# Элементы теории множеств

Множество – совокупность различимых объектов, называемых элементами.

Приняты следующие обозначения:

$A, B, C, \ldots$ – множества;
$a, b, c, \ldots$ – элементы множеств;
$a \in A$ – элемент $a$ принадлежит множеству $A$;
$a \notin A$ – элемент $a$ не принадлежит множеству $A$.

## Основные способы задания множеств.

1. Перечисление: $A = \{a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_n\}$.
   Например, $A = \{1, 2, 3\}$.
2. Описание: $A = \{x \mid P(x)\}$.
   Здесь $P(x)$ – некоторое свойство, которым обладают все элементы множества $A$.
   Например, $A = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$.

**Определение.** Пустое множество – множество, не содержащее ни одного элемента. Оно обозначается символом $\emptyset$.

**Замечание.** Многие факты, связанные с множествами, удобно схематически изображать с помощью кругов, называемых кругами Эйлера–Венна.

**Определение.** Множество $A$ называется подмножеством множества $B$, если все элементы множества $A$ являются элементами множества $B$. Обозначение: $A \subseteq B$.

**Определение.** Множества $A$ и $B$ называются равными, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

**Примеры.**

1. $A = \{-2; 2\},\ B = \{x \mid x^2 - 4 = 0\}.\ A = B.$
2. $A$ – множество всех четных положительных чисел.
   $B$ – множество всех чисел, представимых в виде суммы двух положительных нечетных чисел.
   Тогда $A = B$.

**Определение.** Пересечением множеств $A$ и $B$ называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих как множеству $A$, так и множеству $B$. Обозначение: $A \cap B$ (см. рис. 1).

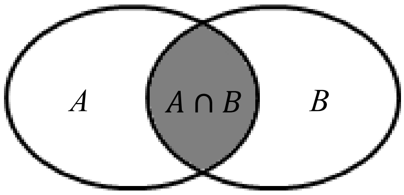



Рис. 1. Пересечение множеств.

**Пример.** $A = \{1; 2\}, B = \{2; 3\}$. Тогда $A \cap B = \{2\}$.

**<u>Определение.</u>** <u>Объединением</u> множеств $A$ и $B$ называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств. Обозначение: (см. рис. 2).

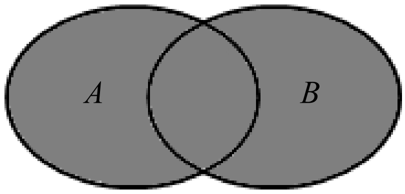



Рис. 2. Объединение множеств.

**<u>Пример.</u>** $A=\{1;2\}, B=\{2;3\}$. Тогда $A\bigcup B=\{1;2;3\}$.

**<u>Определение.</u>** <u>Разностью</u> множеств $A$ и $B$ называется множество, состоящее из таких элементов множества $A$, которые не принадлежат множеству $B$. Обозначение: $A\backslash B$, читается: «А без В» (см. рис. 3).

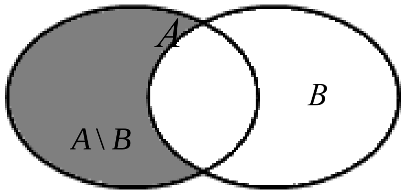



Рис. 3. Разность множеств.

**<u>Пример.</u>** $A=\{1;2\}, B=\{2;3\}$. Тогда $A\setminus B=\{1\}$, $B\setminus A=\{3\}$.

**<u>Определение.</u>** <u>Симметрической разностью</u> множеств $A$ и $B$ называется объединение множеств $A\backslash B$ и $B\backslash A$. Обозначение: $A\Delta B$ (см. рис. 4). Таким образом, $A\Delta B=(A\setminus B)\bigcup(B\setminus A)$.

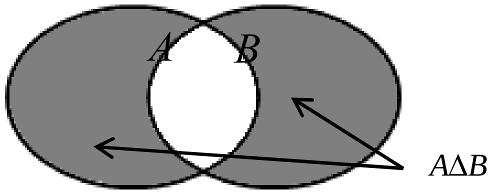



Рис. 4. Симметрическая разность множеств.

**<u>Определение.</u>** Если все множества, рассматриваемые в некоторой задаче, являются подмножествами некоторого множества $U$, то это множество $U$ называется <u>универсальным.</u>

**<u>Определение.</u>** <u>Дополнением</u> множества $A$ называется множество $\bar{A}=U\setminus A$. Читается: «не А» (см. рис. 5).

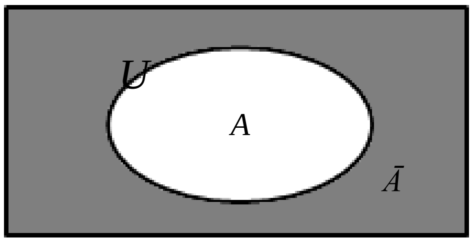
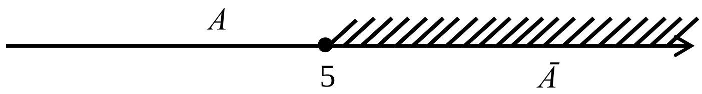



Рис. 5. Дополнение множества.

**Пример.** $U = \mathbb{R}$. $A = [5; +\infty)$. Тогда $\bar{A} = (-\infty; 5)$.




## Свойства операций над множествами.

1. а). $A \cup B = B \cup A$; (коммутативность)
   б). $A \cap B = B \cap A$;

2. а) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; (ассоциативность)
   б). $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

3. а). $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; (дистрибутивность)
   б). $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

4. а). $A \cap \emptyset = \emptyset$;
   б). $A \cup \emptyset = A$;

5. а). $A \cap U = A$;
   б). $A \cup U = U$;

6. а). $A \cup \bar{A} = U$;
   б). $A \cap \bar{A} = \emptyset$;

7. $\bar{\bar{A}} = A$;

8. а). $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$; (законы де Моргана)
   б). $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

**Задача 1.** Изобразить с помощью кругов Эйлера–Венна следующие пары множеств:

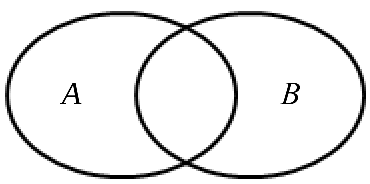
1. $A = \{x \mid x = 2k,\ k \in \mathbb{N}\}$,
   $B = \{x \mid x = 7k,\ k \in \mathbb{N}\}$.

2. $A$ – множество параллелограммов,
   $B$ – множество прямоугольников.

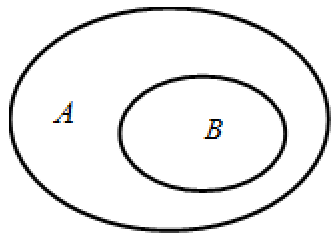
3. $A$ – множество параллелограммов,
   $B$ – множество трапеций.

**Решение.**

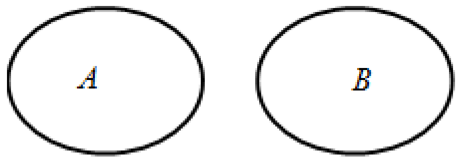
1. Множества пересекаются (14 делится и на 2, и на 7), но есть четные числа, которые не делятся на 7, и есть нечетные числа, кратные 7.




2. Всякий прямоугольник является параллелограммом. Поэтому $B \subseteq A$.

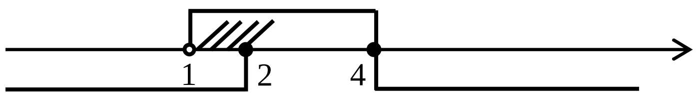



3. У параллелограммов две пары сторон параллельны, а у трапеций – только одна пара.

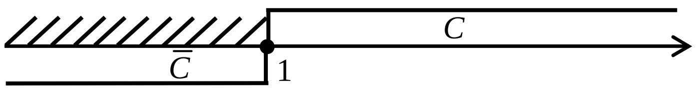



**<u>Задача 2.</u>** $A = (1; 4]$, $B = (-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$, $C = [1; +\infty)$.
Найти множество $(A \cap B) \cup \overline{C}$.

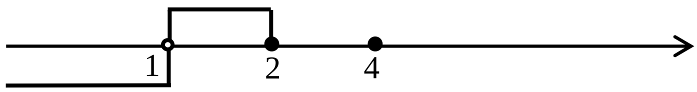
**<u>Решение.</u>** Для нахождения множества $(A \cap B) \cup \overline{C}$ изобразим множества $A$, $B$ и $C$ на числовой прямой, разбивая задачу на этапы.




1). $A \cap B = (1; 2] \cup \{4\}$.




2). $\overline{C} = (-\infty; 1)$.




3). $(A \cap B) \cup C = (-\infty; 1) \cup (1; 2] \cup \{4\}$.

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (1; 2] \cup \{4\}$.

**<u>Задача 3.</u>** Доказать равенство $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

**<u>Доказательство.</u>** Для того, чтобы доказать, что множество $X$ равно $Y$, нужно показать, что
1). любой элемент $x$ множества $X$ принадлежит множеству $Y$;
2). любой элемент $y$ множества $Y$ принадлежит множеству $X$.
Рассмотрим наши множества.

1. Пусть $x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in A$ или $x \in B \cap C$. Если $x \in A$, то $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, т. е. $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2. Если $x \in B \cap C$, то $x \in B$ и $x \in C$, значит, $x \in B \cup A$ и $x \in C \cup A$, тем самым, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
   Мы показали, что в каждом из случаев $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

3. Пусть $y \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Тогда $y \in A \cup B$ и $y \in A \cup C$. Рассмотрим следующие варианты:
   а). $y \in A$, тогда $y \in A \cup (B \cap C)$.
   б). $y \notin A$, тогда, так как при этом $y \in A \cup B$, получаем $y \in B$. Аналогично, так как $y \in A \cup C$, получаем $y \in C$. Следовательно, $y \in B \cap C$, и, значит, $y \in A \cup (B \cap C)$.

Таким образом, в каждом из возможных случаев $y \in A \cup (B \cap C)$. Доказательство равенства множеств завершено.

**<u>Задача 5.</u>** Доказать, что $(\overline{A} \cup B) \cap A = A \cap B$.

**<u>Доказательство.</u>** Для доказательства этого равенства будем пользоваться основными свойствами операций над множествами.

$(\overline{A} \cup B) \cap A = (\overline{A} \cap A) \cup (B \cap A) = \emptyset \cup (B \cap A) = B \cap A = A \cap B.$

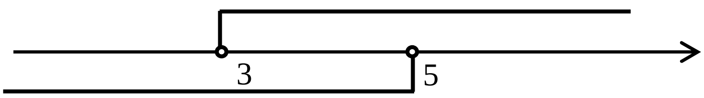
Свойство 3б). Свойство 6б). Свойство 4б). Свойство 1б).

**<u>Задача 6.</u>** Найти множество $X$, удовлетворяющее условию: $\overline{X \cup A} \cup \overline{X \cup \overline{A}} = B$.

**<u>Решение.</u>** Проведем тождественные преобразования нашего уравнения.
Так как $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cap \overline{N}$ (свойство 8б).), то получается $(\overline{X} \cap \overline{A}) \cup (\overline{X} \cap \overline{\overline{A}}) = B$.
Воспользуемся свойством 3б). Имеем $X \cap (\overline{\overline{A}} \cup A) = B$. Так как $\overline{\overline{A}} = A$ (свойство 7), то, значит, $X \cap (\overline{A} \cup A) = B$, далее, по свойству 6а)., имеем $\overline{X} \cap U = B$, $\overline{X} = B$, $\overline{\overline{X}} = \overline{B}$, и, окончательно, $X = \overline{B}$.
Ответ: $X = \overline{B}$.

**<u>Задание 1.</u>** $A = (-\infty; 3]$, $B = (-\infty; 5)$. Найти: 1). $\overline{A} \cup B$; 2). $\overline{A \Delta B}$.

**<u>Решение.</u>** 1). $\overline{A} = (3;\ +\infty)$, $\overline{A} \cup B = (-\infty;\ +\infty)$.




2). $A \backslash B = \emptyset, B \backslash A = (3; 5)$. $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = \emptyset \cup (3; 5) = (3; 5)$. $\overline{A \Delta B} = (-\infty; 3] \cup [5;\ +\infty)$.
Ответ: 1). $\overline{A} \cup B = (-\infty;\ +\infty)$.
2). $\overline{A \Delta B} = (-\infty; 3] \cup [5;\ +\infty)$.

**<u>Задание 2.</u>** Доказать, что $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.

**<u>Решение.</u>** $x \in A \backslash B \Leftrightarrow x \in A$ и $x \notin B \Leftrightarrow x \in A$ и $x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in A \cap \overline{B}$.

**<u>Задание 3.</u>** Доказать, что $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$.

**<u>Решение.</u>** $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A \cup (B \cap \overline{B}) = A \cup \emptyset = A$.
$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cup U = A$.
Таким образом, $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.

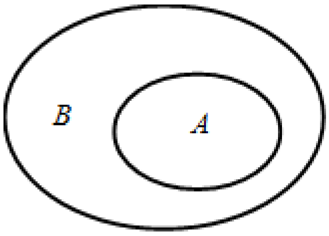
**<u>Задание 4.</u>** Доказать, что если $A \subseteq B$, то $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.

**<u>Решение.</u>** Пусть $x \in \overline{B}$, значит, $x \notin B$. Учитывая условие $A \subseteq B$ (любой элемент множества $A$ является элементом множества $B$), получаем $x \notin A$, то есть $x \in \overline{A}$. Мы показали, что любой элемент множества $\overline{B}$ является элементом $\overline{A}$, а это означает, что $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.

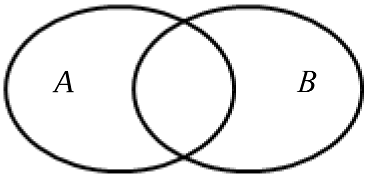
## Задачи для самостоятельного решения.

1. Изобразить с помощью кругов Эйлера–Венна следующие пары множеств:
   1). $A$ – множество квадратов, $B$ – множество ромбов.
   2). $A$ – множество натуральных чисел, сумма цифр которых делится на 3, $B$ – множество всех четных чисел.
   3). $A$ – натуральные числа, десятичная запись которых заканчивается цифрой 3, $B$ – множество всех чисел, делящихся на 6.

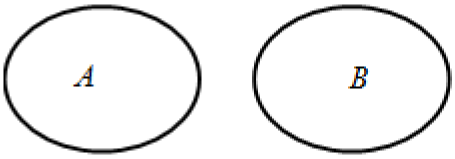
   Ответ:




1).




2).




3).

2. Доказать, что $(A\cup B)\setminus C\subseteq A\cup(B\setminus C)$.

# Элементы комбинаторики

**<u>Определение 1.</u>** Множества $A$ и $B$ называются <u>эквивалентными</u>, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие. Обозначение: $A\sim B$.

**<u>Определение 2.</u>** Множество $A$ называется <u>конечным</u>, если существует такое натуральное число $n$, что $A\sim\{1;2;3;\ldots;n\}$. Число $n$ при этом называется <u>мощностью</u> множества $A$. Обозначение: $|A|=n$.

**<u>Теорема 1.</u>** Пусть $A$ и $B$ – конечные множества. Тогда $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$.

**<u>Следствие 1.</u>** Если $A$, $B$ и $C$ – конечные множества, то

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|.$$

**<u>Пример 1.</u>** В группе 20 студентов. Английский язык изучают 9 студентов, французский – 10, немецкий – 8. Одновременно английский и французский языки изучают 2 студента, французский и немецкий – 3, английский и немецкий – 3. Сколько студентов изучают все три языка?

**<u>Решение.</u>** Введем обозначения:

$A$ – множество студентов, изучающих английский язык;
$B$ – множество студентов, изучающих французский язык;
$C$ – множество студентов, изучающих немецкий язык.
Тогда $A\cup B\cup C$ – множество всех студентов группы;
$A\cap B$ – множество студентов, изучающих английский и французский языки;
$A\cap C$ – множество студентов, изучающих английский и немецкий языки;
$B\cap C$ – множество студентов, изучающих французский и немецкий языки;

$A \cap B \cap C$– множество студентов, изучающих все три языка.
По условию задачи имеем:
$|A \cup B \cup C| = 20, |A| = 9, |B| = 10, |C| = 8, |A \cap B| = 2, |B \cap C| = 3, |A \cap C| = 3.$
Пусть $|A \cap B \cap C| = x$. Применив формулу из следствия 1, получим $20 = 9 + 10 + 8 - 2 - 3 - 3 + x$. Отсюда $x = 1$.
Ответ: один студент группы изучает все три языка.

**<u>Теорема 2.</u>** Пусть $A$ – конечное множество, причем $|A| = n$. Пусть $P(A)$ – множество всех подмножеств множества $A$. Тогда $|P(A)| = 2^n$.

**<u>Пример 2.</u>** У ослика Иа-Иа четверо друзей: Винни-Пух, Пятачок, Сова и Кристофер-Робин. Сколькими способами Иа-Иа позвать друзей на свой день рождения?

**<u>Решение.</u>** Различным вариантам приглашения гостей соответствуют различные подмножества множества {Винни-Пух; Пятачок; Сова; Кристофер-Робин}. По теореме 2 число всех подмножеств множества $A$, содержащего $n$ элементов, равно $2^n$. Наше множество содержит 4 элемента. Значит, количество всех вариантов – $2^4 = 16$ вариантов.
Отметим, что формула подсчитывает <u>все</u> подмножества, то есть варианты «не позвать никого» ($\emptyset$) и «позвать всех» ($A$) также учтены.
Ответ: 16 способов.

Напомним следующие определения.

**<u>Определение 3.</u>** $n! = 1 * 2 * 3 * \dots * n$. Читается: «эн-факториал».

**<u>Определение 4.</u>** $0! = 1$.

**<u>Пример 3.</u>** Вычислить $\frac{8!}{4!3!}$.

**<u>Решение.</u>** $\frac{8!}{4!3!} = \frac{1*2*3*4*5*6*7*8}{(1*2*3*4)*(1*2*3)} = \frac{5*6*7*8}{2*3} = 5 * 7 * 8 = 280.$

**<u>Определение 5.</u>** Пусть имеется множество, состоящее из $n$ элементов.Комбинации, содержащие все эти элементы и отличающиеся друг от друга только порядком расположения элементов, называются <u>перестановками из $n$ элементов</u>.

**<u>Пример 4.</u>** $A = \{a; b; c\}$. Составим всевозможные перестановки элементов этого множества.

*(a, b, c),*
*(a,c,b),*
*(b, a, c),*
*(b, c, a),*
*(c, a, b),*
*(c, b, a).*

Число всех возможных перестановок множества, содержащего $n$ элементов, обозначим $P_n$.

**<u>Теорема 3.</u>** $P_n = n!$

**<u>Пример 5.</u>** Почтальон должен доставить 5 писем по пяти различным адресам (каждое из писем на определенный адрес). Сколько различных маршрутов может составить почтальон?

**<u>Решение:</u>** Пусть $A$ – множество всех адресов, а $N$ – число различных маршрутов. По условию, $|A| = 5$. Различные маршруты – это различные перестановки элементов множества $A$. По теореме 3, имеем $N = P_5 = 5! = 120$.
Ответ: 120.

**Определение 6.** Пусть имеется множество, содержащее $n$ элементов. Комбинации, состоящие из $m$ различных элементов этого множества и отличающиеся друг от друга либо составом элементов, либо порядком их расположения, называются размещениями из $n$ элементов по $m$ элементов.
Число всевозможных размещений $m$ элементов, выбранных из множества, содержащего $n$ элементов, принято обозначать символом $A_n^m$ (читается: «A из n по m»).

**Пример 6.** Пусть $A = \{a;\ b;\ c\}$. Составим всевозможные размещения элементов этого множества по два элемента.

**Решение.** Составить некоторое размещение – значит составить упорядоченную пару ($x$, $y$) различных элементов. Перечислим все варианты: *(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b).*

**Теорема 4.** $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

**Замечание.** $\frac{n!}{(n-m)!} = n * (n-1) * \dots * (n-m+1)$

**Пример 7.** Сколько различных двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 и 5 при условии, что все цифры в числе должны быть различны?

**Решение.** Составить двузначное число, содержащее различные цифры, из предложенных цифр 1, 2, 3, 4 и 5 – значит выбрать из 5 элементов 2 различных и разместить их в определенном порядке (то есть составить размещение из пяти элементов по двум местам). Число таких размещений будет равно

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 5 * 4 = 20$$

Этот результат можно получить, проводя следующее рассуждение: имеется два места. Первое место может быть заполнено пятью способами. Какой бы вариант мы не выбрали, на оставшееся место можно поместить любой из четырех оставшихся. 5*4 = 20 вариантов.

**Определение 7.** Пусть имеется множество, содержащее $n$ элементов. Комбинации, состоящие из $m$ элементов (не обязательно различных) и отличающихся друг от друга либо набором, либо порядком расположения элементов, называются размещениями с повторениями из $n$ элементов по $m$ элементов.
Число таких комбинаций принято обозначать символом $\overline{A_n^m}$.

**Пример 8.** Пусть $A = \{a; b; c\}$. Составить все возможные размещения с повторениями элементов этого множества по два элемента.

**Решение.** Составить размещение с повторением – значит составить упорядоченную пару ($x$, $y$) (в которую могут включаться и одинаковые элементы). Перечислим все такие пары.
*(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, a), (b, a), (b, c), (c, c), (c, a), (c, b).*

**Теорема 5.** $\overline{A_n^m} = n^m$.

**Пример 9.** Сколько различных двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 и 5, если цифры в числе могут повторяться?

**Решение.** Нужные нам комбинации являются размещениями с повторениями ($n$ = 5, $m$ = 2). Число комбинаций мы находим по формуле

$$A_5^2 = 5^2 = 25.$$

Этот результат также может быть получен следующим рассуждением. Требуется заполнить два места, используя 5 различных цифр. Первое место можно заполнить пятью способами. Какой бы способ мы ни выбрали, для заполнения второго места опять можно использовать любую из пяти цифр, то есть получается 5*5 = 25 различных вариантов.

**Определение 8.** Пусть имеется множество, состоящее из $n$ элементов. Комбинации, содержащие $m$ элементов и отличающиеся друг от друга составом элементов, называются сочетаниями из $n$ элементов по $m$ элементов. Число таких комбинаций обозначается символом $C_n^m$ (читается: «Це из n по m»).

**Пример 10.** Пусть $A = \{a;\ b;\ c\}$. Составить все возможные размещения с повторениями элементов этого множества по 2 элемента.

**Решение.** Составить сочетание из элементов множества $A$ по два элемента – значит составить неупорядоченную пару $\{x, y\}$ из различных элементов. В нашем случае имеем три такие пары: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$.

**Теорема 6.** $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\, m!}$

**Пример 11.** В футбольном турнире принимают участие 6 команд. Каждая команда должна сыграть с любой другой ровно одну игру. Сколько матчей будет сыграно в турнире?

**Решение.** Любой матч определяется выбором из 6 участников двух команд, которые должны встретиться. При этом нас интересуют неупорядоченные пары команд (например, пары (1, 2) и (2, 1) определяют один и тот же матч, в котором играют первая и вторая команды). Значит, число матчей есть $C_6^2$. Вычислим $C_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!\, 2!} = \frac{6!}{4!\, 2!} = \frac{6*5}{2} = 15.$
Ответ: 15.

**Определение 9.** Числа $C_n^k$ называются биноминальными коэффициентами.
**Теорема 6.** (Свойства биноминальных коэффициентов.)
1. $C_n^0 = C_n^n = 1;$
2. $C_n^1 = C_n^{n-1} = n;$
3. $C_n^k = C_n^{n-k};$
4. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1};$
5. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n;$
6. $(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$ (бином Ньютона).

Для решения комбинаторных задач оказываются полезными следующие два правила.

**Теорема 7.** (Правило произведения.) Если из множества $A$ элемент $a$ может быть выбран $n$ способами, а из множества $B$ элемент $b$ может быть выбран $m$ способами, то существует ровно $mn$ различных пар вида $(a;\ b)$.

**Теорема 8.** (Правило суммы.) Если объект $a$ может быть выбран $n$ способами, а объект $b$ может быть выбран $m$ способами, то выбор «только $a$ или только $b$» можно осуществить $n + m$ способами.

**Задание 1.** Может ли некоторое множество $A$ иметь ровно
а). 6 подмножеств;
б). 4 подмножества;
в). 1 подмножество;
г). 7 подмножеств?

**Решение.** Теорема 2 утверждает, что число подмножеств некоторого множества имеет вид $2^n$, где $n$ – число элементов в этом множестве.
Поэтому 6 и 7 подмножеств у множества быть не может.
Далее, $1 = 2^0$, $4 = 2^2$. Значит, ситуации б). и в). возможны.
1 подмножество имеет пустое множество и только оно; 4 подмножества имеет множество, содержащее 2 элемента .

$$A = \{a; b\}. \ P(A) = \{\emptyset; A; \{a\}; \{b\}\}.$$
Ответ: а). и г). – невозможно, б). и в). – возможно.

**Задание 2.** В группе 20 студентов. В теннис играют 11 человек, 8 человек занимаются плаванием, 8 человек катаются на лыжах. 3 студента увлекаются и плаванием, и теннисом; 3 студента увлекаются и плаванием, и лыжами; 4 играют в теннис и катаются на лыжах. Один студент занимается всеми тремя видами спорта. Сколько стуентов группы не занимаются спортом?

**Решение.** Пусть $A$ – множество студентов, занимающихся спортом, $B$ – множество пловцов в группе, $C$ – множество лыжников, $U$ – множество всех студентов группы, $N$ – множество студентов, которые не занимаются спортом.
Тогда $|A| = 11,\ |B| = 8,\ |C| = 8, |A \cap B| = 3,\ |B \cap C| = 3,\ |A \cap C| = 4,\ |A \cap B \cap C| = 1.$
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$
$$= 11 + 8 + 8 - 3 - 4 - 3 + 1 = 18.$$
$|N| = |U| - |A \cup B \cup C| = 20 - 18 = 2.$
Ответ: 2 студента спортом не занимаются.

**Задание 3.** Вычислить: $\frac{P_3(A_8^3 - C_8^3)}{P_5}$.

**Решение.** Учитывая, что $P_3 = 3! = 2 * 3$, $A_8^3 = \frac{8!}{5!} = 8 * 3 * 6$, $P_5 = 5! = 2 * 3 * 4 * 5$, $C_8^3 = \frac{8!}{5!\,3!} =$ $= \frac{8*7*6}{2*3} = 8 * 7$, получаем $\frac{P_3(A_8^3 - C_8^3)}{P_5} = \frac{(2*3)*(8*7*6 - 8*7)}{2*3*4*5} = \frac{8*7*5}{4*5} = 14$.
Ответ: 14.
**Задание 4.** На группу из 5 студентов профком выделил билеты в театр. Сколькими способами можно распределить эти билеты между студентами, если
а). выделено 5 билетов на различные спектакли;
б). выделено 3 билета на различные спектакли;
в). выделено 3 билета на один спектакль?

**Решение.** а). Возможные варианты распределения билетов – это различные перестановки из 5 элементов. Получаем $P_5 = 5! = 120$ способов.
б). интересующие нас комбинации являются размещениями из 5 элементов по 3 элемента. Получаем $A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 60$ способов.
в). $C_5^3 = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$ способов.
Ответ: а). 120; б). 60; в). 10.

**Задание 5.** В группе 10 юношей и 8 девушек. 6 студентов отбирают для участия в сортивном соревновании. Солькими способами можно сделать выбор, если
а). команда состоит только из юношей;
б). команда состоит только из девушек;
в). в команду должны войти трое юношей и три девушки?

**Решение.** а). $C_{10}^6 = \frac{10!}{6!\,4!} = 210$.
б). $C_8^6 = \frac{8!}{6!\,2!} = 4 * 7 = 28$.
в). $C_{10}^3 * C_8^3 = \frac{10!}{7!\,3!} * \frac{8!}{5!\,3!} = 120 * 56 = 6720$.
Ответ: а). 210; б). 28; в). 6720.

**Задание 6.** Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4 и 5, если
а). все все цифры в числе должны быть различными;

б). цифры могут повторяться?

**Решение.** а). на первое место можно вписать любую из цифр 1, 2, 3, 4, 5 (5 вариантов), на второе место цифру можно вписать снова пятью способами (нельзя использовать цифру, уже поставленную на первое место, но можно использовать 0), для третьего места остается 4 варианта (так как еще остается 4 не использованных до этого цифры), для четвертого – 3 варианта. В результате получаем $5*5*4*3 = 300$ вариантов. Или, иначе, $A_6^4 - A_5^3 = \frac{6!}{2!} - \frac{5!}{2!} = 300$.
б). $5*6*6*6 = 1080$ вариантов. Или $\overline{A_6^4} - \overline{A_6^3} = 6^4 - 6^3 = 1080$.
Ответ: а). 300; б). 1080.

**Задание 7.** Сколькими способами можно расставить на полке в один ряд 7 различных томов так, чтобы первый и второй тома не стояли рядом?

**Решение.** Число способов расстановки семи различных книг на полке в один ряд есть число возможных перестановок их 7 элементов $P_7 = 7!$ Среди них имеются такие перестановки, что первый и второй тома оказываются стоящими на соседних местах. Их ровно $2*6*5!$ Итак, число подходящих нам вариантов равно $7! - 12*5! = 5!*30 = 3600$.

## Задачи для самостоятельного решения.

1. Множество содержит 32 натуральных числа, из них кратны 3 – 14, кратны 5 – 14, кратны 6 – 4, кратны 15 – 3, кратны 10 – 3 и одно число кратно 30. Сколько четных чисел содержит множество?
   Ответ: 13.
2. Сколько существует двузначных чисел, у которых все цифры различны и нечетны?
   Ответ: 20.

3. В соревнованиях принимает участие 15 спортсменов. Сколькими способами могут распределиться 3 призовых места, если каждое из призовых мест может быть закреплено лишь за одним участником соревнования?
   Ответ: 2730.

4. Сколькими способами можно выбрать трех человек из десяти для участия
   а). в одной конференции;
   б). в трех различных конференциях?
   Ответ: а). 120; б). 720.

5. В футбольном чемпионате было сыграно 45 матчй, причем любые две команды встречались между собой ровно один раз. Сколько команд принимало участие в чемпионате?
   Ответ: 10.

6. Сколько различных четных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 7, если
   а). все цифры в числе должны быть различны;
   б). цифры могут повторяться?
   Ответ: а). 108; б). 360.

7. В вазе 10 белых и 5 красных роз. Сколькими способами можно составить букет, содержащий 3 белых и 2 красных розы?
   Ответ: 1200.

8. Сколькими способами можно разложить 8 различных предметов по двум разным карманам?
   Ответ: 256.

## Контрольные вопросы.

1. Что называется подмножеством?
2. Какое множество называется пустым?
3. Какое множество называется универсальным?
4. Какие множества называются равными?
5. Что называется пересечением двух множеств? Какое обозначение используется для этого понятия?
6. Что называтся объединением двух множеств? Какое обозначение используется для этого понятия?
7. Что называется разностью двух множеств? Симметрической разностью? Какие обозначения используется для этих понятий?
8. Что называется дополнением множества? Какое обозначение используется для этого понятия?
9. Какие основные свойства операций над множествами вы знаете?
10. Какое множество называется конечным?
11. Сколько подмножеств существует у множества, содержащего $n$ элементов?
12. Что называется мощностью конечного множества? Какое обозначение используется для этого понятия?
13. Как найти мощность объединения двух множеств?
14. Как найти мощность объединения трех множеств?
15. Что называется перестановками из $n$ элементов?
16. Сколько существует различных перестановок из $n$ элементов?
17. Что называется размещениями?
18. Сколько существует различных размещений из $n$ по $m$ элементов?
19. Что называется размещением с повторениями?
20. Сколько существует различных размещений с повторениями из $n$ по $m$ элементов?
21. Что называется сочетаниями?
22. Сколько существует различных сочетаний из $n$ по $m$ элементов?
23. Что называется правилом произведения?
24. Чем отличаются размещения от сочетаний?
25. Чем отличаются размещения от размещений с повторениями?

# Элементы теории графов

## Оглавление

## *§1. Основные понятия теории графов*

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ - некоторое непустое конечное множество, $X$ -множество, элементами которого являются неупорядоченные пары $\{v_i;v_j\}$ , где $v_i,v_j\in V$ . Тогда пара множеств $\{V,X\}$ называется *графом*; элементы множества $V$ называются *вершинами графа*; элементы множества $X$ называются *рёбрами графа*.

З а м е ч а н и е. Если ребро имеет вид $\{a;b\}$ , то говорят, что ребро соединяет вершины $a$ и $b$ , а вершины $a$ и $b$ являются концами ребра $\{a;b\}$ .

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $\{V,X\}$ - некоторый граф. Если каждому элементу множества $V$ сопоставлена некоторая точка плоскости, а каждой паре $\{v_i;v_j\}\in X$ сопоставлена непрерывная линия, соединяющая точки $v_i$ и $v_j$ , то полученная фигура называется *геометрической реализацией графа* $\{V,X\}$ .

П р и м е р ы 1.

1. Пусть $V=\{a,b,c\}$ - множество вершин графа, $X=\{\{a;b\},\{a;c\}\}$ - множество рёбер графа. Тогда $\{V,X\}$ является графом, изображённые на рис.1-1 и 1-2 фигуры являются геометрическими реализациями графа.

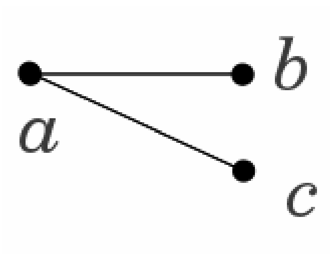



Рис.1-1

.

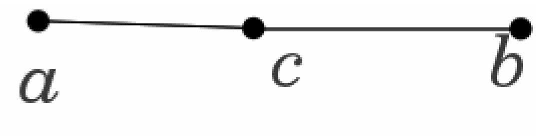



Рис.1-2.

2. Пусть $V=\{a,b,c,d\}$ - множество вершин графа, $X=\{\{b;d\},\{b;c\},\{a;c\}\}$ - множество рёбер графа. Тогда $\{V,X\}$ является графом, изображённые на рис.1-3 и 1-4 фигуры являются геометрическими реализациями графа.

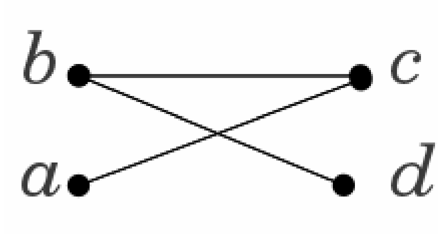



Рис.1-3.

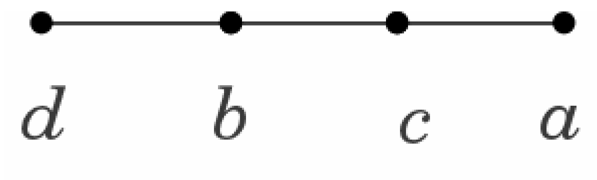



Рис.1-4.

3. Пусть $V = \{a, b, c, d\}$ - множество вершин графа, $X = \{\{a; b\}, \{b; c\}, \{a; a\}\}$ - множество рёбер графа. Тогда $\{V, X\}$ является графом, изображённая на рис.1-5 фигура является геометрической реализацией графа.

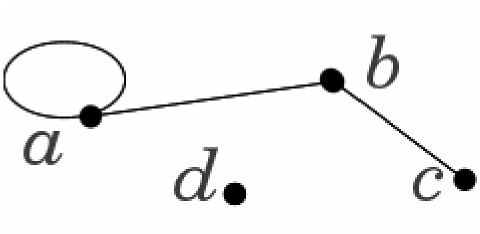



Рис.1-5.

4. Пусть $V = \{a, b, c, d\}$ - множество вершин графа, $X = \{\{a; b\}, \{a; b\}, \{c; c\}, \{a; c\}\}$ - множество рёбер графа. Тогда $\{V, X\}$ является графом, изображённая на рис.1-6 фигура является геометрической реализацией графа.

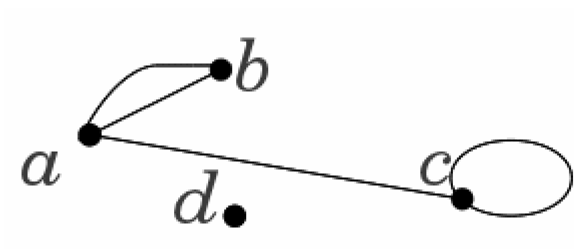



Рис.1-6.

5. Пусть $V = \{a, b\}$ - множество вершин графа, $X = \varnothing$ - множество рёбер

графа. Тогда $\{V, X\}$ является графом, изображённая на рис.1-7 фигура является геометрической реализацией графа.


Рис.1-7.

З а д а н и е 1. На рисунках 1-8 - 1-11 изображены геометрические реализации различных графов. Составить множества $V$ и $X$ для каждого из них.

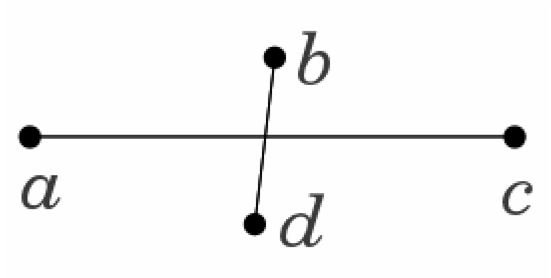



Рис. 1-8.

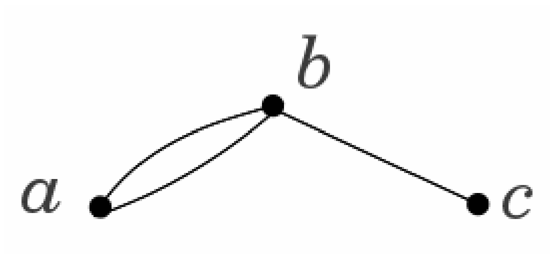



Рис. 1-9.

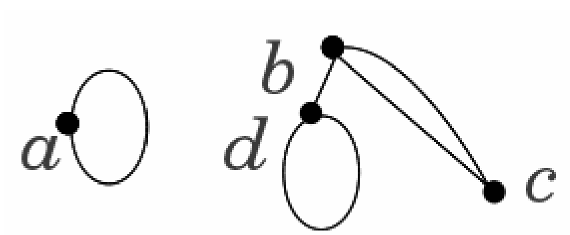



Рис. 1-10.

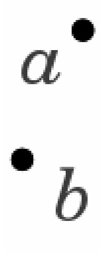



Рис. 1-11.

О т в е т.

$$V_1 = \{a, b, c, d\};\ X_1 = \{\{a;d\}, \{b;c\}\};$$
$$V_2 = \{a, b, c\};\ X_2 = \{\{a;b\}, \{a;b\}, \{b;c\}\};$$
$$V_3 = \{a, b, c, d\};\ X_3 = \{\{a;a\}, \{b;c\}, \{b;c\}, \{d;d\}\};$$
$$V_4 = \{a, b\};\ X_4 = \{\varnothing\}.$$

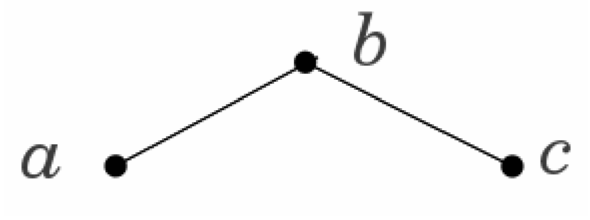
О п р е д е л е н и е 2. Ребро вида $\{a;a\}$ называется *петлёй*.

О п р е д е л е н и е 3. Если множество $X$ содержит хотя бы две одинаковых пары $\{a;b\}$, то ребро $\{a;b\}$ называется *кратным*.

О п р е д е л е н и е 4. Вершины $u$ и $v$ графа $G = \{V, X\}$ называются *смежными*, если множество $X$ содержит ребро $\{u;v\}$.

П р и м е р.

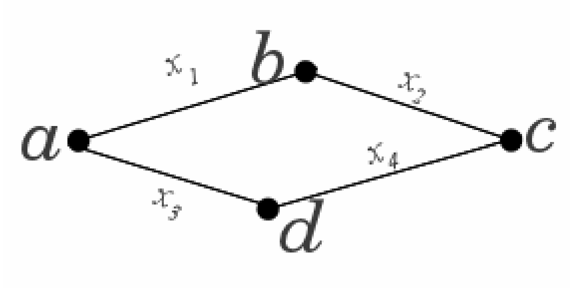
$$G = \{V, X\},\quad V = \{a, b, c\},\quad X = \{\{a;b\}, \{b;c\}\}\ .$$




Вершины $a$ и $b$ - смежные, $b$ и $c$ - смежные, $a$ и $c$ не являются смежными.

О п р е д е л е н и е 5. Вершина $v$ и ребро $x$ называются *инцидентными*, если вершина $v$ является концом ребра $x$.

П р и м е р 2.



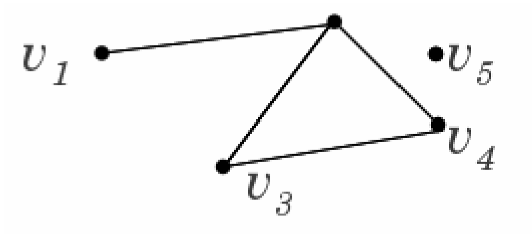

Вершина $a$ и ребро $x_1 = \{a ; b\}$ инцидентны; вершина $a$ и ребро $x_4 = \{d ; c\}$ не являются инцидентными.

О п р е д е л е н и е 6. *Степенью вершины* $u$ называется число рёбер, инцидентных вершине $u$. Обозначение: $d(u)$.

З а м е ч а н и е. Принято считать, что любая петля, инцидентная некоторой вершине, увеличивает её степень на две единицы.

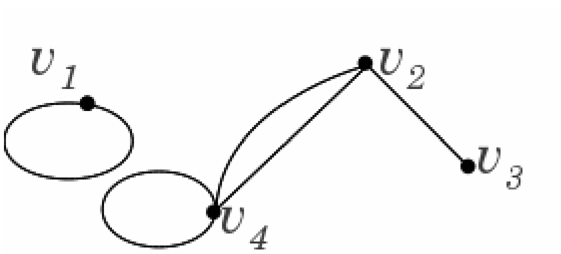
П р и м е р ы 3.

1. $G_1 = \{V_1, X_1\}$




$d(v_1) = 1;\ d(v_2) = 3;\ d(v_3) = 2;\ d(v_4) = 2;\ d(v_5) = 0$.

2. $G_2 = \{V_2, X_2\}$




$d(v_1) = 2;\ d(v_2) = 3;\ d(v_3) = 1;\ d(v_4) = 4$.

О п р е д е л е н и е 7. Вершина графа, не смежная ни с какой другой вершиной, называется *изолированной.*

З а д а н и е 2. Указать степени всех вершин графа, изображённого на рис.1-12.

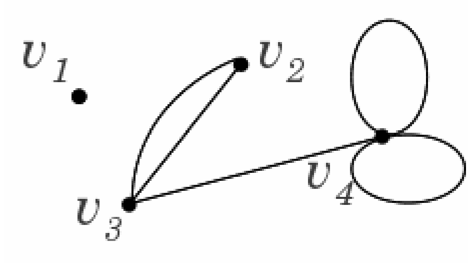



Рис.1-12.

Р е ш е н и е.

Для вершины $v_1$ нет инцидентных ей рёбер, значит, $d(v_1) = 0$ .

Вершине $v_2$ инцидентны 2 ребра, следовательно, $d(v_2) = 2$ .

Вершине $v_3$ инцидентны 3 ребра, следовательно, $d(v_3) = 3$ .

Вершине $v_4$ инцидентны 2 петли, вклад каждой из которых в степень вершины равен 2, и одно ребро , следовательно, $d(v_4) = 5$ .

О т в е т. $d(v_1) = 0;\ d(v_2) = 2;\ d(v_3) = 3;\ d(v_4) = 5$ .

У т в е р ж д е н и е 1.

Пусть $G$ - граф, имеющий $n$ вершин и $m$ рёбер. Тогда

$$d(v_1) + d(v_2) + \ldots + d(v_n) = 2\mathrm{m}\ .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Складывая степени вершин, мы подсчитываем число рёбер, инцидентных каждой вершине. Так как ребро, не являющееся петлёй, инцидентно ровно двум вершинам, то все такие рёбра учитываются дважды. Из определения степени вершины следует также, что каждая петля, соответствующая вершине, также учитывается дважды. Следовательно, сумма $d(v_1) + d(v_2) + \ldots + d(v_n)$ равна удвоенному числу рёбер.

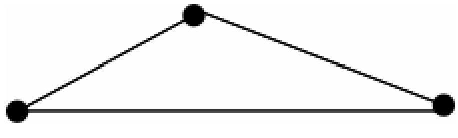
С л е д с т в и е.

Число вершин графа, имеющих нечётную степень, чётно.

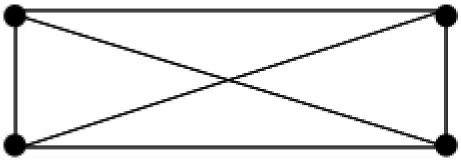
О п р е д е л е н и е 8. Граф $G$ , не содержащий петель и кратных рёбер, называется *полным*, если любая его вершина смежна со всеми остальными.

П р и м е р 4.

1.

 - полный граф с тремя вершинами.

2.

 - полный граф с четырьмя вершинами.

У т в е р ж д е н и е 2.

Пусть $G$ - полный граф, $n$ - число его вершин, $m$ - число его рёбер. Тогда

$$m = \frac{n(n-1)}{2} \quad .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Из Утверждения 1 имеем:

$$d(v_1) + d(v_2) + \ldots + d(v_n) = 2\mathrm{m}\,; \;\; d(v_i) = n-1 \;\; \forall i = 1,2,\ldots,n \quad .$$

Следовательно, $n(n-1) = 2\mathrm{m}$ и $m = \dfrac{n(n-1)}{2}$ .

З а д а н и е 3.

Имеется полный граф $G$ с числом вершин $n = 5$ . Найти число $m$ рёбер этого графа и изобразить его.

Р е ш е н и е.

Так как число рёбер $m = \dfrac{n(n-1)}{2}$ (Утверждение 2), то для данного графа $G$

$m = \dfrac{5 \cdot 4}{2} = 10$ . На плоскости такой граф нарисовать можно, например, так: отметить 5 точек-вершин на воображаемой окружности и соединить каждую из них отрезками прямых с оставшимися четырьмя:

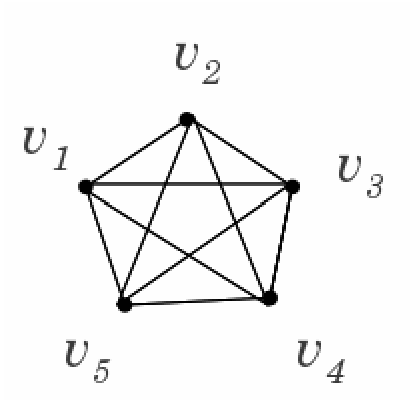



Рис.1-13.

О п р е д е л е н и е 9. Графы $G_1 = \{V_1, X_1\}$ и $G_2 = \{V_2, X_2\}$ называются изоморфными, если между множествами $V_1, V_2$ можно установить взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее смежность.

П р и м е р 5.

1. Графы $G_1, G_2$, изображённые на рис.1-14, изоморфны.

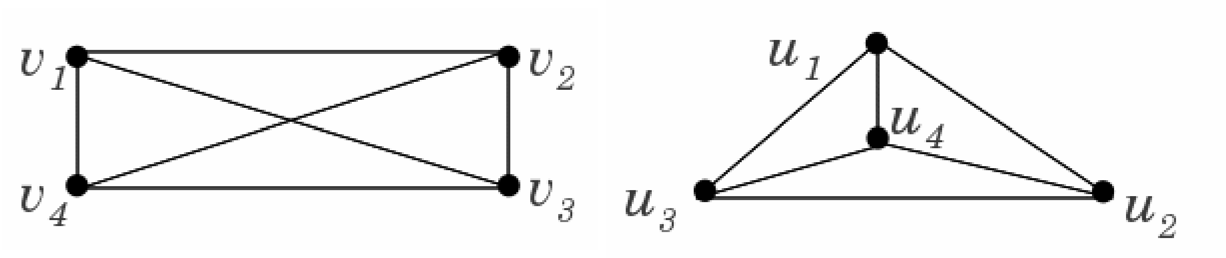



Рис.1-14.

П о я с н е н и е.

Вершины этих графов можно сопоставить следующим образом:

$v_1 \leftrightarrow u_1;$
$v_2 \leftrightarrow u_2;$
$v_3 \leftrightarrow u_3;$
$v_4 \leftrightarrow u_4.$

При этом если пара вершин $v_i, v_j$ графа $G_1$ соединялась ребром $x$, то сопоставленные им вершины графа $G_2$ соединяются ребром, которое сопоставляется ребру $x$.

2. Графы $G_3, G_4$, изображённые на рис.1-15, неизоморфны.

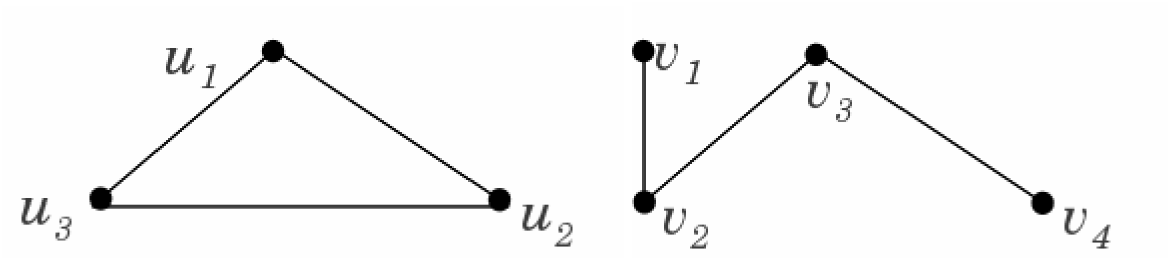



Рис.1-15.

П о я с н е н и е.

У графов $G_3, G_4$ различное число вершин, следовательно, не может быть

взаимно-однозначного соответствия между множествами вершин этих графов.

3. Графы $G_5, G_6$, изображённые на рис.16, неизоморфны.

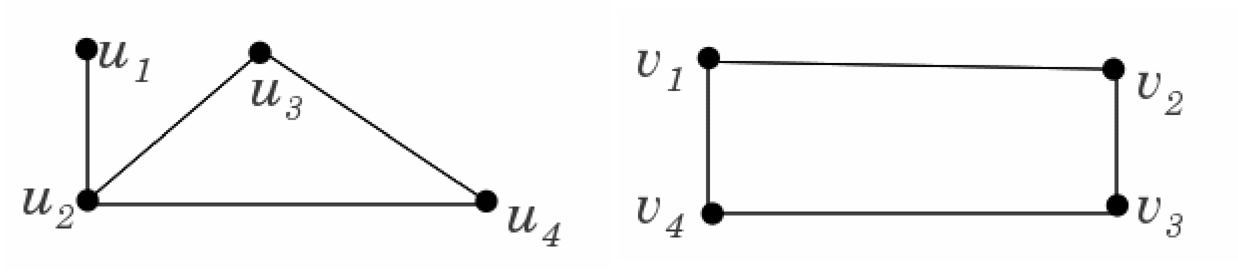



Рис.1-16.

П о я с н е н и е.

Графы $G_5, G_6$ имеют одинаковое число вершин, но вершина $u_1$ графа $G_5$ смежна только с вершиной $u_2$ , а у графа $G_6$ любая вершина смежна с двумя другими вершинами. Поэтому каждое взаимно-однозначное соответствие между множествами вершин не сохраняет отношение смежности.

3. Графы $G_7, G_8$ , изображённые на рис 1-17, неизоморфны.

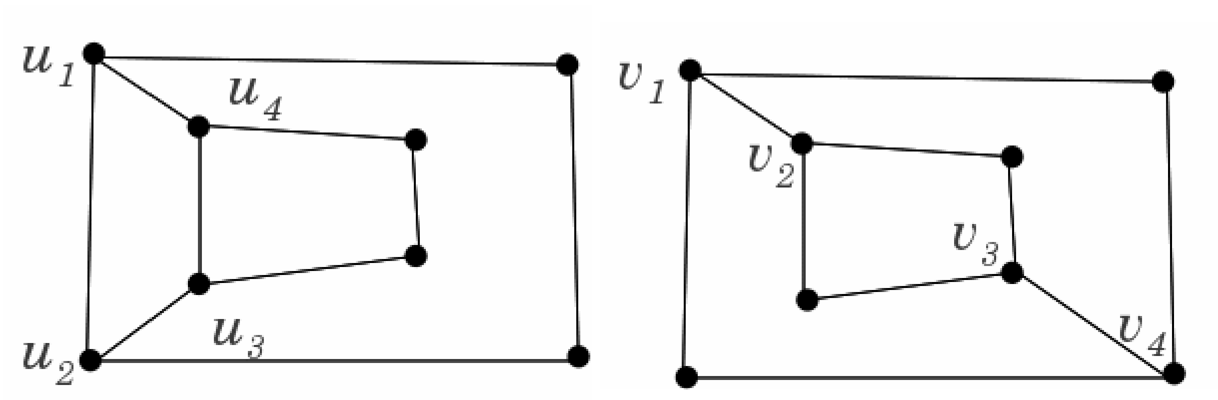



Рис.1-17.

П о я с н е н и е.

У графа $G_7$ имеется 4 вершины степени 3: $u_1, u_2, u_3, u_4$ , причём любая из них смежна с двумя вершинами, имеющими такую же степень: $u_1$ смежна с $u_4$ и $u_2$ , $u_4$ смежна с $u_1$ и $u_3$ , $u_3$ смежна с $u_4$ и $u_2$ , $u_1$ - с $u_3$ и $u_1$ . Граф $G_8$ также содержит 4 вершины степени 3, но каждая из них смежна лишь с одной вершиной такой же степени. Следовательно, при любом взаимно- однозначном соответствии между множествами вершин этих графов отношение смежности сохраниться не может.

З а д а н и е 4.

Определить, изоморфны ли графы (см. рис.1-18)

(а) $G_1$ и $G_2$ ,

(б) $H_1$ и $H_2$ .

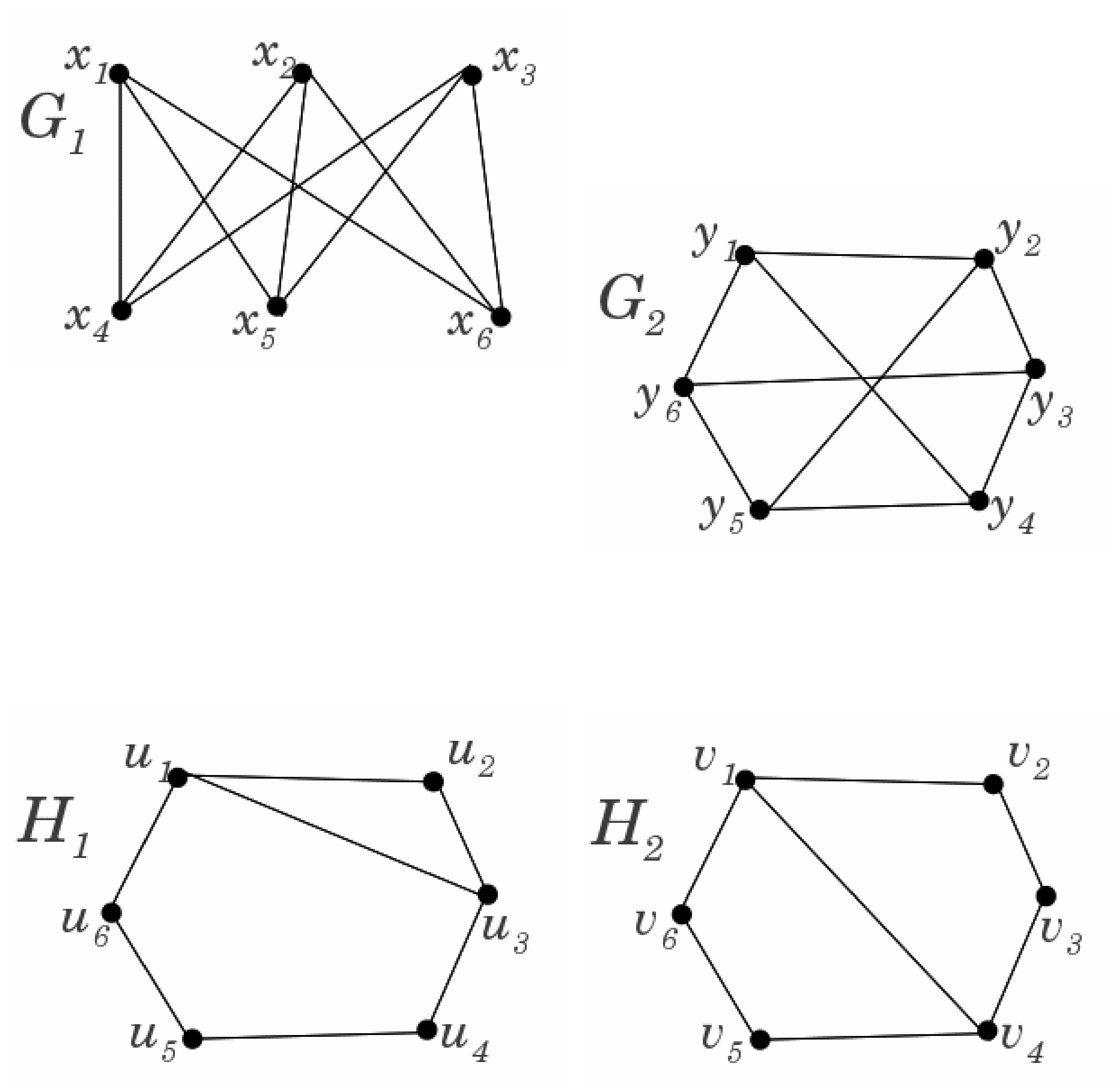



Рис.1-18.

Р е ш е н и е.

(а) Графы $G_1$ и $G_2$ изоморфны.

Для установления взаимно-однозначного соответствия между вершинами заметим, что вершины графа $G_1$ делятся на два класса: $\{x_1, x_2, x_3\}$ и $\{x_4, x_5, x_6\}$. Вершины, входящие в одну группу, не смежны между собой, но каждая вершина из одной группы смежна с любой вершиной из другой группы. В графе $G_1$ наблюдается такая же закономерность, $\{y_1, y_3, y_5\}$ и $\{y_2, y_4, y_6\}$ - классы вершин графа $G_2$, аналогичные описанным классам вершин графа $G_1$.

Сопоставим вершины двух графов следующим образом:

$$x_1 \leftrightarrow y_1; \quad x_4 \leftrightarrow y_2;$$
$$x_2 \leftrightarrow y_3; \quad x_5 \leftrightarrow y_4;$$
$$x_3 \leftrightarrow y_5; \quad x_6 \leftrightarrow y_6.$$

Указанное взаимно-однозначное соответствие сохраняет смежность для каждой вершины.

(б) Графы $H_1$ и $H_2$ .не являются изоморфными.

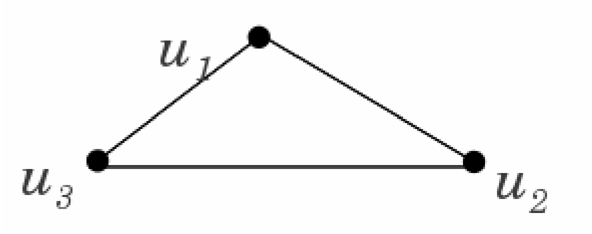
Каждый из этих графов содержит ровно 2 вершины степени 3 - $u_1, u_3$ и $v_1, v_4$ . Но в графе $H_1$ есть вершина степени 2 ( $u_2$ ), смежная как с $u_1$ , так и с $u_3$ , а в графе $H_2$ такой вершины нет: любая вершина степени 2 графа $H_2$ смежна только с одной из вершин степени 3. Следовательно, при любом взаимно-однозначном соответствии между множествами вершин этих графов смежность сохраниться не может.

П р и м е р 6.

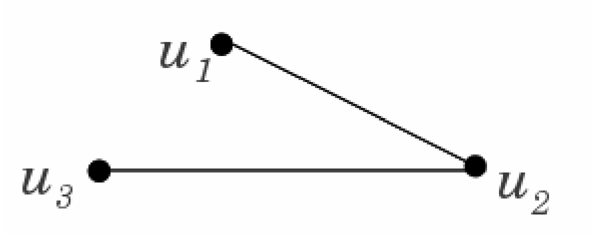
Изобразим все попарно неизоморфные графы без петель и кратных рёбер, имеющие 3 вершины ( $n = 3$ ).

Максимальное число рёбер таких графов - $m = 3$ . Рассмотрим все возможные случаи.

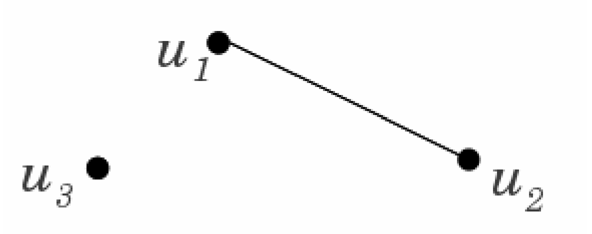
1. $m = 3$ . Каждая вершина соединена со всеми остальными; возможен только один вариант:



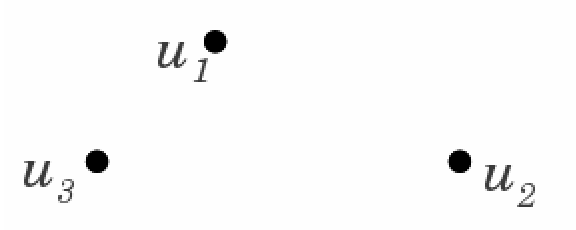

2. $m = 2$ . Одна из вершин соединена с двумя остальными, не соединёнными между собой. Имеется 3 изоморфных варианта.




3. $m = 1$ . 2 вершины соединены ребром, 3-я — изолирована. Имеется 3 изоморфных варианта.




4. $m = 0$ . Рёбер нет вообще, все 3 вершины изолированные (единственный вариант).

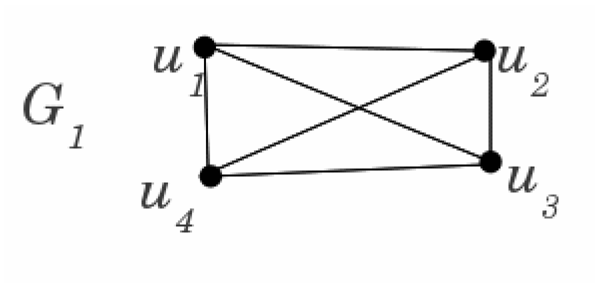



З а д а н и е 5.

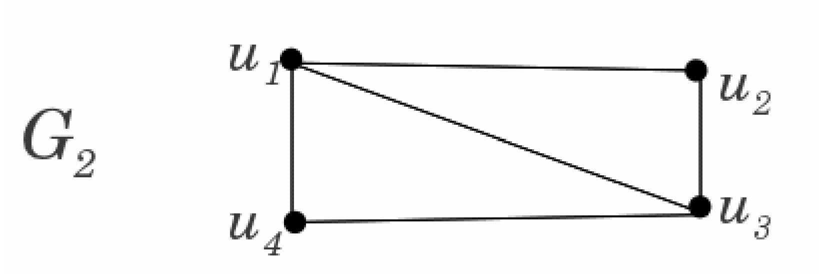
Изобразить все попарно неизоморфные 4-вершинные ( $n = 4$ ) графы без петель и кратных рёбер.

Р е ш е н и е.

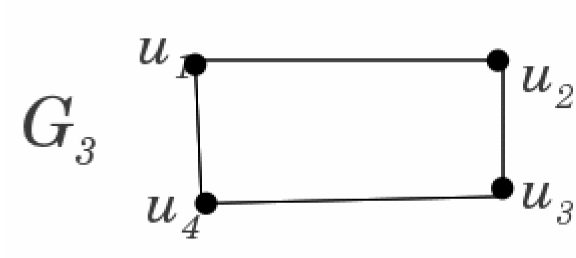
1. Полный граф, то есть $m = 6$ .

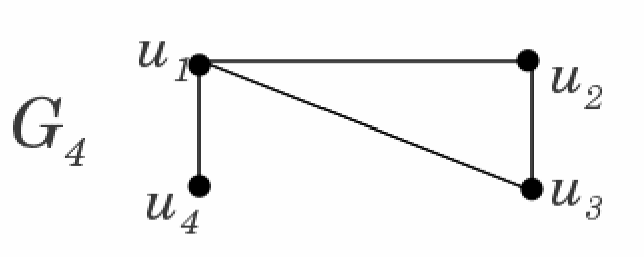



2. $m = 5$ . Графы, содержащие 5 рёбер , получаются из $G_1$ удалением одного ребра. Какое ребро мы ни удалим, получится граф, изоморфный $G_2$ .

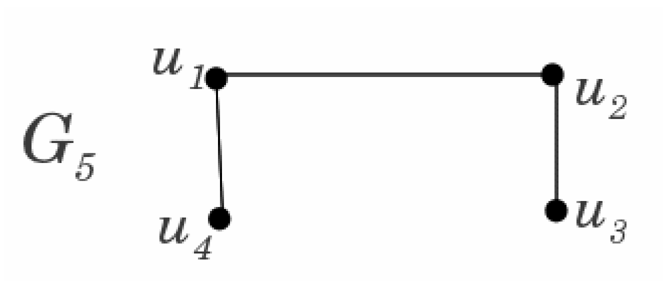



3. $m = 4$ . Удаление различных рёбер у графа $G_2$ приводит к двум неизоморфным графам:

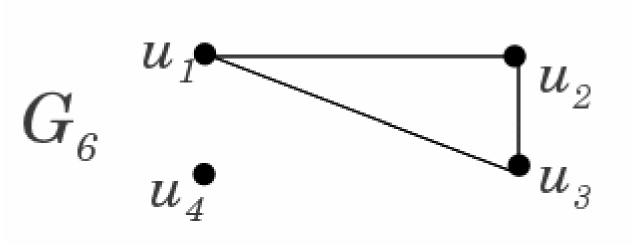


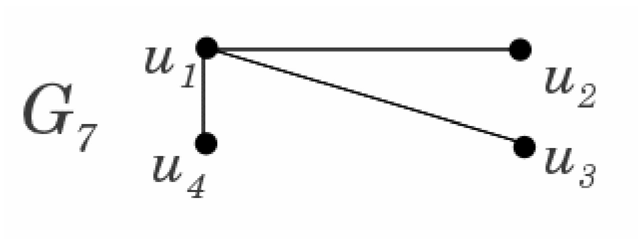



4. $m = 3$. Удаление любого ребра у графа $G_3$ даёт граф, изоморфный графу $G_5$:

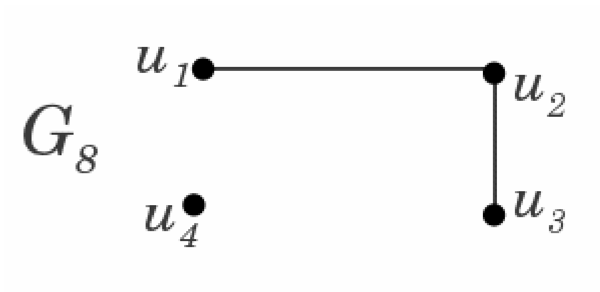


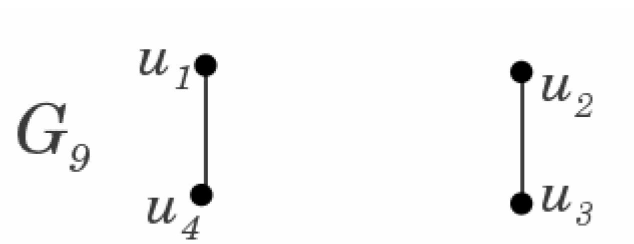

При удалении одного ребра у графа $G_4$ можно получить граф, изоморфный $G_5$ (если удалить ребро $\{u_1; u_3\}$ или $\{u_1; u_2\}$) или графам $G_6$ или $G_7$:



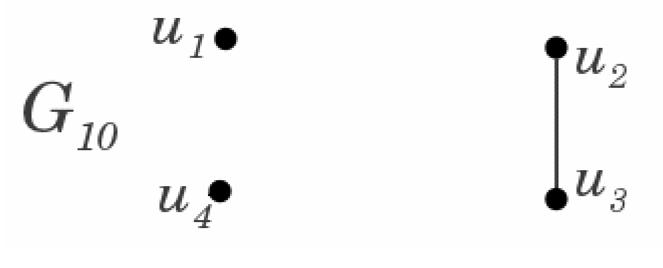

5. $m = 2$. Строим графы, содержащие 4 вершины и 2 ребра. Из графа $G_5$ можно получить 2 неизоморфных графа:



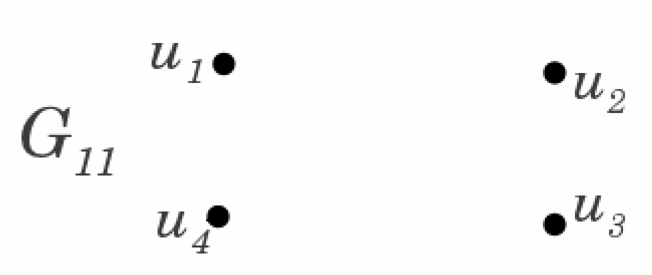




Удаление любого ребра у графов $G_6$ и $G_7$ приводит к графу, изоморфному $G_8$.

6. $m = 1$. Удаляя одно ребро из любого уже построенного графа с двумя рёбрами, получим граф, изоморфный $G_{10}$.



7. $m = 0$ .




О т в е т. Существует 11 попарно неизоморфных графов без петель и кратных рёбер, содержащих 4 вершины.

П р и м е р 7.

Существуют ли графы без петель и кратных рёбер с такими наборами степеней вершин:

1. {2,2,2,3,4,4};
2. {2,2,2,2,4,6};
3. {0,2,2,3,4,5};
4. {4,4,4,1,3}.

Р е ш е н и е.

1. Такого графа не существует, так как в условии указана только одна вершина нечётной степени, что противоречит следствию из Утверждения 1.
2. Такого графа не существует, так как в графе с 6 вершинами без петель и кратных рёбер из одной вершины может выходить не более 5 рёбер, в условии же имеется вершина степени 6.
3. Такого графа не существует. Если в графе с 6 вершинами имеется вершина степени 5, то она соединена рёбрами с каждой из оставшихся вершин. Следовательно, вершины степени 0 в этом случае быть не может.
4. Такого графа не существует. Если у графа с 5 вершинами (без петель и кратных рёбер) хотя бы две вершины имеют степень 4 (то есть соединены рёбрами со всеми остальными вершинами), то никакая вершина не может иметь степень меньше 2.

З а д а н и е 6.

Существуют ли графы без петель и кратных рёбер с такими наборами степеней вершин:

1) {0,1,2,3,4};

2) {1,2,3,3,4};

3) {1,2,2,4,5};

4) {2,2,2,4,5,5}.

Р е ш е н и е.

1. Не существует, см. п.3 Примера 7.
2. Не существует, см. п.1 Примера 7.
3. Не существует, см. п.2 Примера 7.
4. Не существует. Если в графе с 6 вершинами имеется 2 вершины степени 5 (например, $u_1$ и $u_2$), то каждая из оставшихся 4 вершин $\{u_3, u_4, u_5, u_6\}$ имеет степень не ниже 2. Если одна из них (например, $u_3$) имеет степень выше 2, то она должна соединяться хотя бы одним ребром с одной из оставшихся 3 вершин $\{u_4, u_5, u_6\}$ (например, $u_4$), следовательно, её степень выше 2, что противоречит условию.

П р и м е р 7.

7 команд принимают участие в турнире по футболу в один круг, то есть каждая должна сыграть с любой другой ровно 1 раз. Доказать, что в любой момент найдутся 2 команды, сыгравшие одинаковое число матчей.

Р е ш е н и е.

Построим граф, вершины которого соответствуют командам, а рёбра — сыгранным матчам. Степень вершины равна количеству матчей, сыгранных командой, которая соответствует этой вершине. Из условия следует, что степень вершины может принимать значения 0,1,...,6. Предположим, что степени всех вершин различны. Поскольку имеется 7 вершин и 7 возможных значений степени вершины, то найдётся вершина степени 6 (иначе у каких-то двух вершин будут одинаковые степени). Но в этом случае ни одна вершина не может иметь степень 0, следовательно, число возможных значений степени равно 6, а потому найдутся хотя бы две вершины с одинаковыми степенями, то есть две команды, сыгравшие одинаковое число матчей.

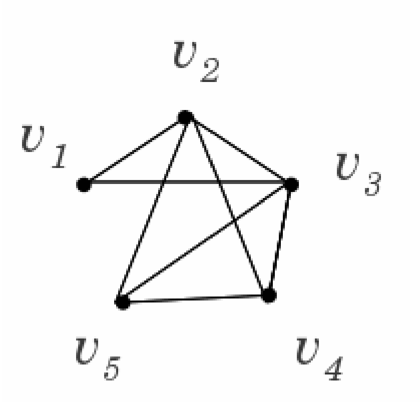
З а д а ч и д л я с а м о с т о я т е л ь н о г о р е ш е н и я.

*Замечание*. Ниже рассматриваются только графы без петель и кратных рёбер; такой граф обозначается символом $G$.

1. Обозначим через $n_k(G)$ количество вершин степени $k$ в графе $G$. Требуется построить все попарно неизоморфные графы, у которых

   $$n_2(G) = 1,\ n_3(G) = n_4(G) = 2,\ n_i(G) = 0\ \forall i \notin \{2,3,4\}$$.

   О т в е т. Такой граф один, у него 5 вершин и 8 рёбер:



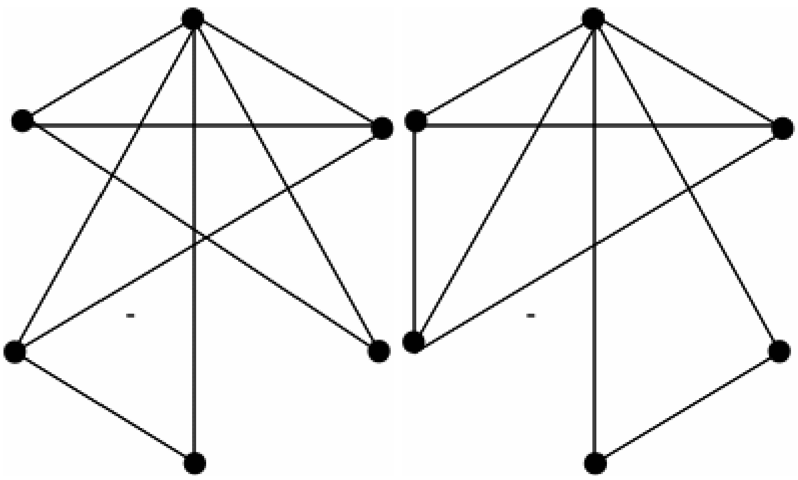

2. Выяснить, какие наборы степеней вершин могут быть у 6-вершинных графов, имеющих 7 рёбер, содержащих вершину степени 2, вершину степени 3 и не содержащих изолированных вершин.

   О т в е т. Имеется 5 возможных наборов:

   {1,2,2,2,3,4};
   {1,1,2,3,4,4};
   {1,2,2,3,3,3};
   {1,1,2,2,3,5};
   {2,2,2,2,3,3}.

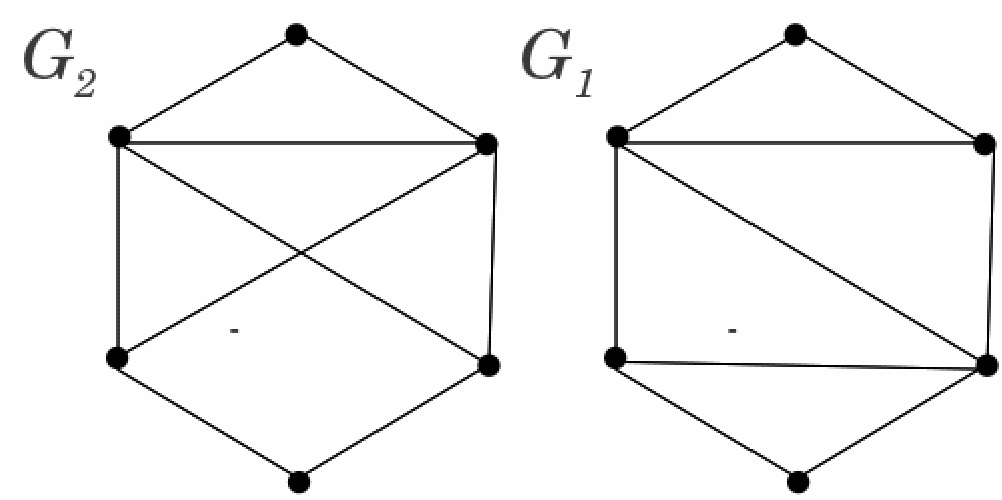
3. Сколько существует попарно неизоморфных 6-вершинных графов с набором степеней вершин {2,2,3,3,3,5}?

   О т в е т. Имеется 2 графа:



4. 7 команд проводят футбольный турнир в один круг (каждая должна сыграть с любой другой ровно 1 раз). В некоторый момент оказалось, что ровно две команды сыграли одинаковое число матчей. Доказать, что в этом случае либо одна команда ещё не сыграла ни одного матча, либо есть команда, уже встретившаяся со всеми остальными.

5. Выяснить, изоморфны ли графы




О т в е т. Нет, так как у $G_2$ есть вершина степени 2, смежная с каждой из двух вершин степени 4, а в графе $G_1$ такой вершины нет.

## §2. *Ориентированные графы*

О п р е д е л е н и е 1. *Ориентированным графом* или *орграфом* называется пара множеств $\{V, X\}$, где $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ - непустое конечное множество, а $X$ - множество, элементами которого являются упорядоченные пары $(v_i; v_j)$.

О п р е д е л е н и е 2. Элементы множества $V$ называются *вершинами* орграфа.

О п р е д е л е н и е 3. Элементы множества $X$ называются *дугами* орграфа.

О п р е д е л е н и е 4. Дуга вида $(v; v)$ называются *петлёй*.

О п р е д е л е н и е 5. Если множество $X$ содержит хотя бы две одинаковые пары $(u; v)$, то дуга $(u; v)$ называется *кратной*.

П р и м е р 1. $D_1$ - орграф.

$V_1 = \{a, b, c\},\ X_1 = \{(a; b), (b; a). (c; c), (b; c)\}$.

Геометрической реализацией орграфа может служить следующая фигура:

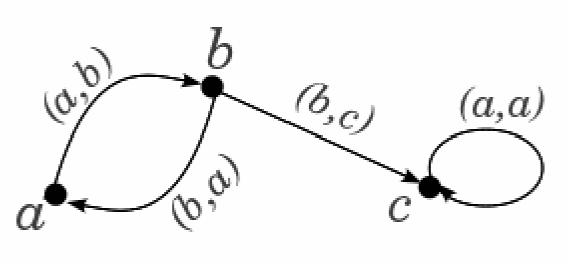



Рис.2-1.

Отметим, что орграф $D_1$ содержит петлю $(c; c)$, но не содержит кратных рёбер.

П р и м е р 2. $D_2 = \{V_2, X_2\}$ - орграф,
$V_2 = \{a, b, c, d\},\ X_2 = \{(a; b), (a; b). (b; c). (c; d), (d; c)\}$.

Геометрическая реализация орграфа:

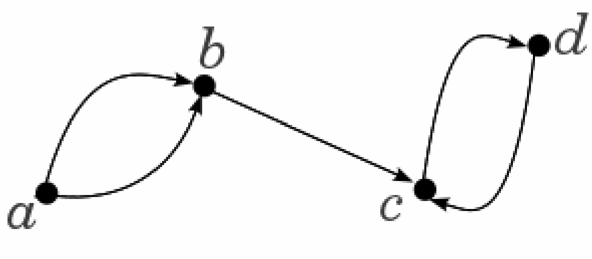



Рис.2-2.

Дуга $(a; b)$ - кратная, дуги $(c; d)$ и $(d; c)$ - различны.

З а д а н и е 1. Изобразить орграф $D = \{V, X\}$, если

$V = \{a, b, c, d\},\ X = \{(a; b), (a; b). (a; c). (c; a), (c; c)\}$.

Р е ш е н и е.

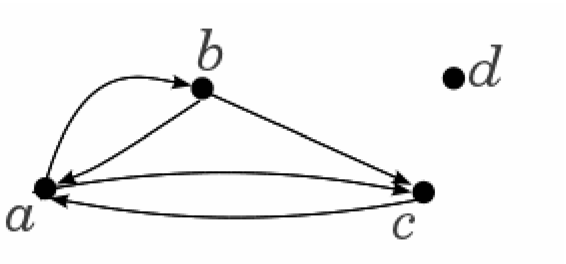



Рис.2-3.

З а д а н и е 2. Описать множества $V$ и $X$ орграфа $D=\{V, X\}$, заданного геометрически:

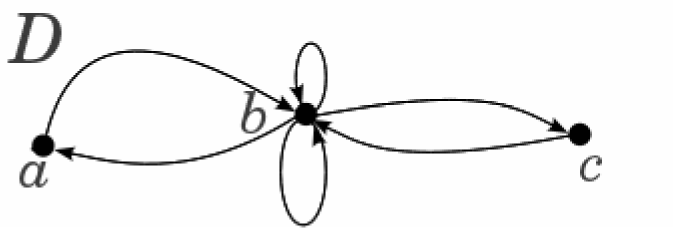



Рис.2-4.

Р е ш е н и е.

$V=\{a, b, c\}, \ X=\{(a;b), (b;a). (b;c). (b;c), (b;b), (b;b)\}$.

О п р е д е л е н и е 6. Пусть $(u;v)$ - дуга орграфа. Вершина $u$ называется *началом* дуги ; $(u;v)$ при этом говорят, что дуга $(u;v)$ *исходит* из вершины $u$. Вершина $v$ называется *концом* дуги ; $(u;v)$ говорят, что дуга $(u;v)$ *заходит* в вершину $v$.

О п р е д е л е н и е 7. Вершины $a$ и $b$ орграфа $D=\{V, X\}$ называются смежными, если множество $X$ содержит хотя бы одну из пар $(a;b), (b;a)$.

О п р е д е л е н и е 8. Вершина и дуга орграфа называются *инцидентными*, если вершина является концом или началом дуги.

О п р е д е л е н и е 9. *Полустепенью исхода* вершины $a$ называется число дуг орграфа, исходящих из вершины $a$. Обозначение: $d^{+}(a)$.

О п р е д е л е н и е 10. *Полустепенью захода* вершины $a$ называется число дуг орграфа, заходящих в вершину $a$. Обозначение: $d^{-}(a)$.

П р и м е р 3. $D=\{V, X\}$ - орграф, изображённый на рис.5:

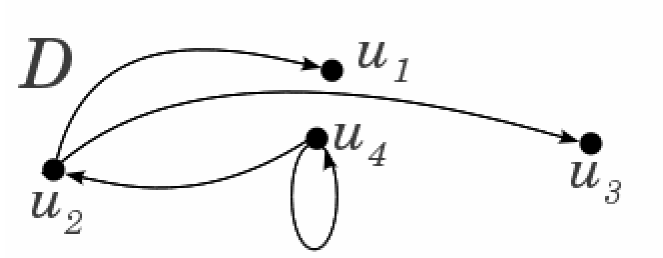



Рис.2-5.

$d^-(u_1) = 1,\ d^+(u_1) = 0;$
$d^-(u_2) = 1,\ d^+(u_2) = 2;$
$d^-(u_3) = 1,\ d^+(u_3) = 0;$
$d^-(u_4) = 1,\ d^+(u_4) = 2.$

З а д а н и е 3. $D = \{V, X\}$ - орграф, $V = \{a, b, c, p\},\ X = \{(a;a), (a;b), (b;b), (c;c), (c;b)\}$ . Найти полустепени исхода и захода каждой из вершин.

Р е ш е н и е.

Вершина $a$ является концом одной дуги - $(a;a)$ , следовательно, $d^-(a) = 1$ ; она же является началом двух дуг - $(a;a), (a;b)$ , следовательно, $d^+(a) = 2$ .

Вершина $b$ является концом трёх дуг - $(a;b), (b;b), (c;b)$ , следовательно, $d^-(b) = 3$ ; она же является началом одной дуги - $(b;b)$ , следовательно, $d^+(a) = 1$ .

Вершина $c$ является концом одной дуги - $(c;c)$ , следовательно, $d^-(c) = 1$ ; она же является началом двух дуг - $(c;c), (c;b)$ , следовательно, $d^+(c) = 2$ .

У вершины $p$ нет инцидентных ей дуг, следовательно, $d^-(p) = d^+(p) = 0$ .

О т в е т.

$d^-(a) = 1,\ d^+(a) = 2;$
$d^-(b) = 3,\ d^+(b) = 1;$
$d^-(c) = 1,\ d^+(c) = 2;$
$d^-(p) = 0,\ d^+(p) = 0.$

Имеет место очевидное

У т в е р ж д е н и е 1. $D = \{V, X\}$ - орграф, $V = \{v_1, \ldots, v_n\},\ X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ .

Тогда $d^+(v_1) + d^+(v_2) + \ldots + d^+(v_n) = d^-(v_1) + d^-(v_2) + \ldots + d^-(v_n) = m$ .

П р и м е р 4. Орграф содержит три вершины, полустепени исхода которых - $d^+(v_1) = 4,\ d^+(v_2) = 0,\ d^+(v_3) = 0$ . Известны также полустепени захода двух вершин: $d^-(v_2) = 1,\ d^-(v_3) = 2$ .

1. Сколько дуг содержит такой орграф?
2. Сколько дуг заходит в вершину $v_1$ ?
3. Сколько петель содержит орграф?

Р е ш е н и е.

(1) Так как сумма полустепеней исхода равна числу дуг орграфа, см. Утверждение 1, то

$$m = d^+(v_1)+d^+(v_2)+d^+(v_3) = 4+0+0 = 4 \quad .$$

(2) Так как ( см. Утверждение 1) $m = d^-(v_1)+d^-(v_2)+d^-(v_3)$ , то из (1) находим:

$4 = d^-(v_1)+1+2$ , то есть $d^-(v_1) = 1$ .

(3) Из вершин $v_2$ и $v_3$ не исходит ни одной дуги, значит, нет петель, инцидентных этим вершинам. В вершину $v_3$ при этом входит одна дуга, следовательно, эта дуга является единственной петлёй данного орграфа.

З а д а н и е 4. Известно, что орграф $D$ содержит 4 вершины и 5 дуг. При этом

$$d^+(u_1) = 2,\ d^+(u_2) = 1,\ d^+(u_3) = 0,\ d^-(u_2) = 3,\ d^-(u_3) = 1,\ d^-(u_4) = 1 \quad .$$

1. Найти $d^+(u_4),\ d^-(u_1)$ .
2. Построить такой орграф, если известно, что имеются кратные дуги, инцидентные вершине $u_1$ и имеется ровно одна петля.

Р е ш е н и е.

(1) Так как

$$d^-(u_1)+d^-(u_2)+d^-(u_3)+d^-(u_4) = d^+(u_1)+d^+(u_2)+d^+(u_3)+d^+(u_4) = m \quad ,$$

то имеем

$$\begin{cases} 2+1+0+d^+(u_4) = 5 \\ d^-(u_1)+3+1+1 = 5 \end{cases} \quad .$$

Отсюда получаем: $d^+(u_4) = 2,\ d^-(u_1) = 0$

(2) Кратные дуги, инцидентные $u_1$ , могут только исходить из $u_1$ (так как $d^-(u_1) = 0$ ), а заходить могут только в $u_2$ , так как только для $u_2$ полустепень захода больше 1. Петля может быть инцидентна лишь $u_2$ или $u_4$ (так как из $u_3$ не исходит ни одной дуги, а исходящие из $u_1$ дуги являются кратными не-петлями).

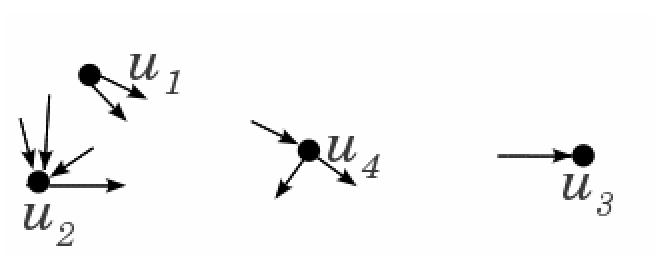



Рис.2-6.

Если вершине $u_2$ инцидентна петля, то должна быть ещё петля, инцидентная вершине $u_4$ (так как в этом случае только одна из двух исходящих из $u_4$ дуг может зайти в другую вершину - $u_3$ ), что противоречит условию. Следовательно, петля может быть инцидентна только $u_4$ , а дуга, выходящая из $u_2$ должна заходить в $u_3$ . Последняя дуга выходит из $u_4$ и заходит в $u_2$ .

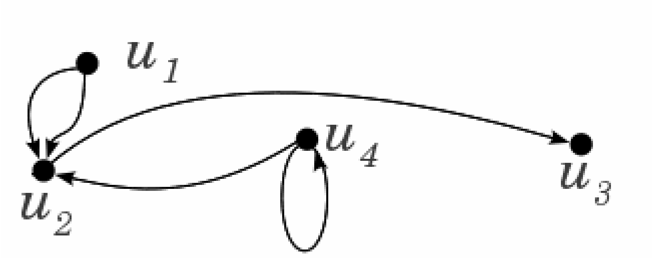



Рис.2-7.

О п р е д е л е н и е 11. Орграфы $D_1 = \{V_1, X_1\}$ и $D_2 = \{V_2, X_2\}$ называются изоморфными, если существует такое взаимно-однозначное отображение $\varphi : V_1 \to V_2$ , что если $(u;v) \in X_1$ , то $(\varphi(u);\varphi(v)) \in X_2$ .

П р и м е р 5. На рис.8 орграфы $D_1$ и $D_2$ изоморфны, орграфы $D_1$ и $D_3$ не изоморфны.

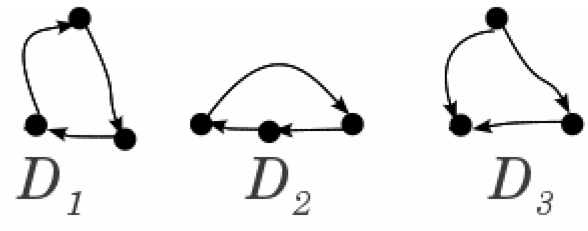



Рис.2-8.

З а д а н и е 5.

1. Изоморфны ли орграфы $D_1$ и $D_2$ , изображённые на рис.2-9?

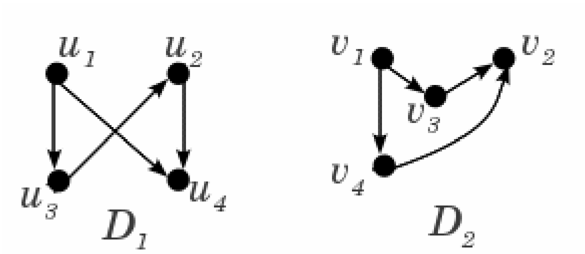



Рис.2-9.

2. Изоморфны ли орграфы $D_3$ и $D_4$ , изображённые на рис.2-10?

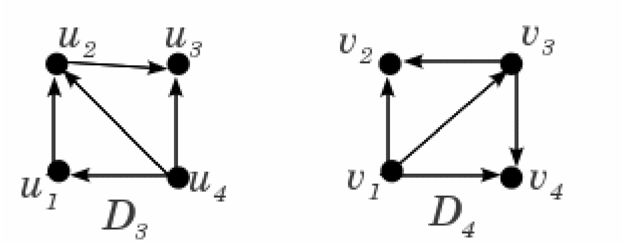



Рис.2-10.

Р е ш е н и е.

1. Орграфы $D_1$ и $D_2$ изоморфны:

   $u_1 \leftrightarrow v_3$;
   $u_4 \leftrightarrow v_2$;
   $u_3 \leftrightarrow v_1$;
   $u_2 \leftrightarrow v_4$.

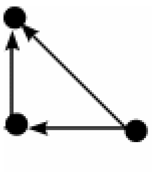
2. Оргафы $D_3$ и $D_4$ не являются изоморфными, так как $D_4$ содержит вершину $v_3$, из которой исходят 2 дуги, а в орграфе $D_3$ такой вершины нет.

П р и м е р 5. Построить все попарно неизоморфные орграфы без петель и кратных дуг, содержащие 3 вершины и 3 дуги.

Р е ш е н и е.

1. Все дуги не могут исходить из одной вершины (иначе были бы кратные дуги). Следовательно, полустепень исхода вершины может быть 2, 1 или 0. При этом вершин с полустепенью исхода 2 не может быть больше одной (так как дуг всего три),

2. Построим орграфы, содержащие вершину, из которой исходит 2 дуги. Таких неизоморфных орграфов существует только два:



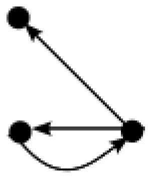
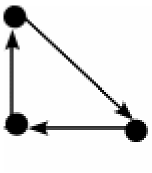


Рис.2-11.

3. Построим неизоморфные орграфы, не содержащие вершину, полустепень исхода которой равна 2:



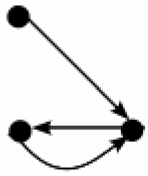


Рис.2-12.

О т в е т. Попарно неизоморфные графы изображены на рис.2-11 и 2-12.

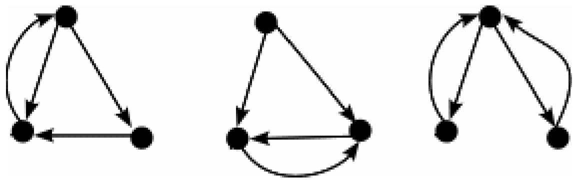
З а д а н и е 6. Построить все попарно неизоморфные орграфы без петель и кратных дуг, содержащие 3 вершины и 4 дуги.

Р е ш е н и е.

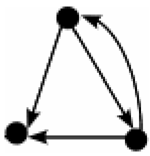
1. В таком орграфе нет вершин, из которых исходит 3 дуги (иначе были бы кратные дуги), но обязательно есть вершина с полустепенью исхода 2 (иначе число дуг будет меньше 4), и таких вершин не может быть более двух (иначе число дуг будет больше 4).

2. Если имеется ровно 1 вершина с полустепенью исхода 2, то число неизоморфных

орграфов равно 3:



3. В случае двух вершин с полустепенью исхода 2 лишь существует один орграф:



З а д а н и е 7. Перечислить все элементы множеств $V$ и $X$, определяющих орграф $D$, см. рис.2-13.

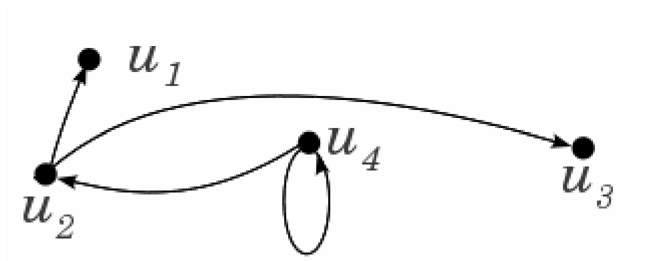



Рис.2-13.

О т в е т. $V = \{u_1, u_2, u_3, u_4\},\ X = \{(u_2;u_1),\ (u_2;u_3),\ (u_4;u_2),\ (u_4;u_4)\}$ .

З а д а н и е 8. Найти полустепени исхода и захода для орграфа $D = (V, X)$, где

$V = \{v_1, v_2, v_3\},\ X = \{(v_1;v_1),\ (v_1;v_2),\ (v_1;v_2),\ (v_1;v_3),\ (v_2;v_2),\ (v_3;v_1)\}$ .

О т в е т. $d^+(v_1) = 4,\ d^+(v_2) = 1,\ d^+(v_3) = 1,\ d^-(v_1) = 2,\ d^-(v_2) = 3,\ d^-(v_3) = 1$ .

З а д а н и е 9. Сколько существует попарно неизоморфных орграфов, содержащих 2 вершины и 2 дуги?

О т в е т. 6.

З а д а н и е 10. Сколько существует попарно неизоморфных орграфов без кратных дуг, содержащих 3 вершины и хотя бы одну дугу и удовлетворяющих условию: если орграф содержит дугу $(u;v)$, то он не содержит дугу $(v;u)$ .

О т в е т. 6.

З а д а н и е 11. Орграф $D$ имеет 3 вершины и 4 дуги. Известно, что

$d^+(u_1) = 1,\ d^+(u_2) = 2,\ d^-(u_2) = 0,\ d^-(u_3) = 2$ .

1. Найти $d^+(u_3),\ d^-(u_1)$ .
2. Выяснить, имеет ли орграф петли, если известно, что вершины $u_1$ и $u_3$ не являются смежными.

О т в е т. 1. $d^+(u_3) = 1,\ d^-(u_1) = 2$ . 2. Орграф $D$ содержит две петли: одна инцидентна вершине $u_1$ , другая - $u_3$ .

## *§3. Матричное задание графов*

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $G = \{V, X\},\ V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ - граф. *Матрицей смежности вершин графа* $G$ называется матрица $A(G)$ размера $n \times n$, элемент $a_{ij}$ которой равен количеству рёбер, соединяющих вершины $v_i$ и $v_j$.

П р и м е р 1. Граф $G$ изображён на рис.3-1. Построить матрицу смежности его вершин.

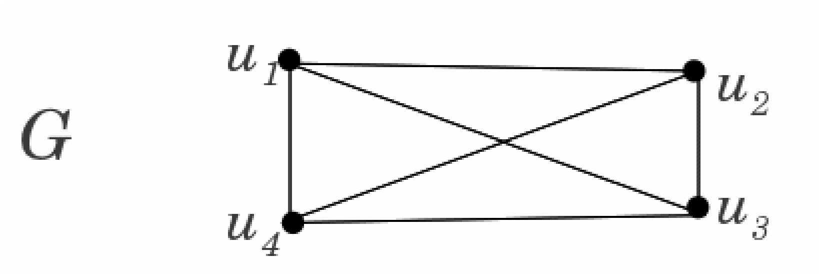



Рис.3-1.

Р е ш е н и е. Вершина $u_1$ графа не имеет петель, следовательно, $a_{11} = 0$. С вершиной $u_2$ вершина $u_1$ соединяется одним ребром, значит, $a_{12} = 1$. Те же рассуждения для других вершин приводят к следующему результату:

$$a_{13} = a_{14} = a_{21} = a_{23} = a_{24} = a_{31} = a_{32} = a_{34} = a_{41} = a_{42} = a_{43} = 1;\ a_{22} = a_{33} = a_{44} = 0.$$

О т в е т. Искомая матрица:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

П р и м е р 2. Построить матрицу смежности вершин графа, изображённого на рис.3-2.

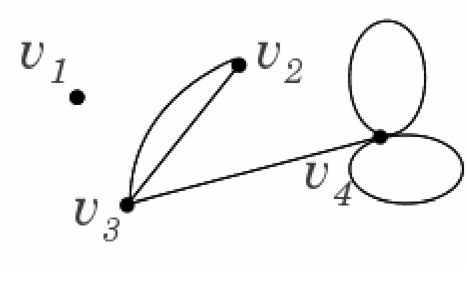



Рис.3-2.

Р е ш е н и е. Граф содержит 4 вершины, значит, размер искомой матрицы - $4 \times 4$.
Вершина $v_1$ не имеет инцидентных ей рёбер, поэтому $a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0$.
Вершина $v_2$ соединена с $v_3$ двумя рёбрами, а с остальными вершинами не смежна.
Следовательно, $a_{21} = a_{22} = a_{24} = 0,\ a_{23} = 2$. Для $v_3$ и $v_4$ имеем:
$a_{31} = a_{33} = 0,\ a_{32} = 2,\ a_{34} = 1;\ a_{41} = a_{42} = 0,\ a_{43} = 1,\ a_{44} = 2$.

О т в е т. Искомая матрица:

$$A(G)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&2&0\\0&2&0&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}.$$

З а д а н и е 1. Составить матрицы смежности вершин графов $G_1$ и $G_2$, см. рис.3-3.

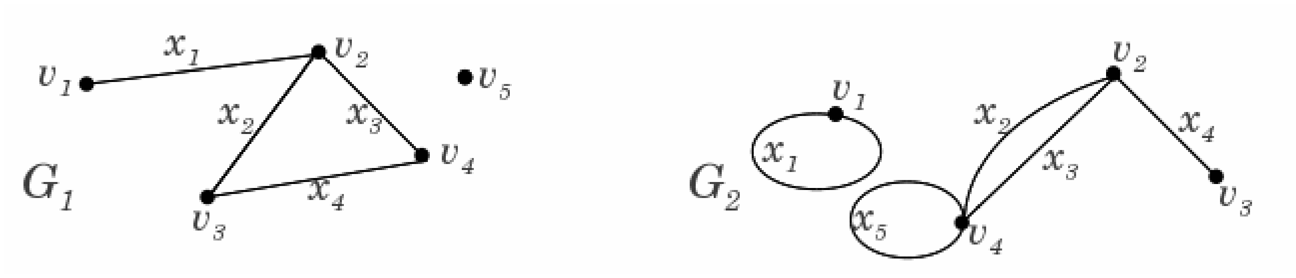



Рис.3-3.

О т в е т.

$$A(G_1)=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&1&1&0\\0&1&0&1&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad A(G_2)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&2\\0&1&0&0\\0&2&0&1\end{pmatrix}.$$

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $G=\{V,X\},\ V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\},\ X=\{x_1,x_2,\dots,x_m\}$ - граф. *Матрицей инцидентности графа* $G$ называется матрица $B(G)$ размера $n\times m$, у которой

$$b_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если вершина } v_i \text{ инцидентна ребру } x_j\\ 0, & \text{если вершина } v_i \text{ не инцидентна ребру } x_j\end{cases}.$$

П р и м е р 3. Составить матрицы инцидентности графов $G_1$ и $G_2$, см. рис.3-4.

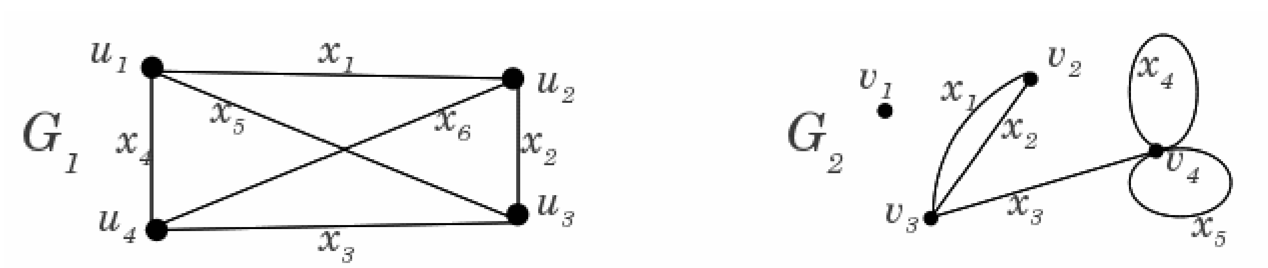



Рис.3-4.

О т в е т.

$$B(G_1)=\begin{pmatrix}1&0&0&1&1&0\\1&1&0&0&0&1\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&1&0&1\end{pmatrix},\quad B(G_2)=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0\\0&0&1&1&1\end{pmatrix}.$$

З а д а н и е 2. Составить матрицы инцидентности графов $G_1$ и $G_2$, см. рис.3-5.

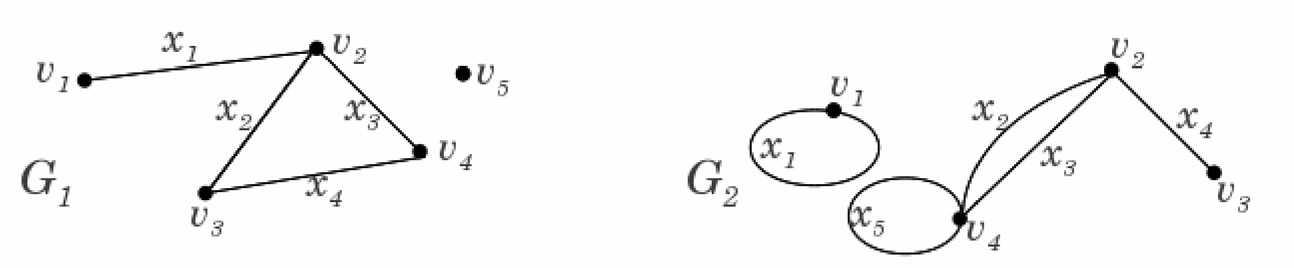



Рис.3-5.

О т в е т.

$$B(G_1)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad B(G_2)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&1&1&0\\0&0&0&1&0\\0&1&1&0&1\end{pmatrix}$$

С в о й с т в а м а т р и ц ы с м е ж н о с т и в е р ш и н г р а ф а.

1. Матрица $A(G)$ является симметричной относительно главной диагонали.
2. Если граф не содержит кратных рёбер, то элементы матрица $A(G)$ равны 0 или 1.
3. Если граф не содержит петель, то все элементы, расположенные на главной диагонали, равны 0.
4. Если граф не содержит петель, то сумма всех элементов матрицы $A(G)$, расположенных в *i*-й строке (и в *i*-м столбце) равна степени вершины $v_i$.

С в ой с т в а м а т р и ц ы и н ц и д е н т н о с т и в е р ш и н г р а ф а.

1. Столбец матрицы $B(G)$ может содержать либо 2 единицы, либо одну — в том случае, когда ребро является петлёй.
2. Если граф не содержит петель, то сумма всех элементов *i*-й строки равна степени вершины $v_i$.

П р и м е р 4. Графы $G_1$ и $G_2$ заданы своими матрицами $A(G_1)$ и $B(G_2)$:

$$A(G_1)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix},\quad B(G_2)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Построить геометрические реализации этих графов.

Р е ш е н и е.

1. $A(G_1)$ - матрица смежности графа $G_1$ размером $4 \times 4$. Следовательно, $G_1$ содержит 4 вершины. Отметим на плоскости 4 точки, соответствующие вершинам графа $G_1$ : $u_1, u_2, u_3, u_4$ .

   Матрица содержит одну нулевую строку (и один нулевой столбец), значит, граф содержит ровно одну изолированную вершину - $u_1$ . Все элементы главной диагонали равны 0, следовательно, граф не содержит петель. Все элементы матрицы равны либо 0, либо 1, следовательно, граф не содержит кратных рёбер.

   Так как $a_{23} = a_{24} = 1$ , вершина $u_2$ соединена с $u_3$ одним ребром и с $u_4$ одним ребром. Анализируя 3-ю и 4-ю строки матрицы, приходим к заключению, что имеется ещё одно ребро, соединяющее $u_3$ с $u_4$ , см. рис.3-6.

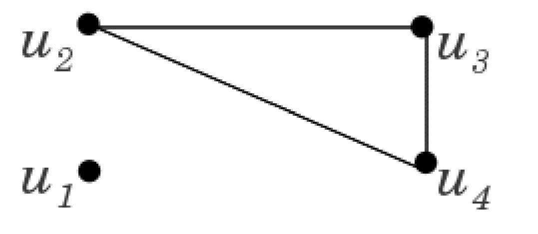



Рис.3-6.

2. Граф $G_2$ задан матрицей инцидентности $B(G_2)$ размером $4 \times 3$ . Следовательно, граф содержит 4 вершины и 3 ребра. Каждый столбец содержит по две единицы, то есть каждое ребро имеет два разных конца, значит, в графе нет петель. Первое ребро соединяет вершины $u_1$ и $u_2$ (так как $b_{11} = 1, b_{21} = 1$ ), второе - $u_2$ и $u_4$ (так как $b_{22} = 1, b_{42} = 1$ ), третье - $u_2$ и $u_4$ . Изобразить такой граф можно так:

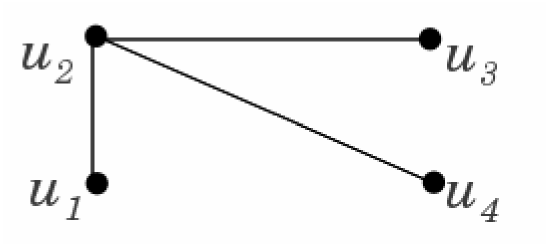



Рис.3-7.

З а д а н и е 3. Графы $G_1$ и $G_2$ заданы своими матрицами $A(G_1)$ и $B(G_2)$ :

$$A(G_1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(G_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Построить геометрические реализации этих графов.

Р е ш е н и е.

1. $A(G_1)$ - матрица смежности графа $G_1$ размером $4 \times 4$ . Следовательно, $G_1$ содержит 4 вершины.

Матрица содержит одну нулевую строку (и один нулевой столбец), значит, граф содержит ровно одну изолированную вершину - $u_4$ . Так как $a_{11} = 0,\ a_{22} = 0,\ a_{33} = 1,\ a_{44} = 0$ , граф содержит одну петлю, инцидентную вершине $u_3$ . Так как $a_{12} = a_{21} = 2$ , граф имеет двойное ребро, соединяющее вершины $u_1$ и $u_2$ . $a_{13} = a_{31} = 1$ , следовательно, вершины $u_1$ и $u_3$ соединяются одним ребром. Искомый граф изображён на рис.3-8.

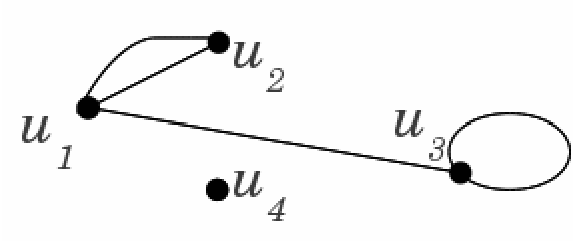



Рис.3-8.

2. Граф $G_2$ задан матрицей инцидентности $B(G_2)$ размером $4\times 5$ . Следовательно, граф содержит 4 вершины и 5 рёбер.

   Так как в первом и пятом столбцах содержится по одной единице - $b_{11} = 1,\ b_{45} = 1$ , граф $G_2$ имеет две петли, инцидентные вершинам $u_1$ и $u_4$ . Второй, третий и четвёртый столбцы содержат по две единицы, значит, каждое из соответствующих этим столбцам рёбер соединяет разные вершины: второе ребро - $u_2$ и $u_4$ , так как $b_{22} = b_{42} = 1$ , третье ребро - $u_2$ и $u_3$ , так как $b_{23} = b_{33} = 1$ , четвёртое - $u_2$ и $u_3$ , так как $b_{24} = b_{34} = 1$ . Отметим наличие кратного ребра (это видно уже из того, что третий и четвёртый столбцы одинаковы). Искомый граф изображён на рис.3-9.

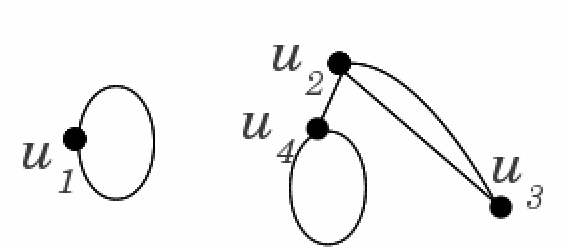



Рис.3-9.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть $D = \{V, X\},\ V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ - ориентированный граф. *Матрицей смежности вершин орграфа* $D$ называется матрица $A(D)$ размера $n\times n$ , элемент $a_{ij}$ которой равен количеству дуг с началом в вершине $v_i$ и концом в вершине $v_j$ .

П р и м е р 5. Орграф $D$ изображён на рис.3-10. Составить матрицу смежности его вершин.

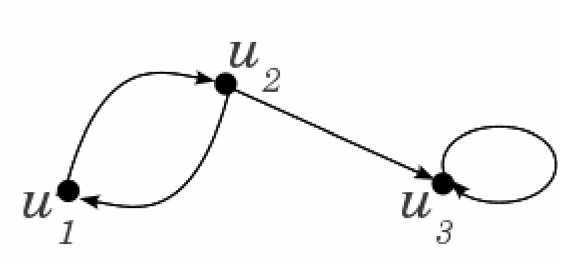



Рис.3-10.

Р е ш е н и е. Орграф $D$ содержит 3 вершины, значит, матрица $A(D)$ имеет размер $3\times 3$.

Найдём элементы первой строки. $a_{11}=0$, поскольку нет петель, инцидентных $u_1$. $a_{12}=1$, поскольку ровно одна дуга исходит из $u_1$ и заходит в $u_2$. $a_{13}=0$, поскольку нет дуги, исходящей из $u_1$ и входящей в $u_3$.

Элементы второй строки: $a_{21}=1$ (одна дуга из $u_2$ в $u_1$), $a_{22}=0$ (нет петель, инцидентных $u_2$), $a_{23}=1$ (одна дуга из $u_2$ в $u_3$).

Аналогично находятся элементы третьей строки: $a_{31}=0$ (нет дуг из $u_3$ в $u_1$), $a_{32}=0$ (нет дуг из $u_3$ в $u_2$), $a_{33}=1$ (имеется одна петля, инцидентная $u_3$).

О т в е т.

$$A(D)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

З а д а н и е 4. Построить матрицу смежности вершин $A(D)$ для орграфа $D$, изображённого на рис.3-11.

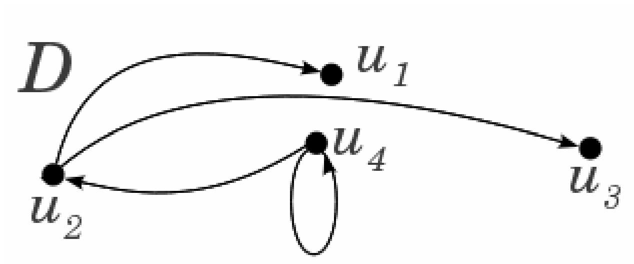



Рис.3-11.

Р е ш е н и е. Орграф $D$ содержит 4 вершины, значит, матрица $A(D)$ имеет размер $4\times 4$.

Элементы первой строки: $a_{11}=a_{12}=a_{13}=a_{14}=0$, так как из $u_1$ не исходит ни одной дуги.

Элементы второй строки: $a_{21}=1,\ a_{22}=0,\ a_{23}=1,\ a_{24}=0$, так как есть две исходящие в $u_1$ и $u_3$ дуги и нет петель.

Элементы третьей строки: $a_{31}=a_{32}=a_{33}=a_{34}=0$, так как из $u_3$ не исходит ни одной дуги.

Элементы четвёртой строки: $a_{41}=0,\ a_{42}=1,\ a_{43}=0,\ a_{44}=1$ , так как есть только исходящая в $u_2$ дуга и одна петля.

О т в е т.

$$A(D)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

О п р е д е л е н и е 4. Пусть $D=\{V,X\},\ V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\},\ X=\{x_1,x_2,\dots,x_m\}$ - ориентированный граф, не содержащий петель. *Матрицей инцидентности орграфа* $D$ называется матрица $B(D)$ размера $n\times m$ , у которой

$$b_{ij}=\begin{cases} 1, & \text{если дуга } x_j \text{ исходит из вершины } v_i \\ -1, & \text{если дуга } x_j \text{ заходит в вершину } v_i \\ 0, & \text{если вершина } v_i \text{ не инцидентна дуге } x_j \end{cases}.$$

П р и м е р 6. Для орграфа $D$ , изображённого на рис.3-12, составить матрицу инцидентности $B(D)$ .

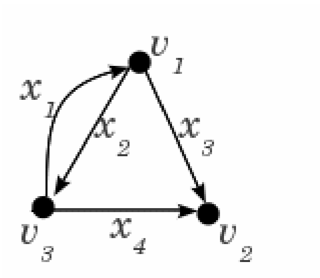



Рис.3-12.

Р е ш е н и е. Орграф $D$ содержит 3 вершины и 4 дуги, что определяет размер матрицы $B(D)$ : $3\times4$ .

Найдём первую строку матрицы. Дуга $x_1$ заходит в вершину $v_1$ , поэтому $b_{11}=-1$ ; дуга $x_2$ исходит из $v_1$ , поэтому $b_{12}=1$ ; дуга $x_3$ исходит из $v_1$ , поэтому $b_{13}=1$ ; дуга $x_4$ не инцидентна $v_1$ , поэтому $b_{14}=0$ .

Для нахождения второй строки матрицы рассмотрим, как сопоставляется вершина $v_2$ с каждой из дуг. Получаем: $b_{21}=0,\ b_{22}=0,\ b_{23}=-1,\ b_{24}=-1$ .

Аналогичными рассуждениями для $v_3$ находим третью строку: $b_{31}=1,\ b_{32}=-1,\ b_{33}=0,\ b_{34}=1$ .

О т в е т.

$$B(G)=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

З а д а н и е 5. Построить матрицу инцидентности $B(D)$ для орграфа $D$ , изображённого на рис.3-13.

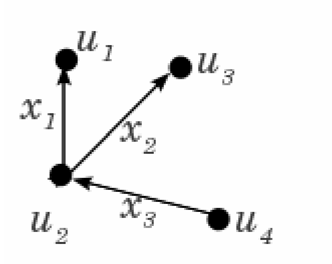



Рис.3-13.

Р е ш е н и е. Орграф $D$ содержит 4 вершины и 3 дуги, что определяет размер матрицы $B(D)$ : $4\times 3$ .

Вершине $u_1$ инцидентна только заходящая дуга $x_1$ . Поэтому $b_{11}=-1, b_{12}=b_{13}=0$ . Из вершины $u_2$ выходят дуги $x_1$ и $x_2$ , а дуга $x_3$ заходит в неё. Поэтому $b_{21}=b_{22}=1, b_{23}=-1$ . Аналогично, для вершин $u_3$ и $u_4$ получаем:

$$b_{31}=0, b_{32}=-1, b_{33}=0;\ b_{41}=0, b_{42}=0, b_{43}=1$$ .

О т в е т.

$$B(G)=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ .

С в ой с т в а м а т р и ц ы с м е ж н о с т и в е р ш и н о р г р а ф а.

1. Если орграф не содержит кратных дуг, то элементы матрицы равны 0 или 1.

2. Если орграф не содержит петель, то все элементы матрицы, стоящие на главной диагонали, равны 0.

3. Сумма всех элементов *i*-й строки матрицы $A(D)$ равна полустепени исхода *i*-й вершины орграфа.

4. Сумма всех элементов *j*-го столбца матрицы $A(D)$ равна полустепени захода *j*-й вершины орграфа.

С в ой с т в а м а т р и ц ы и н ц и д е н т н о с т и о р г р а ф а.

1. Каждый столбец содержит ровно 2 ненулевых элемента, один из которых равен 1, а другой -1.

2. Полустепень исхода вершины $v_i$ равна сумме элементов *i*-й строки, равных 1.

3. Полустепень захода вершины $v_i$ равна сумме элементов *i*-й строки, равных -1.

П р и м е р 7. Построить орграф $D$ , заданный матрицей смежности

$$A(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Р е ш е н и е. Матрица имеет размер $3\times 3$, значит, орграф содержит 3 вершины. Он не имеет петель, так как $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$, и кратных дуг, поскольку все элементы равны 0 либо 1.

Поскольку $a_{12} = a_{13} = 1$, из вершины $u_1$ исходит дуга, заходящая в вершину $u_2$, и дуга, заходящая в вершину $u_3$.

Поскольку $a_{21} = a_{22} = 0,\ a_{23} = 1$, из вершины $u_2$ исходит единственная дуга, заходящая в вершину $u_3$.

Поскольку $a_{31} = 1,\ a_{32} = a_{33} = 0$, из вершины $u_3$ исходит единственная дуга, заходящая в вершину $u_1$.

О т в е т. Искомый орграф представлен на рис.3-14.

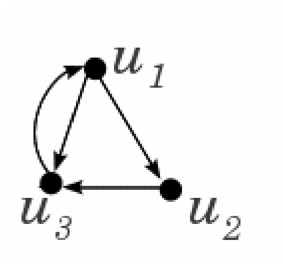



Рис.3-14.

З а д а н и е 6. Построить орграф $D$, заданный матрицей смежности вершин

$$A(D) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Р е ш е н и е. Орграф содержит 4 вершины $u_1, u_2, u_3, u_4$, имеет одну петлю, инцидентную вершине $u_3$ (так как $a_{33} = 1$), имеет кратные дуги: из $u_1$ исходят 2 дуги, заходящие в $u_2$ (так как $a_{12} = 2$). Вершина $u_4$ - изолированная (так как $a_{41} = a_{42} = a_{43} = a_{44} = 0;\ a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$) Рассматривая по очереди строки матрицы, получаем такой орграф:

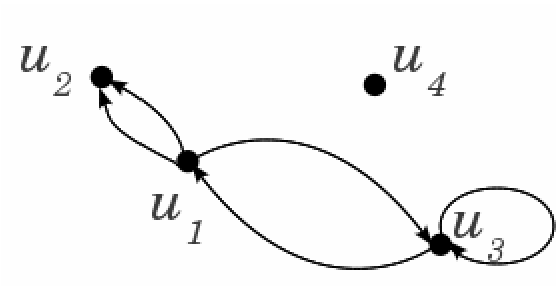



Рис.3-15.

П р и м е р 8. Построить орграф $D$, заданный матрицей инцидентности

. $B(D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

Р е ш е н и е. Матрица имеет размер $4 \times 4$, значит, орграф содержит 4 вершины и 4 дуги. Будем последовательно рассматривать столбцы, каждый из которых соответствует некоторой дуге.

Первая дуга исходит из вершины $u_1$ и заходит в вершину $u_3$, так как $b_{11} = 1$ , $b_{31} = -1$ . Вторая дуга исходит из $u_1$ и заходит в $u_4$, поскольку $b_{12} = 1$ , $b_{42} = -1$ . Третья дуга идёт из $u_3$ в $u_2$, так как $b_{33} = 1$ , $b_{32} = -1$ . Четвёртая дуга идёт из $u_2$ в $u_4$ . Искомый граф изображён на рис.3-16.

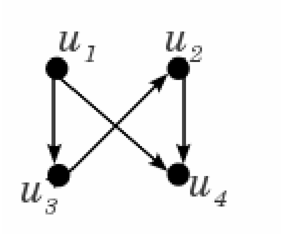



Рис.3-16.

З а д а н и е 7. Построить орграф $D$, заданный матрицей инцидентности

$$B(D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Р е ш е н и е. Орграф содержит 4 вершины и 5 дуг. Первая дуга исходит из вершины $u_1$ и заходит в вершину $u_2$, равно как и вторая дуга, поскольку первый и второй столбцы одинаковы (это значит, что орграф содержит, по крайней мере, одну кратную дугу.). Третья дуга исходит из $u_4$ и заходит в $u_2$ ; четвёртая идёт из $u_2$ в $u_4$ ; пятая — из $u_2$ в $u_3$ .

О т в е т. Искомый граф изображён на рис.3-17.

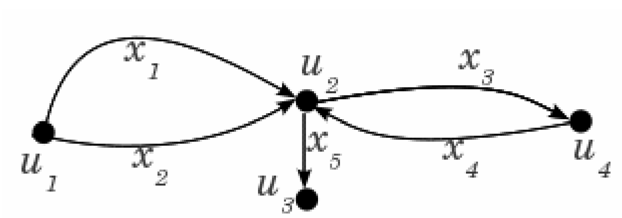



Рис.3-17.

З а д а ч и д л я с а м о с т о я т е л ь н о г о р е ш е н и я.

1. $A(G)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$ - матрица смежности вершин графа $G$. Не выполняя построения, определить:

(а) сколько вершин содержит граф;

(б) являются ли вершины $u_1$ и $u_2$ смежными;

(в) сколько петель содержит граф;

(г) с какими вершинами смежна вершина $u_2$;

(д) с какими вершинами смежна вершина $u_3$;

(е) какую степень имеет вершина $u_1$;

(ё) какую степень имеет вершина $u_2$;

(ж) сколько рёбер содержит граф.

О т в е т.

(а) 4; (б) нет; (в) 2; (г) с $u_1$ и $u_4$; (д) ни с какой; (е) 4; (ё) 3; (ж) 6.

2. Матрица смежности вершин $A(D)$ орграфа $D$ имеет вид

$A(D)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Не выполняя построения, определить:

(а) сколько вершин содержит орграф;

(б) сколько дуг исходит из вершины $u_1$;

(в) сколько дуг исходит из вершины $u_2$;

(г) сколько дуг заходит в вершину $u_3$;

(д) содержит ли орграф петли;

(е) сколько дуг в орграфе.

О т в е т.

(а) 4; (б) 1 (петля); (в) 2: петля и дуга, заходящая в $u_3$; (г) 2: из $u_2$ и $u_4$; (д) 3 петли, инцидентные вершинам $u_1, u_2, u_4$; (е) 5.

1. Граф задан матрицей инцидентности

$$B(G)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}.$$

Не выполняя построения графа, определить:

(а) сколько вершин содержит граф;

(б) сколько рёбер содержит граф;

(в) сколько рёбер соединяет вершины $u_1$ и $u_2$;

(г) содержит ли граф петли;

(д) смежны ли вершины $u_1$ и $u_3$;

(е) какую степень имеет вершина $u_1$;

(ж) какую степень имеет вершина $u_3$.

О т в е т.

(а) 3;

(б) 4;

(в) 2;

(г) имеется 1 петля, инцидентная вершине $u_3$;

(д) нет (так как нет столбца $\begin{matrix}1\\0\\1\end{matrix}$);

(е) 2;

(ж) 3 (так как наличие петли увеличивает степень на 2).

Орграф задан матрицей инцидентности.

$$B(D)=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-1&0&1&-1\\0&1&-1&1\end{pmatrix}.$$

Не выполняя построения орграфа, определить:

(а) сколько вершин содержит орграф;

(б) сколько дуг содержит орграф;

(в) сколько дуг исходит из вершины $u_2$;

(г) сколько дуг заходит в вершину $u_2$;

(д) какова полустепень исхода вершины $u_3$;

(е) какова полустепень захода вершины $u_1$.

О т в е т.

(а) 3;

(б) 4;

(в) 1;

(г) 2;

(д) 2;

(е) 1.

## §4. Маршруты на графах

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $G=\{V,X\}$ - граф ( $D=\{V,X\}$ - орграф). Последовательность вида $v_1x_1v_2x_2\ldots v_{k-1}x_{k-1}v_k$ , где $v_i\in V,\ i=1,2,\ldots,k$ , а $x_i=\{v_i;v_{i+1}\}\in X$ (для орграфа $x_i=(v_i;v_{i+1})\in X$ ), $i=1,2,\ldots,k-1$ , называется *маршрутом* на графе $G$ (*путём* на орграфе $D$ ), соединяющем вершины $v_1$ и $v_k$ . При этом $v_1$ называется *началом маршрута (пути)*, а $v_k$ - *концом маршрута (пути)*.

О п р е д е л е н и е 2. Число рёбер (дуг) в маршруте (пути) называется *длиной маршрута (пути)*.

З а м е ч а н и е. При определении длины маршрута каждое ребро (дуга) учитывается столько раз, сколько раз оно встречается в последовательности $v_1x_1v_2x_2\ldots v_{k-1}x_{k-1}v_k$ .

О п р е д е л е н и е 3. Маршрут, в котором все рёбра (дуги) различны, называется *цепью*.

О п р е д е л е н и е 4. Маршрут, в котором все вершины различны, называется *простой цепью*.

О п р е д е л е н и е 5. Маршрут $v_1x_1v_2x_2\ldots v_{k-1}x_{k-1}v_k$ , у которого $v_1=v_k$ , называется *замкнутым*.

О п р е д е л е н и е 6. Замкнутый маршрут, у которого все рёбра различны, называется *циклом*.

О п р е д е л е н и е 7. Цикл в орграфе называется *контуром*.

О п р е д е л е н и е 8. Замкнутый маршрут, у которого все вершины, кроме первой и последней, попарно различны, называется *простым циклом*.

З а м е ч а н и е. Если граф не содержит кратных рёбер, то маршрут $v_1x_1v_2x_2\ldots v_{k-1}x_{k-1}v_k$ однозначно восстанавливается по записи $v_1v_2\ldots v_{k-1}v_k$ .

П р и м е р 1.

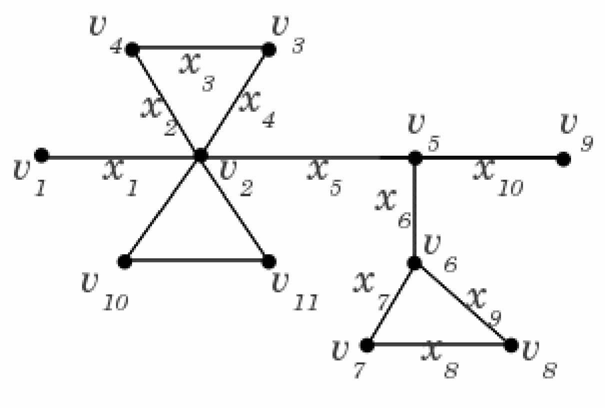



Рис.4-1.

1. На рис.4-1 $v_5x_5v_2x_5v_5x_6v_6$ - маршрут, соединяющий вершины $v_5$ и $v_6$ . Так как граф не содержит кратных рёбер, этот маршрут однозначно восстанавливается по записи $v_5v_2v_5v_6$ . Маршрут не является замкнутым: начало и конец — разные вершины. Маршрут не является цепью (ребро $x_5$ проходится два раза) и, тем более,

не является простой цепью. Длина маршрута равна 3.

2. Маршрут $v_1v_2v_3v_4v_2v_5$ является цепью, так как все рёбра, включённые в маршрут, различны (их обозначения опущены в записи маршрута). Этот маршрут не является простой цепью, поскольку вершина $v_2$ входит в маршрут 2 раза. Длина маршрута равна 5.

3. Маршрут $v_1v_2v_5v_6$ не замкнут, является простой цепью, его длина равна 3.

4. Маршрут $v_5v_6v_7v_8v_6v_5$ замкнут, но не является циклом (ребро $x_6$ проходится 2 раза). Длина маршрута равна 5.

5. Маршрут $v_4v_2v_{10}v_{11}v_2v_3v_4$ , имеющий длину 6, замкнут, является циклом, но не является простым циклом, так как в простом цикле одинаковыми являются лишь первая и последняя вершины, а в данном примере вершина $v_2$ встречается дважды.

6. Маршрут $v_2v_{10}v_{11}v_2v_3v_4v_2$ замкнут, является циклом, но не является простым циклом.

7. Маршрут $v_6v_7v_8v_6$ - простой цикл длины 3.

П р и м е р 2.

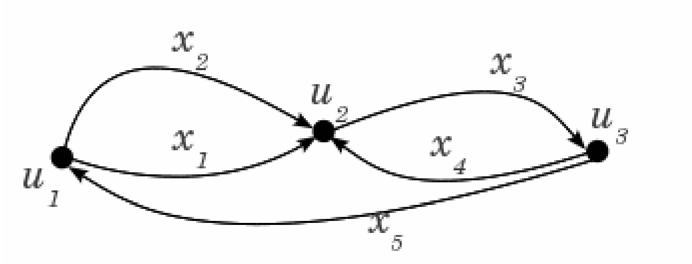



Рис.4-2.

1. На рис.4-2 $u_1x_1u_2x_3u_3x_4u_2$ - путь на орграфе, являющийся цепью, но не простой цепью (вершина $u_2$ встречается дважды).

2. Путь $u_1x_1u_2x_3u_3x_5u_1x_1u_2$ не является цепью (дуга $x_1$ включена дважды).

3. Путь $u_1x_1u_2x_3u_3x_5u_1x_2u_2$ является цепью, но не простой цепью (вершина $u_1$ встречается дважды).

4. Путь $u_1x_1u_2x_3u_3x_5u_1$ является простым контуром.

З а д а н и е 1. Для каждого из маршрутов, составленных для изображённого на рис.4-3 графа, определить, является ли он цепью, простой цепью, циклом, простым циклом.

(а) $u_1u_2u_3u_2u_4$ ;

(б) $u_1u_2u_3u_4u_2u_1$ ;

(в) $u_1u_2u_3u_4u_1$ ;

(г) $u_1u_2u_4u_3$ .

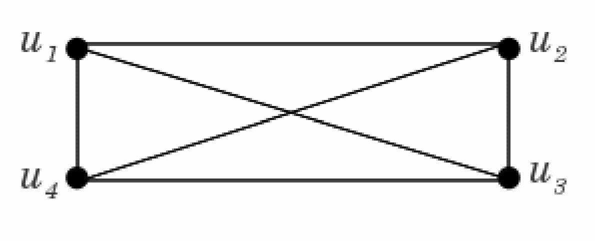



Рис.4-3.

О т в е т.

(а) не цепь, не замкнут;

(б) замкнут, но не цикл;

(в) простой цикл;

(г) простая цепь, не замкнут.

З а д а н и е 2. Для каждого из маршрутов, составленных для изображённого на рис.4-4 орграфа, определить, является ли он цепью, простой цепью, контуром, простым контуром.

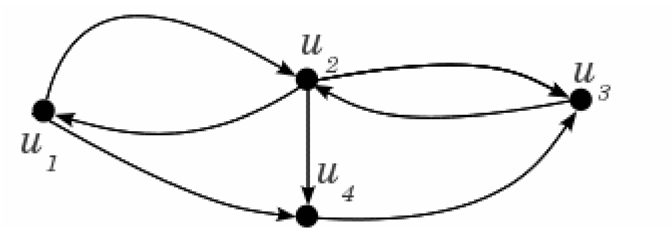



Рис.4-4.

(а) $u_1 u_2 u_3 u_2 u_3$ ;

(б) $u_1 u_2 u_4 u_3 u_2$ ;

(в) $u_1 u_4 u_3 u_2 u_1$ .

О т в е т.

(а) не цепь, не замкнут;

(б) незамкнутая цепь, не является простой цепью;

(в) простой контур.

Вспомним, что *k*-й степенью квадратной матрицы $A$ называется произведение $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ раз}}$ . Элемент матрицы $A^k$ , находящийся на пересечении *i*-й строки и *j*-го столбца обозначим через $a_{ij}^{(k)}$ ( $a_{ij}^{(k)}$ , вообще говоря, не равно $a_{ij}^k$ ).

Т е о р е м а 1. Пусть $A$ - матрица смежности вершин орграфа (графа). Тогда число всех путей длины $k$ с началом в вершине $v_i$ и концом в вершине $v_j$ равно $a_{ij}^{(k)}$ .

П р и м е р 3. Граф задан матрицей смежности вершин

$$A(G)=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&1\\1&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Выяснить, сколько существует различных маршрутов длины 3:

(а) из $u_1$ в $u_1$;

(б) из $u_1$ в $u_2$;

(в) из $u_3$ в $u_1$;

(г) из $u_4$ в $u_4$.

Ре ш е н и е. Найдём матрицу $A^3$:

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}2&1&1&1\\1&3&1&0\\1&1&2&1\\1&0&1&1\end{pmatrix},\quad A^3=A\cdot A^2=\begin{pmatrix}2&4&3&1\\4&2&4&3\\3&4&2&1\\1&3&1&0\end{pmatrix}.$$

(а) из Теоремы 1 следует, что число маршрутов длины 3 из $u_1$ в $u_1$ равно элементу $a_{11}^{(3)}$ матрицы $A^3$, то есть 2;

(б) число маршрутов длины 3 из $u_1$ в $u_2$ равно элементу $a_{12}^{(3)}$ матрицы $A^3$, то есть 4;

(в) $a_{31}^{(3)}=3$, значит, имеется 3 маршрута длины 3 из $u_3$ в $u_1$;

(г) $a_{44}^{(3)}=0$, следовательно, таких маршрутов нет.

З а д а н и е 3. Для графа из последнего примера выписать в виде последовательности вершин рассмотренные в Примере 3 маршруты, предварительно построив граф.

О т в е т.

(а) $u_1u_3u_2u_1,\ u_1u_2u_3u_1$;

(б) $u_1u_2u_3u_2,\ u_1u_2u_4u_2,\ u_1u_3u_1u_2,\ u_1u_2u_1u_2$;

(в) $u_3u_1u_3u_1$.

З а д а н и е 4. Для орграфа $D$, заданного матрицей смежности вершин

$$A(D)=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},$$

найти число различных маршрутов длины 4:

(а) из вершины $u_1$ в вершину $u_3$;

(б) из $u_2$ в $u_2$ ;

(в) из $u_3$ в $u_2$ .

Сколько всего существует различных маршрутов длины 4 для такого орграфа?

Р е ш е н и е.

Из Теоремы 1 следует, что ответы на эти вопросы содержит матрица $A(D)^4$ . Найдём её.

$$A(D)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A(D)^4 = A(D)^2 \cdot A(D)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(а) $a_{13}^{(4)} = 2$ , значит, есть 2 различных маршрута длины 4 из вершины $u_1$ в вершину $u_3$ ;

(б) $a_{22}^{(4)} = 0$ , то есть маршрутов длины 4 из $u_2$ в $u_2$ не существует;

(в) $a_{32}^{(4)} = 1$ , то есть имеется ровно 1 маршрут длины 4 из $u_3$ в $u_2$ .

Число всех маршрутов длины 4 равно сумме всех элементов матрицы $A(D)^4$ :

$$1+1+2+1+0+1+1+1+1=9 .$$

Т е о р е м а 2. Для того, чтобы $n$-вершинный орграф $D$ с матрицей смежности вершин $A$ содержал хотя бы один контур, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одна из матриц $A, A^2, \ldots, A^n$ имела ненулевые диагональные элементы.

П р и м е р 4. Орграф $D$ задан матрицей смежности вершин

$$A(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определить, имеет ли он контуры.

Р е ш е н и е. Матрица $A(D)$ не имеет диагональных элементов, отличных от 0, значит, в орграфе $D$ нет контуров длины 1, то есть петель. Матрица

$$A(D)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

имеет ненулевой диагональный элемент $a_{33}^{(2)} = 1$ , а это означает, что в силу Теоремы 2 орграф $D$ имеет по крайней мере один контур, а в силу Теоремы 1, его длина равна 2.

З а д а н и е 5. Выяснить, имеет ли контуры орграф $D$ , заданный матрицей смежности вершин

$$A(D)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

не выполняя построения орграфа.

Р е ш е н и е. Матрица $A(D)$ не имеет отличных от 0 диагональных элементов. На главной диагонали матрицы

$$A(D)^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

располагаются только нули. Матрица

$$A(D)^3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

содержит ненулевые диагональные элементы. Из Теорем 2 и 1 следует, что орграф $D$ имеет по крайней мере, один контур длины 3.

О п р е д е л е н и е 9. Цикл, содержащий все рёбра графа $G$, называется *эйлеровым циклом*.

О п р е д е л е н и е 10. Цепь, содержащая все рёбра графа $G$, называется *эйлеровой цепью*.

З а м е ч а н и е. Эйлеров цикл и эйлеров цепь называются *эйлеровым маршрутом*.

П р и м е р 5. Маршрут $v_1v_3v_5v_2v_4v_1v_2v_3v_4v_5v_1$ на графе $G$, см. рис.4-5, замкнут, содержит все рёбра графа, причём каждое ребро включено в маршрут ровно 1 раз (то есть маршрут является циклом). Следовательно, этот маршрут является эйлеровым циклом.

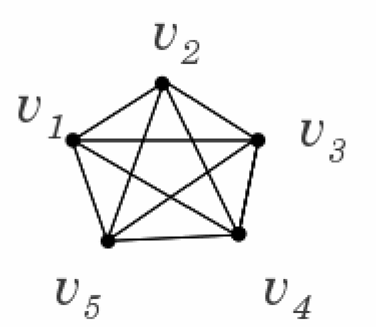



Рис.4-5.

П р и м е р 6. На графе $G$, см. рис.4-6, эйлеров цикл найти не удастся, но имеется эйлерова цепь: $v_1v_4v_3v_2v_5v_1v_2v_4v_5v_3$ .

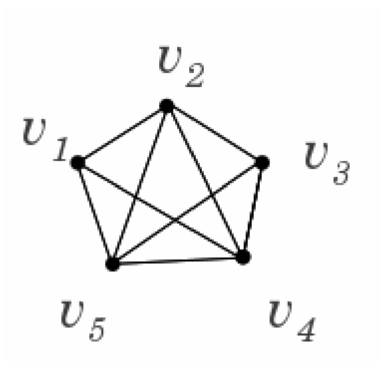



Рис.4-6.

Т е о р е м а 3. Пусть $G$ - связный граф. $G$ содержит эйлеров цикл тогда и только тогда, когда степени всех его вершин чётны.

Т е о р е м а 4. Пусть $G$ - связный граф. $G$ содержит эйлерову цепь, соединяющую вершины $u$ и $v$ тогда и только тогда, когда вершины $u$ и $v$ имеют нечётную степень, а степени всех остальных вершин графа $G$ чётны.

А л г о р и т м п о с т р о е н и я э й л е р о в а ц и к л а.

1. Выбираем произвольную вершину $u$ графа.
2. Выбираем любое ребро, инцидентное вершине $u$, и включаем его в маршрут. Обозначим это ребро через $x_1$, а вершину, в которую оно приводит, — $v_1$.
3. Выбираем ребро, инцидентное вершине $v_1$ и отличное от рёбер, уже включенных в маршрут (сейчас это $x_1$). Обозначаем его через $x_2$, а новую вершину (в которую оно приводит) — через $v_2$.
4. Повторяем процедуру, описанную в п.3, до тех пор, пока не встретим вершину, у которой все инцидентные ей рёбра уже включены в маршрут. Этой вершиной может быть только вершина $u$, с которой начиналось построение.
5. Если все рёбра входят в уже построенный маршрут, то задача решена. Если найдётся ребро, ещё не включенное в маршрут, то обязательно в уже построенном маршруте найдётся вершина $v_i$ такая, что некоторое ей инцидентное ребро не включено в маршрут. Повторяем для вершины $v_i$ всю процедуру, начиная с п.1 ( $u = v_i$ ). После конечного числа шагов эйлеров цикл будет построен.

З а м е ч а н и е. Эйлеров маршрут, вообще говоря, не единственен!

П р и м е р 7. Граф $G$, см. рис.4-7, является связным; все его вершины имеют чётные степени. Следовательно, в силу Теоремы 3, $G$ содержит эйлеров цикл. Найдём этот цикл.

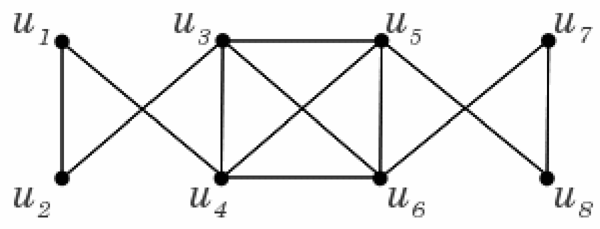


Рис.4-7.

1. Выберем вершину $u_1$ в качестве начала цикла.

2. Вершине $u_1$ инцидентны 2 ребра. Любое можно включить в маршрут. Выберем ребро $\{u_1;u_2\}$ .

3. Вершине $u_2$ инцидентны 2 ребра, но $\{u_1;u_2\}$ уже включено в маршрут. Значит, включаем в маршрут ребро $\{u_2;u_3\}$ .

4. Рассмотрим вершину $u_3$ . Из трёх допустимых рёбер выбираем $\{u_3;u_4\}$ .

5. Присоединяем ребро $\{u_4;u_5\}$ .

6. Присоединяем ребро $\{u_5;u_6\}$ .

7. Присоединяем ребро $\{u_6;u_7\}$ .

8. Присоединяем ребро $\{u_7;u_8\}$ .

9. Здесь имеется единственный вариант - ребро $\{u_8;u_5\}$ .

10. Здесь имеется единственный вариант - ребро $\{u_5;u_3\}$ .

11. Здесь имеется единственный вариант - ребро $\{u_3;u_6\}$ .

12. Здесь имеется единственный вариант - ребро $\{u_6;u_4\}$ .

13. Здесь имеется единственный вариант - ребро $\{u_4;u_1\}$ .

Искомый маршрут: $u_1u_2u_3u_4u_5u_6u_7u_8u_5u_3u_6u_4u_1$ ..

З а м е ч а н и е. Если бы на шаге 5 вместо ребра $\{u_4;u_5\}$ мы выбрали бы ребро $\{u_4;u_1\}$ (которое ещё не было включено в маршрут), то получили бы цикл $u_1u_2u_3u_4u_1$ . При этом для вершины $u_3$ (и для $u_4$ ) имеются рёбра, ещё не включенные в маршрут. Построим цикл из вершины $u_3$ . Один из возможных вариантов - $u_3u_6u_5u_8u_7u_6u_4u_5u_3$ . Объединяя оба цикла, получаем $u_1u_2u_3u_6u_5u_8u_7u_6u_4u_5u_3u_4u_1$ .

З а м е ч а н и е. Если граф задан матрицей смежности вершин, то для нахождения эйлерова цикла нет необходимости строить геометрическую реализацию графа.

П р и м е р 8. Граф $G$ задан матрицей смежности вершин:

$$A(G)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

Построим эйлеров цикл.

1. Выберем вершину $u_1$ в качестве начала цикла.

2. В первой строке имеются две единицы, соответствующие рёбрам $\{u_1;u_2\}$ и $\{u_1;u_3\}$ . Выберем второе, то есть включим в маршрут вершину $u_3$ . Поскольку

ребро не может использоваться вторично, зачеркнём элемент $a_{13}$ матрицы $A(G)$, равно как и элемент $a_{31}$, соответствующий тому же ребру:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cancel{1} \\ 1 & 0 & 1 \\ \cancel{1} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Уже имея маршрут $u_1 u_3$, просматриваем строку матрицы, соответствующую последней вершине маршрута, то есть третью. Невычеркнутый ненулевой элемент здесь только один - $a_{23}$. Значит, выбираем ребро $\{u_3; u_2\}$ и вычёркиваем элементы $a_{32}$ и $a_{23}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cancel{1} \\ 1 & 0 & \cancel{1} \\ \cancel{1} & \cancel{1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Имея маршрут $u_1 u_3 u_2$, просматриваем строку матрицы, соответствующую последней вершине маршрута, то есть вторую. Находим (единственный в данном случае) ненулевой невычеркнутый элемент $a_{21}=1$, включаем соответствующее ему ребро $\{u_2; u_1\}$ в маршрут: $u_1 u_3 u_2 u_1$ и вычёркиваем $a_{21}$ и $a_{12}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cancel{1} & \cancel{1} \\ \cancel{1} & 0 & \cancel{1} \\ \cancel{1} & \cancel{1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученный маршрут является замкнутым, а в матрице вычеркнуты все ненулевые элементы. Значит, маршрут $u_1 u_3 u_2 u_1$ является эйлеровым циклом.

З а д а н и е 6. Граф $G$ задан матрицей смежности вершин

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти эйлеров маршрут.

Р е ш е н и е. Граф имеет ровно 2 вершины нечётной степени - $u_2$ и $u_3$. Значит, в силу Теоремы 4, граф содержит эйлерову цепь, соединяющую эти вершины. Строим такой маршрут.

1. Фиксируем вершину $u_2$.

2. Просматриваем вторую строку матрицы, зачёркиваем, например, элемент $a_{21}$ (и $a_{12}$), присоединяем к маршруту ребро $\{u_2; u_1\}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cancel{1} & 1 & 0 \\ \cancel{1} & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_2u_1 .$$

3. Просматриваем первую строку матрицы, вычёркиваем элемент $a_{13}$ (и $a_{31}$), присоединяем к маршруту ребро $\{u_1; u_3\}$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cancel{1} & \cancel{1} & 0 \\ \cancel{1} & 0 & 1 & 1 \\ \cancel{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_2u_1u_3 .$$

4. Просматриваем третью строку матрицы, вычёркиваем, например, элемент $a_{34}$ (и $a_{43}$), присоединяем к маршруту ребро $\{u_3; u_4\}$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cancel{1} & \cancel{1} & 0 \\ \cancel{1} & 0 & 1 & 1 \\ \cancel{1} & 1 & 0 & \cancel{1} \\ 0 & 1 & \cancel{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad u_2u_1u_3u_4 .$$

5. Просматриваем четвёртую строку матрицы, вычёркиваем элемент $a_{42}$ (и $a_{24}$), присоединяем к маршруту ребро $\{u_4; u_2\}$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cancel{1} & \cancel{1} & 0 \\ \cancel{1} & 0 & 1 & \cancel{1} \\ \cancel{1} & 1 & 0 & \cancel{1} \\ 0 & \cancel{1} & \cancel{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad u_2u_1u_3u_4u_2 .$$

6. Просматриваем вторую строку матрицы, зачёркиваем элемент $a_{23}$ (и $a_{32}$), присоединяем к маршруту ребро $\{u_2; u_3\}$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cancel{1} & \cancel{1} & 0 \\ \cancel{1} & 0 & \cancel{1} & \cancel{1} \\ \cancel{1} & \cancel{1} & 0 & \cancel{1} \\ 0 & \cancel{1} & \cancel{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad u_2u_1u_3u_4u_2u_3 .$$

Все ненулевые элементы матрицы вычеркнуты, следовательно, все рёбра включены в маршрут.

О т в е т. Граф $G$ содержит эйлерову цепь $u_2u_1u_3u_4u_2u_3$ .

З а д а ч и д л я с а м о с т о я т е л ь н о г о р е ш е н и я.

1. Для орграфа $D$ , заданного матрицей смежности вершин

$$A(D)=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

определить:

(а) число маршрутов длины 2 из $u_1$ в $u_3$;

(б) число маршрутов длины 2 из $u_4$ в $u_2$;

(в) число маршрутов длины 3 из $u_2$ в $u_3$;

(г) имеет ли орграф контуры.

О т в е т. (а) 0; (б) 1; (в) 0; (г) да.

2. Орграф $D$ задан матрицей инцидентности

$$B(D)=\begin{pmatrix}0&0&-1&0&1\\-1&0&1&-1&0\\0&-1&0&1&-1\\1&1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Определить:

(а) число маршрутов длины 2 из $u_2$ в $u_3$;

(б) число маршрутов длины 2 из $u_3$ в $u_2$;

(в) число маршрутов длины 3 из $u_4$ в $u_1$;

(г) содержит ли орграф контуры.

У к а з а н и е. Построить матрицу $A(D)$ смежности вершин орграфа и рассмотреть $A(D)^2$, $A(D)^3$.

О т в е т. (а) 1; (б) 0; (в) 1; (г) да.

## *§5. Контрольные вопросы по теме «графы»*

1. Что называется графом? Ребром, вершиной графа?
2. Какие вершины называются смежными?
3. В каком случае вершина и ребро являются инцидентными?
4. Какие рёбра называются кратными?
5. Какое ребро называется петлёй?
6. Какие графы называются изоморфными?
7. Что такое степень вершины графа?
8. Как связано число рёбер в графе со степенями вершин графа?
9. Что можно сказать о количестве вершин нечётной степени графа?
10. Какой граф называется полным?
11. Сколько рёбер содержит $n$-вершинный полный граф?
12. Что называется орграфом?
13. Что такое полустепень исхода и полустепень захода вершины орграфа?
14. Как связаны полустепени вершин орграфа с число его дуг?
15. Что называется матрицей смежности вершин графа?
16. Что называется матрицей инцидентности графа?
17. Что называется матрицей смежности вершин орграфа?
18. Что называется матрицей инцидентности орграфа?
19. Как по матрице смежности вершин определить степень любой вершины графа?
20. Чем отличаются матрицы смежности вершин графа и орграфа?
21. Как по матрице инцидентности графа определить, являются ли данные вершины смежными?
22. Как по матрице инцидентности графа узнать степень вершины графа?
23. Как по матрице инцидентности орграфа определить полустепень исхода и захода вершины?
24. Что называется маршрутом на графе?
25. Какой маршрут называется замкнутым?
26. Что такое цепь?
27. Что такое цикл? Простой цикл?

28.Какой маршрут называется эйлеровым циклом? Эйлеровой цепью?

29.Как определить, имеет ли граф эёлеров цикл? Эйлерову цепь?

30.В чём состоит алгоритм нахождения эйлерова маршрута на графе?

# Булевы функции

## *§1. Основные понятия*

О п р е д е л е н и е 1. *Булевым n-мерным вектором* называется вектор $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ такой, что $\alpha_i \in \{0;1\}$.

Напомним, что числа $\alpha_i$ называются координатами вектора $\boldsymbol{\alpha}$.

Булевы $n$-мерные векторы называются также *двоичными наборами длины n*.

П р и м ер 1.

(0), (1) — все возможные одномерные булевы векторы;

(0,0), (0,1), (1,0), (1,1) — все возможные двумерные булевы векторы;

(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (0,1,1), (1,1,0), (1,0,1), (1,1,1) — все возможные трёхмерные булевы векторы.

З а д а н и е 1. Выписать все четырёхмерные булевы векторы, у которых ровно одна координата равна 0.

О т в е т. (0,1,1,1), (1,0,1,1), (1,1,0,1), (1,1,1,0).

О п р е д е л е н и е 2. *Номером булева вектора* $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ называется число

$$\nu(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} 2^{n-i}\alpha_i = 2^{n-1}\alpha_1 + 2^{n-2}\alpha_2 + \dots + 2^1\alpha_{n-1} + 2^0\alpha_0 .$$

П р и м ер 2. Пусть $\boldsymbol{\alpha} = (0,1,1)$, $\boldsymbol{\beta} = (1,0,0,0)$. Требуется найти $\nu(\boldsymbol{\alpha}), \nu(\boldsymbol{\beta})$.

Р е ш е н и е.

$$\nu(\boldsymbol{\alpha}) = 2^2 \cdot 0 + 2^1 \cdot 1 + 2^0 \cdot 1 = 2 + 1 = 3;$$
$$\nu(\boldsymbol{\beta}) = 2^3 \cdot 1 + 2^2 \cdot 0 + 2^1 \cdot 0 + 2^0 \cdot 0 = 8.$$

З а д а н и е 2. Найти номера наборов

(а) $\boldsymbol{\alpha} = (1,0,1,1,0)$;

(б) $\boldsymbol{\beta} = (1,1,1)$;

(в) $\boldsymbol{\gamma} = (0,1)$.

Р е ш е н и е.

$$\nu(\boldsymbol{\alpha}) = 2^4 \cdot 1 + 2^3 \cdot 0 + 2^2 \cdot 1 + 2^1 \cdot 1 + 2^0 \cdot 0 = 22;$$
$$\nu(\boldsymbol{\beta}) = 2^2 \cdot 1 + 2^1 \cdot 1 + 2^0 \cdot 1 = 7;$$
$$\nu(\boldsymbol{\gamma}) = 2^1 \cdot 0 + 2^0 \cdot 1 = 1.$$

У т в е р ж д е н и е 1. Булев вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ является двоичным разложением числа $\nu(\alpha)$.

У т в е р ж д е н и е 2. Существует ровно $2^n$ различных булевых *n*-мерных векторов.

О п р е д е л е н и е 3. Булевы векторы называются *равными*, если они имеют одинаковые координаты.

О п р е д е л е н и е 4. Булевы векторы называются *соседними*, если они отличаются ровно одной координатой.

П р и м ер 3.

Векторы $(1,0,1,1)$ и $(1,1,1,1)$ - соседние (различны только вторые координаты).

Векторы $(1,0,1,1)$ и $(1,0,0,1)$ - соседние (различны только третьи координаты).

Векторы $(1,0,1,1)$ и $(1,0,0,0)$ не являются соседними (различны координаты $\alpha_3$ и ), $\alpha_4$

З а д а н и е 3. Выписать все булевы векторы, соседние с вектором $(1,1,1,1)$.

Р е ш е н и е.

$(0,1,1,1)$, $(1,0,1,1)$, $(1,1,0,1)$, $(1,1,1,0)$.

О п р е д е л е н и е 5. Булевы векторы называются *противоположными*, если все их координаты различны.

П р и м ер 4.

Векторы $(1,0,1)$ и $(0,1,0)$ являются противоположными.

Векторы $(1,0,1)$ и $(0,1,1)$ не являются противоположными, так как имеют одинаковую координату $\alpha_3 = 1$.

О п ре де ле н и е 6. Функция $f(x_{1,} \dots, x_n)$, определённая на всевозможных *n*-мерных булевых векторах и принимающая значения 0 или 1, называется *булевой функцией от n переменных*.

О п ре де ле н и е 7. *Таблицей истинности* булевой функции называется следующая таблица:

Табл.1.

| $\nu(x)$ | $x = x(x_1, \dots, x_n)$ | $f(x_1, \dots, x_n)$ |
|---|---|---|
| 0 | $(0, \dots, 0, 0)$ | $f(0, \dots, 0, 0) = \beta_1$ |
| 1 | $(0, \dots, 0, 1)$ | $f(0, \dots, 0, 1) = \beta_2$ |
| 2 | $(0, \dots, 1, 0)$ | $f(0, \dots, 1, 0) = \beta_3$ |

| $v(x)$ | $x = x(x_1, \dots, x_n)$ | $f(x_1, \dots, x_n)$ |
|---|---|---|
| .... | .... | .... |
| $2^n - 1$ | $(1, \dots, 1, 1)$ | $f(1, \dots, 1, 1) = \beta_{2^n}$ |

О п ре де ле н и е 8. Вектор $\beta_f = (\beta_1, \dots, \beta_{2^n})$ , где $\beta_k$ - значение функции $f = (x_1, \dots, x_n)$ на наборе, размещённом в *k*-й строке таблицы истинности (см. Табл. 1), называется *вектором значений* функции $f(x_1, \dots, x_n)$ .

У т в е р ж д е н и е 3. $|P_2(n)| = 2^{2^n}$ .

П р и м е р 5. $\beta_f = (0,0,1,0,1,1,0,1)$ - вектор значений функции $f$ .

1. Определить количество переменных, от которых зависит функция $f$ .

2. Составить таблицу истинности функции $f$ .

3. Указать, какое значение принимает функция $f$ на наборе (0,1,0).

Р е ш е н и е.

1. Вектор значений функции $f(x_1, \dots, x_n)$ имеет длину $2^n$ (опр. 8). Заданный вектор имеет длину $8 = 2^3$ . Следовательно, функция $f$ зависит от трёх переменных $x_1, x_2, x_3$ .

2. Составим таблицу истинности функции

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f(x_1, x_2, x_3)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

3. $f(0,1,0) = 1$ .

П р и м е р 6. $\boldsymbol{\beta}_f = (1,0,1,0,1,1,0,1)$ - вектор значений функции $f$. Не составляя таблицы истинности, определить значения функции $f$ на наборе (0, 1, 1) и (1, 0, 1)

Р е ш е н и е.

Набор $\alpha_1 = (0,1,0)$ имеет номер $\nu(\alpha) = 3$ и, соответственно, располагается в 4-й строке таблицы истинности. Значит, значением функции $f$ на этом наборе является координата $\beta_4$ вектора значений функции $f$ - $\boldsymbol{\beta}_f = (\beta_1, \ldots, \beta_8)$. $\beta_4 = 0$ для заданной функции $f(x_{1,} x_{2,} x_3)$, следовательно, $f(0,1,1) = 0$.

Аналогично, набору (1, 0, 1), имеющему номер 5, соответствует координата $\beta_6$ в векторе значений функции: $\beta_6$ = 1, значит, $f(1,0,1) = 1$.

О т в е т. $f(0,1,1) = 0,\ f(1,0,1) = 1$.

П р и м е р 7.

Пусть даны две функции $f$ и $g$, для которых $\boldsymbol{\beta}_f = (0,1,0,0)$ и $\boldsymbol{\beta}_g = (1,1,0,1,0,1,0,1)$.

Найти вектор значений функции $h$, где $h(x_1, x_2, x_3) = g(\, f(x_1, x_2),\, f(x_2, x_3),\, f(x_1, x_3))$.

Р е ш е н и е.

Во-первых, отметим, что функции $f$ и $g$ зависят соответственно от двух и трёх переменных, и их табличные задания выглядят следующим образом:

| $(x, y)$ | $f = f(x, y)$ |
|---|---|
| (0,0) | 0 |
| (0,1) | 1 |
| (1,0) | 0 |
| (1,1) | 0 |

и

| $(x, y, z)$ | $g = g(x, y, z)$ |
|---|---|
| (0,0,0) | 1 |
| (0,0,1) | 1 |
| (0,1,0) | 0 |
| (0,1,1) | 1 |
| (1,0,0) | 0 |
| (1,0,1) | 1 |

| | |
|---|---|
| (1,1,0) | 0 |
| (1,1,1) | 1 |

Следующая таблица наглядно представляет алгоритм нахождения вектора значений сложной функции $h$, зависящей от функций $f$ и $g$:

| $(x_1, x_2, x_3)$ | $f(x_1, x_2)$ | $f(x_2, x_3)$ | $f(x_1, x_3)$ | $h(x_1, x_2, x_3)$ |
|---|---|---|---|---|
| (0,0,0) | 0 | 0 | 0 | 1 |
| (0,0,1) | 0 | 1 | 1 | 1 |
| (0,1,0) | 1 | 0 | 0 | 0 |
| (0,1,1) | 1 | 0 | 1 | 1 |
| (1,0,0) | 0 | 0 | 0 | 1 |
| (1,0,1) | 0 | 1 | 0 | 0 |
| (1,1,0) | 0 | 0 | 0 | 1 |
| (1,1,1) | 0 | 0 | 0 | 1 |

Поясним, как получился столбец значений функции $h$. Допустим, нам необходимо найти значение функции $h$ на векторе (1,0,0), т.е. $h(1,0,0)$. По условию $h(1,0,0) = g(f(1,0), f(0,0), f(1,0))$, из таблицы значений функции $f$ получаем, что $f(1,0) = 0$, $f(0,0) = 0$ и $g(0,0,0) = 1$, то есть. $\alpha_5(h) = h(1,0,0) = 1$. И так для каждого булева вектора. Тем самым, $\boldsymbol{\beta}_h = (1,1,0,1,1,0,1,1)$.

З а д а н и е 3. Задан вектор значений функции $f$: $\boldsymbol{\beta}_f = (1,1,0,0,0,1,0,0,1)$ .

Найти:

(1) $f(0,1,0)$;

(2) $f(1,1,0)$.

Р е ш е н и е.

(1) Набор (0,1,0), имеющий номер 2, располагается в 3-й строке таблицы истинности. Значение функции $f$ на этом наборе равно координате $\beta_3$ вектора значений функции: $\beta_3 = 0$ , значит, $f(0,1,0) = 0$.

(2) Если $\alpha = (1,1,0)$ , то $\nu(\alpha) = 6$, $\beta_7 = 0$ . Таким образом, $f(1,1,0) = 0$.

О т в е т. $f(0,1,0) = 0$; $f(1,1,0) = 1$.

З а д а н и е 4. Известно, что $\beta_f = (1,1,0,1)$, $\beta_g = (1,0,0,0)$. Найти

$h(x_1, x_2, x_3) = f(g(x_1, x_2), f(x_2, x_3))$.

Р е ш е н и е

Посторим таблицы истинности функций $f(x_1, x_2)$, $g(x_1, x_2)$:

| $x_1$ | $x_2$ | $f$ | $g$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Функция $h$ зависит от трёх переменных. Найдём её значения на всех возможных наборах:

$h(0,0,0) = f(g(0,0), f(0,0)) = f(1,1) = 1$;

$h(0,0,1) = f(g(0,0), f(0,1)) = f(1,1) = 1$;

$h(0,1,0) = f(g(0,1), f(1,0)) = f(0,0) = 1$;

$h(0,1,1) = f(g(0,0), f(1,1)) = f(0,1) = 1$;

$h(1,0,0) = f(g(1,0), f(0,0)) = f(0,1) = 1$;

$h(1,0,1) = f(g(1,0), f(0,1)) = f(0,1) = 1$;

$h(1,1,0) = f(g(1,1), f(0,0)) = f(0,0) = 1$;

$h(1,1,1) = f(g(1,1), f(1,1)) = f(0,1) = 1$.

О т в е т. $\beta_h = (1,1,1,1,1,1,1,1)$.

О п р е д е л е н и е 9. Пусть задана функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Переменная $x_i$ называется *фиктивной* переменной функции $f$, если для любого набора

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \in B^{n-1}$

выполняется равенство

$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$;

в противном случае переменная $x_i$ называется *существенной* для $f$.

П р и м е р 7. Указать все фиктивные переменные следующей функции:

$f(x_1, x_2, x_3) = (00110011)$.

Р е ш е н и е.

Построим таблицу значений функции $f$ :

| $\nu(x)$ | $x=(x_1, x_2, x_3)$ | $f(x)=f(x_1, x_2, x_3)$ |
|---|---|---|
| 0 | (0,0,0) | 0 |
| 1 | (0,0,1) | 0 |
| 2 | (0,1,0) | 1 |
| 3 | (0,1,1) | 1 |
| 4 | (1,0,0) | 0 |
| 5 | (1,0,1) | 0 |
| 6 | (1,1,0) | 1 |
| 7 | (1,1,1) | 1 |

Зафиксируем переменные $x_2$ , $x_3$ и будем менять значения переменной $x_1$ с 0 на 1. Если при этом значения функции будут неизменны для любых комбинаций значений, принимаемых переменными $x_2$, $x_3$, то переменная $x_1$ по определению окажется фиктивной, иначе – существенной:

пусть $x_2=0,\ \ x_3=0$ , тогда $f(0{,}0{,}0)=f(1{,}0{,}0)=0$ ;

пусть $x_2=0,\ \ x_3=1$ , тогда $f(0{,}0{,}1)=f(1{,}0{,}1)=0$ ;

пусть $x_2=1,\ \ x_3=0$ , тогда $f(0{,}1{,}0)=f(1{,}1{,}0)=1$ ;

пусть $x_2=1,\ \ x_3=1$ , тогда $f(0{,}1{,}1)=f(1{,}1{,}1)=1$ ;

отсюда получаем, что переменная $x_1$ фиктивная.

Проверим, фиктивна ли переменная $x_2$ . Для этого будем фиксировать значения переменных $x_1$ , $x_3$ :

пусть $x_1=0,\ \ x_3=0$ , тогда $f(0{,}0{,}0)\neq f(0{,}1{,}0)$ ;

отсюда получаем, что переменная $x_2$ существенная.

Аналогично проводится проверка для $x_3$ .

З а д а н и е 5.

$\beta_f=(0,0,0,0\,1,1,1,1)$ . Указать, какие переменные $x_1, x_2, x_3$ являются существенными, а какие — фиктивными.

Р е ше н и е.

Построим таблицу истинности функции $f$.

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Переменная $x_1$ - существенная, так как, например, $f(0,0,0)=0$, $f(1,0,0)=1$ .

Переменная $x_2$ - фиктивная:

$f(0,0,0)= f(1,0,0)=0$ ;

$f(0,0,1)= f(0,1,1)=0$ ;

$f(1,0,0)= f(1,1,0)=1$ ;

$f(1,0,1)= f(1,1,1)=1$ .

Аналогично устанавливается фиктивность переменной $x_3$ .

О т в е т. $x_1$ - существенная, $x_2$ , $x_3$ - фиктивные.

З а д а ч и д л я с а м о с т о я т е л ь н о г о р е ш е н и я.

1. Сколько строк содержит таблица истинности функции $f(x_1,\ldots,x_5)$ ?

О т в е т. 32.

2. Подсчитать число функций $f(x_1,\ldots,x_n)$ таких, что $f(0,\ldots,0)= f(1,\ldots,1)$ .

О т в е т. $2^{2^n-1}$ .

3. Указать все фиктивные переменные функции $f(x_1,x_2,x_3)$ такой, что $\beta_f=(0,0,1,1,1,1,1,1)$ .

О т в е т. $x_3$ .

4. $\beta_f = (0,1,1,0)$, $\beta_g = (1,0,1,1)$, $h_f(x_1, x_2, x_3) = f(g(x_1, x_3), f(x_2, x_1))$ .

Найти $\beta_h$ .

О т в е т. $\beta_h = (1,0,0,1,0,0,1,1)$ .

## *§2. Элементарные функции*

Везде далее мы будем рассматривать только булевы функции, поэтому для краткости изложения слово «булевы» будем опускать.

В этом пункте мы введём обозначения для функций, являющихся константами, и функций, зависящих только от одной или двух переменных.

Поскольку в рамках алгебры логики мы оперируем только лишь двумя числами – нулем и единицей, поэтому в данной алгебре существуют ровно две функции-константы (функции, у которых нет существенных переменных), а именно:

0 – тождественный нуль («тождественная ложь») и

1 – тождественная единица («тождественная истина»).

При $n = 1$ мы имеем четыре функции от одной переменной, представленные в таблице 2:

Табл.2. Функции от одной переменной.

| $x$ | 0 | 1 | $f_1$ | $f_2$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

Здесь первые две функции являются константами «0» и «1», а последние имеют следующие обозначения и названия:

$f_1(x) = x$ - *тождественная* функция,

$f_2(x) = \bar{x}$ - функция *отрицания* (читается «*не* $x$»).

При $n=2$ из заключений предыдущего пункта имеем $2^{2^2} = 16$ функций, представленных в Табл. 3.

Табл.3. Функции от двух переменных.

| $x, y$ | 0 | 1 | $f_1(x)$ | | | $f_1(y)$ | $f_2(x)$ | | $f_2(y)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0 | 1 | 0 | | | 0 | 1 | | 1 | |
| 0,1 | 0 | 1 | 0 | | | 1 | 1 | | 0 | |
| 1,0 | 0 | 1 | 1 | | | 0 | 0 | | 1 | |
| 1,1 | 0 | 1 | 1 | | | 1 | 0 | | 0 | |
| $x, y$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ | $f_6$ | $f_7$ | $f_8$ | $f_9$ | $f_{10}$ | $f_{11}$ | $f_{12}$ |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0,1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1,0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1,1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Первые две функции – константы «0» и «1», третья и четвертая (относительно нумерации столбцов Табл. 3) – тождественные функции, существенно зависящие, от переменных $x$ и $y$ соответственно, аналогично – пятая и шестая функции являются отрицанием переменной $x$ и $y$, также зависящие существенно от переменных $x$ и $y$.

Все остальные десять функций существенно зависят от своих двух переменных, приведём их обозначения и название

$f_3(x,y) = x \wedge y$ - *конъюнкция* $x$ *и* $y$ (читается « $x$ *и* $y$ », либо «*произведение* $x$ *и* $y$ »);

$f_4(x,y) = x \vee y$ - *дизъюнкция* $x$ *и* $y$ (читается « $x$ *или* $y$ », либо «*дизъюнктивная сумма* $x$ *и* $y$ »);

$f_5(x,y) = x \rightarrow y$ - *импликация* $x$ *и* $y$ (читается «*из* $x$ *следует* $y$ »);

$f_6(x,y) = x + y$ - *сумма по модулю два* $x$ *и* $y$ (читается « $x$ *плюс* $y$ »);

$f_7(x,y) = x \equiv y$ - *эквивалентность* $x$ *и* $y$ (читается « $x$ *эквивалентно* $y$ »);

$f_8(x,y) = x | y$ - *штрих Шеффера* $x$ *и* $y$ (читается «*не* $x$ *и* $y$ »);

$f_9(x,y) = x \downarrow y$ - *стрелка Пирса* $x$ *и* $y$ (читается «*не* $x$ *или* $y$ »);

$f_{10}(x,y) = \overline{x \rightarrow y}$ - *отрицание импликации* $x$ *и* $y$;

функции $f_{11}$ и $f_{12}$ не имеют специальных обозначений.

Все функции за исключением последних трёх обычно называются *элементарными* в теории алгебры логики.

## *§3. Формулы*

О п р е д е л е н и е 1. Пусть задано произвольное множество $\boldsymbol{S}$ булевых функций. Тогда

1. Каждая функция из $\boldsymbol{S}$ называется *формулой над множеством* $\boldsymbol{S}$ (или просто *над* $\boldsymbol{S}$ );

2. Пусть $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - функция из множества $\boldsymbol{S}$ и $A_1, A_2, \dots, A_n$ – какие-либо формулы над $\boldsymbol{S}$ или символы переменных, тогда выражение $f(A_1, A_2, \dots, A_n)$ называется *формулой над множеством* $\boldsymbol{S}$ (или просто *над* $\boldsymbol{S}$ ).

Очевидно, что каждая формула над каким-либо заданным множеством $\boldsymbol{S}$ , однозначно определяет некоторую функцию, такие функции называются *суперпозициями над* множеством $S$, а процесс построения таких функций – *операцией суперпозиции*. Также очевидно, что количество формул, которые можно построить над (конечным) множеством функций $S$ бесконечно. С другой стороны, как мы уже знаем, количество функций над конечным множеством переменных – конечно. Отсюда следует, что каждой функции, получающейся при помощи операции суперпозиции, может соответствовать, вообще говоря, бесконечное множество формул. В связи с этим вводится следующее определение.

О п р е д е л е н и е 2. Две формулы $A$ и $B$ над множеством $S$ называются *эквивалентными*, если каждой из них соответствует одна и та же функция. Множество всех формул эквивалентных некоторой заданной формуле называется *классом эквивалентности*.

П р и м е р 1.

Построить таблицу истинности для функции $f(x,y,z)$, заданной формулой

$f(x,y,z)=(x\to y)\to((x\vee z)\to(y\vee z))$.

Р е ш е н и е.

Строим таблицу истинности функции, внося в её колонки промежуточные результаты.

| $x,y,z$ | $A=x\vee y$ | $B=y\vee z$ | $C=A\to B$ | $D=x\to y$ | $f=D\to C$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 0 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 0 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 1 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 1 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 0 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 0 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 1 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 1 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

При нахождении значений функций $A,B,C,D,f$ мы пользовались таблицами истинности элементарных функций.

П р и м е р 2.

Проверить, эквивалентны ли формулы

$A=x\vee(y\approx z)$ и $B=(x\vee y)\approx(x\vee z)$ .

Сторим таблицы истинности для каждой из формул

| $x, y, z$ | $(y \approx z)$ | $A = x \vee (y \approx z)$ |
|---|---|---|
| 0 0 0 | 1 | 1 |
| 0 0 1 | 0 | 0 |
| 0 1 0 | 0 | 0 |
| 0 1 1 | 1 | 1 |
| 1 0 0 | 1 | 1 |
| 1 0 1 | 0 | 1 |
| 1 1 0 | 0 | 1 |
| 1 1 1 | 1 | 1 |

| $x, y, z$ | $x \vee y$ | $x \vee z$ | $B = (x \vee y) \approx (x \vee z)$ |
|---|---|---|---|
| 0 0 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 0 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 1 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 1 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 0 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 0 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 1 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 1 1 | 1 | 1 | 1 |

Так как таблицы истинности функций, заданных формулами $A$ и $B$, совпадают, то формулы $A$ и $B$ эквивалентны.

П р и м е р 3.

Функции $f(x_1,x_2)$ и $g(x_3,x_4)$ заданы векторами значений $f(x_1,x_2)=(1,0,1,1)$, $g(x_3,x_4)=(1,0,0,1)$. Найти вектор значений функции $h(x_1,x_2,x_3,x_4)= f(x_1,x_2)\vee g(x_3,x_4)$.

Р е ш е н и е.

Заметим, что функция $h$ принимает 0 тогда и только тогда, когда и $f(x_1,x_2)=0$, и $g(x_3,x_4)=0$.

$f(x_1,x_2)$ принимает значению 0 на наборе, расположенном во второй строке таблицы истинности, то есть при $x_1=0,\ x_2=1$.

п $g(x_3,x_4)$ ринимает значение 0 на наборах, расположенных в таблице истинности во 2-й и 3-й строках, то есть при $x_3=0,\ x_4=1$ или при $x_3=1,\ x_4=0$.

Получаем, что $h(x_1,x_2,x_3.x_4)=0$ при условии, что $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=0,\ x_4=1$ или в случае, когда $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=1,\ x_4=0$.

Первый из наборов располагается в 6-й строке таблицы истинности функции $h$, второй – в 7-й строке. (то есть функция $h$ зависит по условию от 4 переменных,) Её таблица истинности содержит 16 строк) Значит, вектор значений функции $h$ имеет 16 координат, только 2 из которых равны 0. Остальные равны 1.

О т в е т. (1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1,1, 1,1).

З а д а н и е 1.

Построить таблицу истинности для функции $f(x,y,z)$, заданной формулой $f(x,y,z)=\overline{(x\vee y)\vee(x\wedge\overline{y})}\downarrow(x\approx y)$.

Р е ш е н и е

| $x,y,z$ | $A=x\vee y$ | $B=x\wedge\bar{y}$ | $C=A\vee B$ | $\bar{C}$ | $D=x\approx y$ | $\bar{C}\downarrow D$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 0 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 0 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 1 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 1 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 0 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 0 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 1 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 1 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

О т в е т $f(x,y,z)=(0,0,1,1,1,1,0,0)$ .

З а д а н и е 2.

Выяснить, эквивалентны ли формулы $A=((x_1 \vee x_2) \vee x3) \rightarrow ((x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3))$ и $B=x_1 \approx x_3$ .

Р е ш е н и е.

Составим таблицу истинности для каждой из функций, заданных формулами $A$ и $B$ .

| $x_1, x_2 . x_3$ | $C=x_1 \vee x_2$ | $D=C \vee x_3$ | $M=x_1 \vee x_3$ | $N=C \wedge M$ | $A=D \rightarrow N$ | $B=x_1 \approx x_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 0 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 0 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 1 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 1 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 0 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 0 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 1 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 1 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Формулам $A$ и $B$ соотвествуют функции, имеющие различные таблицы истинности. Значит, формулы не являются эквивалентными.

О т в е т. Нет.

З а д а н и е 3.

Решить систему

Р е ш е н и е.

Рассмотрим функции $f(x,y,z)=x+y+z$ и $f(x,y,z)=x+y+z$ .

Составим таблицу истинности этих функций.

$f(x,y,z)$

| $x, y.z$ | $x+y$ | $(x+y)+z$ |
|---|---|---|
| 0 0 0 | 0 | 0 |
| 0 0 1 | 0 | 1 |
| 0 1 0 | 1 | 1 |
| 0 1 1 | 1 | 0 |
| 1 0 0 | 1 | 1 |
| 1 0 1 | 1 | 0 |
| 1 1 0 | 0 | 0 |
| 1 1 1 | 0 | 1 |

$g(x, y, z)$

| $x, y.z$ | $x \wedge y$ | $(x \wedge y)+z$ |
|---|---|---|
| 0 0 0 | 0 | 0 |
| 0 0 1 | 0 | 1 |
| 0 1 0 | 0 | 0 |
| 0 1 1 | 0 | 1 |
| 1 0 0 | 0 | 0 |
| 1 0 1 | 0 | 1 |
| 1 1 0 | 1 | 1 |
| 1 1 1 | 1 | 0 |

Выясним, на каких наборах функция $f(x, y, z)=1$. Из таблицы истинности функции $f(x, y, z)$ видно что этому словию удовлетворяют наборы (0, 0, 1), (0, 1, 0) , (1, 0, 0), (1, 1, 1).

Выясним, на каких наборах функция $g(x, y, z)=0$. Это наборы (0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 1).

Наборы, на которых выполняются и 1-е, и 2-е условие – (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 1). Они и являются решением системы.

О т в е т. (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 1).

З а д а чи д л я с а м о с т о я т е л ь н о г о р е ш е н и я.

1. Построить таблицы истинности для соотвествующих функций, убедиться в справедливости следующих эквивалентностей.

(а) $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ ;

(б) $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$ ;

(в) $(x + y) \wedge z = (x \wedge z) + (y \wedge z)$ ;

(г) $x \vee y = (x \rightarrow y) \rightarrow y$ ;

(д) $x \approx y = (x \rightarrow y) \rightarrow y$ ;

(е) $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$ ;

(ё) $x + y = (x \wedge \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y)$ .

2. Построив таблицы истинности соответствующих функций, выяснить, эквивалентны ли формулы $A$ и $B$.

(а) $A = (x \vee \bar{y}) \downarrow (\bar{x} \rightarrow (y \rightarrow z))$, $B = \overline{y \rightarrow (x \vee z)}$ ;

(б) $A = x \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (y \wedge z))$, $B = (x \vee (y \rightarrow z)) \wedge (x + y)$ .

О т в е т.

(а) эквивалентны; (б) не эквивалентны.

3. Функции $f(x_{1,} x_2)$ и $g(x_{3,} x_4)$ заданы своими векторами значений:

$f(x_1, x_2) = (1,0,0,0)$ , $g(x_3, x_4) = (0,1,1,1)$ .

Найти вектор значений функции $h(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_1, x_2) \wedge g(x_3, x_4)$ .

О т в е т. (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).

## *§4. Основные эквивалентности*

При оперировании с булевыми функциями бывают полезны следующие эквивалентности.

1. *Ассоциативность*: $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ .

2. *Коммутативность*: $(x \circ y) = (y \circ x)$ .

3. *Дистрибутивность*: а) $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$,

б) $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$,

в) $(x + y) \wedge z = (x \wedge z) + (y \wedge z)$.

4. *Правила де Моргана:* а) $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$,

б) $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$.

5. *Правила поглощения:* а) $x \vee (x \wedge y) = x$,

б) $x \wedge (x \vee y) = x$.

6. а) $x \vee (\bar{x} \wedge y) = x \vee y$,

б) $x \wedge (\bar{x} \vee y) = x \wedge y$.

7. $0 = x \wedge \bar{x} = x \wedge 0 = x + x$.

8. $1 = x \vee \bar{x} = x \vee 1 = x \approx x$.

9. $x = \bar{\bar{x}} = x \vee x = x \wedge x = x \wedge 1 = x \vee 0$.

10. $\bar{x} = x + 1$.

11. $x \approx y = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})$.

12. $x + y = (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y)$.

13. $x \to y = \bar{x} \vee y$.

14. $(x \wedge y) = min(x, y) = x \cdot y$, $(x \vee y) = max(x, y)$.

П р и м е р 1.

Упростить формулу $(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y})$.

Р е ш е н и е.

$(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) =$ (по свойству 3б) $x \vee (y \wedge \bar{y}) =$ (по свойству 6) $x \vee 0 = x$.

О т в е т. $(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) = x$.

П р и м ер 2.

Упростить формулу

$\overline{(y \wedge z) \to z}$

Р е ш е н и е.

$\overline{(y \wedge z) \to z} =$ (по свойству 12) $\overline{\overline{(y \wedge z)} \vee z} =$ (по свойству 4б) $\overline{\overline{(y \wedge z)}} \wedge \bar{z} =$ (по свойству 8) $(y \wedge z) \wedge \bar{z} =$ (по свойству 1) $y \wedge (z \wedge \bar{z}) =$ (по свойству 6) $y \wedge 0 = 0$.

О т в е т. $\overline{(y \wedge z) \to z} = 0$.

П р и м е р 3.

Упростив формулу $(x_1 \to (x_1 \vee x_2)) \to x_3$, определить, какие из переменных являются существенными.

Р е ш е н и е.

$(x_1 \to (x_1 \vee x_2)) \to x_3 =$ (по свойству 12) $(\bar{x}_1 \vee (x_1 \vee x_2)) \to x_3 =$ (по свойству 1) $((\bar{x}_1 \vee x_1) \vee x_2) \to x_3 =$ (по свойству 7) $(1 \vee x_2) \to x_3 =$ (по свойству 7) $1 \to x_3 =$ (по свойству 12) $\bar{1} \vee x_3 = 0 \vee x_3 = x_3$ .

Мы получили эквивалентную исходной формулу, из которой исключены переменные $x_1$ и $x_2$ . Этот результат означает фиктивность переменных $x_1$ и $x_2$ . Переменная $x_3$ - существенная.

О т в е т. Переменная $x_3$ - существенная.

З а д а н и е 1. Упростить формулу $((x \to y) \vee (x \to y)) \to y$ .

Р е ш е н и е.

$$x \to y \vee x \to y \to y \overset{св.12,8}{=} x \vee y \vee x \vee y \to y \overset{св.1,2,8}{=} x \vee x \vee y \to y \overset{св.7}{=} 1 \vee y \to y \overset{св.7}{=} 1 \to y = 0 \vee y = y.$$

О т в е т: $y$ .

З а д а н и е 2. Упростить формулу $((x \to y) \wedge (y \vee z)) \to (x \vee y)$ .

Р е ш е н и е.

$$x \to y \wedge y \vee z \to x \vee y \overset{св.12}{=} x \vee y \wedge y \vee z \to x \wedge y \overset{св.1}{=} x \vee y \wedge y \vee z \vee x \vee y \overset{св.4а}{=} x \vee y \vee y \vee z \vee x \vee y \overset{св.4б,8}{=}$$
$$x \wedge y \vee y \wedge z \vee x \vee y \overset{св.1,2}{=} (x \wedge y \vee x) \vee (y \wedge z \vee y) \overset{св.5,13}{=} x \vee y \vee z = x \vee y \vee z$$

О т в е т: $x \vee y \vee z$ .

З а д а н и е 3. Упростив формулу $((x_1 + x_2) \to x_3) \wedge (x_3 \to x_2)$ , проверить, является ли переменная $x_1$ существенной.

Р е ш е н и е.

$$x_1 + x_2 \to x3 \wedge x3 \to x2 = x_1 \wedge x_2 \vee x_1 \wedge x_2 \to x_3 \wedge x_3 \vee x_2 = x_1 \wedge x_2 \vee x_1 \wedge x_2 \vee x_3 \wedge x_3 \wedge x_2 =$$
$$= ((x_1 \wedge x_2 \wedge x_1 \wedge x_2) \vee x_3) \wedge x_3 \wedge x_2 = x_1 \wedge x_2 \wedge x_1 \wedge x_2 \vee x_3 \wedge x_3 \wedge x_2 =$$
$$= x_1 \wedge x_1 \vee x_2 \wedge x_1 \vee x_1 \wedge x_2 \vee x_2 \wedge x_2 \vee x_3 \wedge x_3 \wedge x_2 = ((x_2 \wedge x_1) \vee (x_1 \wedge x_2) \vee x_3) \wedge x_3 \wedge x_2 =$$
$$= (x_2 \wedge x_1 \wedge x_3 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_2) \vee x_3 \wedge x_3 \wedge x_2 = 0 \vee x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \vee x_3 \wedge x_2 =$$
$$= x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \vee x_3 \wedge x_2 = x_3 \wedge x_{2,}$$

так как $A \wedge B \vee B = B$ .

Эквивалентная исходной формула не содержит переменной $x_1$ . Значит, переменная $x_1$ – фиктивная.

О т в е т: $x_1$ – фиктивная переменная.

З а д а н и е 4. Упростить $((x \to y) \vee (x \wedge z)) \wedge (z \to x)$ .

Р е ш е н и е.

$$x \to y \vee x \wedge z \wedge z \to x = x \to y \vee x \wedge z \wedge z \vee x = y \vee x \vee x \wedge z \wedge z \vee x =$$
$$= y \vee x \vee z \wedge z \, orx = y \wedge z \vee y \wedge x \vee x \wedge z \vee x \wedge x \vee z \wedge z \vee x \wedge z = y \wedge z \vee y \wedge x \vee x \wedge z \vee z \vee x \wedge z = (y \wedge x) \vee z.$$

О т в е т: $(y \wedge x) \vee z$ .

З а д а ч и д л я с а м о с т о я т е л ь н о г о р е ш е н и я.

1. Упростить формулы

(1) $(z \wedge (x \quad y)) \to (x \vee y)$ ;

(2) $((x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2)) \wedge ((x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3))$ ;

(3) $((x \to y) \wedge (y \vee z)) \to (x \vee y)$ ;

(4) $((x \wedge y) \to z) \wedge (x \vee z) \wedge (x \wedge z)$ ;

(5) $(x \vee y \vee z) \wedge ((x \wedge z) \to y) \vee x$ .

О т в е т.

(1) $x \vee y \vee z$ ;

(2) $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ ;

(3) $x \vee y \vee z$ ;

(4) $z \vee x$ ;

(5) $x \vee (y \wedge z) \vee y \wedge z$ .

2. Используя основные эквивалентности, доказать эквивалентность формул $A$ и $B$ , где

$$A = x \to y \to x \wedge y \approx x + y, \quad B = (x \wedge y \to x) \to y \quad .$$

3. Используя эквивалентные преобразования, показать, что переменная $x_1$ является фиктивной:

(а) $(x_2 \to x_1) \wedge (x_2 \vee x_2)$ ;

(б) $x_1 \vee x_2 \to x_1 \approx x_3 \wedge x_1 \to (x_2 \wedge x_3)$ .

4. Используя эквивалентные преобразования, найти существенные переменные функций:

(1) $f = x_1 \vee x_2 \rightarrow x_1 \wedge x_2 + ((x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_1))$ ;

(2) $f = (x_1 + (x_2 \rightarrow (x_1 \approx x_2))) \vee (x_1 \rightarrow x_2)$ .

О т в е т ы.

(1) существенных переменных нет;

(2) $x_2$ .

## §5. *Совершенные дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы*

Т е о р е м а 1. Каждая булева функция $f$ (от какого-либо количества переменных) может быть выражена в виде формулы над множеством булевых функций $S = \{x \wedge y,\ x \vee y,\ \bar{x}\}$ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \equiv 0$ , тогда $f = x \wedge \bar{x}$ .

Пусть теперь $f$ - произвольная функция, принимающая значение 1 ровно на одном векторе из $B^n$, скажем, векторе $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ . Введём обозначения:

$$x^{\sigma} = \begin{cases} x, & \text{если } \sigma = 1; \\ \bar{x}, & \text{если } \sigma = 0 \end{cases}$$

и

$$K(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n} .$$

Легко проверить, что $x^{\sigma} = 1$ тогда и только тогда, когда $x = \sigma$ . И из свойств конъюнктивного произведения (см. п.3) вытекает, что

$$K(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{\sigma_1} = 1, \\ x_2^{\sigma_2} = 1, \\ \ldots \\ x_n^{\sigma_n} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \sigma_1, \\ x_2 = \sigma_2, \\ \ldots \\ x_n = \sigma_n \end{cases} .$$

Отсюда получаем, что рассматриваемая нами функция $f$ может быть представлена в виде формулы $K(\sigma_1, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ - формулы над $S$ .

Далее пусть $f$ - произвольная функция, принимающая значение 1 ровно на двух различных векторах из $B^n$, скажем, на векторах $(\sigma_1^1, \sigma_2^1, \ldots, \sigma_n^1)$ и $(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2)$ . Тогда из определения дизъюнкции и указанного выше свойства формул вида $K(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ получаем, что формула (построенная над $S$ )

$$K(\sigma_1{}^1, \sigma_2{}^1, \ldots, \sigma_n{}^1) \vee K(\sigma_1{}^2, \sigma_2{}^2, \ldots, \sigma_n{}^2)$$

принимает значение 1 либо когда $x_i = \sigma_i{}^1$, либо когда $x_i = \sigma_i{}^2$, для каждого $i = 1,2,\ldots n$, то есть соответствует функции $f$.

Последовательно применяя подобные рассуждения к функциям, принимающим значение 1 ровно на трёх, четырёх и т.д. попарно различных векторах, получаем выражение в виде формулы над $S$ произвольной булевой функции от $n$ переменных:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1}} x_1{}^{\sigma_1} \wedge x_2{}^{\sigma_2} \wedge \ldots \wedge x_n{}^{\sigma_n}$$

О п р е д е л е н и е 1. Формула

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1}} x_1{}^{\sigma_1} \wedge x_2{}^{\sigma_2} \wedge \ldots \wedge x_n{}^{\sigma_n}$$

называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (*совершенной ДНФ*).

А л г о р и т м п о с т р о е н и я с о в е р ш е н н о й Д Н Ф.

Пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задаётся таблицей истинности.

1. Выделим в таблице истинности все наборы, на которых функция принимает значение 1.

2. Для каждого такого набора $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ составим конъюнкцию $K(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = x_1{}^{\sigma_1} \wedge x_2{}^{\sigma_2} \wedge \ldots \wedge x_n{}^{\sigma_n}$, учитывая, что если $\sigma_i = 0$, то переменная $x_i$ входит в конъюнкцию в виде $\bar{x}_i$, а если $\sigma_i = 1$ - то в виде $x_i$.

3. Составим дизъюнкцию всех полученных конъюнкций $K_1, K_2, \ldots, K_s$:

   $D = K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_s$.

Полученная формула является совершенной ДНФ.

П р и м е р 1. Пусть $\beta_f = (10100101)$. Построить совершенную ДНФ функции $f$.

Р е ш е н и е. Строим таблицу истинности функции $f$.

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

.

Функция $f$ принимает значение 1 на четырёх наборах. Рассмотрим каждый из них.

1. (0,0,0). Строим конъюнкцию $K_1 = x_1{}^0 \wedge x_2{}^0 \wedge x_3{}^0$. По определению, $x^0 = \bar{x}$. Значит, $K_1 = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3$

2. (0,1,0). Строим конъюнкцию $K_2 = x_1{}^0 \wedge x_2{}^1 \wedge x_3{}^0$. По определению, $x^1 = x$. Значит, $K_2 = \bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3$

3. (1,0,1). Строим конъюнкцию $K_3 = x_1{}^1 \wedge x_2{}^0 \wedge x_3{}^1$: $K_3 = x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3$ .

4. (1,1,1). $K_4 = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ .

Получаем: $D = K_1 \vee K_2 \vee K_3 \vee K_4$.

О т в е т. $f = (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$.

Т е о р е м а 2. Если не все значения функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равны 1, то

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigwedge_{\substack{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 0}} x_1{}^{\bar{\sigma}_1} \wedge x_2{}^{\bar{\sigma}_2} \wedge \ldots \wedge x_n{}^{\bar{\sigma}_n}$$

О п р е д е л е н и е 2. Формула

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigwedge_{\substack{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 0}} x_1{}^{\bar{\sigma}_1} \wedge x_2{}^{\bar{\sigma}_2} \wedge \ldots \wedge x_n{}^{\bar{\sigma}_n}$$

называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (*совершенной КНФ*).

А л г о р и т м п о с т р о е н и я с о в е р ш е н н о й К Н Ф.

Пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задаётся таблицей истинности.

1. Выделим в таблице истинности все наборы, на которых функция принимает значение 0.

2. Для каждого такого набора $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ составим дизъюнкцию

$D(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee \ldots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}$, учитывая, что если $\sigma_i = 1$, то переменная $x_i$ входит в дизъюнкцию в виде $\bar{x}_i$, а если $\sigma_i = 0$ - то в виде $x_i$.

3. Составим конъюнкцию всех полученных дизъюнкций $D_1, D_2, \ldots, D_r$:

$K = D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_r$.

Полученная формула является совершенной ДНФ.

Пример 2. Пусть $\beta_f = (10011111)$. Построить совершенную КНФ функции $f$.

Решение. Строим таблицу истинности функции $f$.

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

.

Таблица истинности содержит два набора, на которых функция $f$ принимает значение 0.

1. По набору (0,0,1) составляем первую дизъюнкцию, учитывая, что если $\sigma_i = 1$, то переменная $x_i$ включена в дизъюнкцию в виде $\bar{x}_i$, а если $\sigma_i = 0$ - то в виде $x_i$. Получаем: $D_1 = x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$.

2. По набору (0,1,0) строим дизъюнкцию $D_2 = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$.

3. Составляем конъюнкцию полученных дизъюнкций: $K = D_1 \wedge D_2$, $f = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$.

Ответ. $f = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$

Пример 3. Пусть $f(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$. Найти вектор $\beta_f$ значений этой функции.

Решение. Функция $f$ задана формулой, которая является совершенной ДНФ. В совершенную ДНФ включаются конъюнкции, соответствующие наборам, на которых функция принимает значение 1. Заданная формула содержит три конъюнкции: $K_1$, $K_2$, $K_3$, значит, функция $f$ принимает значение 1 ровно на трёх наборах Найдём их.

1. Конъюнкция $K_1 = \bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3$ принимает значение 1 на наборе (0,1,0).

2. Конъюнкция $K_2 = x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3$ принимает значение 1 на наборе (1,0,0).

3. Конъюнкция $K_3 = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ принимает значение 1 на наборе (1,1,1).

Набор (0,1,0) имеет номер 2 и располагается в третьей строке таблицы истинности; значит, $\beta_3 = 1$.

Набор (1,0,0) имеет номер 4 и располагается в пятой строке таблицы истинности; значит, $\beta_5 = 1$ .

Набор (1,1,1) имеет номер 7 и располагается в восьмой строке таблицы истинности; значит, $\beta_8 = 1$ .

Остальные координаты вектора $\beta_f$ равны 0.

О т в е т. $\beta_f = (0{,}0{,}1{,}0{,}1{,}0{,}0{,}1)$ .

П р и м е р 4. Пусть $f(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$ . Найти вектор $\beta_f$ значений этой функции.

Р е ш е н и е. Функция $f$ задана формулой, которая является совершенной КНФ. Каждая дизъюнкция, входящая в совершенную КНФ, однозначно определяет набор, на котором функция принимает значение 0. В заданную формулу входят две дизъюнкции. Следовательно, функция $f$ принимает значение 0 ровно на двух наборах. Найдём их.

1. $D_1 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$ . $D_1 = 0$ тогда и только тогда, когда $x_1 = 1$ , $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ . Получаем набор (1,1,0), располагающийся в седьмой строке таблицы истинности; значит, $\beta_7 = 0$ .

2. $D_2 = x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$ . $D_2 = 0$ тогда и только тогда, когда $x_1 = 0$ , $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ . Получаем набор (0,0,1), располагающийся во второй строке таблицы истинности; значит, $\beta_2 = 0$ .
Остальные координаты вектора $\beta_f$ равны 1.

О т в е т. $\beta_f = (1{,}0{,}1{,}1{,}1{,}1{,}0{,}1)$ .

П р и м е р 5. Преобразовать формулу $(x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3)$ к виду совершенной ДНФ.

Р е ш е н и е. Совершенная ДНФ функции $f(x_1, x_2, x_3)$ имеет вид $K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_s$ , где $K_i$ - конъюнкция, содержащая каждую из переменных $x_1, x_2, x_3$ . Наша формула содержит две конъюнкции - $K_1$ и $K_2$ , в каждую из которых входят только две переменные. Необходимо «нарастить» каждую из этих конъюнкций.

1. Конъюнкция $K_1 = x_1 \wedge \bar{x}_2$ не содержит переменную $x_3$ . Проделаем следующую процедуру:

(а) так как $K_1 = K_1 \wedge 1$ , то $K_1 = x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge 1$ ;

(б) так как $1 = x_3 \vee \bar{x}_3$ , то $K_1 = (x_1 \wedge \bar{x}_2) \wedge (x_3 \vee \bar{x}_3)$ ;

(в) так как $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ , получаем

$$K_1 = (x_1 \wedge \bar{x}_2) \wedge (x_3 \vee \bar{x}_3) = (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) .$$

В полученной формуле каждая из двух конъюнкций содержит все три переменные.

2. Рассмотрим конъюнкцию $K_2 = \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3$ . Она не содержит переменную $x_1$ . Действуя аналогично тому, как это было в п.1, получаем:

$$K_2 = \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3 = \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge 1 = (\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_1) = (\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge x_1) \vee (\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge \bar{x}_1) .$$

Последняя формула состоит из конъюнкций, содержащих все три переменные.

3. Объединяя результаты пп.1 и 2, получаем:

$f = (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3)$ .

Полученная формула содержит две одинаковые скобки-конъюнкции. Учитывая, что $A \vee A = A$ , получаем

О т в е т. $f = (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3)$ .

З а д а н и е 1. Функция $f(x_1, x_2, x_3)$ задана вектором значений $\beta_f = (1,0,0,0,0,1,0,0)$ . Построить совершенную ДНФ функции $f(x_1, x_2, x_3)$ .

Р е ш е н и е. Вектор значений функции $f(x_1, x_2, x_3)$ имеет 2 координаты, равные 1: $\beta_1$ и $\beta_6$ . Этим координатам соответствуют наборы $\alpha_1 = (0,0,0)$ и $\alpha_2 = (1,0,1)$ . По каждому из наборов строим конъюнкции $K_1$ и $K_2$: $K_1 = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3$, $K_2 = x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3$ . Составляем совершенную ДНФ $D = K_1 \vee K_2$ и получаем

О т в е т. $f(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3)$ .

З а д а н и е 2. Функция $f(x_1, x_2, x_3)$ задана вектором значений $\beta_f = (1,1,0,1,0,0,1,1)$ . Построить совершенную КНФ функции $f(x_1, x_2, x_3)$ .

Р е ш е н и е. Ровно 3 координаты вектора значений равны 0. Определяем соответствующие этим координатам наборы: (0,1,0), (1,0,0), (1,0,1). Для каждого из наборов построим дизъюнкцию: $D_1 = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$, $D_2 = \bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3$, $D_3 = \bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$ . Составляем совершенную КНФ функции $f(x_1, x_2, x_3)$ : $K = D_1 \wedge D_2 \wedge D_3$ .

О т в е т. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$ .

З а д а н и е 3. Найти вектор значений функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) .$$

Р е ш е н и е. Функция $f$ задана своей совершенной ДНФ, которая состоит из трёх конъюнкций: $K_1$, $K_2$, $K_3$ . Каждой из этих конъюнкций соответствует набор, на котором функция принимает значение1. Такими наборами являются следующие: (0,1,0), (1,0,0), (1,1,0). Они располагаются в третьей, пятой и седьмой строках таблицы истинности. Значит, $\beta_1 = 1,\ \beta_5 = 1,\ \beta_7 = 1$ , остальные координаты вектора значений функции равны 0.

О т в е т. $\beta_f = (00101010)$ .

З а д а н и е 4. Найти вектор значений функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) .$$

Р е ш е н и е. Функция $f$ задана своей совершенной КНФ, состоящей из трёх дизъюнкций, каждой из которых соответствует набор, на котором функция принимает значение 0. Находим эти наборы: (1,0,1), (0,1,1), (0,0,1). Они располагаются в шестой, четвёртой и второй строках таблицы истинности. Значит, $\beta_2 = 0,\ \beta_4 = 0,\ \beta_6 = 0$ , остальные координаты вектора значений функции равны 1.

О т в е т. $\beta_f = (10101001)$ .

З а д а н и е 5. Используя эквивалентные преобразования, получить совершенную ДНФ функции $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee (\bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_3)$.

Р е ш е н и е.

1. $$\begin{aligned} x_1 &= x_1 \wedge 1 = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2) = (x_1 \wedge x_2 \wedge (x_3 \vee \bar{x}_3)) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge (x_3 \vee \bar{x}_3)) = \\ &= (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \end{aligned}.$$

2. $\bar{x}_2 \wedge x_3 = (x_1 \vee \bar{x}_1) \wedge (\bar{x}_2 \wedge x_3) = (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3)$.

3. $\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_3 = (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_3) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_2) = (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3)$.

Объединяя результаты пп. 1 — 3, получаем:

$$\begin{aligned} &f(x_1, x_2, x_3) = \\ &= (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3 \vee \\ &\vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \end{aligned}.$$

Упрощаем выражение, используя свойство $K \vee K = K$.

О т в е т. $$\begin{aligned} &f(x_1, x_2, x_3) = \\ &= (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee \\ &\vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \end{aligned}.$$

З а д а ч и д л я с а м о с т о я т е л ь н о г о р е ш е н и я.

1. Для функции $f(x_1, x_2, x_3)$, заданной вектором значений $\beta_f = (1{,}0{,}0{,}1{,}0{,}1{,}0{,}0)$, построить совершенную ДНФ.

О т в е т. $f(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3)$.

2. Для функции $f(x_1, x_2, x_3)$, заданной вектором значений $\beta_f = (1{,}1{,}0{,}1{,}0{,}0{,}1{,}1)$, построить совершенную КНФ.

О т в е т. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$.

3. Для функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, заданной вектором значений

$$\beta_f = (0001010010000001),$$

построить совершенную ДНФ.

О т в е т.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge \bar{x}_4) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4).$$

4. Для функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, заданной вектором значений

$$\beta_f = (1011110111011111),$$

построить совершенную КНФ.

О т в е т.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4).$$

5. Для функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_4) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_4)$ найти вектор $\beta_f$ значений этой функции.

О т в е т. $\beta_f = (0000001000100000)$ .

6. Для функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , заданной формулой $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)$ , найти вектор значений $\beta_f$ .

О т в е т. $\beta_f = (1111101110111111)$ .

7. Используя эквивалентные преобразования, получить совершенные ДНФ функций

(а) $f(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2)$ ;

(б) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (\bar{x}_2 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_4) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_4)$ .

О т в е т. (а) $f(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3)$ ;

(б) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_4) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge \bar{x}_4) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_4)$ .

**К о н т р о л ь н ы е   в о п р о с ы   п о т е м е   б у л е в ы   ф у н к ц и и**

1)Что называется n-мерным булевым вектором?

2)Что называется номером булева вектора?

3)Сколько существует различных n-мерных булевых вектором?

4)Какие булевы векторы называются соседними?

5)Какие булевы векторы называются противоположными?

6)Что называется булевой функцией?

7)Как строится таблица истинности булевой функции?

8)Что называется вектором значений булевой функции:

9)Какая переменная называется существенной?

10)Сколько строк содержит таблица истинности булевой функции, зависящей от n переменных?

11)Сколько существует различных булевых функций, зависящих от n переменных?

12)Какие булевы функции называются элементарными?

13)Какие функции называются равными?

14)Что наывается формулой?

15)Какие основные эквивалентности вы знаете?

16)Что называется соверешенной ДНФ?

17)Что называется совершенной КНФ?

18)Как формулируется лагортим построения совершенной ДНФ функции, заданной таблицой истинности?

19)В чём состоит алгоритм построения совершенной КНФ функции, заданной таблицей истинности?

20)Какие эквивалентности используются при преобразовании формулы к виду совершенной ДНФ?