ее решений нужно рассматривать m – r = 3 – 2 = 1 свободную переменную, например, x_3.

Полагая $x_3 = c_1$, найдем вектор $\vec{x}^{(1)} = (-c_1;\ 0;\ c_1)$, который при любом $c_1 \neq 0$ есть собственный вектор оператора $\tilde{A}$ (матрицы A) с собственным значением $\lambda_1 = -2$.

Пусть c_1 = 1, тогда $\vec{x}^{(1)} = \vec{e}_1{}'$ = (–1; 0; 1).

2. Найдем собственный вектор $\vec{x}^{(2)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 6$:

$$(A - \lambda_2 E)\cdot\vec{x} = \vec{0} \text{ или } \begin{pmatrix}-5 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 3 & 1 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

и запишем соответствующую линейную систему

$$\begin{cases}-5x_1 + x_2 + 3x_3 = 0,\\ x_1 - x_2 + x_3 = 0,\\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0.\end{cases}$$

Выпишем матрицу системы и проведем в ней элементарные преобразования:

$$\begin{pmatrix}-5 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 3 & 1 & -5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -5 & 1 & 3\\ 3 & 1 & -5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & -4 & 8\\ 0 & 4 & -8\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & -4 & 8\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

Получим систему, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases}x_1 - x_3 = 0,\\ x_2 - 2x_3 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1 = x_3,\\ x_2 = 2x_3.\end{cases}$$

Так как ранг системы уравнений r = 2, то для получения ее решений нужно рассматривать m – r = 3 – 2 = 1 свободную (неосновную) переменную, например, x_3.

Полагая $x_3 = c_2$, найдем вектор $\vec{x}^{(2)} = (c_2;\ 2c_2; c_2)$, который при любом $c_2 \neq 0$ есть собственный вектор оператора $\tilde{A}$ (матрицы A) с собственным значением λ_1 = 6.

Пусть c_2 = 1, тогда $\vec{x}^{(2)} = \vec{e}_2{}'$= (1; 2; 1).

Аналогично для собственного числа $\lambda_3 = 3$ получим собственный вектор

$$\vec{x}^{(3)} = (c_3; -c_3; c_3),$$

который при c_3 = 1, будет равен $\vec{x}^{(3)} = \vec{e}_3{}'$= (1; – 1; 1).

Получили собственные векторы

$$\vec{e}_1{}' = (-1;\ 0;\ 1),\ \vec{e}_2{}' = (1;\ 2;\ 1),\ \vec{e}_3{}' = (1;\ -1;\ 1).$$

Легко увидеть, что они попарно ортогональны.

Нормируя собственные векторы, разделив координаты каждого вектора на его норму, получим ортонормированный базис векторов:

$$\vec{x}_1{}^{(1)}{}_n = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ и } \vec{x}_2{}^{(2)}{}_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \vec{x}_3{}^{(3)}{}_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \text{ – ортогональная матрица.}$$

По свойству $Q^{-1} = Q^T$ запишем обратную матрицу:

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

И так как $Y = Q^{-1} \cdot X$, записываем ортогональное преобразование переменных:

$$y_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3,$$

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_3, \qquad (*)$$

$$y_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3.$$

Ответ: $L = -2{y_1}^2 + 6{y_2}^2 + 3{y_3}^2$.

Если среди собственных чисел матрицы квадратичной формы есть равные, то среди собственных векторов, соответствующих одному собственному числу, нужно выбрать необходимый набор линейно независимых векторов и провести их ортогонализацию.

Квадратичная форма $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *положительно (отрицательно) определенной*, если при всех значениях переменных, из которых хотя бы одно отлично от нуля, $L(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$ ($L(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0$).

Квадратичная форма $L = X^T AX$ *положительно определена* тогда и только тогда, когда:

а) все собственные значения λ_i матрицы A положительны;

б) все главные (угловые) миноры матрицы A положительны (критерий Сильвестра).

Квадратичная форма $L = X^T AX$ *отрицательно определена* тогда и только тогда, когда:

а) все собственные значения λ_i матрицы A отрицательны;

б) все главные (угловые) миноры матрицы A нечетного порядка отрицательны, а миноры матрицы четного порядка положительны (критерий Сильвестра).

Если квадратичная форма *знакоопределенная,* то все главные (угловые) миноры ее матрицы отличны от нуля.

Пример. Исследовать на знакоопределённость квадратичную форму

$$L(x_1, x_2, x_3) = 2{x_1}^2 + {x_2}^2 + 4{x_3}^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Решение. <u>Первый способ.</u> Матрица A квадратичной формы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем её собственные значения: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 3 \pm \sqrt{7}$. Они все положительные, значит, квадратичная форма $L\ (x_1, x_2,\ x_3)$ положительно определённая.

<u>*Второй способ.*</u> Так как все главные (угловые) миноры матрицы A положительны, т. е.

$\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 > 0$,

то по критерию Сильвестра квадратичная форма $L(x_1, x_2,\ x_3)$ положительно определённая.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Написать квадратичную форму L в матричном виде:
а) $L = 3{x_1}^2 + {x_2}^2 - x_1x_2$;
б) $L = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 - 2x_1x_2 + 5x_1x_3$.
2. Привести к каноническому виду квадратичные формы:
а) $L = 2{x_1}^2 - 3{x_3}^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$;
б) $L = {x_1}^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$.
3. Исследовать на знакоопределённость квадратичную форму $L = {x_1}^2 + 4{x_2}^2 + 3{x_3}^2 + 2x_1x_2$.

Ответы: 1.а. $L = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$;

1.б. $L = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

2.а. $L = 2{y_1}^2 - 2{y_2}^2 - 3{y_3}^2$,
если $y_1 = x_1 - x_2 + x_3$, $y_2 = x_2 + x_3$, $y_3 = x_3$;
2.б. $L = {y_1}^2 - {y_2}^2 + {y_3}^2$,
если $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_2 - x_3$, $y_3 = x_3$.
3. Положительно определённая.

10. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

10. 1. Прямоугольные координаты в пространстве.

Декартовой прямоугольной системой координат $Oxyz$ в пространстве называется упорядоченная тройка попарно перпендикулярных осей координат с общим началом координат O и одинаковой масштабной единицей. Одну из указанных осей называют осью Ox (осью абсцисс), другую - осью Oy (осью ординат), а третью - осью Oz (осью аппликат).

Пусть M - произвольная точка пространства (рис. 1).
Проведём через неё три плоскости, перпендикулярные осям координат. Точки пересечения плоскостей с осями называются *проекциями точки* M на эти оси и обозначаются M_x, M_y и M_z.

Декартовыми прямоугольными координатами точки M называются соответственно величины направленных отрезков $\overrightarrow{OM_x}$, $\overrightarrow{OM_y}$ и $\overrightarrow{OM_z}$:

$$\begin{cases} x = OM_x \text{ — абсцисса точки } M, \\ y = OM_y \text{ — ордината точки } M, \\ z = OM_z \text{ — аппликата точки } M. \end{cases}$$

Точка M с координатами $(x;y;z)$ обозначается $M(x;y;z)$.

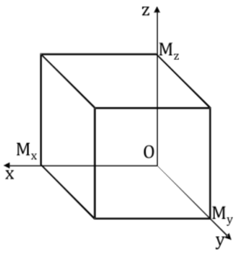

Рис.1

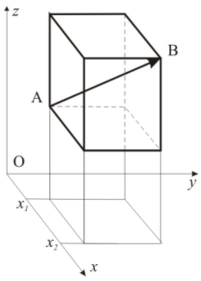

Рис.2

Расстояние между двумя точками $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ равно длине диагонали параллелепипеда (рис. 2) и, согласно теореме Пифагора, определяется по формуле

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Пусть даны точки $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$.

Координаты точки M, делящей отрезок AB в отношении $AM : MB = \lambda$, определяются по формулам:

$$x_M = \frac{x_1+\lambda\cdot x_2}{1+\lambda};\ y_M = \frac{y_1+\lambda\cdot y_2}{1+\lambda};\ z_M = \frac{z_1+\lambda\cdot z_2}{1+\lambda}.$$

В частности, координаты середины отрезка определяются по формулам:

$$x_M = \frac{x_1+x_2}{2};\ y_M = \frac{y_1+y_2}{2};\ z_M = \frac{z_1+z_2}{2}.$$

Пример 1. Дан треугольник ΔABC:

$A(1; -6; 2)$, $B(-1; 5; 7)$, $C(3; 7; -3)$.

Найти точку пересечения медиан.

Решение. Построим медиану AK. Точка K-середина отрезка BC, поэтому её координаты равны:

$$x_K = \frac{x_B+x_C}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1;\ y_K = \frac{y_B+y_C}{2} = \frac{5+7}{2} = 6;$$
$$z_K = \frac{7-3}{2} = 2.$$

Точка M пересечения медиан делит медианы в отношении 2:1, считая от вершины, следовательно, $\lambda = AM{:}MK = = 2:1 = 2$ и

$$x_M = \frac{x_A+\lambda\cdot x_K}{1+\lambda} = \frac{1+2\cdot 1}{1+2} = 1;\ y_M = \frac{y_A+\lambda\cdot y_K}{1+\lambda} = \frac{-6+2\cdot 6}{1+2} = 2;$$
$$z_M = \frac{z_A+\lambda\cdot z_K}{1+\lambda} = \frac{2+2\cdot 2}{1+2} = 2.$$

Ответ: $M(1; 2; 2)$.

Пример 2. Дан треугольник ΔABC: $A(1; –3; –5)$, $B(4; 1; 7)$, $C(2; –2; 1)$. Найти точку пересечения биссектрисы угла B со стороной AC.
Решение. Найдём длины сторон треугольника, образующих угол B:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} =$$
$$= \sqrt{(4-1)^2 + (1+3)^2 + (7+5)^2} = 13;$$
$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2} =$$
$$= \sqrt{(2-4)^2 + (-2-1)^2 + (1-7)^2} = 7.$$

Биссектриса BL треугольника делит противоположную сторону AC на части, пропорциональные прилежащим сторонам, т.е. $AL:LC = AB:BC = 13:7$, поэтому

$$x_L = \frac{x_A + \lambda \cdot x_C}{1+\lambda} = \frac{1 + \frac{13}{7}\cdot 2}{1+\frac{13}{7}} = 1{,}65;$$
$$y_L = \frac{y_A + \lambda \cdot y_C}{1+\lambda} = \frac{-3 + \frac{13}{7}\cdot(-2)}{1+\frac{13}{7}} = -2{,}35;$$
$$z_M = \frac{z_A + \lambda \cdot z_C}{1+\lambda} = \frac{-5 + \frac{13}{7}\cdot 1}{1+\frac{13}{7}} = -1{,}1.$$

Ответ: $L(1{,}65; –2{,}35; –1{,}1)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Построить точки $A(–2; 1)$ и $B(3; 6)$. Найти точку $M(x;\ y)$, делящую AB в отношении $AM : MB = 3:2$.
Ответ: $M(1;4)$.
2. Даны точки $A(–2; 1)$ и $B(3; 6)$. Разделить отрезок AB в отношении $AM:MB = –3:2$.
Ответ: $M(13;16)$.
3. Найти центр масс треугольника с вершинами $A(1; –1)$, $B(6; 4)$ и $C(2; 6)$.
Указание. Центр масс треугольника находится в точке пересечения его медиан.
Ответ: $(3;3)$.
4. В треугольнике с вершинами $A(–2; 0)$, $B(6; 6)$ и $C(1; –4)$ определить длину медианы AM и биссектрисы AE.
Ответ: $AM = \frac{5\sqrt{5}}{2}$; $AE = \frac{10\sqrt{2}}{3}$.

10.2. Векторы и линейные операции над ними.

Закреплённым вектором называется направленный отрезок $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Точка A называется началом закреплённого вектора (или точкой его приложения), а точка B - его концом. При совпадении начала с концом закреплённый вектор называют нулевым и обозначают $\vec{0}$.

Длиной (модулем) закреплённого вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ называется число $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$, равное длине отрезка AB.

Закрепленные векторы называются *коллинеарными*, если они лежат на одной или параллельных прямых. Коллинеарные векторы могут быть направлены одинаково или противоположно. Будем считать, что нулевой вектор одинаково направлен с любым вектором.

Закреплённые векторы называются *компланарными*, если они лежат на прямых, параллельных одной плоскости.

Два закреплённых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *равными*
($\vec{a}$ = $\vec{b}$), если они:

1) имеют равные длины ($\overrightarrow{|a|}$ = $\overrightarrow{|b|}$);
2) коллинеарны;
3) одинаково направлены.

Замечание. Из определения равенства закреплённых векторов следует, что при параллельном переносе закреплённого вектора $\vec{a}$ получается закреплённый вектор $\vec{b}$, равный $\vec{a}$. Это свойство легло в основу следующего понятия: свободным вектором $\boldsymbol{a}$ (или просто вектором) называется класс всех равных между собой закреплённых векторов. Свободный вектор $\boldsymbol{a}$ часто обозначают и изображают любой из закреплённых векторов $\vec{a}$ = $\overrightarrow{AB}$, входящий в класс $\boldsymbol{a}$. Отложить свободный вектор $\boldsymbol{a}$ от точки A - значит построить закреплённый вектор $\vec{a}$ = $\overrightarrow{AB}$ из класса $\boldsymbol{a}$. Задать свободный вектор $\boldsymbol{a}$ своими началом A и концом B означает задать закреплённый вектор $\vec{a}$ = $\overrightarrow{AB}$ из класса $\boldsymbol{a}$.

На свободные векторы переносятся понятия коллинеарности, компланарности и равенства векторов.

Пусть $\vec{a}$ - закреплённый вектор из класса закреплённых векторов, образующих свободный вектор $\boldsymbol{a}$ (или, коротко, представитель класса $\boldsymbol{a}$), $\vec{b}$ — представитель класса $\boldsymbol{b}$ и $\vec{c}$ - представитель класса с.

Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются *коллинеарными*, если коллинеарны закреплённые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Если при этом закреплённые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют одинаковое направление, то и векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеют одинаковое направление, а если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют противоположное направление, то и векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеют противоположное направление.

Если закреплённые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, то, очевидно, они определяют один и тот же класс закреплённых векторов, и мы будем говорить, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равны
($\boldsymbol{a}$ = $\boldsymbol{b}$).

Длиной (модулем) вектора $\boldsymbol{a}$ называется длина закреплённого вектора $\vec{a}$. Длина вектора обозначается так:

$$|\,\boldsymbol{a}\,| = |\,\vec{a}\,| = |\,\overrightarrow{AB}\,|.$$

Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ называются *компланарными*, если компланарны закреплённые векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Замечание. Если определения, относящиеся к свободным векторам, формулируются при помощи закреплённых векторов, то надо каждый раз устанавливать независимость формулировок от выбора закреплённых векторов (точек приложения).

Проекция вектора на ось. Координаты вектора.

Пусть даны закреплённый вектор $\overrightarrow{AB}$ и ось u. Обозначим через A_1 и B_1 проекции точек A и B на ось u соответственно.

Проекцией закреплённого вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось u называется число, равное

$$\text{пр}_u\overrightarrow{AB} =$$
$$= \begin{cases} \left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|, \text{если направления } \overrightarrow{A_1B_1} \text{ и оси } u \text{ совпадают;} \\ -\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|, \text{если направления } \overrightarrow{A_1B_1} \text{ и оси } u \text{ противоположны.} \end{cases}$$

Теорема. Проекция закреплённого вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось u равна произведению длины вектора $\overrightarrow{AB}$ и косинуса угла между вектором $\overrightarrow{AB}$ и осью u:

$$\text{пр}_u\,\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\varphi.$$

Следствие. Равные закреплённые векторы имеют равные проекции на одну ось.

Замечание. Приведённые теорема и её следствие позволяют корректно внести понятие проекции свободного вектора на ось.

*Проекцией (свободного) вектора **a** на ось u* называется проекция любого его представителя $\vec{a}$ на эту ось.

Координатами вектора $\vec{a}$ в прямоугольной системе координат $Oxyz$ называются проекции этого вектора на координатные оси: X = пр$_{Ox}\ \vec{a}$, Y = пр$_{Oy}\ \vec{a}$, Z = пр$_{Oz}\ \vec{a}$.

При этом пишут $\vec{a} = \{X, Y, Z\}$.

Теорема. Если вектор $\overrightarrow{AB}$ задан своими началом $A(x_1, y_1, z_1)$ и концом $B(x_2, y_2, z_2)$, то его координаты и длина вычисляются по формулам:

$$X = (x_2 - x_1), Y = (y_2 - y_1), Z = (z_2 - z_1),$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Углом между свободными векторами a и b называется угол между любыми их представителями $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеющими общее начало. Аналогично определяется угол между свободным вектором и осью.

Направление вектора $\vec{a} = \{X, Y, Z\}$ определяется углами $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, образованными им с осями координат $Ox,\ Oy,\ Oz$. Косинусы этих углов (так называемые *направляющие косинусы*) определяются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{X}{|\vec{a}|} = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\ \cos\beta = \frac{Y}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma = \frac{Z}{|\vec{a}|}.$$

Очевидно, что направляющие косинусы вектора связаны соотношением:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Линейные операции над векторами

1. *Умножение вектора на число.* Произведением вектора $\vec{a} \neq 0$ на число $\lambda \neq 0$ называется вектор $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий длину $|\vec{c}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$, направленный одинаково с $\vec{a}$ при $\lambda > 0$ и направленный в противоположную сторону при $\lambda < 0$.

Если $\vec{a} = 0$ или $\lambda = 0$, то произведение $\lambda\vec{a}$ считаем равным нулевому вектору $\vec{0}$.

Теорема. Пусть $\vec{a} = \{X, Y, Z\}$ и λ - произвольное число. Тогда

$$\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} = \{\lambda X, \lambda Y, \lambda Z\}.$$

2. *Сложение двух векторов.*

Суммой $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор $\boldsymbol{c}$, начало которого находится в произвольной точке A пространства, а конец определяется следующим образом: отложим от точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\boldsymbol{a}$, а от точки B вектор $\overrightarrow{BC}$, равный вектору $\boldsymbol{b}$, тогда точка C и будет концом вектора $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.

Замечания. 1. Разность векторов определяется как действие, обратное сложению: разностью векторов $(\vec{a} - \vec{b})$ называется вектор $\vec{d}$, обладающий свойством:

$$\vec{d} + \vec{b} = \vec{a}.$$

2. Разность векторов можно определить и следующим образом:

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\cdot\vec{b}.$$

3. В параллелограмме, построенном на векторах $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ одна вектор-диагональ OC есть сумма $(\vec{a} + \vec{b})$ векторов (правило параллелограмма), а другая вектор-диагональ $\overrightarrow{BA}$ есть

разность $(\vec{a}-\vec{b})$ данных векторов.

Теорема. Пусть $\vec{a}=\{X_1;\ Y_1; Z_1\}$ и $\vec{b}=\{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}$. Тогда

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}=\{X_1+X_2;\ Y_1+Y_2;\ Z_1+Z_2\} \text{ и}$$
$$\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}=\{X_1-X_2;\ Y_1-Y_2;\ Z_1-Z_2\}.$$

Основные свойства линейных операций над векторами.

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (переместительное свойство сложения);
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (сочетательное свойство сложения);
3. $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$ (сочетательное свойство умножения);
4. $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ (распределительное свойство относительно суммы чисел);
5. $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ (распределительное свойство относительно суммы векторов).

Радиус-вектор точки.

Вектор $\overrightarrow{OM}$, начало которого находится в начале координат, а конец - в точке $M(x;y;z)$, называется радиус-вектором точки M и обозначается $\overrightarrow{r_M}$ или просто $\vec{r}$. Он имеет те же координаты, что и точка M:

$$\overrightarrow{r_M}=M(x;\ y;\ z).$$

Единичные векторы координатных осей $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ называются *ортами*. Они образуют базис в пространстве $Oxyz$.

Теорема. Любой вектор в пространстве может быть единственным образом разложен по базису $(\vec{\imath};\ \vec{\jmath};\ \vec{k})$, т.е. представлен в виде

$$\vec{a}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}, \text{ где } x,\ y,\ z \in R.$$

Числа x, y и z равны координатам вектора $\vec{a}$, т.е.

$$\vec{a}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}=\{\vec{\imath};\ \vec{\jmath};\ \vec{k}\}.$$

Пример 3. Дан прямоугольник $OBCA$ со сторонами $OA=2$ и $OB=4$. Определить векторы $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{MN}$, если M и N — середины сторон BC и AC соответственно.

Решение. Согласно условию, $BM=\frac{OA}{2}=1{,}5$, $AN=\frac{OB}{2}=2$. Вектор $\overrightarrow{BM}$ параллелен вектору $\vec{\imath}$, одинаково с ним направлен и имеет длину $|\overrightarrow{BM}|=1{,}5$, поэтому $\overrightarrow{BM}=1{,}5\vec{\imath}$. Аналогично $|\overrightarrow{AN}|=2\vec{\jmath}$, $|\overrightarrow{OB}|=4\vec{\jmath}$ и $\overrightarrow{OA}=3\vec{\imath}$. Следовательно,

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}=1{,}5\vec{\imath}+4\vec{\jmath}=\{1;\ 5;\ 4\},$$
$$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AN}=3\vec{\imath}+2\vec{\jmath}=\{3;\ 2\}.$$

Вектор $\overrightarrow{MN}$, по определению разности векторов, равен

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=(3\vec{\imath}+2\vec{\jmath})-(1{,}5\vec{\imath}+4\vec{\jmath})=$$
$$=1{,}5\vec{\imath}-2\vec{\jmath}=\{1{,}5;\ -2\}.$$

Пример 4. Дан треугольник ABC: $A(1;\ 2;\ -2)$, $B(6;\ 12;\ 13)$ и $C(-3;\ 12;\ 2)$. Точка M делит сторону AB в отношении 2:3. Найти вектор $\overrightarrow{MC}$.

Решение. Согласно условиям,

$$\overrightarrow{AC}=\{x_C-x_A,\ y_C-y_A\ ,\ z_C-z_A\}=\{-3-1;\ 12-2;\ 2-(-2)\}==\{-4;\ 10;\ 4\}.$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{5}\{x_B - x_A, y_B - y_A,\ z_B - z_A\} =$$
$$= \frac{2}{5}\{6 – 1;\ 12 – 2;\ 13 – (–2)\} = \frac{2}{5}\{5;\ 10;\ 15\} = \{2;\ 4;\ 6\}.$$

По определению разности векторов имеем

$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} = \{–4;\ 10;\ 4\} – \{2;\ 4;\ 6\} =$$
$$= \{–4 – 2;\ 10– 4;\ 4–6\} = \{–6;\ 6;\ –2\}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. На плоскости даны точки $A(0; –2)$, $B(4; 2)$ и $C(4; –2)$. В начале координат приложены силы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$. Построить их равнодействующую $\overrightarrow{OM}$, найти её проекцию на оси координат и величину. Выразить силы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OM}$ через единичные орты $\vec{\imath}$ и $\vec{\jmath}$.
Ответ: $\overrightarrow{OM} = \{8;\ -2\}$, $|\overrightarrow{OM}| = 2\sqrt{17}$.
2. Даны три компланарных единичных вектора $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$, причём $(\vec{m},\hat{\ }\vec{n}) = 30°$ и $(\vec{n},\hat{\ }\vec{p}) = 60°$. Построить вектор
$\vec{u} = \vec{m} + 2\vec{n} – 3\vec{p}$ и вычислить его модуль.
Ответ: $|\vec{u}| = \sqrt{8 + 2\sqrt{3}}$.
3. Даны радиус-векторы вершин треугольника ABC:
$\vec{r_A} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$, $\vec{r_B} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{r_C} = \vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + \vec{k}$. Доказать, что треугольник ABC равносторонний.
4. Даны три вершины параллелограмма:
$A(–5; 0; 3)$, $B(–1; 2; 1)$ и $C(1; 5; 4)$.
Найти четвёртую вершину D и построить параллелограмм.
Ответ: $D(–3; 3; 6)$.
5. Векторы $\overrightarrow{AB} = \{2;\ 6;\ –4\}$ и $\overrightarrow{AC} = \{4;\ 2;\ –2\}$ совпадают со сторонами треугольника ABC. Определить координаты векторов, совпадающих с его медианами AM, BN и CD.
Ответ: $\overrightarrow{AM} = \{3;\ 4;\ –3\}$, $\overrightarrow{BN} = \{0;\ –5;\ 3\}$, $\overrightarrow{CD} = \{–3;\ 1;\ 0\}$.
6. Построить параллелограмм на векторах $\overrightarrow{OA} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$,
$\overrightarrow{OB} = \vec{k} – 3\vec{\jmath}$ и определить его вектор-диагонали.
Ответ: $\vec{d_1} = \{1;\ –2;\ 1\}$, $\vec{d_2} = \{1;\ 4;\ –1\}$.
7. На плоскости Oxy построить векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = 2\vec{\imath}$,
$\overrightarrow{OB} = \vec{b} = 3\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c} = 2\vec{\imath} + 6\vec{\jmath}$. Разложить геометрически и аналитически вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
Ответ: $\vec{c} = 2\vec{b} - 2\vec{a}$.

10.3. Скалярное произведение двух векторов.

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ называется число (скаляр), равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi.$$

Очевидно, что $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cdot\cos\varphi$. Поэтому

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi = |\vec{a}|\cdot\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cdot\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}.$$

Свойства скалярного произведения.

1. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ (переместительный закон).
2. $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (сочетательный закон по отношению к скалярному множителю).
3. $\vec{a}\cdot(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$ (распределительный закон).
4. $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$ (скалярный квадрат) $\Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$.
5. $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow$ (либо $\vec{a} = 0$, либо $\vec{b} = 0$, либо $\vec{a} \perp \vec{b}$).
6. Скалярное произведение ортов:
$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1 \text{ и } \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0.$$
7. Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы в координатной форме:
$$\vec{a} = \{a_x;\ a_y;\ a_z\} \text{ и } \vec{b} = \{b_x;\ b_y;\ b_z\}.$$

Тогда $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z$.

Угол между векторами.

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

Условие коллинеарности векторов:
$$\vec{a} = \lambda\cdot\vec{b} \text{ или } \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda.$$

Условие перпендикулярности векторов:
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \text{ или } a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z = 0.$$

Пример 5. Определить угол между векторами
$$\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j} \text{ и } \vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Решение. Представим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в координатной форме:
$$\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j} = \{-1; 1; 0\} \text{ и } \vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} = \{1; -2; 2\}.$$

Найдём их скалярное произведение и длины:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z = (-1)\cdot1 + 1\cdot(-2) + 0\cdot2 = -3.$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2};$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3.$$

Следовательно, косинус угла между векторами равен
$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{-3}{\sqrt{2}\cdot3} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

и векторы образуют угол $\varphi = 135°$.

Пример 6. Определить углы ΔABC с вершинами $A(-1; -3; 4)$, $B(-2; -1; 2)$ и $C(-3; -2; 6)$.

Решение. 1) Угол A треугольника образован векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:
$$\overrightarrow{AB} = \{x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A\} =$$
$$= \{-2-(-1);\ -1-(-3); 2-4\} = \{-1;\ 2; -2\} \Rightarrow$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3;$$
$$\overrightarrow{AC} = \{x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A\} =$$
$$= \{-3-(-1);\ -2-(-3); 6-4\} = \{-2;\ 1; 2\} \Rightarrow$$
$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Следовательно, косинус угла A равен

$$\cos\angle A = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{(-1)\cdot(-2)+2\cdot 1+(-2)\cdot 2}{3\cdot 3} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \angle A = 90°.$$

2) Угол B треугольника образован векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = \{1;\ -2; 2\} \Rightarrow |\overrightarrow{BA}|=|-\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AB}| = 3,$$
$$\overrightarrow{BC} = \{x_C - x_B, y_C - y_B,\ z_C - z_B\} =$$
$$=\{-3-(-2);\ -2-(-1); 6-2\} = \{-1;\ -1; 4\} \Rightarrow$$
$$|\overrightarrow{BC}| = =\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+4^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2},$$

поэтому

$$\cos\angle B = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|} = \frac{1\cdot(-1)+(-2)\cdot(-1)+2\cdot 4}{3\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \Rightarrow \angle ABC = 45°.$$

3) Угол $\angle C$ треугольника можно искать аналогично, но проще воспользоваться свойством внутренних углов треугольника:

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180° \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \angle C = 180° - \angle A - \angle B = 180° - 90° - 45° = 45°.$$

Пример 7. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} - \vec{k}$ и $\vec{c} = 2\vec{\imath} - \overrightarrow{3\jmath} + \vec{k}$. Определить пр$_{\vec{c}}\vec{a}$ и пр$_{\vec{a}}\vec{c}$.

Решение. Вычислим длины векторов и их скалярное произведение:

$$\vec{a} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} - \vec{k} = \{2; -1; -1\} \Rightarrow$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{6};$$
$$\vec{c} = 2\vec{\imath} - \overrightarrow{3\jmath} + \vec{k} = \{2;\ -3; 1\} \Rightarrow$$
$$|\vec{c}| = \sqrt{2^2+(-3)^2+1^2} = \sqrt{14};$$
$$\vec{a}\cdot\vec{c} = a_x\cdot c_x + a_y\cdot c_y + a_z\cdot c_z = 2\cdot 2 + (-1)\cdot(-3) + (-1)\cdot 1 = 6.$$

Проекции векторов выразим через скалярное произведение:

$$\text{пр}_{\vec{c}}\vec{a} = |\vec{a}|\cdot\cos\varphi = |\vec{a}|\cdot\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|a|\cdot|c|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|c|} = \frac{6}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{7},$$
$$\text{пр}_{\vec{a}}\vec{c} = |\vec{c}|\cdot\cos\varphi = |\vec{c}|\cdot\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|a|\cdot|c|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|a|} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}.$$

Пример 8. На векторах $\vec{a}$ и $\vec{c}$, приведённых к общему началу, построен параллелограмм. Определить углы между его диагоналями, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{c}| = 1$ и $(\vec{a},\hat{}\ \vec{c}) = 30°$.

Решение. Пусть один из искомых углов образован векторами $\vec{d} = \vec{a} - \vec{c}$ и $\vec{D} = \vec{a} + \vec{c}$. Обозначим его через ψ, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{c}$ - через φ. Найдём длины векторов $\vec{d}$ и $\vec{D}$, а также их скалярное произведение. Согласно свойствам скалярного произведения имеем:

$$|\vec{d}|^2 = \vec{d}\cdot\vec{d} = (\vec{a}-\vec{c})^2 = \vec{a}^2 - 2\cdot\vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{c}^2 =$$
$$=|\vec{a}|^2 - 2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\varphi + |\vec{c}|^2 = 3 - 2\sqrt{3}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |\vec{d}| = 1;$$
$$\vec{d}\cdot\vec{D} = (\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{c}) = \vec{a}^2 - \vec{c}^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{c}|^2 = 3 - 1 = 2.$$
$$|\vec{D}|^2 = \vec{D}\cdot\vec{D} = (\vec{a}+\vec{c})^2 = \vec{a}^2 + 2\cdot\vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{c}^2 =$$
$$=|\vec{a}|^2 + 2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\varphi + |\vec{c}|^2 = 3 + 2\sqrt{3}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 7 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |\vec{D}| = \sqrt{7}.$$

Поэтому

$$\cos\psi = \cos(\vec{d},\hat{}\ \vec{D}) = \frac{\vec{d}\cdot\vec{D}}{|d|\cdot|D|} = \frac{2}{1\cdot\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7} \Rightarrow \psi = \arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. На плоскости дан треугольник с вершинами: $A(-1;\ -2)$, $B(7;\ 4)$, $C(2;\ -6)$. Найти острый угол, образованный стороной AC и медианой BM этого треугольника.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{17}}{17}$.

2. Из вершины квадрата проведены прямые, делящие противоположные стороны пополам. Найти угол между этими прямыми.

Ответ: arccos 0,8.

3. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ и $\vec{c} = -2\vec{\jmath} + \vec{k}$.

Ответ: 90°.

4. Раскрыть скобки в выражении

$(2\vec{\imath} - \vec{\jmath})\cdot \vec{\jmath} + (\vec{\jmath} - 2\vec{k})\cdot \vec{k} + (\vec{\imath} - 2\vec{k})^2$.

Ответ: 2.

5. Вычислить: 1) $(\vec{m} + \vec{n})^2$, если $\vec{m}$ и $\vec{n}$ – единичные векторы и угол между ними 30°; 2) $(\vec{a} - \vec{c})^2$, если $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{c}| = 4$ и $(\vec{a},\hat{\ }\vec{c}) = 135°$.

Ответ: 1) $2 + \sqrt{3}$; 2) 40.

6. Доказать, что сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон.

7. Доказать, что в произвольном треугольнике справедливо равенство

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C$ (теорема косинусов).

10.4. Векторное произведение двух векторов.

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$ (рис. 3), обладающий свойствами:

1) длина вектора $\vec{c}$ равна произведению длин перемножаемых векторов на синус угла между ними:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi;$$

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен и вектору $\vec{a}$, и вектору $\vec{b}$;

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов (т.е. после приведения их к общему началу поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ по наименьшему углу виден из конца вектора $\vec{c}$ происходящим против часовой стрелки).

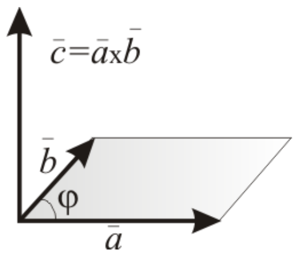

Рис.3

Свойства векторного произведения.

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (антиперестановочное свойство).
2. $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow$ векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

3. $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda\cdot(\vec{a} \times \vec{b})$ (сочетательное свойство относительно скалярного множителя).
4. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (распределительное свойство).

Векторное произведение ортов:

$$\vec{\imath} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = \vec{k} \times \vec{k} = 0 \text{ и}$$
$$\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = -\vec{\jmath} \times \vec{\imath} = \vec{k},\ \vec{\jmath} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{\jmath} = \vec{\imath},\ \vec{k} \times \vec{\imath} = -\vec{\imath} \times \vec{k} = \vec{\jmath}.$$

Замечание. Векторное произведение любых двух смежных векторов в последовательности $\vec{\imath}\ \vec{\jmath}\ \vec{k}\ \vec{\imath}\ \vec{\jmath}$ даёт следующий за ними вектор со знаком «+», а в обратной последовательности - со знаком «–».

Выражение векторного произведения через координаты сомножителей:

$$\begin{matrix}\vec{a} = \{a_x;\ a_y;\ a_z\}\\ \vec{b} = \{b_x;\ b_y;\ b_z\}\end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Площадь параллелограмм, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, приведённых к общему началу:

$$S_{\text{паралл.}} = |\vec{a} \times \vec{b}|,$$

а **площадь треугольника**, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, приведённых к общему началу:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Пример 9. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{k} - \vec{\jmath}$ и $\vec{b} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$. **Решение.** Представим векторы в координатной форме и найдём их векторное произведение:

$$\vec{a} = 2\vec{k} - \vec{\jmath} = \{0;\ -1; 2\} \text{ и } \vec{b} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k} = \{3; 1;\ -1\},$$
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 0 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix} = \vec{\imath}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix} - \vec{\jmath}\cdot\begin{vmatrix}0 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix} +$$
$$+ \vec{k}\cdot\begin{vmatrix}0 & -1\\ 3 & -1\end{vmatrix} = \vec{\imath}\cdot(1 - 2) - \vec{\jmath}\cdot(0 - 6) + \vec{k}\cdot(0 + 3) =$$
$$= -\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} + 3\vec{k} = \{-1; 6; 3\}.$$

Модуль векторного произведения двух векторов равен площади построенного на них параллелограмма, поэтому

$S_{\text{пар}} = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 36 + 9} = \sqrt{46}.$

Пример 10. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(-2; -1; 5)$, $B(4; 2; 3)$ и $C(1; 4; -3)$.

Решение. Найдём векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и их векторное произведение:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A\} =$$
$$= \{4 - (-2); 2 - (-1); 3 - 5\} = \{6; 3; -2\},$$

$$\overrightarrow{AC} = \{x_C - x_A;\ y_C - y_A;\ z_C - z_A\} =$$
$$= \{1 - (-2); 4 - (-1); -3 - 5\} = \{3; 5; –8\},$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 6 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & -8 \end{vmatrix} = \vec{\imath} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} - \vec{\jmath} \cdot \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} +$$

$$+ \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \vec{\imath} \cdot (-24 + 10) - \vec{\jmath} \cdot (-48 + 6) + \vec{k} \cdot (30 - 9) =$$

$$= -14\vec{\imath} + 42\vec{\jmath} + 21\vec{k} = \{-14; 42; 21\} = 7 \cdot \{-2; 6; 3\}.$$

Треугольник ABC построен на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, поэтому его площадь равна половине площади параллелограмма, построенного на них:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \sqrt{(-2)^2 + 6^2 + 3^2} = = \frac{7}{2}\sqrt{4 + 36 + 9} = \frac{7}{2} \cdot 7 = 24{,}5.$$

Пример 11. Раскрыть скобки и упростить выражения:

1) $\vec{\imath} \times (\vec{\jmath} + \vec{k}) - \vec{\jmath} \times (\vec{\imath} + \vec{k}) + \vec{k} \times (\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k})$;

2) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{c} + (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{b} + (\vec{b} - \vec{c}) \times \vec{a}$.

Решение. Воспользуемся свойствами векторного произведения:

1) $\vec{\imath} \times (\vec{\jmath} + \vec{k}) - \vec{\jmath} \times (\vec{\imath} + \vec{k}) + \vec{k} \times (\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}) = \vec{\imath} \times \vec{\jmath} +$
$+ \vec{\imath} \times \vec{k} - \vec{\jmath} \times \vec{\imath} - \vec{\jmath} \times \vec{k} + \vec{k} \times \vec{\imath} + \vec{k} \times \vec{\jmath} + \vec{k} \times \vec{k} = \vec{k} - \vec{\jmath} +$
$+ \vec{k} - \vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{\imath} + \vec{0} = 2\vec{k} - 2\vec{\imath}$.

2) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{c} + (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{b} + (\vec{b} - \vec{c}) \times \vec{a} =$
$= \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} -$
$- \vec{c} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{c} - \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} =$
$= 2\vec{a} \times \vec{c}$.

Пример 12. Параллелограмм построен на векторах $(2\vec{a} + \vec{c})$ и $(3\vec{a} - 2\vec{c})$. Найти его площадь, если $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{c}| = 4$ и $\varphi = (\vec{a}, \hat{}\ \vec{c}) = 60°$.

Решение. Найдём векторное произведение векторов, на которых построен параллелограмм:

$$(2\vec{a} + \vec{c}) \times (3\vec{a} - 2\vec{c}) = 2\vec{a} \times 3\vec{a} - 2\vec{a} \times 2\vec{c} + \vec{c} \times 3\vec{a} -$$
$$- \vec{c} \times 2\vec{c} = 4\vec{c} \times \vec{a} + 3\vec{c} \times \vec{a} = 7\vec{c} \times \vec{a}.$$

Следовательно, площадь параллелограмма равна

$$S_{\text{пар}} = |(2\vec{a} + \vec{c}) \times (3\vec{a} - 2\vec{c})| = 7|\vec{c} \times \vec{a}| = 7 \cdot |\vec{c}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin\varphi =$$
$$= 7 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 42.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Вычислить площадь треугольника с вершинами A (–4; –3; 7), B(–5; –1 ; 3) и C(1; 1; –1) и найти длину высоты BD.

Ответ: $S = 7\sqrt{5}$; $BD = \frac{2\sqrt{21}}{3}$.

2. Вычислить диагонали, высоты и площадь параллелограмма, построенного на векторах

$$\vec{a} = 2\vec{\imath} + \vec{k} - 3\vec{\jmath} \text{ и } \vec{c} = 5\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - 7\vec{k}.$$

Ответ: $D = 11$; $d = \sqrt{73}$; $S = \sqrt{1018}$; $H = \frac{\sqrt{3563}}{7}$, $h = \frac{\sqrt{84494}}{83}$.

3. Раскрыть скобки и упростить выражения:

1) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} - \vec{a}) + (\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{a} + \vec{b})$;

2) $2\vec{i}\cdot(\vec{j}\times\vec{k}) + 3\vec{j}\cdot(\vec{i}\times\vec{k}) + 4\vec{k}\cdot(\vec{i}\times\vec{j})$.

Ответ: 1) $\vec{a}\times\vec{c}$; 2) 3.

4. Параллелограмм построен на векторах $(3\vec{a} - 5\vec{c})$ и $(2\vec{a} + 7\vec{c})$. Найти его площадь, если $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{c}| = 13$ и

$\varphi = (\vec{a}, \hat{} \, \vec{c}) = 135°$.

Ответ: 403.

10. 5. Смешанное произведение трех векторов.

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ называется скалярное произведение вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$, т.е. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

Смешанное произведение трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ по модулю равно *объёму параллелепипеда*, построенного на этих векторах.

Выражение смешанного произведения через координаты сомножителей:

$$\vec{a} = \{a_x;\ a_y;\ a_z\} \quad \vec{b} = \{b_x;\ b_y;\ b_z\} \quad \vec{c} = \{c_x;\ c_y;\ c_z\} \quad \Rightarrow \quad (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Свойства смешанного произведения.

1. Смешанное произведение трёх векторов равно нулю, если:

а) хотя бы один из перемножаемых векторов равен нулю;

б) два из перемножаемых векторов коллинеарны (параллельны);

в) три ненулевых вектора компланарны (параллельны одной плоскости).

2. Смешанное произведение не изменяется, если поменять местами знаки векторного «×» и скалярного «·» умножения, т.е. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$, поэтому смешанное произведение принято записывать в виде $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

3. При перестановке любых двух сомножителей смешанное произведение лишь меняет знак:

$$\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{a}\vec{b}\vec{c};\ \vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{b}\vec{c};\ \vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

4. Смешанное произведение не изменяется, если сомножители переставлять в круговом порядке:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} \text{ и } \vec{b}\vec{a}\vec{c} = \vec{a}\vec{c}\vec{b} = \vec{c}\vec{b}\vec{a}.$$

5. Сочетательное свойство со скалярным множителем:

$$(\mu\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \mu(\vec{a}\vec{b}\vec{c}).$$

6. Распределительное свойство относительно суммы векторов:

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\,\vec{b}\vec{c} = \vec{a}_1\vec{b}\vec{c} + \vec{a}_2\vec{b}\vec{c}.$$

Объёмы параллелепипеда, треугольной призмы и треугольной пирамиды, построенных на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, приведённых к общему началу:

$$V_{\text{паралл}} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|,\ V_{\text{призмы}} = \frac{1}{2}V_{\text{паралл}} = \frac{1}{2}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|,$$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}V_{\text{призмы}} = \frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

Необходимым и достаточным условием компланарности трёх векторов является равенство

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0.$$

Пример 13. Вычислить объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} - 4\vec{j}$ и $\vec{c} = -\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$, приведённых к общему началу.

Решение. Найдём смешанное произведение данных векторов

$$\vec{a} = \{2;\ 3;\ -1\},\ \vec{b} = \{-1; -4;\ 0\},\ \vec{c} = \{-1;\ 1;\ 4\}$$

тогда

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-1-4) + 4(-8+3) = 5 - 20 = -15.$$

Следовательно, объём параллелепипеда равен $V_{\text{паралл}} = 15$.

Пример 14. Найти объём треугольной пирамиды с вершинами $A(1;-2;-3)$, $B(3;-1;-2)$, $C(3;1;-1)$ и $D(4;1;1)$, площадь грани ABC и длину высоты пирамиды, опущенной на эту грань.

Решение. 1) Найдём векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$, совпадающие с рёбрами пирамиды, выходящими из вершины A и вычислим их смешанное произведение:

$$\overrightarrow{AB} = \{3-1; -1-(2-); -2-(-3)\} = \{2; 1; 1\}$$
$$\overrightarrow{AC} = \{3-1; 1-(-2); -1-(-3)\} = \{2; 3; 2\}$$
$$\overrightarrow{AD} = \{4-1; 1-(-2); 1-(-3)\} = \{3; 3; 4\}.$$

Тогда

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+ 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 2(12-6) - (8-6) + (6-9) = 12 - 2 - 3 = 7.$$

2) Пирамида $ABCD$ построена на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$, поэтому её объём равен

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}| = \frac{7}{6}.$$

3) Площадь грани ABC найдём с помощью векторного произведения:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \vec{k}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot(2-3) - \vec{j}\cdot(4-2) + \vec{k}\cdot(6-2) =$$

$$= -\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k} = \{-1; -2; 4\}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 4^2} = = \frac{\sqrt{21}}{2}.$$

4) Длина H высоты DM, опущенной на грань ABC, площадь S грани ABC и объём V пирамиды $ABCD$ связаны формулой $V = \frac{1}{3}SH$, поэтому

$$H = \frac{3V}{S} = \frac{3\cdot\frac{7}{6}}{\frac{\sqrt{21}}{2}} = \frac{7}{\sqrt{21}} = \frac{7\sqrt{21}}{21} = \frac{\sqrt{21}}{3}.$$

Пример 15. Доказать, что точки $A(1; -2; 5)$, $B(-1;-1; 8)$, $C(2; 2; -2)$ и $D(0; 12; -10)$ лежат в одной плоскости.

Решение. Утверждение о том, что точки A, B, C и D лежат в одной плоскости равносильно тому, что векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ компланарны. Найдём эти векторы и их смешанное произведение:

$$\overrightarrow{AB} = \{-1 - 1; -1 - (-2); 8 - 5\} = \{-2; 1; 3\}$$
$$\overrightarrow{AC} = \{2 - 1; 2 - (-2); -2 - 5\} = \{1; 4; -7\}$$
$$\overrightarrow{AD} = \{0 - 1; 12 - (-2); -10 - 5\} = \{-1; 14; -15\}.$$

Тогда

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -7 \\ -1 & 14 & -15 \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 14 & -15 \end{vmatrix} -$$

$$-1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ -1 & -15 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 14 \end{vmatrix} = -2\cdot(-60 + 98) - (-15 - 7) +$$

$$+ 3\cdot(14 + 4) = -76 + 22 + 54 = 0.$$

Равенство $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$ равносильно компланарности векторов.

Пример 16. Показать, что векторы $\vec{a} = \vec{\imath} - 5\vec{\jmath} - 2\vec{k}$,
$\vec{b} = 2\vec{\imath} + 7\vec{\jmath} + 5\vec{k}$ и $\vec{c} = 7\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 4\vec{k}$ компланарны. Разложить вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение. Найдём смешанное произведение этих векторов:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 2 & 7 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - (-5)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+(-2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = (28 + 5) + 5(8 - 35) - 2\cdot(-2 - 49) = 33 -$$
$$- 135 + 102 = 0.$$

Равенство $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$ равносильно компланарности данных векторов.

Разложение вектора $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеет вид:

$$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 2\mu = 7 \\ -5\lambda + 7\mu = -1 \\ -2\lambda + 5\mu = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 7 \\ -5 & 7 & | & -1 \\ -2 & 5 & | & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 7 \\ 0 & 17 & | & 34 \\ 0 & 9 & | & 18 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 7 \\ 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 2\mu = 7 \\ \mu = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ \mu = 2. \end{cases}$$

Получено искомое разложение вектора $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$.

Пример 17. Вычислить объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором даны три вершины нижнего основания $A(-1; -3; 2)$, $B(0; -4; 3)$, $D(0; -2; 3)$ и вершина верхнего основания $C_1(3; 0; 8)$.

Решение. Параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ построен на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$. Сначала найдём векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB} = \{0 - (-1); -4 - (-3); 3 - 2\} = \{1; -1; 1\},$$
$$\overrightarrow{AD} = \{0 - (-1); -2 - (-3); 3 - 2\} = \{1; 1; 1\}.$$

Далее найдём координаты точки C и вектора $\overrightarrow{AA_1}$. Для этого заметим, что координаты точки совпадают с координатами её радиус-вектора:

$$\overrightarrow{r_C} = \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{r_A} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \{-1; -3; 2\}+$$
$$+ \{1; -1; 1\} + \{1; 1; 1\} = \{-1+1+1; -3 -1+1; 2+1+1\}=$$
$$= \{1; -3; 4\} \Rightarrow C(1; -3; 4) \text{ и}$$
$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1} = \{3 - 1; 0 - (-3); 8 - 4\} = \{2; 3; 4\}.$$

Объём параллелепипеда вычислим с помощью смешанного произведения:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} +$$
$$+2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (4 - 3) - (-4 - 3) + 2 \cdot (-1 - 1) = 1 + 7 - 4 = 4.$$

Следовательно, $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = |\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}| = 4$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Вычислить объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$ и $\vec{c} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 5\vec{k}$, приведённых к общему началу.

Ответ: 2.

2. Найти объём треугольной пирамиды с вершинами $A(-1; -5; -2)$, $B(1; -2; 2)$, $C(5; -3; 0)$ и $D(2; 2; -1)$, площадь грани BCD и длину высоты пирамиды, опущенной на эту грань.

Ответ: $V = 20$; $S = \frac{\sqrt{510}}{2}$; $H = \frac{4\sqrt{510}}{17}$.

3. Показать, что векторы $\vec{a} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$ и $\vec{c} = 3\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 4\vec{k}$ компланарны. Найти линейную зависимость между ними.

Ответ: $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$.

4. Доказать, что точки $A(-2; 1; 1)$, $B(-4; -5; 2)$, $C(2; -2; -1)$ и $D(-6; -1; 3)$ лежат в одной плоскости.

11. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

11.1.Линии на плоскости.

Уравнением линии на плоскости в выбранной декартовой прямоугольной системе координат $x\ O\ y$ называется такое уравнение $F(x;\ y)\ =\ 0$ с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Входящие в уравнение линии переменные x и y называются текущими координатами, а буквенные постоянные (например, $a, b, c, d, A, B, C, D, R$, и т.д.) - параметрами.

Так в уравнении окружности $x^2+y^2\ =\ R^2$ переменные x и y - текущие координаты, а постоянная R - параметр.

Уравнение линии позволяет изучение геометрических свойств линии заменить исследованием его уравнения.

Для *составления уравнения линии* как некоторого множества точек, удовлетворяющих общему геометрическому свойству (геометрического места точек или ГМТ), необходимо:

1) взять произвольную (текущую) точку $M(x;y)$ линии;
2) записать общее свойство точек данного ГМТ в виде равенства;
3) выразить входящие в это равенство величины (длины отрезков, углы, и т. д.) через текущие координаты x и y.

Пример 18. Написать уравнение окружности с центром $C(2;\ 1)$ радиуса $R\ =5$. Лежат ли на этой окружности точки $A(-2;\ -2)$, $B(1;\ 0)$, $D(3;\ -2)$ и $E\ (-1;\ -3)$?

Решение. Пусть $M(x;\ y)$ - произвольная точка окружности. Равенство $CM\ = R$ выражает общее свойство всех точек этой линии. Для составления уравнения линии выразим расстояние CM через координаты точки M и подставим в указанное равенство:

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} = 5 \Rightarrow (x-2)^2+(y-1)^2 = 25.$$

Теперь проверим, лежат ли точки $A,\ B,\ C$ и D на окружности.

1) Подставим координаты точки $A(-2;\ -2)$ в уравнение окружности;

$$(-2-2)^2 + (-2-1)^2 = 25$$
$$16 + 9 = 25 \text{ (верно)}.$$

Полученное верное равенство показывает, что точка A лежит на окружности.

2) $B(1;\ 0) \Rightarrow\ (1-2)^2 + (0-1)^2 = 25$

$$1 + 1 \neq 25.$$

Координаты точки B не удовлетворяют уравнению окружности, следовательно, эта точка не лежит на окружности.

3) $D(3;\ -2) \Rightarrow (3-2)^2 + (-2-1)^2 = 25$

$$1+ 9 \neq 25$$

Значит, точка D не лежит на окружности.

4) $E(-1;\ -3) \Rightarrow (-1-2)^2 + (-3-1)^2 = 25$

$$9+ 16 = 25$$

Значит, точка E лежит на окружности.

Пример 19. Составить уравнение линии, определяемой как геометрическое место точек, равноудалённых от точек
$A(2;\ 1)$ и $B(4;\ -3)$.

Решение. Пусть $M\ (x;\ y)$ - произвольная точка линии. Равенство $AM\ = BM$ выражает общее свойство всех точек этой линии. Для составления уравнения линии выразим расстояния AM и BM через координаты точки M и подставим в указанное равенство:

$$AM = \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} \text{ и } BM= \sqrt{(x-4)^2+(y-(-3)^2} \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-(-3)^2}$$

$$(x^2-4x+4)+(y^2-2y+1)=(x^2-8x+16)+(y^2+6y+9)$$
$$4x-8y-20=0 \Leftrightarrow x-2y-5=0.$$

Пример 20. Написать уравнение траектории точки $M(x;\ y)$, которая при своём движении остаётся втрое дальше от точки $A(7;\ 3)$, чем от точки $B(-1;\ 3)$.

Решение. Пусть $M(x;\ y)$ - произвольная точка линии. Равенство $AM = 3BM$ выражает общее свойство всех точек этой линии. Для составления уравнения линии выразим расстояния AM и BM через координаты точки M и подставим в указанное равенство:

$$AM=\sqrt{(x-7)^2+(y-3)^2} \text{ и } BM=\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2} \Rightarrow \sqrt{(x-7)^2+(y-3)^2} = 3\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2} \Rightarrow$$

$$(x^2-14x+49)+(y^2-6y+9)=9[(x^2+2x+1)+(y^2-6y+9)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-14x-6y+58=9x^2+9y^2+18x-54y+90 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8(x^2+y^2)+32x-48y+32=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+4x-6y+4=0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow (x^2+4x+4)+(y^2-6y+9)=-4+4+9 \Leftrightarrow$$
$$(x+2)^2+(y-3)^2=9.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Составить уравнение линии, определяемой как геометрическое место точек, равноудалённых от точек
$A(1;\ -3)$ и $B(-3;\ -1)$. Лежат ли на этой линии точки
$C(-1;\ -2)$, $D(3;\ 0)$ и $E(2;\ 4)$?
Ответ: $y = 2x$; да; нет; да.
2. Написать уравнение траектории точки $M(x;\ y)$, которая при своём движении остаётся вдвое ближе к точке $A(-2;\ -1)$, чем к точке $B(1;\ -4)$.
Ответ: $(x+3)^2+y^2=8$.
3. Составить уравнение ГМТ, сумма квадратов расстояний от которых до точек $A(-1;\ 3)$ и $B(5;\ 3)$ равна 50.
Ответ: $(x-2)^2+(y-3)^2=16$.
4. Составить уравнение ГМТ, модуль разности расстояний от которых до точек $F_1(-5;\ 3)$ и $F_2(5;\ 3)$ равен 8.
Ответ: $9x^2-16(y-3)^2=144$.

11.2. Уравнение прямой.

Общее уравнение прямой.

Теорема. В прямоугольной системе координат xOy на плоскости любая прямая может быть задана уравнением первой степени $Ax+By+C=0$ (A и B не равны нулю одновременно). И обратно, любое уравнение первой степени $Ax+By+C=0$ (A и B не равны нулю одновременно) определяет на плоскости (в прямоугольной системе координат xOy) некоторую прямую.

Уравнение вида $Ax+By+C=0$ называется *общим уравнением прямой.*

Замечание. Линии, определяемые в прямоугольной системе координат xOy уравнением первой степени, называются *линиями первого порядка*.

Согласно теореме, термины «прямая» и «линия первого порядка» - синонимы.

Частные случаи.

1) $C=0$; $A\neq 0$; $B\neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $Ax+By=0$, проходит через начало координат.

2) $A = 0$; $B \neq 0$; $C \neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $By + C = 0$ (или $y = b$, где $b = -\frac{C}{B}$), параллельна оси Ox.
3) $B = 0$; $A \neq 0$; $C \neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $Ax + C = 0$ (или $x = a$, где $a = -\frac{C}{A}$), параллельна оси Oy.
4) $B = C = 0$; $A \neq 0$. Прямая, определяемая уравнением
$Ax = 0$ (или $x = 0$, поскольку $A \neq 0$), совпадает с осью Oy.
5) $A = C = 0$, $B \neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $By = 0$ (или $y = 0$, поскольку $B \neq 0$), совпадает с осью Ox.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Углом наклона данной прямой к оси Ox называется такой угол α, на который необходимо повернуть ось Ox, чтобы её положительное направление совпало с одним из направлений прямой.
Замечание. Угол наклона определён с точностью до слагаемого πn, $n \in \mathbb{Z}$. Чаще всего в качестве угла наклона берут значение из промежутка $0 \leq \alpha < \pi$.

Тангенс угла наклона прямой к оси Ox называется *угловым коэффициентом* этой прямой и обозначается

$$k = tg\alpha.$$

Теорема. Любая прямая, не перпендикулярная оси Ox, имеет уравнение вида $y = kx + b$. И обратно, любое уравнение вида $y = kx + b$ определяет прямую, которая имеет угловой коэффициент k и отсекает на оси Oy отрезок величины b (рис. 4).

Уравнение вида $y = kx + b$ называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом* (оно получается из общего уравнения прямой в случае, когда $B \neq 0$).

Прямая, проходящая через данную точку $M_0(x_0; y_0)$, *с данным угловым коэффициентом* k, задаётся уравнением (рис. 4):

$$(y - y_0) = k(x - x_0).$$

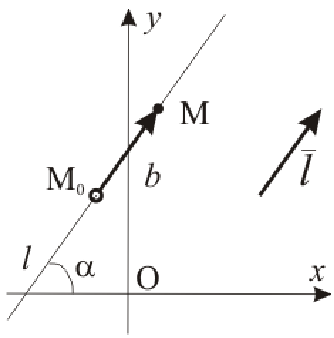

Рис.4

Уравнение прямой в отрезках.

Теорема. Пусть прямая отсекает на оси Ox отрезок величины $a \neq 0$, а на оси Oy - отрезок величины $b \neq 0$
Тогда она имеет уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Уравнение вида $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ называется *уравнением прямой в отрезках* (в нём a является абсциссой точки пересечения прямой с осью Ox, а b - ординатой точки пересечения прямой с осью Oy). Оно получается из общего уравнения прямой с помощью деления на число $-C$ в случае, когда $A \cdot B \cdot C \neq 0$ (здесь $a = \frac{-C}{A}$ и $b = \frac{-C}{B}$).

Каноническое уравнение прямой.

Теорема. Пусть прямая l проходит через точку $M_0(x_0; y_0)$ и параллельна вектору $\vec{l} = \{p;\ q\}$ (рис. 4). Тогда она имеет уравнение

$$\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q}.$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением прямой* l, а вектор $\vec{l} = \{p;\ q\}$ - *направляющим вектором* этой прямой.

Замечание. Каноническое уравнение выражает следующее геометрическое свойство точек, лежащих на прямой l: точка $M(x;\ y)$ лежит на прямой l тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{l}$ коллинеарны.

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

Пучок прямых, проходящих через данную точку $M_0(x_0;\ y_0)$.

Пучком прямых называется множество всех прямых на плоскости, проходящих через данную точку M_0 - *центр пучка.*

Теорема. Пусть прямая на плоскости задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$. Тогда вектор $\vec{n} = \{A;\ B\}$ перпендикулярен ей (т.е. является её *нормальным вектором*) .

Теорема. Пусть прямая проходит через точку $M_0(x_0;\ y_0)$ и перпендикулярна вектору $\vec{n} = \{A;\ B\}$. Тогда она задаётся уравнением

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Идея доказательства проста: точка $M(x;\ y)$ принадлежит прямой $\vec{l}$ тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{n}$ перпендикулярны (рис. 5):

$$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

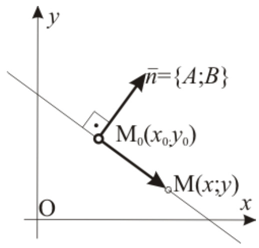

Рис. 5

Следствие. Пучок прямых, проходящих через данную точку $M_0(x_0; y_0)$ задаётся уравнением

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Для получения одной прямой, принадлежащей пучку, необходимо подставить в это уравнение вместо параметров A и B произвольные числа, не равные нулю одновременно.

Замечание. Поскольку две непараллельные прямые на плоскости пересекаются строго в одной точке, они полностью определяют пучок прямых, проходящих через эту точку.
Теорема. Пусть векторы $\{A_1;\ B_1\}$ и $\{A_2;\ B_2\}$ не коллинеарны (т.е. их координаты не пропорциональны). Тогда прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ не параллельны и пересекаются в точке $M_0(x_0;\ y_0)$, координаты которой удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Пучок прямых, проходящих через эту точку, задаётся следующим уравнением:

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

Замечание. При $\alpha = 1$ из пучка исключается вторая из данных прямых $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, а при $\beta = 1$ - первая прямая $A_1x + B_1y + C_1 = 0$.

Нормальное уравнение прямой.

Уравнение $Ax + By + C = 0$ прямой l называется *нормальным*, если её нормальный вектор $\vec{n} = \{A;\ B\}$ является единичным (т.е. $A^2 + B^2 = 1$) и $C \leq 0$.
Замечание. Нормальное уравнение прямой получается из её общего уравнения делением на число

$$\mu = \pm\sqrt{A^2 + B^2},$$

причем знак перед радикалом выбирается так, чтобы $\mu C \leq 0$. В случае $C = 0$ прямая имеет два нормальных уравнения.

Геометрический смысл коэффициентов нормального уравнения прямой.

Проведём через начало координат O прямую, перпендикулярную l, и обозначим буквой M_0 точку пересечения указанных прямых. Рассмотрим единичный вектор $\vec{n}$, перпендикулярный прямой l и одинаково направленный с вектором $\overrightarrow{OM_0}$. Обозначим через p длину отрезка OM_0 (она равна расстоянию от начала координат O до прямой l), а через φ — угол от положительного направления оси Ox до вектора $\vec{n}$. Так как $\vec{n}$ - единичный вектор, то его координаты выражаются по формулам

$$A = \cos\varphi,\ B = \sin\varphi.$$

Очевидно, что точка $M(x;\ y)$ лежит на прямой l тогда и только тогда, когда проекция её радиус-вектора $\overrightarrow{OM} = \{x;\ y\}$ на вектор $\vec{n}$ равна числу p:

$$\text{пр}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{OM} = p.$$

Выразим эту проекцию через скалярное произведение векторов:

$$\text{пр}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{OM} = \frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{OM}}{|\vec{n}|} = \vec{n}\cdot\overrightarrow{OM} = x\cos\varphi + y\sin\varphi.$$

Следовательно, уравнение прямой l принимает вид

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = p \Leftrightarrow x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0.$$

Последнее уравнение является нормальным уравнением прямой l. Таким образом, нормальное уравнение прямой имеет следующие коэффициенты:

$$A = \cos\varphi,\ B = \sin\varphi,\ C = -\,p.$$

Замечание. В некоторой учебной литературе нормальное уравнение прямой определяется как уравнение вида

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0, \text{ где } p \geq 0.$$

Такое определение эквивалентно определению, приведённому выше.

Теорема. Расстояние от произвольной точки $M_1(x_1; y_1)$ до прямой l, заданной нормальным уравнением

$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$, находится по формуле

$$d(M_1; l) = |x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - p|.$$

Идея доказательства заключается в следующем: расстояние от точки $M_1(x_1; y_1)$ до прямой l равно модулю проекции вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ (здесь M_0 - произвольная точка прямой l) на нормальный вектор $\vec{n}$ этой прямой (рис. 6):

$$d\,(M_1; l) = |\text{пр}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{M_0M_1}\,|.$$

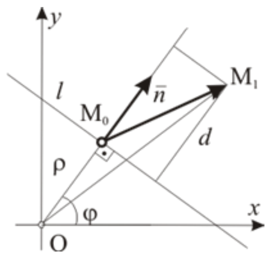

Рис. 6

Указанную проекцию найдём с использованием свойств проекций векторов:

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_0} \Rightarrow \text{пр}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{M_0M_1} = \text{пр}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{OM_1} - \text{пр}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{OM_0} =$$
$$= (x\cos\varphi + y\sin\varphi) - p \Rightarrow d\,(M_1; l) = |x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - p|.$$

Следствие. Расстояние от произвольной точки $M_1(x_1; y_1)$

до прямой l, заданной общим уравнением $Ax + + C$ =0, выражается формулой

$$d\,(M_1; l) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Теорема. Биссектрисы углов между прямыми

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

задаются уравнениями

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{{A_1}^2 + {B_1}^2}} = \pm\frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{{A_2}^2 + {B_2}^2}}$$

(эти уравнения получаются как уравнения ГМТ, равноудалённых от заданных прямых).

Угол между прямыми.

Теорема. Острый угол между прямыми $y = k_1x + b_1$ и
$y = k_2x + b_2$ определяется по формуле

$$tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

Условие параллельности прямых имеет вид

$$k_1 = k_2.$$

Условие перпендикулярности прямых имеет вид

$$k_1 \cdot k_2 = -1.$$

Теорема. Острый угол между прямыми, заданными общими уравнениями

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \text{ и } A_2 x + B_2 y + C_2 = 0,$$

определяется по формулам

$$tg\varphi = \left|\frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}\right| \text{ или}$$

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|},$$

где $\vec{n}_1 = \{A_1;\ B_1\}$, $\vec{n}_2 = \{A_2;\ B_2\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = A_1 A_2 + B_1 B_2, \\ |\vec{n}_1| = \sqrt{{A_1}^2 + {B_1}^2}, \\ |\vec{n}_2| = \sqrt{{A_2}^2 + {B_2}^2}. \end{cases}$$

Условие параллельности прямых имеет вид

$$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \text{ или } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Условие перпендикулярности прямых имеет вид

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

Теорема. *Острый угол между прямыми* l_1 и l_2, заданными каноническими уравнениями

$$\frac{x - x_1}{p_1} = \frac{y - y_1}{q_1} \text{ и } \frac{x - x_2}{p_2} = \frac{y - y_2}{q_2},$$

определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2|}{|\vec{l}_1| \cdot |\vec{l}_2|},$$

где $\vec{l}_1 = \{p_1;\ q_1\}$, $\vec{l}_2 = \{p_2;\ q_2\}$ ($\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2 = p_1 \cdot p_2 + q_1 \cdot q_2$;

$|\vec{l}_1| = \sqrt{{p_1}^2 + {q_1}^2}$; $|\vec{l}_2| = \sqrt{{p_2}^2 + {q_2}^2}$).

Условие параллельности прямых имеет вид

$$\vec{l}_1 \parallel \vec{l}_2 \text{ или } \frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2}.$$

Условие перпендикулярности прямых имеет вид

$$\vec{l}_1 \perp \vec{l}_2 \Leftrightarrow \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2 = 0 \Leftrightarrow p_1 \cdot p_2 + q_1 \cdot q_2 = 0.$$

Пример 22. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок $b = -6$ и образующей с положительным направлением оси Ox угол $\alpha = 120°$.

Решение. Находим угловой коэффициент прямой:
$k = tg\alpha = tg120° = -\sqrt{3}$. Зная параметры прямой $k = -\sqrt{3}$ и $b = -6$, запишем уравнение прямой с угловым коэффициентом $y = -\sqrt{3}x - 6$. Перенося все члены в левую часть, получаем общее уравнение прямой $\sqrt{3}x + y + 6 = 0$.

Пример 23. Дано общее уравнение прямой $4x - 3y + 30 = 0$. Получить:
1) уравнение с угловым коэффициентом; 2) уравнение в отрезках; 3) нормальное уравнение; 4) каноническое уравнение.

Решение. 1) Разрешив уравнение относительно переменной y, получаем уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y = \frac{4}{3}x + 10$ (здесь $k = \frac{4}{3}$, $b = 10$).
2) Перенесём свободный член общего уравнения в правую часть и разделим обе части на (–30): $\frac{4x}{-30} - \frac{y}{-30} = 1$.
Переписав уравнение в виде

$$\frac{4x}{-\frac{15}{2}} + \frac{y}{10} = 1,$$

получим уравнение данной прямой в отрезках
(здесь $a = -\frac{15}{2}$, $b = 10$).
3) Находим нормирующий множитель:

$$\mu = \frac{1}{-\sqrt{3^2+(-4)^2}} = -\frac{1}{5}$$

(знак «–» выбран согласно условию $\mu C = 30\mu < 0$. Умножив обе части общего уравнения на этот множитель, получаем нормальное уравнение прямой

$$-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 6 = 0$$

Здесь $\cos\varphi = -\frac{4}{5}$, $\sin\varphi = \frac{3}{5}$, $p = 6$.
4) Из общего уравнения прямой находим вектор нормали
$\vec{n} = \{A; B\} = \{4; -3\}$. Следовательно, вектор $\vec{l} = \{-B; A\} =$
$= \{3{:}4\}$, перпендикулярный вектору $\vec{n}$, параллелен прямой и является её направляющим вектором. Далее находим точку, лежащую на нашей прямой. Полагая $x = 0$, получаем $y = 10$, т.е. прямая проходит через точку $M_0(0;10)$.
В результате получаем каноническое уравнение прямой

$$\frac{x-0}{3} = \frac{y-10}{4}.$$

Пример 24. Построить прямые: 1) $2x - 3y + 6 = 0$;
2) $2x + 5y = 0$; 3) $2x + 3 = 0$; 4) $5y - 7 = 0$.

Решение. 1) Полагая в уравнении $x = 0$, получаем $y = 2$. Следовательно, прямая проходит через точку $A(0; 2)$. Полагая в уравнении $y = 0$, получаем $x = -3$, т.е. прямая проходит через точку $B(-3; 0)$. Остаётся провести прямую через точки A и B.
2) Прямая $2x + 5y = 0$ проходит через начало координат, т.к. в её уравнении отсутствует свободный член. Вторую точку, лежащую на прямой, получим, положив вместо x произвольное значение, например $x = 5$, тогда $10 + 5y = 0$, т.е. $y = -2$. Следовательно, прямая проходит через точку $C(5; -2)$. Остаётся провести прямую через точки O и C.
3) Разрешим уравнение относительно переменной x:
$x = -1{,}5$. Эта прямая параллельна оси ординат и пересекает ось Ox в точке $A(-1{,}5; 0)$.
4) Аналогично получаем уравнение $y = 1{,}4$. Эта прямая параллельна оси Ox.

Пример 25. Дан треугольник ABC с вершинами:
$A(-2; 2)$, $B(1;9)$, $C(10; -3)$. Найти:
1) уравнение стороны AB;
2) уравнение высоты CK;
3) длину высоты CK;
4) уравнение медианы AM;
5) длину медианы AM;

6) уравнение биссектрисы угла C;
7) точку N пересечения медианы AM и высоты CK;
8) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB;
9) площадь треугольника ABC.

Решение.

1) Уравнение стороны AB. Сторона треугольника AB - это прямая, проходящая через точки A и B. Для получения канонического уравнения этой прямой достаточно заметить, что она параллельна вектору $\overrightarrow{AB}$, поэтому его можно взять в качестве направляющего вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB} =$
$= \{1–(–2); 9 – 2\} = \{3; 7\}$. В качестве точки M_0 можно взять как точку A, так и точку B. Мы возьмем точку $A(–2, 2)$. Тогда $\frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{7}$ - каноническое уравнение стороны AB или

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{7} \Leftrightarrow 7(x+2) = 3(y-2) \Leftrightarrow 7x + 14 - 3y + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7x - 3y + 20 = 0$$ - общее уравнение стороны AB.

2) Уравнение высоты CK. Высота CK треугольника ABC - это прямая, проходящая через точку $C(10; –3)$ перпендикулярно прямой AB и, следовательно, перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AB} = \{3; 7\}$, поэтому его можно взять в качестве вектора нормали этой высоты. Таким образом, общее уравнение высоты CK имеет вид:

$$3(x - 10) + 7(y - (-3)) = 0,$$
$$3x - 30 + 7y + 21 = 0,$$

Тогда $3x + 7y - 9 = 0$ - общее уравнение высоты CK.

3) Длина высоты CK — это расстояние от вершины $C(10; –3)$ треугольника ABC до прямой AB Общее уравнение прямой AB найдено ранее и имеет вид:

$$7x - 3y + 20 = 0,$$

поэтому

$$|CK| = d(C; AB) = \frac{|7\cdot 10 - 3\cdot(-3) + 20|}{\sqrt{7^2 + (-3)^2}} = \frac{99}{\sqrt{58}} = \frac{99\sqrt{58}}{58}.$$

4) Уравнение медианы AM. Медиана AM - это прямая, соединяющая вершину $A(–2; 2)$ треугольника ABC с серединой M противолежащей стороны BC.

Найдем координаты точки M:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{1 + 10}{2} = 5{,}5 \\ y_M = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{9 + (-3)}{2} = 3. \end{cases}$$

Следовательно, направляющим вектором медианы AM является вектор

$$\overrightarrow{AM} = \{5{,}5 - (-2); 3 - 2\} = \{7{,}5; 1\} == 0{,}5\cdot\{15; 2\}$$

и каноническое уравнение медианы AM имеет вид:

$$\frac{x+2}{15} = \frac{y-2}{2}.$$

или

$$\frac{x+2}{15} = \frac{y-2}{2} \Leftrightarrow 2x + 4 = 15y - 30 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - 15y + 34 = 0$$ - общее уравнение медианы AM.

5) Длина медианы AM - это длина вектора
$\overrightarrow{AM}$ = 0,5·{15; 2}:

$$|\overrightarrow{AM}| = \frac{1}{2}\sqrt{15^2+2^2} = \frac{\sqrt{229}}{2}.$$

6) Уравнение биссектрисы угла C. Пусть D - точка пересечения биссектрисы со стороной AB. Из свойства биссектрисы внутреннего угла треугольника следует, что $AD{:}DB = AC{:}BC$. Поскольку

$$AC = \sqrt{(10+2)^2+(-3-2)^2} = 13,$$
$$BC = \sqrt{(10-1)^2+(-3-9)^2} = 15,$$
$$\text{то } \lambda = AD{:}DB = AC{:}BC = 13{:}15.$$

Таким образом, точка D делит отрезок AB в отношении
$\lambda = \frac{13}{15}$, поэтому её координаты определяются по формулам:

$$\begin{cases} x_D = \dfrac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda} = \dfrac{-2+\frac{13}{15}\cdot 1}{1+\frac{13}{15}} = -\dfrac{17}{28} \\ y_D = \dfrac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda} = \dfrac{2+\frac{13}{15}\cdot 9}{1+\frac{13}{15}} = \dfrac{147}{28}, \end{cases}$$

$$\text{т.е. } D\left(-\frac{17}{28}; \frac{147}{28}\right).$$

Далее находим направляющий вектор биссектрисы CD:

$$\overrightarrow{CD} = \left\{-\frac{17}{28}-10;\ \frac{147}{28}+3\right\} = \left\{-\frac{297}{28};\ \frac{231}{28}\right\} = \frac{33}{28}\cdot\{-9;\ 7\}$$

и получаем её каноническое уравнение

$$\frac{x-x_C}{-9} = \frac{y-y_C}{7} \Leftrightarrow \frac{x-10}{-9} = \frac{y+3}{7} \text{ или}$$

$$7(x-10) = -9(y+3)$$

$$7x + 9y - 43 = 0 \text{ - общее уравнение биссектрисы } CD.$$

7) Точка N пересечения медианы AM и высоты CK. Координаты точки N удовлетворяют как уравнению медианы AM, так и уравнению высоты CK, а, следовательно, они удовлетворяют линейной системе, состоящей из уравнений медианы AM и высоты CK:

$$\begin{cases} 2x-15y+34=0 \\ 3x+7y-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-15y+34=0 \\ 59y-120=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7{,}5y-17 = -\frac{103}{59} \\ y = \frac{120}{59} \end{cases} \Rightarrow N\left(-\frac{103}{59}; \frac{120}{59}\right).$$

8) Уравнение прямой l_1, проходящей через вершину
$C(10;\ -3)$ параллельно стороне AB. Параллельность прямых равносильна параллельности направляющих векторов, поэтому в качестве направляющего вектора прямой l_1 можно взять

вектор $\overrightarrow{AB}$ = {3; 7}. В результате каноническое уравнение прямой принимает вид:

$$\frac{x-10}{3} = \frac{y+3}{7}.$$

$$\text{или } \frac{x-10}{3} = \frac{y+3}{7} \Leftrightarrow 7\,(x - 10) = 3(y + 3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 7x - 70 - 3y - 9 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 7x - 3y - 79 = 0 \text{ — общее уравнение прямой } l_1.$$

9) Площадь треугольника ABC может быть найдена с помощью векторного произведения. Для этого рассмотрим векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ в пространстве (добавим третью координату z = 0):

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \{3; 7; 0\}, \\ \overrightarrow{AC} = \{12; -5; 0\}. \end{cases}$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 7 & 0 \\ 12 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 12 & -5 \end{vmatrix} =$$
$$= \vec{k}\cdot(3\cdot(-5) - -12\cdot7) = -99\vec{k}.$$

Согласно определению векторного произведения, длина вектора $\vec{n}$ численно равна площади параллелограма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, или, что то же самое, удвоенной площади $\Delta\, ABC$:

$$2S_{\Delta\, ABC} = |\vec{n}| = 99\left|\vec{k}\right| \Rightarrow S_{\Delta\, ABC} = 49{,}5.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Построить прямые, заданные уравнениями:
1) $2x - 5y + 20 = 0$; 2) $2x + 3y + 8 = 0$;
3) $2x — 3y = 0$; 4) $y + 4 = 0$.
2. Определить параметры k и b для следующих прямых:
1) $2x + 5y - 1 = 0$; 2) $7x + 2y = 0$; 3) $2y - 5 = 0$.
3. Составить уравнение прямой с углом наклона 150°, отсекающей на оси ординат отрезок b = 2.
4. Уравнения прямых
1) $3x - 4y - 12 = 0$; 2) $5x + 2y - 10 = 0$; 3) $3x - 2y - 1 = 0$
привести к виду в отрезках на осях. Построить прямые.
5. Можно ли уравнение прямой $20x + 21y = 0$ записать в отрезках?
6. Найти канонические уравнения следующих прямых:
1) $2x - 3y = 6$; 2) $3x - 2y + 4 = 0$.
7. Прямая задана уравнением $\frac{x+1}{3} = \frac{y-5}{-2}$. Написать:
1) её общее уравнение; 2) уравнение с угловым коэффициентом; 3) уравнение в отрезках; 4) нормальное уравнение. Построить прямую.
8. Найти угол наклона прямой $2x + 2y - 7 = 0$.
9. Дан треугольник ABC с вершинами:
$A(7; 5)$, $B(3; 2)$, $C(1; -3)$. Найти:
1) уравнение стороны AB;
2) уравнение высоты CK;
3) длину высоты CK;

4) уравнение медианы AM;
5) длину медианы AM;
6) уравнение биссектрисы угла C;
7) точку N пересечения медианы AM и высоты CK;
8) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB;
9) площадь треугольника ABC.

10. Определить площадь треугольника, образованного прямой $3x - 4y + 24 = 0$ и осями координат.

11. Прямая отсекает на осях координат равные положительные отрезки. Составить её уравнение, если площадь треугольника, образованного прямой с осями координат, равна 18.

12. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(3;\ 4)$ и отсекающей на координатных осях отрезки равной длины.

13. Даны две вершины треугольника $A(4;\ -3)$, $B(6;\ 5)$ и точка $P(5;\ -3)$ пересечения его высот. Составить уравнения сторон треугольника и найти его площадь.

14. Составить уравнения биссектрис углов между прямыми $3x + 4y - 20 = 0$ и $8x + 6y - 5 = 0$.

15. Написать уравнения прямых, проходящих через точку $M(1;\ 5)$ под углом 45° к прямой AB, где $A(-2;\ 5)$ и $B(7;\ -4)$.

16. Точки $A(-1;\ 5)$ и $C(4;\ 4)$ являются противоположными вершинами квадрата. Определить координаты двух других его вершин.

17. На оси ординат найти точки, лежащие на расстоянии $d = 3$ от прямой $12x - 5y + 14 = 0$.

18. Найти прямую, проходящую через точку пересечения двух прямых $3x + 2y - 5 = 0$, $x - 7y + 4 = 0$ и через точку $M(2;\ -3)$.

19. Даны стороны треугольника: $x + 2y + 7 = 0$ (AB),
$3x + y + 1 = 0$ (BC) и $x + y + 7 = 0$ (AC). Составить уравнения его высот.

20. Составить уравнения трёх сторон квадрата, если известно, что четвёртой стороной является отрезок прямой $4x + 3y - 12 = 0$, концы которого лежат на осях координат.

Ответы: **2**. 1) $k = -0{,}4$; $b = 0{,}2$; 2) $k = -3{,}5$; $b = 0$; 3) $k = 0$;
$b = 2{,}5$; 4) **3**. $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$. **4**. 1) $\frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1$; 2) $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$;
3) $\frac{x}{\frac{1}{3}} + \frac{y}{-\frac{1}{2}} = 1$ **5**. Нет. **6**. 1) $\frac{x}{3} = \frac{y+2}{2}$; 2) $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{3}$.
7. 1) $2x + 3y - 13 = 0$; 2) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$; 3) $\frac{x}{6{,}5} + \frac{y}{\frac{13}{3}} = 1$;
4) $\frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y - \sqrt{13} = 0$. **8.** 135°. **9.** 1) $3x - 4y = 1$;
2) $4x + 3y + 5 = 0$; 3) 2,8; 4) $11x - 10y - 27 = 0$; 5) $\frac{\sqrt{221}}{2}$;
6) $\frac{x-1}{20+6\sqrt{29}} = \frac{y+2}{50+8\sqrt{29}}$; 7) $N(\frac{31}{73}; -\frac{163}{73})$; 8) $3x - 4y = 15$; 9) 7.
10. 24. **11**. $x + y = 6$. **12**. $x + y = 7$. **13**. AB: $4x - y = 19$;
AC: $x + 8y + 20 = 0$; BC: $x = 6$, $S = 8{,}25$. **14**. $2y - 2x = 35$;
$14x + 14y = 45$. **15**. $y = 5$, $x = 1$. **16**. $B(2;\ 7)$, $D(1;\ 2)$.
17. $(0;\ -5)$, $(0;\ 10{,}6)$. **18**. $86x + 19y = 115$. **19**. $y = x - 5$;
$3y - x = 7$; $2x - y = 16$. **20**. $3x - 4y = 9$; $4y - 3x = 16$;
$4x + 3y + 13 = 0$; $4x + 3y = 37$.

12. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

12.1. Плоскость.

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0;\ z_0)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n}=\{A; B; C\}$.

Пусть $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ - произвольная точка плоскости π, а $\vec{n}$ - её нормальный вектор, т.е. $\vec{n}\perp\pi,\ \ \vec{n}\neq 0$ (рис. 7). Тогда условие принадлежности точки $M(x;y;z)$ плоскости π равносильно перпендикулярности векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{n}$:

$$\overrightarrow{M_0M}\perp\vec{n}=0 \Leftrightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

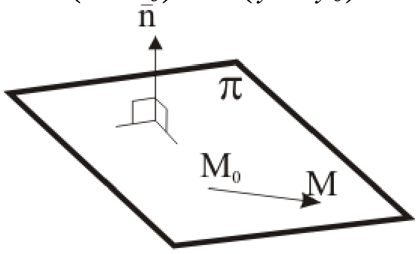

Рис.7

Связкой плоскостей называется множество всех плоскостей, проходящих через одну точку (*центр связки*).

Согласно сказанному выше, уравнение

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

задаёт связку плоскостей, проходящих через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$. Для получения одной плоскости, принадлежащей связке, необходимо подставить в это уравнение вместо параметров A, B и C произвольные числа, не равные нулю одновременно.

Общее уравнение плоскости.

Теорема. В прямоугольной системе координат $Oxyz$ любая плоскость может быть задана уравнением первой степени $Ax+By+Cz+D=0$ ($A,\ B$ и С не равны нулю одновременно). И обратно, любое уравнение первой степени $Ax+By+Cz+D=0$ ($A,\ B$ и С не равны нулю одновременно) определяет в пространстве (в прямоугольной системе координат $Oxyz$) некоторую плоскость. Вектор $\vec{n}$ с координатами $\{A; B; C\}$ является её нормальным вектором.

Уравнение плоскости вида $Ax+By+Cz+D=0$ называется *общим уравнением плоскости*.

Замечание. Поверхности, определяемые в прямоугольной системе координат $Oxyz$ уравнением первой степени, называются поверхностями первого порядка. Согласно теореме, термины «плоскость» и «поверхность первого порядка» - синонимы.

Частные случаи расположения плоскости:

1) $A=0\Rightarrow$ параллельна оси Ox;
2) $B=0\Rightarrow$ параллельна оси Oy;
3) $C=0\Rightarrow$ параллельна оси Oz;
4) $D=0\Rightarrow$ проходит через начало координат;
5) $A=B=0\Rightarrow$ перпендикулярна оси Oz (параллельна плоскости xOy);
6) $A=C=0\Rightarrow$ перпендикулярна оси Oy (параллельна плоскости xOz);
7) $B=C=0\Rightarrow$ перпендикулярна оси Ox(параллельна плоскости yOz);
8) $A=D=0\Rightarrow$ проходит через ось Ox;
9) $B=D=0\Rightarrow$ проходит через ось Oy;

10) $C = D = 0$ проходит через ось Oz;
11) $A = B = D = 0 \Rightarrow$ совпадает с плоскостью xOy ($z = 0$);
12) $A = C = D = 0 \Rightarrow$ совпадает с плоскостью xOz ($y = 0$);
13) $B = C = D = 0 \Rightarrow$ совпадает с плоскостью yOz ($x = 0$).

Угол между двумя плоскостями.

1) Один из углов между плоскостями

$$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и}$$
$$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

равен углу между их нормальными векторами

$$\overrightarrow{n_1} = \{A_1;\ B_1;\ C_1\} \text{ и } \overrightarrow{n_2} = \{A_2; B_2; C_2\},$$

поэтому вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2 + C_1{}^2}\cdot\sqrt{A_2{}^2 + B_2{}^2 + C_2{}^2}}.$$

Второй угол равен $(\pi - \varphi)$.

2) *Условие параллельности плоскостей* имеет вид

$$\overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} = \lambda\overrightarrow{n_2}, \text{ где } \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0 \text{ или } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

3) *Условие перпендикулярности плоскостей* имеет вид

$$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2} = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Уравнение плоскости в отрезках.

Теорема. Пусть плоскость отсекает на осях $Ox,\ Oy$ и Oz отрезки величины $a \neq 0$, $b \neq 0$ и $c \neq 0$ соответственно (рис. 8). Тогда она задаётся уравнением

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Уравнение вида $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ называется *уравнением плоскости в отрезках* (в нём a, b и c соответственно абсцисса, ордината и аппликата точек пересечения плоскости с осями $Ox,\ Oy$ и Oz). Оно получается из общего уравнения плоскости с помощью деления на число $-D$ в случае, когда $A\cdot B\cdot C\cdot D \neq 0$ (здесь $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$ и
$c = -\frac{D}{C}$).

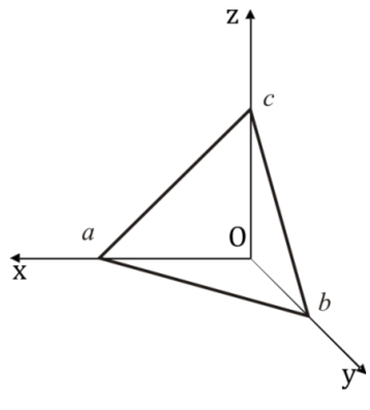

Рис. 8

Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости.

Уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ плоскости π называется *нормальным,* если её нормальный вектор

$$\vec{n} = \{A; B; C\}$$

является единичным (т.е. $A^2 + B^2 + C^2 = 1$) и $D \leq 0$.

Замечание. Нормальное уравнение плоскости получается из её общего уравнения делением на число

$$\mu = \pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

причём знак перед радикалом выбирается
так, чтобы $\mu D \leq 0$. В случае $D = 0$ плоскость имеет два нормальных уравнения.

Геометрический смысл коэффициентов нормального уравнения плоскости. Пусть $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ - направляющие косинусы перпендикуляра, опущенного из начала координат на данную плоскость (направление на перпендикуляре - от начала координат к плоскости) и p - его длина. Тогда уравнение плоскости имеет вид

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0$$

(вывод этого уравнения аналогичен выводу нормального уравнения прямой на плоскости). Полученное уравнение является нормальным уравнением плоскости π, т.к. направляющие косинусы вектора обладают свойством $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Таким образом, нормальное уравнение плоскости имеет следующие коэффициенты:

$$A = \cos\alpha,\ B = \cos\beta,\ C = \cos\gamma,\ D = -p.$$

Замечание. В некоторой учебной литературе нормальное уравнение плоскости определяется как уравнение вида
$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0$, где $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ и $p \geq 0$. Такое определение эквивалентно определению, приведённому выше.

Теорема. *Расстояние от произвольной точки*
$M_1(x_1; y_1; z_1)$ *до плоскости* π, заданной нормальным уравнением $x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0$, находится по формуле

$$d(M_1; \pi) = |x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p = 0|.$$

Замечание. Вывод приведённой в теореме формулы аналогичен выводу формулы для расстояния от точки до прямой на плоскости.

Следствие. Расстояние от произвольной точки
$M_1(x_1; y_1; z_1)$ до плоскости π, заданной общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, определяется по формуле

$$d(M_1; \pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Пучок плоскостей.

Пучком плоскостей называется множество всех плоскостей, проходящих через одну прямую.

Теорема. Пусть векторы $\overrightarrow{n_1}=\{A_1; B_1; C_1\}$ и $\overrightarrow{n_2} = \{A_2; B_2; C_2\}$ не коллинеарны. Тогда плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ не параллельны и пучок плоскостей, проходящих через их линию пересечения, задаётся уравнением

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

Замечание. При $\alpha = 1$ из пучка исключается вторая из заданных плоскостей, а при $\beta = 1$ - первая плоскость.

Пример 26. Даны точки $M_1(-2;\ 4;\ 3)$ и $M_2(2;\ 7;\ 5)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 и перпендикулярной вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Решение. Найдём нормальный вектор $\vec{n}$ к искомой плоскости: $\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} = \{2 - (-2);\ 7 - 4;\ 5 - 3\} = \{4;\ 3;\ 2\}$.

Теперь запишем уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{n}$ и проходящей через точку $M_1(-2;\ 4;\ 3)$,

$$4(x - (-2)) + 3(y - 4) + 2(z - 3) = 0 \text{ или}$$

$$4x + 3y + 2z - 10 = 0 \text{ – общее уравнение плоскости.}$$

Пример 27. Написать уравнение плоскости, параллельной оси Ox и проходящей через точки $M_1(-3;\ -1;\ 5)$ и

$M_2(-1;\ 2;\ 4)$. Найти углы между нормальным вектором плоскости и осями координат.

Решение. Найдём вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \{-1-(-3);\ 2-(-1);\ 4-5\} = = \{2;\ 3;\ -1\}$. Искомая плоскость параллельна векторам

$\vec{i} = \{1;\ 0;\ 0\}$ и $\overrightarrow{M_1M_2} = \{2;\ 3;\ -1\}$, следовательно,

перпендикулярна их векторному произведению

$$\vec{n} = \vec{i} \times \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot (0 - 0) - \vec{j} \cdot (-1 - 0) + \vec{k} \cdot (3 - 0) = \vec{j} + 3\vec{k} = \{0; 1; 3\}.$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_2(-1;\ 2;\ 4)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n} = \{0;\ 1;\ 3\}$, принимает вид

$$0 \cdot (x + 1) + 1 \cdot (y - 2) + 3(z - 4) = 0 \text{ или } y + 3z - 14 = 0.$$

Пример 28. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и точку $M(3;\ -1;\ 4)$.

Решение. Для определения вектора нормали к плоскости достаточно найти два неколлинеарных вектора, параллельных этой плоскости. Искомая плоскость проходит через ось Oz, следовательно, параллельна вектору $\vec{k} = \{0;\ 0;\ 1\}$ и проходит через начало координат $O(0;\ 0;\ 0)$. Поскольку точки O и M принадлежат этой плоскости, то она параллельна вектору $\overrightarrow{OM}$ и, таким образом, перпендикулярна векторному произведению

$$\vec{n} = \vec{k} \times \overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+ \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot (0 + 1) - \vec{j} \cdot (0 - 3) + \vec{k} \cdot (0 - 0) =$$

$$= \vec{i} + 3\vec{j} = \{1; 3; 0\}.$$

Следовательно, уравнение искомой плоскости имеет вид

$$1 \cdot (x - 3) + 3 \cdot (y + 1) + 0 \cdot (z - 4) = 0 \text{ или } x + 3y = 0.$$

Пример 28. Найти угол между плоскостями:

1) $x - 2y + 2z - 4 = 0$ и $x + z + 3 = 0$;

2) $x + 2z + 7 = 0$ и $x + 2y - 5 = 0$.

Решение. Угол между плоскостями равен углу между их нормальными векторами.

1) Нормальные векторы к заданным плоскостям имеют следующие координаты: $\vec{n}_1 = \{1; -2; 2\}$ и $\vec{n}_2 = \{1; 0; 1\}$, следовательно, угол между ними определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{1\cdot1+(-2)\cdot0+2\cdot1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

т.е. $\varphi = 45°$.

2) Находим нормальные векторы к данным плоскостям: $\vec{n}_1 = \{1; 0; 2\}$ и $\vec{n}_2 = \{1; 2; 0\}$, следовательно, косинус угла между ними равен

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{1\cdot1+0\cdot2+2\cdot0}{\sqrt{1^2+0+2^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+0^2}} = \frac{1}{5} = 0{,}2,$$

т.е. $\varphi = \arccos 0{,}2$.

Пример 29. Найти плоскость, проходящую через точку $M(-3; 5; 1)$ и параллельную плоскости $7x + 4y - z + 4 = 0$.

Решение. Запишем уравнение связки плоскостей, проходящих через точку M:

$$A(x + 3) + B(y - 5) + C(z - 1) = 0.$$

Из параллельности плоскостей следует, что нормальный вектор искомой плоскости совпадает с нормальным вектором $\vec{n} = \{7; 4; -1\}$ данной плоскости, поэтому $A = 7$, $B = 4$, $C = -1$ и уравнение искомой плоскости имеет вид

$$7(x + 3) + 4(y - 5) - (z - 1) = 0 \text{ или } 7x + 4y - z + 2 = 0.$$

Пример 30. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-2; 1; 4)$ и перпендикулярной плоскостям

$$3x - 5y - 2z + 1 = 0 \text{ и } 2x - 7y - 3z - 8 = 0.$$

Решение. Очевидно, что векторное произведение $\vec{n}$ двух нормальных векторов $\vec{n}_1 = \{3; -5; -2\}$ и $\vec{n}_2 = \{2; -7; -3\}$ заданных плоскостей является вектором нормали к искомой плоскости

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -5 & -2 \\ 2 & -7 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \vec{k}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot(15 - 14) - \vec{j}\cdot(-9 + 4) + \vec{k}\cdot(-21 + 10) =$$

$$= \vec{i} + 5\vec{j} - 11\vec{k} = \{1; 5; -11\},$$

поэтому её уравнение имеет вид

$$(x + 2) + 5(y - 1) - 11(z - 4) = 0 \text{ или } x + 5y - 11z + 41 = 0.$$

Пример 31. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-1; 4; 2)$, $B(2; -1; 3)$ и перпендикулярной плоскости $3x - y + 5z - 7 = 0$.

Решение. Согласно условиям, искомая плоскость перпендикулярна заданной и поэтому параллельна её вектору нормали $\vec{n} = \{3; -1; 5)$. Следовательно, векторное произведение $\vec{N}$ векторов $\overrightarrow{AB} = \{3; 5; 1\}$ и $\vec{n} = \{3; -1; 5\}$ перпендикулярно искомой плоскости и является её вектором нормали:

$$\vec{N} = \overrightarrow{AB} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - \vec{j}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+\ \vec{k}\cdot\begin{vmatrix}3 & -5\\ 3 & -1\end{vmatrix} = \vec{\imath}\cdot(-25+1) - \vec{\jmath}\cdot(15-3) + \vec{k}\cdot(-3+15) =$$

$$= -24\vec{\imath} - 12\vec{\jmath} + 12\vec{k} = -12\cdot\{2; 1; -1\}.$$

Теперь записываем уравнение плоскости, проходящей через точку A и перпендикулярной вектору $\vec{N}$:

$$2(x+1) + (y-4) - (z-2) = 0 \text{ или } 2x + y - z = 0.$$

Пример 32. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-3; 2; -7)$, $B(-2; -1; -3)$ и $C(-1; 7; -8)$.

Решение. Очевидно, что векторы $\overline{AB} = \{1; -3; 4\}$ и $\overline{AC} = \{2; 5; 1\}$ параллельны искомой плоскости, поэтому их векторное произведение $\vec{n}$ перпендикулярно ей:

$$\vec{n} = \overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 1 & -3 & 4\\ 2 & 5 & -1\end{vmatrix} = \vec{\imath}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 4\\ 5 & -1\end{vmatrix} - \vec{\jmath}\cdot\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & -1\end{vmatrix} +$$

$$+\ \vec{k}\cdot\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 5\end{vmatrix} = \vec{\imath}\cdot(3-20) - \vec{\jmath}\cdot(-1-8) + \vec{k}\cdot(5+6) =$$

$$= -17\vec{\imath} + 9\vec{\jmath} + 11\vec{k} = \{-17;\ 9; 11\}.$$

Следовательно, искомая плоскость проходит через точку $A(-3; 2; -7)$ и перпендикулярна вектору $\vec{n} = \{-17; 9; 11\}$:

$$-17(x+3) + 9(y-2) + 11(z+7) = 0 \text{ или } 17x - 9y - 11z - 8 = 0.$$

Пример 33. Найти расстояние от точки $M_0(5; -6; 7)$ до плоскости $6x + 2y - 3z - 18 = 0$.

Решение. Плоскость π задана общим уравнением, поэтому расстояние от неё до точки M_0 находим по формуле:

$$d(M_0;\ \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|6\cdot5 + 2\cdot(-6) - 3\cdot7 - 18|}{\sqrt{6^2+2^2+(-3)^2}} = \frac{21}{7} = 3.$$

Пример 34. Найти расстояние между параллельными плоскостями:

$$3x - 12y - 4z - 8 = 0 \text{ и } 6x - 24y - 8z + 7 = 0.$$

Решение. Возьмём на первой плоскости произвольную точку M_1. Для этого положим, например, $x = y = 0$, тогда $z = -2$, т.е. $M_1(0; 0; -2)$. Расстояние между параллельными плоскостями π_1 и π_2 равно расстоянию от точки M_1 до плоскости π_2, поэтому

$$d(\pi_1;\pi_2) = d(M_1;\pi_2) = \frac{|A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2|}{\sqrt{{A_2}^2+{B_2}^2+{C_2}^2}} =$$

$$= \frac{|6\cdot0 - 24\cdot0 - 8\cdot(-2) + 7|}{\sqrt{6^2+(-24)^2+(-8)^2}} = \frac{23}{26}.$$

Пример 35. Написать уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $2x - y + 5z + 3 = 0$, $x + 3y + 2z - 4 = 0$ и через точку $M(1; -7; 2)$.

Решение. Искомая плоскость принадлежит пучку плоскостей, определяемых заданными плоскостями:

$$\alpha(2x - y + 5z + 3) + \beta(x + 3y + 2z - 4) = 0.$$

Для определения α и β необходимо подставить координаты точки M в уравнение пучка:

$$\alpha(2\cdot1-(-7)+5\cdot2+3)+\beta(1+3\cdot(-7)+2\cdot2-4)=0,$$
$$22\alpha-20\beta=0 \Leftrightarrow 11\alpha=10\beta.$$
Возьмём $\alpha = 10$, тогда $\beta = 11$ и искомая плоскость имеет уравнение

$$10(2x-y+5z+3)+11(x+3y+2z-4)=0 \text{ или}$$
$$31x+23y+72z-14=0.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Через точку М(7; –13; 2) проведена плоскость, перпендикулярная вектору $\vec{n}=\{3;\ 1;\ -8\}$. Написать её уравнение.
2. Написать уравнение плоскости, параллельной оси Oy и проходящей через точки $A(1;\ 2;\ -3)$ и $B(-2;\ 7;\ -5)$. Найти углы нормали к плоскости с осями координат.
3. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-2;\ 1;\ 3)$ и перпендикулярной плоскостям
$x+5y-2z+4=0$ и $7x-3y+4z-2=0$. Построить её.
4. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-1;\ -3;\ 4)$ и $B(2;\ -1;\ 5)$ и перпендикулярной плоскости $5x=4y+7z+3$.
5. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и составляющей угол 60° с плоскостью $y=x+3$.
6. Найти расстояние от точки $M(-1;\ 4;\ 7)$ до плоскости, отсекающей на осях координат отрезки $a=2$,
$b=3$ и $c=-5$.
7. Написать уравнения плоскостей, параллельных плоскости $2x-y+2z-7=0$ и удалённых от неё на расстояние $d=4$.
8. Написать уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $2x-4y-z=7$ и
$5z-x-y=8$ перпендикулярной плоскости $5x-2y-z=6$.

Ответы: **1**. $3x+y-8z+8=0$. **2**. $2x-3z-11=0$; $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}}$; $\cos\beta=0$; $\cos\gamma=-\frac{3}{\sqrt{13}}$; **3**. $7x-9y-19z+80=0$.
4. $5x-13y+11z=78$. **5**. $x+(2-\sqrt{3})y=0$; $x+(2+\sqrt{3})y=0$.
6. $\frac{47}{19}$. **7**. $2x-y+2z=19$; $2x-y+2z=-5$. **8**. $7y-14z=-31$.

12.2. Прямая.

Канонические уравнения прямой.

Теорема. Прямая l, проходящая через точку $M_0(x_0;y_0;\ z_0)$ параллельно вектору $\vec{l}=\{p;\ q;\ r\}$ имеет уравнения

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r} \tag{1}$$

Уравнения (1) называются *каноническими уравнениями прямой*, а вектор $\vec{l}$ - *направляющим вектором этой прямой*.
Замечание. Канонические уравнения прямой l выражают следующее геометрическое свойство точек, лежащих на ней: точка $M(x;\ y;\ z)$ принадлежит прямой l тогда и только

тогда, когда векторы $\vec{l} = \{p;\ q;\ r\}$ и
$\vec{M} = \{x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0\}$ – коллинеарны (рис.9).

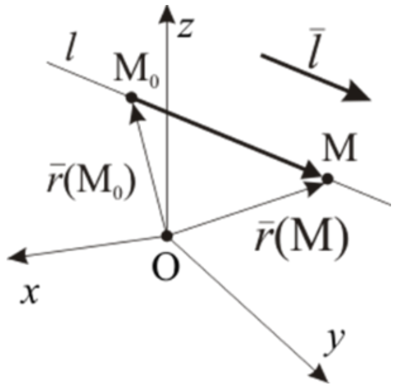

Рис.9

У р а в н е н и я п р я м о й , проходящей через две точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$.

Направляющим вектором данной прямой является вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, поэтому её канонические уравнения имеют вид:

$$\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r} \Leftrightarrow \frac{x-x_0}{x_2-x_1} = \frac{y-y_0}{y_2-y_1} = \frac{z-z_0}{z_2-z_1} \qquad (2)$$

Замечание. При отыскании канонических уравнений прямой в качестве точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, через которую проходит прямая, можно брать как точку $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, так и точку $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Обычно берут ту из них, у которой координаты «проще».

П а р а м е т р и ч е с к и е у р а в н е н и я п р я м о й .

Введём на прямой l параметр t, определяемый равенствами:

$$\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r} = t \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + pt \\ y = y_0 + qt, \text{ где } t \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + rt \end{cases} \qquad (3)$$

Уравнения (3) *называются параметрическими уравнениями прямой* l.

О б щ и е у р а в н е н и я п р я м о й

Любая прямая в пространстве может быть задана как линия пересечения двух непараллельных плоскостей, проходящих через неё:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Уравнения прямой вида (4), где плоскости
$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ не параллельны, называются *общими уравнениями прямой.*

Канонические уравнения прямой l можно получить из её общих уравнений следующим образом:

1) находим произвольное решение $(x_0; y_0; z_0)$ системы (4);

2) находим направляющий вектор этой прямой. Им, в частности, является вектор $\vec{l} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, где $\vec{n}_1 = \{A_1;\ B_1;\ C_1\}$ и $\vec{n}_2 = \{A_2;\ B_2;\ C_2\}$ - нормальные векторы к плоскостям, задающим прямую l.

Уравнения прямой в проекциях
(на координатные плоскости)

Уравнениями прямой в проекциях называются уравнения прямой следующих видов:

$$\begin{cases} x = az + c \\ y = bz + d \end{cases} \text{или} \begin{cases} x = ay + c \\ z = by + d \end{cases} \text{или} \begin{cases} y = ax + c \\ z = bx + d. \end{cases} \quad (5)$$

Замечания. 1. Каждая из плоскостей, задающих прямую в проекциях, перпендикулярна одной из координатных плоскостей. $Oxyz$
2. Первая из систем (5) - это уравнения прямой в проекциях на плоскости xOz и yOz, вторая система - в проекциях на плоскости xOy и yOz, а третья - в проекциях на плоскости xOy и xOz.

Получить уравнения прямой в проекциях из общих уравнений можно, исключив по одной переменной в каждом из уравнений системы (4).

От уравнений прямой в проекциях легко перейти к каноническим уравнениям прямой, например:

$$\begin{cases} x = pz + c \\ y = qz + d \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-c}{p} = \frac{y-d}{q} = \frac{z-0}{1}.$$

Угол между двумя прямыми.

Углом между двумя прямыми в пространстве называется любой из углов между двумя параллельными им прямыми, проходящими через произвольную точку пространства. Следовательно, один из них равен углу φ_1 между направляющими векторами прямых, а другой – углу $\varphi_2 = \pi - \varphi_1$.

Теорема. Острый угол между прямыми, заданными каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_1}{p_1} = \frac{y-y_1}{q_1} = \frac{z-z_1}{r_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{p_2} = \frac{y-y_2}{q_2} = \frac{z-z_2}{r_2},$$

определяется с помощью направляющих векторов $\vec{l}_1 = \{p_1;\ q_1;\ r_1\}$ и $\vec{l}_2 = \{p_2;\ q_2;\ r_2\}$ этих прямых по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\vec{l_1}\cdot\vec{l_2}}{|\vec{l_1}|\cdot|\vec{l_2}|} = \frac{|p_1\cdot p_2 + q_1\cdot q_2 + r_1\cdot r_2|}{\sqrt{{p_1}^2+{q_1}^2+{r_1}^2}\cdot\sqrt{{p_2}^2+{q_2}^2+{r_2}^2}}.$$

Условие параллельности прямых имеет вид:

$$\vec{l}_1 \| \vec{l}_2 \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Условие перпендикулярности прямых имеет вид:

$$\vec{l}_1 \perp \vec{l}_2 \Leftrightarrow \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2 = 0 \Leftrightarrow p_1 \cdot p_2 + q_1 \cdot q_2 + r_1 \cdot r_2 = 0.$$

Пример 36. Написать канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(2;\ 3;\ 5)$ и параллельной вектору $\vec{l} = \{1;\ 2;\ -5\}$. Построить прямую.

Решение. Проще всего составить канонические уравнения прямой:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{-5}.$$

2) Параметрические уравнения прямой из канонических получаются, если ввести на прямой

параметр t следующим образом:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-5}{-5}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\ \ t+2,\\ y=2t+3,\\ z=-5t+5.\end{cases}$$

3) Далее, наносим на чертёж точку A, строим вектор и проводим через точку A прямую, параллельную вектору $\vec{l}$.

Пример 37. Найти канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки A(–2; 1; 4) и
B(3; 2; –7).

Решение. Очевидно, что вектор
$\overrightarrow{AB}$ = {3 – (–2); 2 – 1 ; –7– 4} = {5; 1; –11} является направляющим вектором искомой прямой. Зная точку A(–2; 1; 4), лежащую на прямой, и её направляющий вектор $\overrightarrow{AB}$ = {5; 1; –11}, получаем канонические уравнения прямой

$$\frac{x+2}{5}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-4}{-11}.$$

Заметим, что вместо точки A можно взять точку
B(3; 2; –7), также лежащую на этой прямой. В этом случае канонические уравнения примут вид:

$$\frac{x-3}{5}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+7}{-11}.$$

Параметрические уравнения прямой получим с помощью её канонических уравнений:

$$\frac{x+2}{5}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-4}{-11}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\ \ 5t-2,\\ y=\ \ \ \ t+1,\\ z=-11t+4.\end{cases}$$

Пример 38. Найти угол между прямыми:

$$\begin{cases}x\ +\ 2y-3z-7=0,\\ 8x-5y+\ 4z\ +\ 3=0,\end{cases}\text{и}\begin{cases}4x\ +\ 5y+z+5=0,\\ 3x+2y+\ 6z-1=0.\end{cases}$$

Решение. Направляющие векторы прямых найдём с помощью векторного произведения нормальных векторов плоскостей, задающих прямые.

1) Первая прямая: $\vec{n}_1$ = {1; 2; –3} и $\vec{n}_2$ = {8; –5; 4}.

$$\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -3\\ 8 & -5 & 4\end{vmatrix}=\vec{\imath}\cdot\begin{vmatrix}2 & -3\\ -5 & 4\end{vmatrix}-\vec{\jmath}\cdot\begin{vmatrix}1 & -3\\ 8 & 4\end{vmatrix}+$$

$$+\ \vec{k}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 8 & -5\end{vmatrix}=\vec{\imath}\cdot(8-15)-\vec{\jmath}\cdot(4+24)+\vec{k}\cdot(-5-16)=$$

$$=-7\vec{\imath}-28\vec{\jmath}-21\vec{k}=-7\cdot\{1;4;3\}\Rightarrow\vec{l}_1=-\frac{1}{7}\vec{n}_1\times\vec{n}_2=$$

$$=\{1;4;3\}$$ - направляющий вектор первой прямой.

2) Вторая прямая: $\vec{n}_3$ = {4; 5; 1} и $\vec{n}_4$ = {3; 2; 6}.

$$\vec{n}_3\times\vec{n}_4=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 4 & 5 & 1\\ 3 & 2 & 6\end{vmatrix}=\vec{\imath}\cdot\begin{vmatrix}5 & 1\\ 2 & 6\end{vmatrix}-\vec{\jmath}\cdot\begin{vmatrix}4 & 1\\ 3 & 6\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}4 & 5\\ 3 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{\imath}\cdot(30-2)-\vec{\jmath}\cdot(24-3)+\vec{k}\cdot(8-15)=28\vec{\imath}-21\vec{\jmath}-7\vec{k}=$$

$$=7\cdot\{4;-3;-1\}\Rightarrow\vec{l}_2=\frac{1}{7}\vec{n}_3\times\vec{n}_4=\{4;-3;-1\}$$ -

- направляющий вектор второй прямой.

3) Острый угол между прямыми находим по формуле

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{l_1}\cdot\vec{l_2}|}{|\vec{l_1}|\cdot|\vec{l_2}|} = \frac{|1\cdot 4+4\cdot(-3)+3\cdot(-1)|}{\sqrt{1^2+4^2+3^2}\cdot\sqrt{4^2+(-3)^2+(-1)^2}} = \frac{|4-12-3|}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{26}} = \frac{11}{26}.$$

Пример 39. Доказать, что прямые перпендикулярны:

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y-9}{1} = \frac{z+5}{2} \text{ и } \begin{cases} 2x + 5y - 3z - 1 = 0, \\ 3x + 4y - z + 7 = 0. \end{cases}$$

Решение. 1) Первая прямая задана каноническими уравнениями, из которых находим координаты её направляющего вектора $\vec{l}_1 = \{3; 1; 2\}$.

2) Направляющий вектор $\vec{l}_2$ второй прямой найдём с помощью векторного произведения нормальных векторов $\vec{n}_1 = \{2; 5; -3\}$ и $\vec{n}_2 = \{3;\ 4; -1\}$ плоскостей, задающих прямую:

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \vec{k}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot(-5+12) - \vec{j}\cdot(-2+9) + \vec{k}\cdot(8-15) =$$

$$= 7\vec{i} - 7\vec{j} - 7\vec{k} = 7\cdot\{1; -1; -1\} \Rightarrow \vec{l}_2 = \frac{1}{7}\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 =$$

$= \{1; -1; -1\}$ - направляющий вектор второй прямой.

3) Далее находим скалярное произведение направляющих векторов прямых:

$$\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2 = 3\cdot 1+1\cdot(-1)+2\cdot(-1) = 0 \Rightarrow \vec{l}_1 \perp \vec{l}_2.$$

Пример 40. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $A(1;\ 3;\ -2)$ параллельно прямой:

$$\begin{cases} 2x - y + 5z + 3 = 0, \\ 3x + 2y - 4z - 1 = 0. \end{cases}$$

Решение. При параллельном переносе плоскостей их линия пересечения также переносится параллельно, поэтому искомую прямую можно задать общими уравнениями вида:

$$\begin{cases} 2x - y + 5z + D_1 = 0, \\ 3x + 2y - 4z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Числа D_1 и D_2 найдем, подставив в эту систему координаты точки $A(1; 3; -2)$:

$$\begin{cases} 2\cdot 1 - 3 + 5\cdot(-2) + D_1 = 0, \\ 3\cdot 1 + 2\cdot 3 - 4\cdot(-2) + D_2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D_1 = 11, \\ D_2 = -17. \end{cases}$$

Таким образом, искомая прямая имеет уравнения

$$\begin{cases} 2x - y + 5z + 11 = 0, \\ 3x + 2y - 4z - 17 = 0. \end{cases}$$

Пример 41. Найти расстояние от точки $A(4;\ 2;\ -7)$ до прямой l, заданной каноническими уравнениями

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{7} = \frac{z+4}{-3}.$$

Решение. 1) Найдём две произвольные точки на прямой l. Для этого подставим в параметрические уравнения прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{7} = \frac{z+4}{-3} = t$ вместо t два различных значения, например, $t_1 = 0$ и $t_2 = 1$. В результате получим точки:

$$M_1(1; -3; -4) \text{ и } M_2(3; 4; -7).$$

2) С помощью векторного произведения векторов

$$\overrightarrow{AM_1} = \{1-4;\ -3-2;\ -4-(-7)\} = \{-3;\ -5;\ 3\} \text{ и}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{3-1;\ 4-(-3);\ -7-(-4)\} = \{2;\ 7;\ -3\}$$

найдём площадь треугольника AM_1M_2:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AM_1} \times \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -3 \end{vmatrix} = \vec{\imath} \cdot \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} -$$

$$-\vec{\jmath} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = \vec{\imath} \cdot (15-21) - \vec{\jmath} \cdot (9-6) +$$

$$+\vec{k} \cdot (-21+10) = -6\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - 11\vec{k} = \{-6;\ -3; -11\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\Delta AM_1M_2} = \frac{1}{2}|\vec{n}| = \frac{1}{2}|-\vec{n}| = \frac{1}{2}\sqrt{6^2+3^2+11^2} = = \frac{1}{2}\sqrt{166}.$$

3) Площадь треугольника AM_1M_2, длина его стороны M_1M_2 и длина H высоты, опущенной из вершины A на сторону M_1M_2, связаны формулами:

$$S_{\Delta AM_1M_2} = \frac{1}{2}|M_1M_2| \cdot H \Leftrightarrow H = \frac{2S_{\Delta AM_1M_2}}{|M_1M_2|}.$$

Поскольку $|M_1M_2| = ||\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{2^2+7^2+(-3)^2} = \sqrt{62}$, то

$$H = \frac{2S_{\Delta AM_1M_2}}{|M_1M_2|} = \frac{\sqrt{166}}{\sqrt{62}} = \frac{\sqrt{83}}{\sqrt{31}} = \frac{\sqrt{83\cdot31}}{31} = \frac{\sqrt{2573}}{31}.$$

Осталось заметить, что H и есть расстояние от точки A до прямой l.

Пример 42. Найти расстояние между параллельными прямыми:

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{3} \text{ и } \frac{x+1}{2} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z-3}{3}.$$

Решение. Искомое расстояние равно расстоянию от произвольной точки A, лежащей на первой прямой, до второй прямой. Подставив $x = -3$ в уравнения первой прямой, находим точку $A(-3; -2; 1)$, лежащую на ней. Расстояние от точки A до второй прямой найдём по схеме, предложенной в предыдущей задаче.

1) Подставим $t_1 = 0$ и $t_2 = 1$ в параметрические уравнения второй прямой

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z-3}{3} = t.$$

В результате получим две точки $M_1(-1; -6; 3)$ и
$M_2(1;\ -7; 6)$, лежащие на ней.

2) Найдём площадь треугольника AM_1M_2 с помощью векторного произведения векторов $\overrightarrow{AM_1}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\overrightarrow{AM_1} = \{-1-(-3);\ -6-(-2);\ 3-1\} = \{2;\ -4;\ 2\} \text{ и}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{1-(-1);\ -7-(-6);\ 6-3\} = \{2;\ -1;\ 3\},$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AM_1} \times \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{\imath} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} -$$

$$-\vec{\jmath} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{\imath} \cdot (-12+2) - \vec{\jmath} \cdot (6-4) +$$

$+\vec{k}\cdot(-2+8) = -10\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k} = \{-10;\ -2; 6\} =$

$= 2\{-5; -1;\ 3\} \Rightarrow S_{\Delta AM_1M_2} = \frac{1}{2}|\vec{n}| = \sqrt{35}.$

3) Найдём длину стороны M_1M_2

$$|M_1M_2| = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{2^2+(-1)^2+3^2} = \sqrt{14}$$

и вычислим искомое расстояние H по формуле

$$H = \frac{2S_{\Delta AM_1M_2}}{|M_1M_2|} = \frac{2\sqrt{35}}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{10}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Написать канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(-3; 1; 5)$ параллельно вектору $\vec{l} = \{2; 1; -3\}$. Построить прямую.
2. Найти канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A(-3; 4; 6)$ и $B(2; -5; -3)$.
3. Уравнения прямой
$$\begin{cases}3x-y-4z+7=0,\\2x+4y-z-5=0.\end{cases}$$
написать: 1) в проекциях; 2) в канонической форме. Построить прямую.

4. Найти угол между прямыми:
$$\begin{cases}x-y-4z-3=0,\\2x+y-2z+5=0,\end{cases} \text{и} \begin{cases}x-6y-6z+7=0,\\2x+2y+9z-3=0.\end{cases}$$
5. Доказать, что прямые перпендикулярны:
$$\frac{x+3}{1} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z+6}{3} \text{ и } \begin{cases}3x+y-5z-2=0,\\2x+3y-8z-6=0.\end{cases}$$
6. Найти уравнения прямой, проходящей через точку $A(-4; 5; 7)$ параллельно прямой, заданной уравнениями: $\begin{cases}3x-7y-2z+4=0,\\5x+4y-2z+9=0.\end{cases}$
7. Найти расстояние от точки $A(5; 6; -2)$ до прямой l, заданной каноническими уравнениями:
$$\frac{x-8}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+22}{-2}.$$
8. Доказать, что прямые параллельны и вычислить расстояние между ними:
$$\frac{x-5}{3} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-7}{4} \text{ и } \begin{cases}2x+2y-z+5=0,\\x-y-z-8=0.\end{cases}$$

Ответы: **1**. $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{-3}$ и $x = 2t-3,\ y = t+1,\ z = -3t+5$. **2**. $\frac{x+3}{5} = \frac{y-4}{-9} = \frac{z-5}{-9}$ и $x = 5t-3,\ y = -9t+4,\ z = -9t+6$. **3**. $x = \frac{17}{14}z - \frac{23}{14},\ y = -\frac{5}{14}z + \frac{29}{14}$. **4**. $arccos\frac{4}{21}$. **6**. $\frac{x+4}{22} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z-7}{47}$. **7**. $\frac{\sqrt{89369}}{17}$. **8**. $\sqrt{18,5}$.

12.3. Прямая и плоскость.

Угол между прямой и плоскостью.

Углом θ *между прямой* l *и плоскостью* ω (если они не перпендикулярны) называется наименьший из углов между прямой l и её ортогональной проекцией на эту плоскость.

В случае перпендикулярности прямой l и плоскости ω угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$.

Введем обозначения:

$\vec{l}$ - направляющий вектор прямой l;

$\vec{n}$ - нормальный вектор к плоскости ω;

φ - угол между векторами $\vec{l}$ и $\vec{n}$.

Тогда справедливы соотношения:

$$\begin{cases} \varphi + \theta = \dfrac{\pi}{2} \text{ при } \varphi \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \varphi - \theta = \dfrac{\pi}{2} \text{ при } \varphi > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Теорема. Угол θ между прямой l, заданной каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r},$$

и плоскостью ω, заданной общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

определяется по формуле

$$\sin\theta = |\cos\varphi| = \frac{|\vec{l}\cdot\vec{n}|}{|\vec{l}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{|pA+qB+rC|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{p^2+q^2+r^2}},$$

где $\vec{l} = \{p;\ q;\ r\}$ - направляющий вектор прямой l, а $\vec{n} = \{A;\ B; C\}$ - нормальный вектор к плоскости ω.

Условие параллельности прямой и плоскости имеет вид:

$$\vec{l} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{l} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow Ap + Bq + Cr = 0.$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости имеет вид:

$$\vec{l} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \frac{A}{p} = \frac{B}{q} = \frac{C}{r}.$$

Взаимное расположение прямой и плоскости.
Точка пересечения прямой и плоскости.

Координаты точки пересечения должны удовлетворять как уравнению плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ (точка лежит на ней), так и уравнениям прямой $\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$ (точка принадлежит и прямой), т.е. системе уравнений, содержащих уравнения прямой и уравнение плоскости.

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ \dfrac{x-x_0}{p} = \dfrac{y-y_0}{q} = \dfrac{z-z_0}{r}. \end{cases} \qquad (6)$$

Замечание. Прямая может быть задана уравнениями любого вида, а не только каноническими уравнениями.
Наиболее простым способом отыскания точки пересечения прямой l и плоскости ω является следующий:
1) находим параметрические уравнения прямой

$$x = x_0 + pt,\ y = y_0 + qt,\ z = z_0 + rt, \text{ где } t \in \mathbb{R}.$$

2) подставляем в уравнение плоскости
$Ax + By + Cz + D = 0$ вместо $x,\ y,\ z$ их выражения через параметр t и решаем полученное уравнение;
3) найденное значение параметра t_1 подставляем в параметрические уравнения прямой и находим искомую точку пересечения $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$.

При решении системы (6) возможны следующие случаи:
1) если векторы $\vec{l}$ и $\vec{n}$ не перпендикулярны, то $\vec{l}\cdot\vec{n} \neq 0 \Leftrightarrow Ap + Bq + Cr \neq 0$. Следовательно, прямая l пересекает плоскость ω (в одной точке) и система (6) имеет единственное решение;

2) если $\begin{cases} \vec{l} \perp \vec{n}, \\ M_0(x_0;\ y_0;\ z_0) \notin \omega \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{l}\cdot\vec{n} = 0, \\ M_0(x_0;\ y_0;\ z_0) \notin \omega \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ap + Bq + Cr = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \end{cases}$$

то прямая l лежит в плоскости ω, и система (6) имеет бесконечное множество решений.

Условие компланарности двух прямых.

Две прямые в пространстве называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости. В частности, две параллельные прямые (в том числе и совпадающие) компланарны.

Теорема. Пусть прямая l_1 проходит через точку $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ параллельно вектору $\vec{l}_1$, а прямая l_2 - через точку $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ параллельно вектору $\vec{l}_2$. Тогда компланарность этих прямых равносильна компланарности трёх векторов $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}$, $\vec{l}_1 = \{p_1;\ q_1;\ r_1\}$ и $\vec{l}_2 = \{p_2;\ q_2;\ r_2\}$:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0.$$

В случае компланарности прямых l_1 и l_2 условие непараллельности их направляющих векторов равносильно тому, что прямые пересекаются (но не совпадают).
Пример 43. Найти угол между прямой
$\begin{cases} 5x - 3y + 7z + 1 = 0, \\ 3x - y + 2z - 8 = 0 \end{cases}$ и плоскостью $x - 2y - 5z + 13 = 0.$
Решение. 1) Найдём направляющий вектор $\vec{l}$ прямой с помощью векторного произведения нормальных векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ плоскостей, задающих её:

$$\vec{n}_1 = \{5;\ -3;\ 7\} \text{ и } \vec{n}_2 = \{3;\ -1;\ 2\} \Rightarrow$$

$$\vec{l} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -3 & 7 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot\begin{vmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\cdot\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \vec{k}\cdot\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot(-6 + 7) - \vec{j}\cdot(10 - 21) + \vec{k}\cdot(-5 + 9) =$$

$$= \vec{i} + 11\vec{j} + 4\vec{k} = = \{1;\ 11; 4\},\ |\vec{l}| = = \sqrt{138}.$$

2) Нормальный вектор к заданной плоскости

$$x - 2y - 5z + 13\ =\ 0$$

имеет координаты $\vec{n} = \{1; -2; -5\}$ и длину $|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{30}$.

3) Угол θ между прямой и плоскостью найдём по формуле (в ней φ - угол между векторами $\vec{l}$ и $\vec{n}$):

$$\sin\theta = |\cos\varphi| = \frac{|\vec{l}\cdot\vec{n}|}{|\vec{l}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{|1\cdot1 + 11\cdot(-2) + 4\cdot(-5)|}{\sqrt{138}\cdot\sqrt{30}} = \frac{41}{3\sqrt{460}} = \frac{41\sqrt{115}}{690}.$$

Пример 44. При каком C прямая

$$\begin{cases} -5x + 3y\ +\ z -\ 13\ =\ 0, \\ -9x + 7y - 11z + 2\ =\ 0 \end{cases}$$

параллельна плоскости $2x - y\ +\ Cz + 3\ =\ 0$?

Решение. Найдем направляющий вектор $\vec{l}$ прямой с помощью векторного произведения нормальных векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ плоскостей, задающих её:

$$\vec{n}_1 = \{-5; 3; 1\} \text{ и } \vec{n}_2 = \{-9; 7; -11\} \Rightarrow$$

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 3 & 1 \\ -9 & 7 & -11 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & -11 \end{vmatrix} - \vec{j}\cdot\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -9 & -11 \end{vmatrix} +$$

$$+ \vec{k}\cdot\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -9 & 7 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot(-33 - 7) - \vec{j}\cdot(55 + 9) + \vec{k}\cdot(-35 + 27) =$$

$$= -40\vec{i} - 64\vec{j} - 8\vec{k} = -8\{5;\ 8; 1\},\ \vec{l} = -\frac{1}{8}\,\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \{5;\ 8; 1\}.$$

2)Из уравнения плоскости $2x - y\ +\ Cz + 3\ =\ 0$ найдём координаты её нормального вектора $\vec{n} = \{2; -1; C\}$.

3) Воспользуемся критерием параллельности прямой и плоскости:

$$\vec{l}\ \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{l}\ \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 5\cdot 2 + 8\cdot(-1) + 1\cdot C = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C = -10 + 8 = -2.$$

Следовательно, при $C = -2$ заданные прямая и плоскость параллельны.

Пример 45. При каком C прямая $\frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z+7}{4}$ лежит в плоскости $5x + 2y\ + Cz - 22 = 0$?

Решение. 1) Найдём направляющий вектор $\vec{l}$ прямой и нормальный вектор $\vec{n}$ плоскости:

$$\vec{l}\ = \{2; -3; 4\} \text{ и } \vec{n} = \{5; 2; C\}.$$

2) Запишем условие параллельности прямой и плоскости:

$$\vec{l}\ \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{l}\cdot\vec{n} = 0 \Leftrightarrow 2\cdot 5 + (-3)\cdot 2 + 4\cdot C = 0 \Leftrightarrow C = -1.$$

Таким образом, уравнение плоскости принимает вид

$$5x + 2y - z - 22 = 0.$$

3) Проверим, что при найденном значении C исходные прямая и плоскость имеют общую точку (поскольку прямая параллельна плоскости, это условие является необходимым и достаточным того, что прямая лежит в плоскости).

Подставим $x = 1$ в канонические уравнения исходной прямой и найдём точку $M_0(1; 5; –7)$, лежащую на ней. Её координаты удовлетворяют уравнению плоскости $5x + 2y – z - 22 = 0$:

$$5 \cdot 1 + 2 \cdot 5 – (–7) – 22 = 0$$
$$5 + 10 + 7 – 22 = 0$$
$$22 – 22 = 0 \text{ (верно)},$$

т.е. точка M_0 лежит на этой плоскости и, следовательно, при $C = –1$ исходная прямая лежит в плоскости

$$5x + 2y + Cz - 22 = 0.$$

Пример 46. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{5}$ и точку $M_1(1; –2; 3)$.

Решение. 1) Найдём произвольную точку на заданной прямой, для чего подставим в её уравнения, например,

$y = 3$. В результате получим точку $M_0(–2; 3; –1)$. Заметим, что вектор $\overrightarrow{M_0M_1} = \{1–(–2); –2–3; 3–(–1)\} = \{3; –5; 4\}$ параллелен искомой плоскости.

2) Направляющий вектор $\vec{l} = \{3; –1; 5\}$ прямой и вектор $\overrightarrow{M_0M_1} = \{3; –5; 4\}$ параллельны искомой плоскости и не коллинеарны, поэтому их векторное произведение перпендикулярно этой плоскости:

$$\vec{l} \times \overrightarrow{M_0M_1} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 5 \\ 3 & -5 & 4 \end{vmatrix} = \vec{\imath}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = \vec{\imath}\cdot(–4 +25) – \vec{\jmath}\cdot(12 – 15) +$$
$$\vec{k}\cdot(–15 + 3) = 21\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} – 12\vec{k} = = 3\cdot\{7;\ 1; -4\},$$

$\vec{n} = \frac{1}{3}\vec{l} \times \overrightarrow{M_0M_1} = \{7;\ 1; -4\}$ – нормальный вектор искомой плоскости.

3) Выпишем уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1; –2; 3)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{7;1; –4\}$:

$$7\cdot(x - 1) + 1 \cdot (y - (-2)) - 4(z - 3) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 7\cdot(x - 1) + (y + 2) - 4(z - 3) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 7x + y - 4z + 7 = 0.$$

Пример 47. Написать уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{4} \text{ и } \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-7}{4}.$$

Решение. Для решения задачи достаточно найти нормальный вектор плоскости и точку, через которую она проходит.

1) Подставив $t = 0$ и $t = 1$ в параметрические уравнения первой прямой $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{4}$, получим две точки $M_0(3; 1; –5)$ и $M_1(5; 0; –1)$, лежащие на ней.

2) Аналогично, взяв $z = 7$, получим точку $M_2(–1; 3; 7)$, лежащую на второй прямой.

3) Векторы $\overrightarrow{M_0M_1} = \{5 – 3; 0 – 1; –1– (–5)\} = \{2; –1; 4\}$ и $\overrightarrow{M_0M_2} = \{–1 – 3; 3 – 1; 7 – (–5)\} = \{–4; 2; 12\}$

параллельны искомой плоскости и не коллинеарны, поэтому их векторное произведение

$$\vec{N} = \overrightarrow{M_0M_1} \times \overrightarrow{M_0M_2} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 4 \\ -4 & 2 & 12 \end{vmatrix} =$$
$$= \vec{\imath}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} + \vec{k}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= \vec{\imath}\cdot(–12 – 8) – \vec{\jmath}\cdot(24 + 16) + \vec{k}\cdot(4 – 4) =$$
$$= –20\vec{\imath} - 40\vec{\jmath} = –20\{1;\ 2; 0\}$$

является нормальным вектором этой плоскости.
Вектор $\vec{n} = -\frac{1}{20}\vec{N}$ = {1; 2; 0} – также её нормальный вектор.
4) Искомая плоскость проходит через точку M_0(3; 1; –5) и перпендикулярна вектору $\vec{n}$ = {1; 2; 0}, поэтому имеет уравнение

$$1\cdot(x-3)+2\cdot(y-1)+0\cdot(z-(-5))=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-3)+2(y-1)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x+2y-5=0.$$

Пример 48. Найти точку пересечения прямой
$\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z+1}{5}$ с плоскостью $2x-4y-z-8=0$.
Решение. Координаты точки пересечения прямой и плоскости удовлетворяют как уравнениям прямой, так и уравнениям плоскости, т.е. системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+3}{-3} = \dfrac{z+1}{5} = t, \\ 2x-4y-z-8=0. \end{cases}$$

Для её решения удобно уравнения прямой записать в параметрическом виде:

$$\begin{cases} \begin{cases} x=t+2, \\ y=-3t-3, \\ z=5t-1, \end{cases} \\ 2x-4y-z-8=0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=t+2, \\ y=-3t-3, \\ z=5t-1, \end{cases} \\ 2(t+2)-4(-3t-3)-(5t-1)-8=0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=1, \\ y=0, \\ z=-6, \end{cases} \\ t=-1. \end{cases}$$

Следовательно, точка M_0(1; 0; –6) является точкой пересечения данных прямой и плоскости.
Пример 49. Найти проекцию точки M(17; –1; 1) на плоскость $5x-2y+z-28=0$.
Решение. Проведем через точку M прямую l перпендикулярно исходной плоскости π. Проекцией точки M на плоскость π является точка M_0 пересечения прямой l и плоскости π.
1) Выпишем нормальный вектор плоскости π:

$$\vec{n} = \{5; -2; 1\}.$$

2) Составим параметрические уравнения прямой l, проходящей через точку M(17; –1; 1) параллельно вектору $\vec{n}$ = {5; –2; 1}:

$$\frac{x-17}{5} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{1} = t \Leftrightarrow \begin{cases} x=5t+17, \\ y=-2t-1, \\ z=t+1. \end{cases}$$

3) Разрешив совместную систему уравнений прямой и плоскости

$$\begin{cases} \begin{cases} x=5t+17, \\ y=-2t-1, \\ z=t+1, \end{cases} \\ 5x-2y+z-28=0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 5t + 17, \\ y = -2t - 1, \\ z = t + 1, \end{cases} \\ 5(5t + 17) - 2(-2t - 1) + (t + 1) - 28 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 7, \\ y = 3, \\ z = -1, \end{cases} \\ t = -2, \end{cases}$$

найдем точку M_0(7; 3; –1) их пересечения.

Пример 50. Записать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки M(2; –25; –6) на прямую

$$\frac{x-7}{4} = \frac{y+4}{1} = \frac{z+1}{-3}.$$

Решение. Проведём через точку M(2; –25; –6) плоскость π, перпендикулярную исходной прямой l. Их точка пересечения M_0 является проекцией точки M на прямую l, а прямая M_0M является искомой.

1)Выпишем направляющий вектор заданной прямой l: $\vec{l}$ = {4; 1; –3}.

2) Составим уравнение плоскости π, проходящей через точку M(2; –25; –6) перпендикулярно вектору $\vec{l}$ = {4; 1; –3}: $4(x - 2) + (y + 25) - 3(z + 6) = 0 \Leftrightarrow 4x + y - 3z - 1 = 0$.

3) Запишем уравнения прямой l в параметрическом виде

$$\frac{x-7}{4} = \frac{y+4}{1} = \frac{z+1}{-3} = t \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4t + 7, \\ y = t - 4, \\ z = -3t - 1 \end{cases}$$

и, решив совместную систему уравнений прямой l и плоскости π

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 4t + 7, \\ y = t - 4, \\ z = -3t - 1 \end{cases} \\ 4x + y - 3z - 1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 4t + 7, \\ y = t - 4, \\ z = -3t - 1, \end{cases} \\ 4(4t + 7) + (t - 4) - 3(-3t - 1) - 1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 3, \\ y = -5, \\ z = 2, \end{cases} \\ t = -1, \end{cases}$$

найдем точку их пересечения $M_0(3; -5; 2)$ – проекцию точки M на прямую l.

4) Зная вектор $\overrightarrow{MM_0}$ = $\{3 - 2;\ -5 - (-25); 2 - (-6)\}$ = $\{1;\ 20; 8\}$ и точку $M_0(3; -5; 2)$, запишем канонические уравнения искомой прямой:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y+5}{20} = \frac{z-2}{8}.$$

Пример 51. Доказать, что прямые $\frac{x+5}{3} = \frac{y-9}{-4} = \frac{z-3}{-2}$ и $x = 2t - 2$, $y = -2t + 5$, $z = 3t + 1$ пересекаются. Найти уравнение плоскости, в которой они расположены.

Решение. 1) Сначала покажем, что данные прямые лежат в одной плоскости. Для этого найдём канонические уравнения второй прямой (первая прямая задана каноническими уравнениями):

$$\begin{cases} x = 2t - 2, \\ y = -2t + 5, \\ z = 3t + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 2t, \\ y - 5 = -2t, \\ z - 1 = 3t, \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x+2}{-2} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-1}{3} = t.$$

Из канонических уравнений обеих прямых следует, что первая прямая проходит через точку M_1(–5; 9; 3) параллельно вектору $\vec{l}_1 = \{3;\ -4;\ -2\}$, а вторая – через точку M_2(–2; 5; 1) параллельно вектору $\vec{l}_2 = \{2;\ -2;\ 3\}$. Условием расположения прямых l_1 и l_2 в одной плоскости является компланарность векторов

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{-2 - (-5);\ 5 - 9;\ 1 - 3\} = \{3;\ -4;\ -2\},$$
$$\vec{l}_1 = \{3;\ -4;\ -2\} \text{ и } \vec{l}_2 = \{2;\ -2;\ 3\}.$$

Оно выполняется, т.к. два вектора из трёх равны.

Условие компланарности этих векторов можно проверить и с помощью их смешанного произведения:

$$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\vec{l}_1 \times \vec{l}_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

2) Поскольку прямые l_1 и l_1 лежат в одной плоскости и не параллельны (их направляющие векторы $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$ не коллинеарны), они пересекаются, но не совпадают.

3) Векторное произведение векторов $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$ является нормальным вектором искомой плоскости π:

$$\vec{n} = \vec{l}_1 \times \vec{l}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \vec{k}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot(-12 - 4) - \vec{j}\cdot(9 + 4) + \vec{k}\cdot(-6 + 8) =$$

$$= -16\vec{i} - 13\vec{j} + 2\vec{k} = \{-16;\ -13;\ 2\}.$$

4) Зная точку M_2(–2; 5; 1), лежащую на плоскости π, и нормальный вектор плоскости $\vec{n}$ = {–16; –13; 2}, запишем уравнение плоскости:

$$-16(x + 2) - 13(y - 5) + 2(z - 1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 16x + 13y - 2z - 31 = 0.$$

Пример 52. Даны вершины пирамиды *ABCD*: *A*(0; 3; 2), *B*(–1; 3; 6), *C*(–2; 4, 2) и *D*(0; 5; 4). Найти:

1) длины ребер *AB* и *AC*;
2) угол между ребрами *AB* и *AC*;
3) уравнение грани *ABC*;
4) площадь грани *ABC*;
5) объём пирамиды *ABCD*;
6) уравнения ребра *AB*;
7) уравнения высоты пирамиды *DM*;
8) уравнение плоскости, параллельной грани *ABC* и проходящей через точку *D*;

9) длину высоты DM (тремя способами).

Решение. 1) Длины ребер AB и AC - это длины векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, которые найдем по теореме Пифагора:

$\overrightarrow{AB}$ = {–1 – 0; 3 – 3; 6 – 2} = {–1; 0; 4}
$\overrightarrow{AC}$ = {–2 – 0; 4 – 3; 2 – 2} = {–2; 1; 0} $\Rightarrow$
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2+0^2+4^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$,
$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-2)^2+1^2+0^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.

2) Угол между ребрами AB и AC - это угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{(-1)\cdot(-2)+0\cdot1+4\cdot0}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{85}} = \frac{2\sqrt{85}}{85} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi = arc\cos\frac{2\sqrt{85}}{85}.$$

3) Уравнение грани ABC. Грань ABC пирамиды - это плоскость, проходящая через три точки A, B и C, следовательно, она перпендикулярна векторному произведению векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{\imath}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ \vec{k}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{\imath}\cdot(0-4) - \vec{\jmath}\cdot(0+8) + \vec{k}\cdot(-1-0) =$$

$$= -4\vec{\imath} - 8\vec{\jmath} - \vec{k} = -\{4;\ 8;\ 1\}.$$

Запишем уравнение плоскости, проходящей через точку A (0; 3; 2) перпендикулярно вектору $\vec{n}_1 = -\vec{n}$ ={4;8;1}:

$$4(x-0)+8(y-3)+(z-2)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x+8y+z-26=0$$ - уравнение плоскости ABC.

4) Площадь S грани ABC - это площадь Δ ABC. Согласно определению векторного произведения, получаем:

$$2S = |\vec{n}| = |\vec{n}_1| = \sqrt{4^2+8^2+1^2} = 9 \Leftrightarrow S = 4{,}5.$$

5) Объем V пирамиды. Найдем смешанное произведение векторов-рёбер пирамиды, выходящих из одной вершины:

$$\overrightarrow{AB} = \{-1;\ 0;\ 4\},\ \overrightarrow{AC} = \{-2;\ 1;\ 0\} \text{ и } \overrightarrow{AD} = \{0;\ 2;\ 2\} \Rightarrow$$

$$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = =-(2-0) + 4\cdot(-4-0) = -18.$$

Согласно свойствам смешанного произведения, имеем

$$V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}| = \frac{|-18|}{6} = 3.$$

6) Уравнения ребра AB. Ребро AB - это прямая, проходящая через точку A(0; 3; 2) параллельно вектору $\overrightarrow{AB}$ = {–1; 0; 4}, поэтому она имеет следующие уравнения:

$$\frac{x-0}{-1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-2}{4}$$ - канонические уравнения ребра AB.

7) Уравнения высоты пирамиды DM. Высота DM – это прямая, проходящая через точку

$D(0;\ 5;\ 4)$ перпендикулярно плоскости ABC и, следовательно, параллельно вектору $\vec{n}_1 = \{4;\ 8;\ 1\}$, поэтому её уравнения имеют вид:

$$\frac{x-0}{4} = \frac{y-5}{8} = \frac{z-4}{1}$$

8) Уравнение плоскости π_1, параллельной грани ABC и проходящей через точку D. Параллельность плоскостей равносильна параллельности их нормальных векторов, поэтому вектор $\vec{n}_1 = \{4;\ 8;\ 1\}$ является нормальным вектором плоскости π_1. Учитывая, что плоскость π_1 проходит через точку $D(0;\ 5;\ 4)$, получаем её общее уравнение:

$$4(x-0) + 8(y-5) + (z-4) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x + 8y + z - 44 = 0.$$

9) Длина высоты DM (три способа).

1-й способ. Объем треугольной пирамиды связан с площадью ее основания и длиной соответствующей высоты пирамиды равенством:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot H = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot |DM|,$$

поэтому длину высоты DM пирамиды можно найти по формуле:

$$|DM| = \frac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}} = \frac{3 \cdot 3}{4{,}5} = 2.$$

2-й способ (с помощью нормального уравнения плоскости).

Длина высоты DM есть расстояние от вершины $D(0;\ 5;\ 4)$ пирамиды до ее основания - плоскости ABC. Общее уравнение плоскости ABC найдено в пункте 3 и имеет вид $4x + 8y + z - 26 = 0$, поэтому

$$|DM| = d(D;\pi) = = \frac{|4 \cdot 0 + 8 \cdot 5 + 1 \cdot 4 - 26|}{\sqrt{4^2 + 8^2 + 1^2}} = \frac{18}{\sqrt{81}} = 2.$$

3-й способ. Длина высоты DM есть расстояние от вершины $D(0;\ 5;\ 4)$ пирамиды до точки M пересечения высоты DM с плоскостью ABC. Координаты точки M удовлетворяют совместной системе уравнений плоскости ABC и высоты DM:

$$\begin{cases} \frac{x-0}{4} = \frac{y-5}{8} = \frac{z-4}{1} = t \\ 4x + 8y + z - 26 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 4t \\ y = 8t + 5 \\ z = t + 4 \end{cases} \\ 4x + 8y + z - 26 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 4t \\ y = 8t + 5 \\ z = t + 4 \end{cases} \\ 4 \cdot 4t + 8(8t + 5) + (t + 4) - 26 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -\frac{8}{9}, \\ y = \frac{29}{9}, \\ z = \frac{34}{9}, \end{cases} \\ t = -\frac{2}{9}. \end{cases} \Leftrightarrow M\left(-\frac{8}{9}; \frac{29}{9}; \frac{34}{9}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MD} = \left\{\frac{8}{9};\ \frac{16}{9};\ \frac{2}{9}\right\} = \frac{2}{9}\{4;\ 8;\ 1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{MD}| = \frac{2}{9}\sqrt{4^2 + 8^2 + 1^2} = \frac{2}{9}\sqrt{81} = 2.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти угол между прямой $\begin{cases}2x+9y-3z+8=0\\5x-2y-3z-4=0\end{cases}$ и плоскостью $4x-3y+z+21=0$.

2. При каком C прямая $x=-3t+2,\ y=2t-5,\ z=4t-3$ параллельна плоскости $Cx+7y-2z-9=0$?

3. При каком C прямая $\frac{x-6}{-7}=\frac{y+6}{4}=\frac{z+9}{6}$ лежит в плоскости $2x+Cy-z+9=0$?

4. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x+3}{6}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-4}{-2}$ и точку $M_1(2;4;-5)$.

5. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{-7}$ перпендикулярно к плоскости $2x-5y+6z-19=0$.

6. Написать уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+11}{2}=\frac{z-13}{-5} \text{ и } \frac{x+4}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-19}{-5}.$$

7. Найти точку пересечения прямой $\frac{x+6}{7}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{3}$ с плоскостью $4x-3y-5z+12=0$.

8. Найти проекцию точки $M(11;34;-27)$ на плоскость $2x+6y-5z+29=0$.

9. Записать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M(2;-5;1)$ на прямую

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y+12}{9}=\frac{z-9}{-4}.$$

10. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми

$$\frac{x-3}{5}=\frac{y+11}{4}=\frac{z-6}{-2} \text{ и } \frac{x+3}{2}=\frac{y-13}{-7}=\frac{z+8}{-4}.$$

11. Доказать, что прямые $\frac{x-1}{1}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-4}{3}$ и $x=-5t-3,\ y=2t+1,\ z=4t+11$ пересекаются. Найти уравнение плоскости, в которой они расположены.

12. Даны вершины пирамиды $ABCD$:
$A(5;1;4)$, $B(-7;6;5)$, $C(3;-4;3)$ и $D(0;2;9)$. Найти:

1) длины ребер AB и AC;
2) угол между ребрами AB и AC;
3) уравнение грани ABC;
4) площадь грани ABC;
5) объём пирамиды $ABCD$;
6) уравнения ребра AB;
7) уравнения высоты пирамиды DM;
8) уравнение плоскости, параллельной грани ABC и проходящей через точку D;
9) длину высоты DM (тремя способами).

Ответы: **1**. $\arcsin\frac{154}{\sqrt{92846}}$. **2**. 2. **3**. 5.
4. $57x-44y+17z+147=0$. **5**. $17x+38y+26z+99=0$.
6. $11x+y+7z-91=0$. **7**. $(1;-3;5)$. **8**. $(-1;-2;3)$.
9. $\frac{x-2}{1}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z-1}{-4}$. **10**. $\frac{1166}{\sqrt{3005}}$. **11**. $10x-19y+22z=193$.

9. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом); в) методом Гаусса.

1.1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7. \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9. \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12. \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33, \\ 7x_1 - 5x_2 = 24, \\ 4x_1 + 11x_3 = -9. \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12, \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33, \\ 4x_1 + x_3 = 12. \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 6, \\ 5x_2 + 4x_3 = -20, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -22. \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$

1.12. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$

1.14. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$

1.15. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22. \end{cases}$

1.16. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15. \end{cases}$

1.17. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$

1.18. $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9. \end{cases}$

1.19. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19. \end{cases}$

1.20. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -11, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16. \end{cases}$

1.21. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19. \end{cases}$

1.22. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

1.23. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$

1.24. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8. \end{cases}$

1.25. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

1.26. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

1.27. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -19. \end{cases}$

1.28. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -16, \\ x_1 + 3x_3 = -6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

1.29. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -9, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -2, \\ 3x_2 - 7x_3 = -6. \end{cases}$

1.30. $\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10. \end{cases}$

2. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом);
в) методом Гаусса.

2.1. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 + 3x_3 = -2. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 = 5. \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 1, \\ 5x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 2. \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 1. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 6, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

2.8. $\begin{cases} 5x_1 - 9x_2 - 4x_3 = 6, \\ x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 4x_1 - 3x_2 = 1. \end{cases}$

2.10. $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -3, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 1, \\ 4x_1 - 4x_2 - 9x_3 = 0. \end{cases}$

2.11. $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - x_3 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$

2.12. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

2.13. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$

2.14. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 9x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$

2.14. $\begin{cases} 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 7. \end{cases}$

2.16. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases}$

2.17. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 1, \\ 7x_1 - 9x_2 - x_3 = 3, \\ 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$

2. 18. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

2.19. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ -2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

2.20. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$

2.21. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 8x_3 = 4. \end{cases}$

2.22. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 - 9x_2 - 8x_3 = 1. \end{cases}$

2.23. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 \quad - 2x_3 = 5. \end{cases}$

2.24. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + \quad x_3 = 8, \\ 2x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

2.25. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$

2.26. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$

2.27. $\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - \quad x_3 = 7. \end{cases}$

2.28. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$

2.29. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 2, \\ 5x_1 + \quad x_2 - 5x_3 = 9. \end{cases}$

2.30. $\begin{cases} 4x_1 - 9x_2 + 5x_3 = 1, \\ 7x_1 - 4x_2 + \quad x_3 = 11, \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 5. \end{cases}$

3. Решить однородные системы линейных алгебраических уравнений.

3.1. $\begin{cases} x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 = 0, \\ 2x_1 \quad - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 11x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + \quad 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - \quad x_2 + \quad 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + \quad 4x_3 = 0. \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 10x_3 = 0, \\ x_1 + \ 2\,x_2 - \quad x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + \ x_3 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - \quad x_2 - \quad 2x_3 = 0. \end{cases}$

3.6. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + \ x_3 = 0, \\ x_1 + \quad x_2 + \quad 3x_3 = 0. \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} x_1 - \ x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + \ x_2 - \quad 3x_3 = 0, \\ 3x_1 \qquad + \quad 2x_3 = 0. \end{cases}$

3.8. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - \quad 3x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + \quad 4x_3 = 0. \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + \quad x_2 + \quad 3x_3 = 0, \\ x_1 + \quad 7x_2 - \quad x_3 = 0. \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - \quad x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + \quad x_2 + \ 5x_3 = 0. \end{cases}$

3.11. $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + \quad x_2 + \quad 3x_3 = 0, \\ x_1 + \quad 7x_2 - \quad x_3 = 0. \end{cases}$

3.12. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - \ x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + \ 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + \ 5x_3 = 0. \end{cases}$

3.13. $\begin{cases} 2x_1 + \quad x_2 - \quad x_3 = 0, \\ 3x_1 - \ 2x_2 + \quad 4x_3 = 0, \\ x_1 - \quad 5x_2 + \ 3x_3 = 0. \end{cases}$

3.14. $\begin{cases} 4x_1 + \ x_2 + 3x_3 = 0, \\ 8x_1 - \quad x_2 + \ 7x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - \ 5x_3 = 0. \end{cases}$

3.15. $\begin{cases} x_1 + \ 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + \ 5x_2 + \quad x_3 = 0, \\ x_1 - \ 7x_2 + \ 2x_3 = 0. \end{cases}$

3.16. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + \ x_3 = 0, \\ 3x_1 + \ x_2 + \ 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + \ 5x_3 = 0. \end{cases}$

3.17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

3.18. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

3.19. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

3.20. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

3.21. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 5x_1 - 8x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

3.22. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

3.23. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

3.24. $\begin{cases} 7x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

3.25. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

3.26. $\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

3.27. $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

3.28. $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

3.29. $\begin{cases} 8x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

3.30. $\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

4. Найти фундаментальную систему решений однородной системы уравнений

4.1. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

4.2. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 5x_1 - 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 - 4x_5 = 0, \\ 8x_1 + 15x_2 + x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

4.3. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

4.4. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 0x_4 + 7x_5 = 0, \\ 3x_1 - 0x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$

4.5. $\begin{cases} 2x_1 - 0x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 8x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 0x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$

4.6. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 - x_4 - 4x_5 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

4.7. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 7x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 - 0x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

4.8. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 0x_4 + 3x_5 = 0, \\ -x_1 - 5x_2 + 6x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$

4.9. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 7x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 - 0x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

4.10. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0, \\ -x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 0x_4 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

4.11. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 0x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 0, \\ 0x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$

4.12. $\begin{cases} 4x_1 - 0x_2 + 2x_3 + 6x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 - 0x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 - 6x_4 + 3x_5 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 + 0x_3 - 3x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

4.13. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 0x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 0x_4 - x_5 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$

4.14. $\begin{cases} 0x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 - 0x_5 = 0. \end{cases}$

4.15. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 0x_4 + 2x_5 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - 0x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 0x_5 = 0. \end{cases}$

4.16. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 - 0x_2 - x_3 + 7x_4 - 5x_5 = 0, \\ 0x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

4.17. $\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

4.18. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 0x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 0x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 0x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

4.19. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 6x_4 + 7x_5 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 - 0x_4 + 3x_5 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

4.20. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ -x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 5x_4 - 3x_5 = 0, \\ 5x_1 - 0x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

4.21. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 0x_3 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - 0x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 - 3x_5 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 + x_3 + 0x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

4.22. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 = 0, \\ -3x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 0x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

4.23. $\begin{cases} 6x_1 - 7x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 + 0x_3 - 3x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

4.24. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$

4.25. $\begin{cases} 2x_1 - 0x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 0x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 0x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 0x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

4.26. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 0x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - 0x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 5x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

4.27. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 0x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ -x_1 - 4x_2 - 2x_3 + x_4 + 9x_5 = 0, \\ 5x_1 - 0x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0, \\ 7x_1 + x_2 + 0x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$

4.28. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 0x_4 - 2x_5 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

4.29. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$

4.30. $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 0x_5 = 0, \\ 2x_1 + 8x_2 - 8x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 0x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

5. Проверить, образуют ли векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ ортонормированный базис, и найти разложение вектора $\vec{x}$ по этому базису

5.1. $\vec{e}_1$ = (2; 1; 1), $\vec{e}_2$ = (–2; 3; 2), $\vec{e}_3$ = (1; 1; –2), $\vec{x}$ = (14; 0; 7).

5.2. $\vec{e}_1$ = (1; 1; 0), $\vec{e}_2$ = (3; –3; 4), $\vec{e}_3$ = (–2; 2; 3), $\vec{x}$ = (1; 2; 3).

5.3. $\vec{e}_1$ = (1; –1; 1), $\vec{e}_2$ = (3; 3; 0), $\vec{e}_3$ = (1; –1; –2), $\vec{x}$ = (–1; –2; –3).

5.4. $\vec{e}_1$ = (2; 1; –2), $\vec{e}_2$ = (–1; 4; 1), $\vec{e}_3$ = (1; 0; 1), $\vec{x}$ = (1; 2; 3).

5.5. $\vec{e}_1$ = (1; –2; 0), $\vec{e}_2$ = (0; 0; 4), $\vec{e}_3$ = (2; 1; 0), $\vec{x}$ = (–1; –2; 0).

5.6. $\vec{e}_1$ = (2; 3; 4), $\vec{e}_2$ = (4; 6; –1), $\vec{e}_3$ = (1; 2; –3), $\vec{x}$ = (4; 4; 1).

5.7. $\vec{e}_1$ = (2; 3; 5), $\vec{e}_2$ = (2; –3; 1), $\vec{e}_3$ = (–9; –4; 6), $\vec{x}$ = (1; 2; 3).

5.8. $\vec{e}_1$ = (0; –2; 1), $\vec{e}_2$ = (2; –2; –1), $\vec{e}_3$ = (–2; 3; 2), $\vec{x}$ = (–4; –23; 1).

5.9. $\vec{e}_1$ = (1; 4; 3), $\vec{e}_2$ = (2; 1; 5), $\vec{e}_3$ = (3; 4; 2), $\vec{x}$ = (6; 9; 10).

5.10. $\vec{e}_1$ = (1; 3; 2), $\vec{e}_2$ = (1; 1; 1), $\vec{e}_3$ = (2; 5; 2), $\vec{x}$ = (2; 14; 5).

5.11. $\vec{e}_1$ = (1; 2; 4), $\vec{e}_2$ = (1; –1; 1), $\vec{e}_3$ = (1; 1; 4), $\vec{x}$ = (1; –5; –2).

5.12. $\vec{e}_1$ = (1; 2; 4), $\vec{e}_2$ = (3; 6; 8), $\vec{e}_3$ = (2; 1; –1), $\vec{x}$ = (4; 2; 2).

5.13. $\vec{e}_1$ = (2; 3; 4), $\vec{e}_2$ = (1; 2; –3), $\vec{e}_3$ = (4; 6; –1), $\vec{x}$ = (4; 4; 1).

5.14. $\vec{e}_1$ = (–1; 2; –3), $\vec{e}_2$ = (2; –1; 2), $\vec{e}_3$ = (–1; 2; –2), $\vec{x}$ = (4; 1; 4).

5.15. $\vec{e}_1$ = (–1; 3; 1), $\vec{e}_2$ = (2; –2; 1), $\vec{e}_3$ = (4; –1; –2), $\vec{x}$ = (–1; 11; 2).

5.16. $\vec{e}_1$ = (3; –2; 1), $\vec{e}_2$ = (–3; 2; –1), $\vec{e}_3$ = (–3; 2; –1), $\vec{x}$ = (–6; 12; –4).

5.17. $\vec{e}_1$ = (1; 4; 2), $\vec{e}_2$ = (2; –2; 3), $\vec{e}_3$ = (–2; 1; 0), $\vec{x}$ = (13; 4; 15).

5.18. $\vec{e}_1$ = (–1; 2; 4), $\vec{e}_2$ = (–1; 1; 3), $\vec{e}_3$ = (–1; 4; –1), $\vec{x}$ = (–8; 14; 9).

5.19. $\vec{e}_1$ = (2; 0; –3), $\vec{e}_2$ = (1; –1; 2), $\vec{e}_3$ = (5; –1; 2), $\vec{x}$ = (–1; 3; –9).

5.20. $\vec{e}_1$ = (–1; 2; –2), $\vec{e}_2$ = (2; 3; 1), $\vec{e}_3$ = (4; –2; 0), $\vec{x}$ = (10; 14; 0).

5.21. $\vec{e}_1$ = (1; –1; 2), $\vec{e}_2$ = (2; 0; –3), $\vec{e}_3$ = (5; –1; 2), $\vec{x}$ = (–1; 3; –9).

5.22. $\vec{e}_1$ = (5; –1; 2), $\vec{e}_2$ = (–6; –3; –2), $\vec{e}_3$ = (1; 2; –1), $\vec{x}$ = (7; 2; 3).

5.23. $\vec{e}_1$ = (4; 2; 1), $\vec{e}_2$ = (1; –1; 3), $\vec{e}_3$ = (3; –2; –1), $\vec{x}$ = (9; 4; –5).

5.24. $\vec{e}_1$ = (1; 3; 4), $\vec{e}_2$ = (3; –1; 2), $\vec{e}_3$ = (–2; 2; –3), $\vec{x}$ = (2; 6; –9).

5.25. $\vec{e}_1$ = (3; –1; 1), $\vec{e}_2$ = (1; 1; –2), $\vec{e}_3$ = (1; –1; 2), $\vec{x}$ = (9; 1; –5).

5.26. $\vec{e}_1$ = (2; 4; 1), $\vec{e}_2$ = (1; –1; 1), $\vec{e}_3$ = (3; 2; –1), $\vec{x}$ = (–4; –3; 1).

5.27. $\vec{e}_1$ = (–2; 2; –3), $\vec{e}_2$ = (1; 3; 4), $\vec{e}_3$ = (3; –1; 2), $\vec{x}$ = (2; 4; –5).

5.28. $\vec{e}_1$ = (1; 1; –2), $\vec{e}_2$ = (1; –1; 2), $\vec{e}_3$ = (3; –1; 1), $\vec{x}$ = (9; 1; –5).

5.29. $\vec{e}_1$ = (–1; 2; –3), $\vec{e}_2$ = (–1; 2; –3), $\vec{e}_3$ = (2; –1; 2), $\vec{x}$ = (9; 4; –5).

5.30. $\vec{e}_1$ = (1; –1; 2), $\vec{e}_2$ = (3; –1; 1), $\vec{e}_3$ = (1; 1; –2), $\vec{x}$ = (9; 2; –5).

6. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей

6.1. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

6.2. $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

6.3. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

6.4. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

6.5. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

6.6. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

6.7. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

6.8. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

6.9. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

6.10. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

6.11. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

6.12. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

6.13. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6.14. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

6.15. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6.16. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

6.17. $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

6.18. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

6.19. $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

6.20. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6.21. $\begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

6.22. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

6.23. $\begin{pmatrix} 9 & -6 & -6 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & 2 & -13 \end{pmatrix}$.

6.24. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

6.25. $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

6.26. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

6.27. $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

6.28. $\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 2 & 13 & -4 \\ 2 & -2 & 11 \end{pmatrix}$.

6.29. $\begin{pmatrix} 19 & 2 & -2 \\ 6 & 15 & -6 \\ 2 & -2 & 11 \end{pmatrix}$.

6.30. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.

7.1. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1{}^2 + 2x_2{}^2 + 3x_3{}^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$

7.2. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1{}^2 + 4x_3{}^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$

7.3. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = 4x_1{}^2 - 3x_2{}^2 + 4x_3{}^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3.$

7.4. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = 4x_1{}^2 + x_3{}^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3.$

7.5. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = 4x_1{}^2 + 3x_2{}^2 - 2x_3{}^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3.$

7.6. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1{}^2 + 3x_2{}^2 + x_3{}^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$

7.7. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1{}^2 + x_3{}^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3.$

7.8. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1{}^2 - 3x_2{}^2 - 2x_3{}^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3.$

7.9. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1{}^2 + 5x_2{}^2 + x_3{}^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3.$

7.10. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1{}^2 + 5x_2{}^2 + 4x_3{}^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 10x_2x_3.$

7.11. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1{}^2 + 3x_2{}^2 + x_3{}^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$

7.12. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1{}^2 + x_3{}^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3.$

7.13. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1{}^2 + 8x_2{}^2 + 4x_3{}^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 12x_2x_3.$

7.14. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = 4x_1{}^2 + 5x_2{}^2 + 4x_3{}^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 8x_2x_3.$

7.15. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = 4x_1{}^2 + 8x_2{}^2 + x_3{}^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3.$

7.16. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = 4x_1{}^2 + 5x_2{}^2 + 4x_3{}^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3.$

7.17. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1{}^2 + 5x_2{}^2 + 7x_3{}^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 12x_2x_3.$

7.18. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1{}^2 + 8x_2{}^2 + 7x_3{}^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 16x_2x_3.$

7.19. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1{}^2 + x_2{}^2 + 4x_3{}^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3.$

7.20. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1{}^2 + x_2{}^2 + 4x_3{}^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3.$

7.21. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1{}^2 + 2x_2{}^2 + x_3{}^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$

7.22. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1{}^2 + 2x_3{}^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$

7.23. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = 4x_1{}^2 - 3x_2{}^2 + 2x_3{}^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3.$

7.24. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = 4x_1{}^2 + x_3{}^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$

7.25. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = 4x_1{}^2 + 3x_2{}^2 - 4x_3{}^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3.$

7.26. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1{}^2 + 3x_2{}^2 - x_3{}^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$

7.27. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1{}^2 - 3x_2{}^2 - 4x_3{}^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3.$

7.28. $L\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1{}^2 + 3x_2{}^2 - x_3{}^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$

7.29. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$

7.30. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3.$

8. Привести квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием.

8.1. $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3.$

8.2. $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_2^2 - 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3.$

8.3. $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2\sqrt{3}x_2x_3.$

8.4. $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3.$

8.5. $L(x_1, x_2, x_3) = -4x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3.$

8.6. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 2\sqrt{3}x_2x_3.$

8.7. $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$

8.8. $L(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 - \frac{3}{2}x_3^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 - x_1x_3 + \sqrt{3}x_2x_3.$

8.9. $L(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 6x_2x_3.$

8.10. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3.$

8.11. $L(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 7x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_2x_3.$

8.12. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \frac{4}{3}x_1x_2 - \frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3.$

8.13. $L(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 7x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_2x_3.$

8.14. $L(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{2}x_1^2 + 5x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 - 4x_1x_2 + 3x_1x_3 + 4x_2x_3.$

8.15. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$

8.16. $L(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3.$

8.17. $L(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 5\sqrt{2}x_1x_3 + \sqrt{2}x_2x_3.$

8.18. $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 - 4\sqrt{2}x_1x_3 + 2\sqrt{2}x_2x_3.$

8.19. $L(x_1, x_2, x_3) = -4x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$

8.20. $L(x_1, x_2, x_3) = 10x_1^2 + 14x_2^2 + 7x_3^2 - 10x_1x_2 - \sqrt{2}x_1x_3 - 5\sqrt{2}x_2x_3.$

8.21. $L(x_1, x_2, x_3) = \frac{3}{2}x_1^2 - 5x_2^2 + \frac{3}{2}x_3^2 + 4x_1x_2 - x_1x_3 - 4x_2x_3.$

8.22. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2\sqrt{2}x_1x_3 - 2\sqrt{2}x_2x_3.$

8.23. $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_2^2 - 3x_3^2 - 2\sqrt{3}x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4\sqrt{3}x_2x_3.$

8.24. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \frac{4}{3}x_1x_2 + \frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3.$

8.25. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 4\sqrt{2}x_1x_3 - 2\sqrt{2}x_2x_3.$

8.26. $L(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 13x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3.$

8.27. $L(x_1, x_2, x_3) = 2{x_1}^2 + 2{x_2}^2 + 2{x_3}^2 + \frac{2}{3}x_1x_2 + \frac{4\sqrt{2}}{3}x_2x_3$.

8.28. $L(x_1, x_2, x_3) = 5{x_1}^2 + 4{x_2}^2 + 2{x_3}^2 - 4x_1x_2 - 2\sqrt{2}x_1x_3 + 4\sqrt{2}x_2x_3$.

8.29. $L(x_1, x_2, x_3) = -2{x_1}^2 + 5{x_2}^2 - 2{x_3}^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.

8.30. $L(x_1, x_2, x_3) = -3{x_1}^2 + 9{x_2}^2 + 3{x_3}^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$.

9. . Даны вершины треугольника *ABC*:
$A(x_1;\ y_1), B(x_2;\ y_2), C(x_3;\ y_3)$. Найти:
1) уравнение стороны *AB*;
2) уравнение высоты *CK*;
3) длину высоты *CK*;
4) уравнение медианы *AM*;
5) длину медианы *AM*;
6) уравнение биссектрисы угла *C*;
7) точку *N* пересечения медианы *AM* и высоты *CK*;
8) уравнение прямой, проходящей через вершину *C* параллельно стороне *AB*;
9) площадь треугольника *ABC*.

9.1. *A*(–3; –8), *B*(–2; –4), *C*(1;2).
9.2. *A*(–1; –4), *B*(9; 6), C(–5;4).
9.3. *A*(10; –2), *B*(4; –5), *C*(–3; 1).
9.4. *A*(–3; –1), *B*(–4; –5), *C*(8; 1).
9.5. *A*(–2; –6), *B*(–3; 5), *C*(4; 0).
9.6. *A*(–7; –2), B(3; –8), *C*(–4; 6).
9.7. *A*(0; 2), *B*(–7; –4), *C*(3; 2).
9.8. *A*(7; 0), *B*(1; 4), *C*(–8; –4).
9.9. *A*(1; –3), *B*(0; 7), *C*(–2; 4).
9.10. *A*(–5; 1), *B*(8; –2), *C*(1; 4).
9.11. *A*(2; 5), *B*(–3; 1), *C*(0; 4).
9.12. *A*(–2; 4), *B*(3; 1), *C*(10; 7).
9.13. *A*(–3; –2), *B*(14; 4), *C*(6; 8).
9.14. *A*(1; 7), *B*(–3; –1), *C*(11; –3).
9.15. *A*(1; 0), *B*(–1; 4), *C*(9; 5).
9.16. *A*(1; –2), *B*(7; 1), *C*(3; 7).
9.17. *A*(–2; –3), *B*(1; 6), *C*(6; 1).
9.18. *A*(–4; 2), *B*(–6; 6), *C*(6; 2).
9.19. *A*(4; –3), *B*(7; 3), *C*(1, 10).
9.20. *A*(4; –4), *B*(8; 2), *C*(3;8).
9.21. *A*(–3; –3), *B*(5; –7), *C*(7;7).
9.22. *A*(1; –6), *B*(3;4), *C*(–3;3).
9.23. *A*(–4; 2), В (8; –6), *C*(2; 6).
9.24. *A*(–5; 2), *B*(0; –4), *C*(5; 7).
9.25. *A*(4; –4), *B*(6; 2), *C*(–1;8).
9.26. *A*(–3;8), *B*(–6; 2), *C*(0; –5).
9.27. *A*(6; **–9),** *B*(10; –1), *C*(–4; 1).
9.28. *A*(4; 1), *B*(–3; –1), *C*(7; –3).
9.29. *A*(–4; 2), *B*(6; –4), *C*(4; 10).
9.30. *A*(3; –1), *B*(11; 3), *C*(–6;2).

10. Написать разложение вектора $\vec{a}$ по векторам $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$

10.

10.1. $\vec{a}=\{6;12;-1\}$, $\vec{p}=\{1;3;0\}$, $\vec{q}=\{2;-1;1\}$, $\vec{r}=\{0;-1;2\}$.
10.2. $\vec{a}=\{1;-4;4\}$, $\vec{p}=\{2;1;-1\}$, $\vec{q}=\{0;3;2\}$, $\vec{r}=\{1;-1;1\}$.
10.3. $\vec{a}=\{-9;5;5\}$, $\vec{p}=\{4;1;1\}$, $\vec{q}=\{2;0;-3\}$, $\vec{r}=\{-1;2;1\}$.
10.4. $\vec{a}=\{-5;-5;5\}$, $\vec{p}=\{-2;0;1\}$, $\vec{q}=\{1;3;-1\}$, $\vec{r}=\{0;4;1\}$.
10.5. $\vec{a}=\{13;2;7\}$, $\vec{p}=\{5;1;0\}$, $\vec{q}=\{2;-1;3\}$, $\vec{r}=\{1;0;-1\}$.
10.6. $\vec{a}=\{-19;-1;7\}$, $\vec{p}=\{0;1;1\}$, $\vec{q}=\{-2;0;1\}$, $\vec{r}=\{3;1;0\}$.
10.7. $\vec{a}=\{3;-3;4\}$, $\vec{p}=\{1;0;2\}$, $\vec{q}=\{0;1;1\}$, $\vec{r}=\{2;-1;4\}$.
10.8. $\vec{a}=\{3;3;-1\}$, $\vec{p}=\{3;1;0\}$, $\vec{q}=\{-1;2;1\}$, $\vec{r}=\{-1;0;2\}$.
10.9. $\vec{a}=\{-1;7;-4\}$, $\vec{p}=\{-1;2;1\}$, $\vec{q}=\{2;0;3\}$, $\vec{r}=\{1;1;-1\}$.
10.10. $\vec{a}=\{6;5;-14\}$, $\vec{p}=\{1;1;4\}$, $\vec{q}=\{0;-3;2\}$, $\vec{r}=\{2;1;-1\}$.
10.11. $\vec{a}=\{6;-1;7\}$, $\vec{p}=\{1;-2;0\}$, $\vec{q}=\{-1;1;3\}$, $\vec{r}=\{1;0;4\}$.
10.12. $\vec{a}=\{5;15;0\}$, $\vec{p}=\{1;0;5\}$, $\vec{q}=\{-1;3;2\}$, $\vec{r}=\{0;-1;1\}$.
10.13. $\vec{a}=\{2;-1;11\}$, $\vec{p}=\{1;1;0\}$, $\vec{q}=\{0;1;-2\}$, $\vec{r}=\{1;0;3\}$.
10.14. $\vec{a}=\{11;5;-3\}$, $\vec{p}=\{1;0;2\}$, $\vec{q}=\{-1;0;1\}$, $\vec{r}=\{2;5;-3\}$.
10.15. $\vec{a}=\{8;0;5\}$, $\vec{p}=\{2;0;1\}$, $\vec{q}=\{1;1;0\}$, $\vec{r}=\{4;1;2\}$.
10.16. $\vec{a}=\{3;1;8\}$, $\vec{p}=\{0;1;3\}$, $\vec{q}=\{1;2;-1\}$, $\vec{r}=\{2;0;-1\}$.
10.17. $\vec{a}=\{8;1;12\}$, $\vec{p}=\{1;2;-1\}$, $\vec{q}=\{3;0;2\}$, $\vec{r}=\{-1;1;1\}$.
10.18. $\vec{a}=\{-9;-8;-3\}$, $\vec{p}=\{1;4;1\}$, $\vec{q}=\{-3;2;0\}$, $\vec{r}=\{1;-1;2\}$.
10.19. $\vec{a}=\{-5;9;-13\}$, $\vec{p}=\{0;1;-2\}$, $\vec{q}=\{3;-1;1\}$, $\vec{r}=\{4;1;0\}$.
10.20. $\vec{a}=\{-15;5;6\}$, $\vec{p}=\{0;5;1\}$, $\vec{q}=\{3;2;-1\}$, $\vec{r}=\{-1;1;0\}$.
10.21. $\vec{a}=\{8;9;4\}$, $\vec{p}=\{1;0;1\}$, $\vec{q}=\{0;-2;1\}$, $\vec{r}=\{1;3;0\}$.
10.22. $\vec{a}=\{23;-14;-30\}$, $\vec{p}=\{2;1;0\}$, $\vec{q}=\{1;-1;0\}$, $\vec{r}=\{-3;2;5\}$.
10.23. $\vec{a}=\{3;1;3\}$, $\vec{p}=\{2;1;0\}$, $\overrightarrow{q}=\{1;0;1\}$, $\vec{r}=\{4;2;1\}$.
10.24. $\vec{a}=\{-1;7;0\}$, $\vec{p}=\{0;3;1\}$, $\vec{q}=\{1;-1;2\}$, $\vec{r}=\{2;-1;0\}$.
10.25. $\vec{a}=\{11;-1;4\}$, $\vec{p}=\{1;-1;2\}$, $\vec{q}=\{3;2;0\}$, $\vec{r}=\{-1;1;1\}$.
10.26. $\vec{a}=\{-13;2;18\}$, $\vec{p}=\{1;1;4\}$, $\vec{q}=\{-3;0;2\}$, $\vec{r}=\{1;2;-1\}$.
10.27. $\vec{a}=\{0;-8;9\}$, $\vec{p}=\{0;-2;1\}$, $\vec{q}=\{3;1;-1\}$, $\vec{r}=\{4;0;1\}$.
10.28. $\vec{a}=\{8;-7;-13\}$, $\vec{p}=\{0;1;5\}$, $\vec{q}=\{3;-1;2\}$, $\vec{r}=\{-1;0;1\}$.
10.29. $\vec{a}=\{2;7;5\}$, $\vec{p}=\{1;0;1\}$, $\vec{q}=\{1;-2;0\}$, $\vec{r}=\{0;3;1\}$.
10.30. $\vec{a}=\{15;-20;-1\}$, $\vec{p}=\{0;2;1\}$, $\vec{q}=\{0;1;-1\}$, $\vec{r}=\{5;-3;2\}$.
10.31. $\vec{a}=\{-2;4;7\}$, $\vec{p}=\{0;1;2\}$, $\vec{q}=\{1;0;1\}$, $\vec{r}=\{-1;2;4\}$.

11. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

11.1. $A(1;-2;3)$, $B(0;-1;2)$, $C(3;-4;5)$.
11.2. $A(0;-3;6)$, $B(-12;-3;-3)$, $C(-9;-3;-6)$.
11.3. $A(3;3;-1)$, $B(5;5;-2)$, $C(4;1;1)$.
11.4. $A(-1;2;-3)$, $B(3;4;-6)$, $C(1;1;-1)$.
11.5. $A(-4;-2;0)$, $B(-1;-2;4)$, $C(3;-2;1)$.
11.6. $A(5;3;-1)$, $B(5;2;0)$, $C(6;4;-1)$.
11.7. $A(-3;-7;-5)$, $B(0;-1;-2)$, $C(2;3;0)$
11.8. $A(2;-4;6)$, $B(0;-2;4)$, $C(6;-8;10)$.
11.9. $A(0;1;-2)$, $B(3;1;2)$, $C(4;1;1)$.
11.10. $A(3;3;-1)$, $B(1;5;-2)$, $C(4;1;1)$.
11.11. $A(2;1;-1)$, $B(6;-1;-4)$, $C(4;2;1)$.

11.12. $A(–1; –2; 1)$, $B(–4; –2; 5)$, $C(–8; –2; 2)$
11.13. $A(6; 2; –3)$, $B(6; 3; –2)$, $C(7; 3; –3)$.
11.14. $A(0; 0; 4)$, $B(–3; –6; 1)$, $C(–5; –10; –1)$.
11.15. $A(2; –8; –1)$, $B(4; –6; 0)$, $C(–2; –5; –1)$.
11.16. $A(3; –6; 9)$, $B(0; –3; 6)$, $C(9; –12; 15)$.
11.17. $A(0; 2; –4)$, $B(8; 2; 2)$, $C(6; 2; 4)$.
11.18. $A(3; 3; –1)$, $B(5; 1; –2)$, $C(4; 1; 1)$
11.19. $A(–4; 3; 0)$, $B(0; 1; 3)$, $C(–2; 4; –2)$.
11.20. $A(1; –1; 0)$, $B(–2; –1; 4)$, $C(8; –1; –1)$.
11.21. $A(7; 0; 2)$, $B(7; 1; 3)$, $C(8; –1; 2)$.
11.22. $A(2; 3; 2)$, $B(–1; –3; –1)$, $C(–3; –7; –3)$.
11.23. $A(2; 2; 7)$, $B(0; 0; 6)$, $C(–2; 5; 7)$.
11.24. $A(–1; 2; –3)$, $B(0; 1; –2)$, $C(–3; 4; –5)$
11.25. $A(0; 3; –6)$, $B(9; 3; 6)$, $C(12; 3; 3)$
11.26. $A(3; 3; –1)$, $B(5; 1; –2)$, $C(4; 1; –3)$.
11.27. $A(–2; 1; 1)$, $B(2; 3; –2)$, $C(0; 0; 3)$.
11.28. $A(1; 4; –1)$, $B(–2; 4; –5)$, $C(8; 4; 0)$.
11.29. $A(0; 1; 0)$, $B(0; 2; 1)$, $C(1; 2; 0)$.
11.30. $A(–4; 0; 4)$, $B(–1; 6; 7)$, $C(1; 10; 9)$.

12. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{c}$, приведённых к общему началу.

12.1. $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{c} = 3\vec{p} - \vec{q}$, $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$, $(\vec{p},\hat{}\vec{q}) = \frac{\pi}{6}$.
12.2. $\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{c} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 1$, $(\vec{p},\hat{}\vec{q}) = \frac{\pi}{4}$.
12.3. $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q}$, $\vec{c} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = \frac{1}{5}$, $|\vec{q}| = 1$, $(\vec{p},\hat{}\vec{q}) = \frac{\pi}{2}$.
12.4. $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$, $\vec{c} = \vec{p} + 5\vec{q}$, $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = \frac{1}{2}$, $(\vec{p},\hat{}\vec{q}) = \frac{5\pi}{6}$.
12.5. $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $\vec{c} = 2\vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $(\vec{p},\hat{}\vec{q}) = \frac{3\pi}{4}$.
12.6. $\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}$, $\vec{c} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $(\vec{p},\hat{}\vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.
12.7. $\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{c} = \vec{p} + 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 2$, $(\vec{p},\hat{}\vec{q}) = \frac{\pi}{2}$.
12.8. $\vec{a} = 4\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{c} = \vec{p} - \vec{q}$, $|\vec{p}| = 7$, $|\vec{q}| = 2$, $(\vec{p},\hat{}\vec{q}) = \frac{\pi}{4}$.
12.9. $\vec{a} = \vec{p} - 4\vec{q}$, $\vec{c} = 3\vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$, $(\vec{p},\hat{}\vec{q}) = \frac{\pi}{6}$.
12.10. $\vec{a} = \vec{p} + 4\vec{q}$, $\vec{c} = 2\vec{p} - \vec{q}$, $|\vec{p}| = 7$, $|\vec{q}| = 2$, $(\vec{p},\hat{}\vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.
12.11. $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{c} = \vec{p} - \vec{q}$, $|\vec{p}| = 10$, $|\vec{q}| = 1$, $(\vec{p},\hat{}\vec{q}) = \frac{\pi}{2}$.
12.12. $\vec{a} = 4\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{c} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 5$, $|\vec{q}| = 4$, $(\vec{p},\hat{}\vec{q}) = \frac{\pi}{4}$.
12.13. $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$, $\vec{c} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 6$, $|\vec{q}| = 7$, $(\vec{p},\hat{}\vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.
12.14. $\vec{a} = 3\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{c} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 4$, $(\vec{p},\hat{}\vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.
12.15. $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$, $\vec{c} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $(\vec{p},\hat{}\vec{q}) = \frac{\pi}{4}$.
12.16. $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$, $\vec{c} = 3\vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 1$, $(\vec{p},\hat{}\vec{q}) = \frac{\pi}{6}$.
12.17. $\vec{a} = 5\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{c} = \vec{p} - 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$, $(\vec{p},\hat{}\vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.
12.18. $\vec{a} = 7\vec{p} - 2\vec{q}$, $\vec{c} = \vec{p} + 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = \frac{1}{2}$, $|\vec{q}| = 2$, $(\vec{p},\hat{}\vec{q}) = \frac{\pi}{2}$.
12.19. $\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{c} = \vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 4$, $(\vec{p},\hat{}\vec{q}) = \frac{\pi}{4}$.
12.20. $\vec{a} = 10\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{c} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 1$, $(\vec{p},\hat{}\vec{q}) = \frac{\pi}{6}$.

12.21. $\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{c} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 8$, $|\vec{q}| = \frac{1}{2}$, $(\vec{p},\hat{}\vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.
12.22. $\vec{a} = 3\vec{p} + 4\vec{q}$, $\vec{c} = \vec{q} - \vec{p}$, $|\vec{p}| = \frac{5}{2}$, $|\vec{q}| = 2$, $(\vec{p},\hat{}\vec{q}) = \frac{\pi}{2}$.
12.23. $\vec{a} = 7\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{c} = \vec{p} - 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 1$, $(\vec{p},\hat{}\vec{q}) = \frac{3\pi}{4}$.
12.24. $\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}$, $\vec{c} = 3\vec{p} - \vec{q}$, $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 5$, $(\vec{p},\hat{}\vec{q}) = \frac{2\pi}{3}$.
12.25. $\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{c} = \vec{p} - 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 7$, $|\vec{q}| = 2$, $(\vec{p},\hat{}\vec{q}) = \frac{\pi}{4}$.
12.26. $\vec{a} = 5\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{c} = \vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 5$, $|\vec{q}| = 3$, $(\vec{p},\hat{}\vec{q}) = \frac{5\pi}{6}$.
12.27. $\vec{a} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$, $\vec{c} = \vec{p} + 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $(\vec{p},\hat{}\vec{q}) = \frac{\pi}{4}$.
12.28. $\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{c} = 5\vec{q} + \vec{p}$, $|\vec{p}| = \frac{1}{2}$, $|\vec{q}| = 4$, $(\vec{p},\hat{}\vec{q}) = \frac{5\pi}{6}$.
12.29. $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$, $\vec{c} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 1$, $(\vec{p},\hat{}\vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.
12.30. $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$, $\vec{c} = 5\vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $(\vec{p},\hat{}\vec{q}) = \frac{\pi}{2}$.

13. Компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$? В случае положительного ответа найти линейную зависимость между ними (или выразить один из векторов через два других).

13.1. $\vec{a} = \{2; 3; 1\}$, $\vec{b} = \{-1; 0; -1\}$, $\vec{c} = \{2; 2; 2\}$.
13.2. $\vec{a} = \{3; 2; 1\}$, $\vec{b} = \{2; 3; 4\}$, $\vec{c} = \{3; 1; -1\}$.
13.3. $\vec{a} = \{1; 5; 2\}$, $\vec{b} = \{-1; 1; -1\}$, $\vec{c} = \{1;1;1\}$.
13.4. $\vec{a} = \{1; -1; -3\}$, $\vec{b} = \{3; 2; 1\}$, $\vec{c} = \{2; 3; 4\}$.
13.5. $\vec{a} = \{3;3; 1\}$, $\vec{b} = \{1; -2; 1\}$, $\vec{c} = \{1;1;1\}$.
13.6. $\vec{a} = \{3; 1; -1\}$, $\vec{b} = \{-2; -1; 0\}$, $\vec{c} = \{5; 2; -1\}$.
13.7. $\vec{a} = \{4; 3; 1\}$, $\vec{b} = \{1; -2; 1\}$, $\vec{c} = \{2; 2; 2\}$.
13.8. $\vec{a} = \{4; 3; 1\}$, $\vec{b} = \{6; 7; 4\}$, $\vec{c} = \{2; 0; -1\}$.
13.9. $\vec{a} = \{3; 2; 1\}$, $\vec{b} = \{1; -3; -7\}$, $\vec{c} = \{1; 2; 3\}$.
13.10. $\vec{a} = \{3; 7; 2\}$, $\vec{b} = \{-2; 0; -1\}$, $\vec{c} = \{2; 2; 1\}$.
13.11. $\vec{a} = \{1; -2; 6\}$, $\vec{b} = \{1; 0; 1\}$, $\vec{c} = \{2; -6; 17\}$.
13.12. $\vec{a} = \{6; 3; 4\}$, $\vec{b} = \{-1; -2; -1\}$, $\vec{c} = \{2; 1; 2\}$.
13.13. $\vec{a} = \{7; 3; 4\}$, $\vec{b} = \{-1; -2; -1\}$, $\vec{c} = \{4; 2; 4\}$.
13.14. $\vec{a} = \{2; 3; 2\}$, $\vec{b} = \{4; 7; 5\}$, $\vec{c} = \{2; 0; -1\}$.
13.15. $\vec{a} = \{5; 3; 4\}$, $\vec{b} = \{-1; 0; -1\}$, $\vec{c} = \{4; 2; 4\}$.
13.16. $\vec{a} = \{3; 10; 5\}$, $\vec{b} = \{-2; -2; -3\}$, $\vec{c} = \{2; 4; 3\}$.
13.17. $\vec{a} = \{-2; -4; -3\}$, $\vec{b} = \{4; 3; 1\}$, $\vec{c} = \{6; 7; 4\}$.
13.18. $\vec{a} = \{3; 1; -1\}$, $\vec{b} = \{1; 0; -1\}$, $\vec{c} = \{8; 3; -2\}$.
13.19. $\vec{a} = \{4; 2; 2\}$, $\vec{b} = \{-3; -3; -3\}$, $\vec{c} = \{2; 1; 2\}$.
13.20. $\vec{a} = \{4; 1; 2\}$, $\vec{b} = \{9; 2; 5\}$, $\vec{c} = \{1; 1; -1\}$.
13.21. $\vec{a} = \{5; 3; 4\}$, $\vec{b} = \{4; 3; 3\}$, $\vec{c} = \{9; 5; 8\}$.
13.22. $\vec{a} = \{3; 4; 2\}$, $\vec{b} = \{1; 1; 0\}$, $\vec{c} = \{8; 11; 6\}$.
13.23. $\vec{a} = \{4; -1; -6\}$, $\vec{b} = \{1; -3; -7\}$, $\vec{c} = \{2; -1; -4\}$.
13.24. $\vec{a} = \{3; 1; 0\}$, $\vec{b} = \{-5; -4; -5\}$, $\vec{c} = \{4; 2; 4\}$.
13.25. $\vec{a} = \{3; 0; 3\}$, $\vec{b} = \{8; 1; 6\}$, $\vec{c} = \{1; 1; -1\}$.
13.26. $\vec{a} = \{1; -1; 4\}$, $\vec{b} = \{1; 0; 3\}$, $\vec{c} = \{1; -3; 8\}$.
13.27. $\vec{a} = \{6; 3; 4\}$, $\vec{b} = \{-1; -2; -1\}$, $\vec{c} = \{2; 1; 2\}$.
13.28. $\vec{a} = \{4; 1; 1\}$, $\vec{b} = \{-9; -4; -9\}$, $\vec{c} = \{6; 2; 6\}$.

13.29. $\vec{a}$ = {–3; 3; 3}, $\vec{b}$ = {–4; 7; 6}, $\vec{c}$ = {3; 0; –1}.
13.30. $\vec{a}$ = {–7; 10; –5}, $\vec{b}$ = {0; –2; –1}, $\vec{c}$ = {–2; 4; –1}.

14. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку *A* перпендикулярно вектору $\overrightarrow{BC}$.

14.1. *A*(1; 0; –2), *B*(2; –1; 3), *C*(0; –3; 2).
14.2. *A*(–1; 3; 4), *B*(–1; 5; 0), *C*(2; 6; 1).
14.3. *A*(4; –2; 0), *B*(1; –1; –5), *C*(–2; 1; –3).
14.4. *A*(–8; 0; 7), *B*(–3; 2; 4), *C*(–1; 4; 5).
14.5. *A*(7; –5; 1), *B*(5; –1; –3), *C*(3; 0; –4).
14.6. *A*(–3; 5; –2), *B*(–4; 0; 3), *C*(–3; 2; 5).
14.7. *A*(1; –1; 8), *B*(–4; –3; 10), *C*(–1; –1; 7).
14.8. *A*(–2; 0; –5), *B*(2; 7; –3), *C*(1; 10; –1).
14.9. *A*(1; 9; –4), *B*(5; 7; 1), *C*(3; 5; 0).
14.10. *A*(–7; 0; 3), *B*(1; –5; –4), *C*(2; –3; 0).
14.11. *A*(0; –3; 5), *B*(–7; 2; 6), *C*(–3; 2; 4).
14.12. *A*(5; –1; 2), *B*(2; –4; 3), *C*(4; –1; 3).
14.13. *A*(–3; 7; 2), *B*(3;5; 1), *C*(4; 5; 3).
14.14. *A*(0; –2; 8), *B*(4; 3; 2), *C*(1; 4; 3).
14.15. *A*(1; –1; 5), *B*(0; 7; 8), *C*(–1; 3; 8).
14.16. *A*(–10; 0; 9), *B*(12; 4; 11), *C*(8; 5; 15).
14.17. *A*(3; –3; –6), *B*(1; 9; –5), *C*(6; 6; –4).
14.18. *A*(2; 1; 7), *B*(9; 0; 2), *C*(9; 2; 3).
14.19. *A*(–7; 1; –4), *B*(8; 11; –3), *C*(9; 9; –1).
14.20. *A*(1; 0; –6), *B*(–7; 2; 1), *C*(–9; 6; 1).
14.21. *A*(–3 ;1; 0), *B*(6; 3; 3), *C*(9; 4; –2).
14.22. *A*(–4; –2; 5), *B*(3; –3; –7), *C*(9; 3; –7).
14.23. *A*(0; –8; 10), *B*(–5; 5; 7), *C*(–8; 0; 4).
14.24. *A*(1; –5; –2), *B*(6; –2; 1), *C*(2; –2; –2).
14.25. *A*(0; 7; –9), *B*(–1; 8; –11), *C*(–4; 3; –12).
14.26. *A*(–3; –1; 7), *B*(0; 2; –6), *C*(2; 3; –5).
14.27. *A*(5; 3; –1), *B*(0; 0; –3), *C*(5; –1; 0).
14.28. *A*(–1; 2; –2), *B*(13; 14; 1), *C*(14; 15; 2).
14.29. *A*(7; –5; 0), *B*(8; 3; –1), *C*(8; 5; 1).
14.30. *A*(–3; 6; 4), *B*(8; –3; 5), *C*(10; –3; 7).

15. Даны вершины пирамиды *ABCD*. Найти:
1) длины рёбер *AB* и *AC*;
2) угол между рёбрами *AB* и *AC*;
3) уравнение грани *ABC*;
4) площадь грани *ABC*;
5) объём пирамиды *ABCD*;
6) уравнения ребра *AB*;
7) уравнения высоты пирамиды *DM*;
8) уравнение плоскости, параллельной грани *ABC* и проходящей через точку *D*;
9) длину высоты *DM* (тремя способами).

15.1. *A*(1; 3; 6), *B*(2; 2; 1), *C*(–1; 0; 1), *D*(–4; 6; –3).
15.2. *A*(–4; 2; 6), *B*(2; –3; 0), *C*(–10; 5; 8), *D*(–5; 2; –4).

15.3. $A(7; 2; 4)$, $B(7; –1; –2)$, $C(3; 3; 1)$, $D(–4; 2; 1)$.
15.4. $A(2; 1; 4)$, $B(–1; 5; –2)$, $C(–7; –3; 2)$, $D(–6; –3; 6)$.
15.5. $A(–1; –5; 2)$, $B(–6; 0; –3)$, $C(3; 6; –3)$, $D(–10; 6; 7)$.
15.6. $A(0; –1; –1)$, $B(–2; 3; 5)$, $C(1; –5; –9)$, $D(–1; –6; 3)$.
15.7. $A(5; 2; 0)$, $B(2;5;0)$, $C(1; 2; 4)$, $D(–1; 1; 1)$.
15.8. $A(2; –1; –2)$, $B(1; 2; 1)$, $C(5; 0; –6)$, $D(–10; 9; –7)$.
15.9. $A(–2; 0; –4)$, $B(–1; 7; 1)$, $C(4; –8; –4)$, $D(1; –4; 6)$.
15.10. $A(14; 4; 5)$, $B(–5; –3; 2)$, $C(–2; –6; –3)$, $D(–2; 2; –1)$.
15.11. $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; –3)$, C(5; 2; 6), $D(8; 4; –9)$.
15.12. $A(2; –1; 2)$, $B(1; 2; –1)$, $C(3; 2; 1)$, $D(–4; 2; 5)$.
15.13. $A(1; 1; 2)$, $B(–1; 1; 3)$, $C(2; –2; 4)$, $D(–1; 0; –2)$.
15.14. $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; –2)$, $C(6; 3; 7)$, $D(7; 5; –3)$.
15.15. $A(1; 1; –1)$, $B(2; 3; 1)$, $C(3; 2; 1)$, $D(5; 9; –8)$.
15.16. $A(1; 5; –7)$, $B(–3; 6; 3)$, $C(–2; 7; 3)$, $D(–4; 8; –12)$.
15.17. $A(–3; 4; –7)$, $B(1; 5; –4)$, $C(–5; –2; 0)$, $D(2; 5; 4)$.
15.18. $A(–1; 2; –3)$, $B(4; –1; 0)$, $C(2; 1; –2)$, $D(3; 4; 5)$.
15.19. $A(4; –1; 3)$, $B(–2; 1; 0)$, $C(0; –5; 1)$, $D(3; 2; –6)$.
15.20. $A(1; –1; 1)$, $B(–2; 0; 3)$, $C(2; 1; –1)$, $D(2; –2; –4)$.
15.21. $A(1; 2; 0)$, $B(1; –1; 2)$, $C(0; 1; –1)$, $D(–3; 0; 1)$.
15.22. $A(1; 0; 2)$, $B(1; 2; –1)$, $C(2; –2; 1)$, $D(2; 1; 0)$.
15.23. $A(1; 2; –3)$, $B(1; 0; 1)$, $C(–2; –1; 6)$, $D(0; –5; –4)$.
15.24. $A(3; 10; –1)$, $B(–2; 3; –5)$, $C(–6; 0; –3)$, $D(1; –1; 2)$.
15.25. $A(–1; 2; 4)$, $B(–1; –2; –4)$, $C(3; 0; –1)$, $D(7; –3; 1)$.
15.26. $A(0; –3; 1)$, $B(–4; 1; 2)$, $C(2; –1; 5)$, $D(3; 1; –4)$.
15.27. $A(1; 3; 0)$, $B(4; –1; 2)$, $C(3; 0; 1)$, $D(–4; 3; 5)$.
15.28. $A(–2; –1; –1)$, $B(0; 3; 2)$, $C(3; 1; –4)$, $D(–4; 7; 3)$.
15.29. $A(–3; –5; 6)$, $B(2; 1; –4)$, $C(0; –3; –1)$, $D(–5; 2; –8)$.
15.30. $A(2; –4; –3)$, $B(5; –6; 0)$, $C(–1; 3; –3)$, $D(–10; –8; 7)$.

16. Найти угол между плоскостями.

16.1. $x – 3y + 5 = 0$, $2x – y + 5z – 16 = 0$.
16.2. $x – 3y + z – 1 = 0$, $x + 5z – 1 = 0$.
16.3. $4x – 5y + 3z – 1 = 0$, $x – 4y – z + 9 = 0$.
16.4. $3x – y + 2z + 15 = 0$, $5x + 9y – 3z – 1 = 0$.
16.5. $6x + 2y – 4z + 17 = 0$, $9x + 3y – 6z – 4 = 0$.
16.6. $x – y\sqrt{2} + z – 1 = 0$, $x + y\sqrt{2} – z + 3 = 0$.
16.7. $3y – z = 0$, $2y + z = 0$.
16.8. $6x + 3y – 2z = 0$, $x +2y + 6z – 12 = 0$.
16.9. $x + 2y + 2z – 3 = 0$, $16x + 12y – 15z – 1 = 0$.
16.10. $2x – y + 5z + 16 = 0$, $x + 2y + 3z + 8 = 0$.
16.11. $2x + 2y + z – 1 = 0$, $x + z – 1 = 0$.
16.12. $3x + y + z – 4 = 0$, $y + z + 5 = 0$.
16.13. $3x – 2y – 2z – 16 = 0$, $x + y – 3z – 7 = 0$.
16.14. $2x + 2y + z + 9 = 0$, $x – y + 3z – 1 = 0$.
16.15. $x + 2y + 2z – 3 = 0$, $2x – y + 2z + 5 = 0$.
16.16. $3x + 2y –3z – 1 = 0$, $x + y + z – 7 = 0$.
16.17. $x – 3y – 2z – 8 = 0$, $x + y – z + 3 = 0$.
16.18. $3x – 2y + 3z + 23 = 0$, $x + z + 5 = 0$.
16.19. $x + y +3z – 7 = 0$, $y + z – 1 = 0$.
16.20. $x – 2y + 2z +17 = 0$, $x – 2y – 1 = 0$.

16.21. $x + 2y - 1 = 0$, $x + y + 6 = 0$.
16.22. $2x - z + 5 = 0$, $2x + 3y - 7 = 0$.
16.23. $5x + 3y + z - 18 = 0$, $2y + z - 9 = 0$.
16.24. $4x + 3z - 2 = 0$, $x + 2y + 2z + 5 = 0$.
16.25. $x + 4y - z + 1 = 0$, $2x + y + 4z - 3 = 0$.
16.26. $2y + z - 9 = 0$, $x - y + 2z - 1 = 0$.
16.27. $2x - 6y + 14z - 1 = 0$, $5x - 15y + 35z - 3 = 0$.
16.28. $x - y + 7z - 1 = 0$, $2x - 2y - 5 = 0$.
16.29. $3x - y - 5 = 0$, $2x + y - 3 = 0$.
16.30. $x + y + z\sqrt{2} - 3 = 0$, $x - y + z\sqrt{2} - 1 = 0$.

17. Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой (для вариантов 1-15) или плоскости (для вариантов 16-31).

17.1. $M(0; -3; -2)$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z}{1}$.
17.2. $M(2; -1; 1)$, $\frac{x-4,5}{1} = \frac{y+3}{-0,5} = \frac{z-2}{1}$.
17.3. $M(1; 1; 1)$, $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1,5}{-2} = \frac{z-1}{1}$.
17.4. $M(1; 2; 3)$, $\frac{x-0,5}{0} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z-1,5}{1}$.
17.5. $M(1; 0; -1)$, $\frac{x-3,5}{2} = \frac{y-1,5}{2} = \frac{z}{0}$.
17.6. $M(2; 1; 0)$, $\frac{x-2}{0} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z+0,5}{1}$.
17.7. $M(-2; -3; 0)$, $\frac{x+0,5}{1} = \frac{y+1,5}{0} = \frac{z-0,5}{1}$.
17.8. $M(-1; 0; -1)$, $\frac{x}{1} = \frac{y-1,5}{0} = \frac{z-2}{1}$.
17.9. $M(0; 2; 1)$, $\frac{x-1,5}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{1}$.
17.10. $M(3; -3; -1)$, $\frac{x-6}{5} = \frac{y-3,5}{4} = \frac{z+0,5}{0}$.
17.11. $M(3; 3; 3)$, $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1,5}{0} = \frac{z-3}{1}$.
17.12. $M(-1; 2; 0)$, $\frac{x+0,5}{1} = \frac{y+0,7}{-0,2} = \frac{z-2}{2}$.
17.13. $M(2; -2; -3)$, $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+0,5}{0} = \frac{z+1,5}{0}$.
17.14. $M(-1; 0; 1)$, $\frac{x+0,5}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-4}{2}$.
17.15. $M(0; -3; -2)$, $\frac{x-0,5}{0} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z-1,5}{1}$.
17.16. $M(1; 0; 1)$, $4x + 6y + 4z - 25 = 0$.
17.17. $M(-1; 0; -1)$, $2x + 6y - 2z + 11 = 0$.
17.18. $M(0; 2; 1)$, $2x + 4y - 3 = 0$.
17.19. $M(2; 1; 0)$, $y + z + 2 = 0$.
17.20. $M(-1; 2; 0)$, $4x - 5y - z - 7 = 0$.
17.21. $M(2; -1; 1)$, $x - y + 2z - 2 = 0$.
17.22. $M(1; 1; 1)$, $x + 4y + 3z + 5 = 0$.
17.23. $M(1; 2; 3)$, $2x + 10y + 10z - 1 = 0$.
17.24. $M(0; -3; -2)$, $2x + 10y + 10z - 1 = 0$.
17.25. $M(1; 0; -1)$, $2y + 4z - 1 = 0$.
17.26. $M(3; -3; -1)$, $2x - 4y - 4z - 13 = 0$.
17.27. $M(-2; -3; 0)$, $x + 5y + 4 = 0$.
17.28. $M(2; -2; -3)$, $y + z + 2 = 0$.
17.29. $M(-1; 0; 1)$, $2x + 4y - 3 = 0$.
17.30. $M(3; 3; 3)$, $8x + 6y + 8z - 25 = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1 Бугров Н.С., Никольский С.М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. - М.: Дрофа, 2005.

2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1/ П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. - М.: ОНИКС, 2003.

3. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые её приложения: Учеб. пособие для вузов. 4-е изд., испр. -М: Наука, 1985.

4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра, М.: Наука - Физматлит, 1999.

5. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. 3-е изд., перераб. -
М.: Наука, 1970.

6. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике/ В.П. Минорский - М.: Физматлит, 2003.

7. Проскуряков И.Б. Сборник задач по линейной алгебре. - М.: Наука, 1978 (и последующие издания).

8. Ефимов А.В. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях: учебное пособие для втузов /Под ред. А.В. Ефимова А.С. Поспелова.- М.: Физматлит, Ч. 1- 2001.

9. Стренг Г. Линейная алгебра и её применения. - М.: Мир 1980, 454 с.

10. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов. Учеб. пособие. Практикум /Под ред. Кремера Н.Ш., 2-е изд., - М.: Юнити 2010, 477 с.

11. Новосельцева В.И. Линейная алгебра. – Учебное пособие для студентов ИЭФ МИИТ, М. 2012, 140 с.

12. Кекух Л.В. Элементы линейной алгебры. Учебное пособие. – М.: МИИТ, 2007, – 88 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Св. план 2015 г., поз.178

Сирош Мария Михайловна

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ
I часть

Учебное пособие

Подписано в печать Заказ №

Усл. печ. л. Формат Тираж 100 экз.