НHЫЙ
[ЕНИЯ

Кафедра «Прикладная математика -2»

А.И. Фроловичев

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
Часть II

Рекомендовано редакционным издательским советом университета в качестве методических указаний для студентов специальности АКБ.

МОСКВА – 2007

УДК 514
Ф 91

Фроловичев А.И. Аналитическая геометрия.
Часть II.
Методические указания.- М.: МИИТ, 2007. - 51 с.

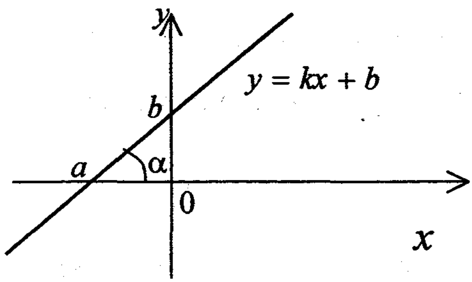
Предназначены для студентов I курса специальности АКБ по дисциплине геометрия. Содержит разделы: прямая на плоскости, прямая и плоскость в пространстве.

Тема 1. Прямая на плоскости.

1. *Уравнение прямой с угловым коэффициентом*

$$y = kx + b\,. \qquad (1.1)$$

Угловой коэффициент k прямой – это тангенс угла наклона α прямой к оси Ox.



2. В декартовой системе координат каждая прямая на плоскости определяется уравнением первой степени $Ax + By + C = 0$ ($A^2 + B^2 \neq 0$) и, обратно, каждое уравнение первой степени с двумя переменными определяет прямую.

Уравнение вида

$$Ax + By + C = 0 \;\; (A^2 + B^2 \neq 0) \qquad (1.2)$$

называется *общим уравнением прямой*. Если в нем $C = 0$, то прямая проходит через начало координат; если $A = 0$, то прямая параллельна оси абсцисс; если $B = 0$, то прямая параллельна оси ординат.

3. *Уравнение прямой, проходящей через две данные точки* $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (1.3)$$

4. *Уравнение прямой в отрезках.*

Если прямая пересекает ось Ox в точке $(a;0)$, а ось Oy в точке $(0;b)$ (см. рис.), то ее уравнение имеет вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (1.4)$$

5. Острый *угол* φ *между прямыми*, имеющими угловые коэффициенты k_1 и k_2, определяется по формуле

$$tg\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|. \qquad (1.5)$$

Условие параллельности двух прямых, имеющих угловые коэффициенты k_1 и k_2:

$$k_1 = k_2. \qquad (1.6)$$

Условие перпендикулярности двух прямых:

$$k_1 k_2 = -1. \qquad (1.7)$$

6. *Уравнение прямой, проходящей через данную точку* $A(x_0;y_0)$ *и имеющей угловой коэффициент* k:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (1.8)$$

7. *Взаимное расположение прямых на плоскости.*

Если даны две прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то их взаимное расположение определяется системой

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Возможны следующие случаи:

а). система имеет единственное решение, т.е. прямые пересекаются;

б). система имеет множество решений, т.е. прямые совпадают;

в). система не имеет решений, т.е. прямые параллельны.

8. *Пучок прямых.*

Совокупность всех прямых, проходящих через данную точку S, называется пучком прямых. S - центр пучка.

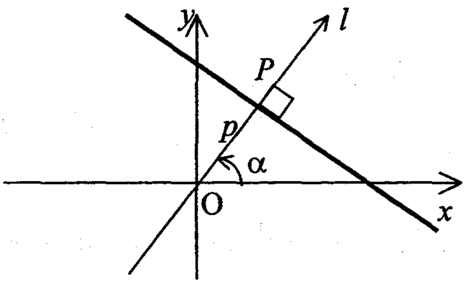
Если $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ - уравнения двух прямых, пересекающихся в точке S, то уравнение любой прямой пучка имеет вид

$$\alpha\left(A_1x+B_1y+C_1\right)+\beta\left(A_2x+B_2y+C_2\right)=0, \qquad (1.9)$$

где α и β некоторые действительные числа, одновременно неравные нулю.

9. *Нормальное уравнение прямой*:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0. \qquad (1.10)$$



Свойства нормального уравнения:

1). $-p\le 0$;

2). $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$.

Для приведения общего уравнения прямой к нормальному виду, необходимо обе его части поделить на $\pm\sqrt{A^2+B^2}$ (знак выбирается противоположным знаку C).

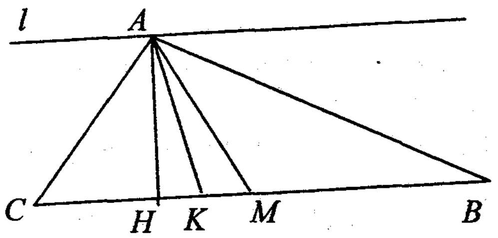
10. *Расстояние* d *от точки* $A(x_0;y_0)$ *до прямой* $Ax+By+C=0$ находится по формуле

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (1.11)$$

11. Уравнения *биссектрис* углов между прямыми $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ имеют вид

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} \pm \frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}=0. \qquad (1.12)$$

Задача 6.1. Даны стороны треугольника ABC: (AB) $x+y-6=0$, (BC) $3x-5y+14=0$ и (AC) $5x-3y-14=0$.



Составить уравнения:

1). высоты AH;

2). медианы AM;

3). биссектрис углов между прямыми AC и BC.

4). прямой l, проходящей через точку A параллельно прямой BC.

Найти:

5). длину h высоты AH;

6). угол α между прямыми AC и BC.

► Найдем вершины треугольника ABC, как точки пересечения соответствующих прямых.

$$A:\begin{cases} x+y-6=0, \\ 5x-3y-14=0; \end{cases} \text{ откуда } A(4;2).$$

$$B:\begin{cases} x+y-6=0, \\ 3x-5y+14=0; \end{cases} \text{ откуда } B(2;4).$$

$$C:\begin{cases} 5x-3y-14=0, \\ 3x-5y+14=0; \end{cases} \text{ откуда } C(7;7).$$

1). Уравнение BC перепишем в виде $y=\frac{3}{5}x+\frac{14}{5}$. Угловой коэффициент k_{BC} прямой BC равен $3/5$.

Высота AH по определению является прямой, проходящей через точку A перпендикулярно BC. Используя условие перпендикулярности двух прямых, получаем

$$k_{AH}=-1/k_{BC}=-\frac{1}{3/5}=-\frac{5}{3}.$$

Далее можно использовать уравнения (1.1) или (1.8). Зная, что прямая AH проходит через точку $A(4;2)$, из (6.8) получаем

$$y-2=-\frac{5}{3}\cdot(x-4).$$

Итак, уравнение AH: $y=-\frac{5}{3}x+\frac{26}{3}$.

2). Найдем координаты точки M, как середины отрезка BC. Получаем $M\left(\frac{9}{2};\frac{11}{2}\right)$.

По формуле (1.3) получаем уравнение прямой AM:

$$\frac{x-4}{\frac{9}{2}-4}=\frac{y-2}{\frac{11}{2}-2}.$$

Окончательно, уравнение AM: $y=7x-26$.

3). Рассматривая формулу (1.12) получаем уравнения биссектрис углов между прямыми AC и BC:

$$\frac{5x-3y-14}{\sqrt{5^2+(-3)^2}}\pm\frac{3x-5y+14}{\sqrt{3^2+(-5)^2}}=0,$$

упрощая которое, получаем две биссектрисы: $y=x$ и $y=-x+14$.

4). Угловой коэффициент k_{BC} прямой BC равен $3/5$. Используя условие параллельности двух прямых, получаем

$$k_l=k_{BC}=\frac{3}{5}.$$

Далее можно поступить как в пункте 1).

Рассмотрим другой способ. Зная, что прямая l с угловым коэффициентом проходит через точку $A(4;2)$, из (1.1) получаем уравнение

$$2=\frac{3}{5}\cdot 4+b,$$

откуда $b=-\frac{2}{5}$ и уравнение прямой l выглядит так:

$$y=\frac{3}{5}x-\frac{2}{5}.$$

5). Длину h высоты AH можно найти, используя формулу для расстояния между двумя точками (для этого предварительно нужно искать точку H).

Мы же используем формулу (1.11) для точки $A(4;2)$ и прямой BC: $3x-5y+14=0$. Получим

$$h=\frac{|3\cdot 4-5\cdot 2+14|}{\sqrt{3^2+(-5)^2}}=\frac{16}{\sqrt{34}}.$$

6). Угол α между прямыми AC и BC найдем по формуле (1.5). Угловые коэффициенты прямых: $k_{AC}=\frac{5}{3}$, $k_{BC}=\frac{3}{5}$. Получаем

$$tg\alpha = \frac{\left|\frac{5}{3}-\frac{3}{5}\right|}{1+\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{5}} = \frac{16}{2\cdot 15} = \frac{8}{15},$$

откуда $\alpha = arctg\left(\frac{8}{15}\right) \approx 28^0$.◄

Задача 6.2. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $3x-4y+7=0$ и $5x+2y+3=0$ и параллельную оси ординат.

► Прямая принадлежит пучку (см. 1.9)

$\alpha(3x-4y+7)+\beta(5x+2y+3)=0$, т.е.

$(3\alpha+5\beta)x+(-4\alpha+2\beta)y+(7\alpha+3\beta)=0$.

Так как искомая прямая параллельна оси ординат, то коэффициент при y должен быть равен 0: $-4\alpha+2\beta=0$, т.е. $\beta=2\alpha$. Подставив полученное выражение в уравнение пучка, получим $13\alpha x+13\alpha=0$. Искомое уравнение: $x=-1$.◄

Задача 6.3. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M(5;1)$ и образующих с прямой $2x+y-4=0$ угол $\pi/4$.

► Очевидно, что таких прямых две. Пусть угловой коэффициент одной из них равен k. Угловой коэффициент заданной прямой равен -2. Так как угол между искомой и заданной прямой равен $\pi/4$, то по формуле (1.5)

$$tg\frac{\pi}{4}=\left|\frac{k+2}{1-2k}\right|, \text{ т.е. } 1=\left|\frac{k+2}{1-2k}\right|,$$

откуда

$$\frac{k+2}{1-2k}=1 \text{ и } \frac{k+2}{1-2k}=-1.$$

Решая каждое из полученных уравнений, находим $k=-1/3$ и $k=3$. Итак, уравнение одной из искомых прямых запишется (см. 1.8) в виде $y-1=(-1/3)(x-5)$, т.е. $x+3y-8=0$, а уравнение другой прямой в виде $y-1=3(x-5)$, т.е. $3x-y-14=0$.◄

Задачи для самостоятельного решения.

1.4. При каких значениях a прямая $(a+2)x+(a^2-9)y+3a^2-8a+5=0$ а). параллельна оси абсцисс; б). параллельна оси ординат; в). проходит через начало координат.

Ответ: а). –2; б). ± 3; в). 1;5/8.

1.5. Принадлежат ли точки $A(3;1)$, $B(0;4)$ прямой $2x-3y-3=0$.

Ответ: A принадлежит, B не принадлежит.

1.6. Найти точку пересечения прямых $3x-4y-29=0$ и $2x+5y+19=0$.

Ответ: $(3;-5)$.

1.7. Определить точки пересечения прямых $3x-4y-12=0$, $4x+3y+12=0$, $3x+5y-15=0$ с осями координат. Построить эти прямые.

1.8. Построить области, координаты точек которых удовлетворяют неравенствам:

а). $y<2-x$, $x>-2$, $y>-2$;

б). $y>2-x$, $x<4$, $y<0$;

в). $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}\le 1$, $y\ge x+2$, $x>-4$.

1.9. Определить угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый на оси Oy для прямых: а). $5x+2y-10=0$; б). $5x+2y-20=0$; в). $2x-5y+10=0$; г). $3x+2y=0$; д). $y=4$.

1.10. Даны прямые $2x+y+3=0$, $y=x$, $x=5$, $y=2$. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(2;3)$ и 1). параллельных данным прямым; 2). перпендикулярных данным прямым.

Ответ: 1). $2x+y-7=0$; $x-y+1=0$; $x=2$; $y=3$; 2). $x-2y+4=0$; $x+y-5=0$; $y=3$; $x=2$.

1.11. Определить угол между прямыми

а). $5x-y+10=0$, $3x+y=0$;

б). $2x+3y+4=0$, $4x+6y-7=0$;

в). $3x+4y+5=0$, $4x-3y+10=0$.

Ответ: а). $arctg0{,}5$; б). 0^0; в). 90^0.

1.12. Дана прямая $2x+3y+4=0$. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(2;1)$ под углом 45^0 к данной прямой.

Ответ: $x-y-1=0$, $x+y-3=0$.

1.13. Найти проекцию точки $P(-6;4)$ на прямую $4x-5y+3=0$.

Ответ: $(-2;-1)$.

1.14. Найти точку Q, симметричную точке $P(-5;13)$ относительно прямой $2x-3y-3=0$.

Ответ: $(11;-11)$.

1.15. $3x-4y+5=0$ - уравнение стороны прямоугольника. Точки $A(1;-3)$, $B(1;2)$ - его вершины. Написать уравнения других сторон прямоугольника.

Ответ: $4x+3y-10=0$; $4x+3y+5=0$; $3x-4y-15=0$.

1.16. Даны вершины треугольника $A(1;-1)$, $B(-2;1)$, $C(3;5)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A на медиану, проведённую из вершины B.

Ответ: $4x+y-3=0$.

1.17. Вычислить площадь треугольника, отсекаемого прямой $5x-3y+15=0$ от координатного угла.

Ответ: 7,5.

1.18. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $C(8;6)$ и отсекающей от координатного угла треугольник площадью $S=12$.

Ответ: $3x-2y-12=0$, $3x-8y+24=0$.

1.19. На оси абсцисс найти точку, расстояние которой от прямой $8x+15y+10=0$ равно 1.

Ответ: $(7/8;0)$ и $(-27/8;0)$.

1.20. Точка $A(2;-5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x-2y-7=0$. Вычислить площадь квадрата.

Ответ: 5.

1.21. Две стороны квадрата лежат на прямых $5x-12y-65=0$, $5x-12y+26=0$. Вычислить его площадь.

Ответ: 49.

1.22. Найти центр пучка прямых, заданного уравнением $\alpha(2x+3y-1)+\beta(x-2y-4)=0$.

Ответ: $(2;-1)$.

1.23. Найти уравнение прямой, принадлежащей пучку прямых $\alpha(x+2y-5)+\beta(3x-2y+1)=0$: а). проходящей через точку $A(3;-1)$; б). проходящей через начало координат; в). параллельной оси Ox; г). параллельной оси Oy; д). параллельной прямой $4x+3y+5=0$; е). перпендикулярной прямой $2x+3y+7=0$.

Ответ: а). $3x+2y-7=0$; б). $2x-y=0$; в). $y=2$; г). $x=1$; д). $4x+3y-10=0$; г). $3x-2y+1=0$.

1.24. Написать уравнения биссектрис углов между прямыми $2x+3y-10=0$, $3x+2y-10=0$.

Ответ: $x = y$ и $x + y - 4 = 0$.

1.25. Составить уравнение прямой, проходящей посередине между параллельными прямыми $2x - y + 3 = 0$ и $2x - y - 9 = 0$.

Ответ: $2x - y - 3 = 0$.

1.26. Дан треугольник с вершинами $A(-2;0)$, $B(2;4)$ и $C(4;0)$. Написать уравнения сторон треугольника, медианы AE, высоты AD и найти длину медианы AE и высоты AD.

Ответ: $AE: 2x - 5y + 4 = 0$, $AD: x - 2y + 2 = 0$, $AE = \sqrt{29}$, $AD = \dfrac{12\sqrt{5}}{5}$.

1.27. Найти внутренние углы треугольника, стороны которого заданы уравнениями $x + 2y = 0$, $x + 4y - 6 = 0$, $x - 4y - 6 = 0$.

Указание. Чтобы найти внутренние углы треугольника, нужно угловые коэффициенты сторон выписать в порядке убывания $k_1 > k_2 > k_3$, а затем вычислить тангенсы углов по формулам

$$\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2},\ \frac{k_2 - k_3}{1 + k_2 k_3},\ \frac{k_3 - k_1}{1 + k_1 k_3}.$$

Ответ: 28^0, $12{,}5^0$ и $139{,}5^0$.

1.28. Через точку $P(2;0)$ провести прямую так, чтобы ее отрезок, заключенный между прямыми $3x+7y+5=0$ и $x+5y-11=0$, делился в точке P пополам.

Ответ: $2x+y-4=0$.

1.29. Луч света направлен по прямой $x-2y+5=0$. Дойдя до прямой $3x-2y+7=0$, луч от нее отражается. Составить уравнение прямой, на которой лежит отраженный луч.

Ответ: $29x-2y+33=0$.

1.30. Даны точки $A(-2;0)$, $B(0;6)$. Через середину отрезка AB провести прямую, отсекающую на оси абсцисс отрезок, вдвое больший, чем на оси ординат.

Ответ: $x+2y-4=0$.

1.31. Даны точки $A(-2;0)$ и $B(2;-2)$. На отрезке OA построен параллелограмм $OACD$, диагонали которого пересекаются в точке B. Написать уравнения сторон, диагоналей параллелограмма и найти угол CAD.

Ответ: $y=0$, $2x+3y+4=0$, $y=-4$, $2x+3y=0$, $x+2y+2=0$, $y=-x$, $\alpha=arctg1/8$.

1.32. Даны уравнения боковых сторон равнобедренного треугольника $3x+y=0$ и $x-3y=0$ и точка $(5;0)$, на его основании. Найти периметр и площадь треугольника.

Ответ: $4\left(\sqrt{10}+\sqrt{5}\right)$, 20.

1.33. Найти вершины прямоугольного равнобедренного треугольника, если дана вершина прямого угла $C(3;-1)$ и уравнение гипотенузы $3x-y+2=0$.

Ответ: $\left(\frac{3}{5};\frac{19}{5}\right)$, $\left(-\frac{9}{5};\frac{17}{5}\right)$.

1.34. Даны две вершины треугольника $A(-4;3)$ и $B(4;-1)$ и точка пересечения высот $M(3;3)$. Найти третью вершину C.

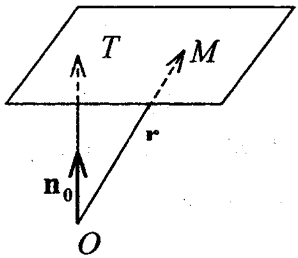
Ответ: $C(4;5)$.

1.35. Вычислить координаты вершин ромба, если известны уравнения двух его сторон: $x+2y=4$, $x+2y=10$, и уравнение одной из его диагоналей: $y=x+2$.

Ответ: $(0;2)$, $(4;0)$, $(2;4)$, $(-2;6)$.

Тема 2. Плоскость.

1. *Нормальное уравнение плоскости.* Положение плоскости в пространстве будет вполне определено, если задать ее расстояние p от начала координат и единичный вектор $\mathbf{n}_0$, перпендикулярный к плоскости и направленный от начала O к плоскости (см. рис.).



Пусть $\mathbf{r}$ - радиус-вектор произвольной точки M плоскости. Ее уравнение может быть переписано в виде

$$\mathbf{r}\mathbf{n}_0 - p = 0 \qquad (2.1)$$

Оно называется *нормальным уравнением плоскости.* Если x, y, z координаты точки M, а вектор n_0 образует с осями координат углы α, β и γ, то получим *нормальное уравнение плоскости в координатной форме*

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \qquad (2.2)$$

Выведенные уравнения остаются в силе и тогда, когда $p = 0$, т.е. данная плоскость проходит через начало координат. В этом случае за $\mathbf{n}_0$ можно принять любой из двух единичных векторов, перпендикулярных к плоскости и отличающихся один от другого направлением.

Таким образом, всякая плоскость может быть представлена уравнением первой степени относительно текущих координат.

2. *Общее уравнение плоскости.*

Всякое уравнение первой степени

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (2.3)$$

с тремя переменными определяет некоторую плоскость.

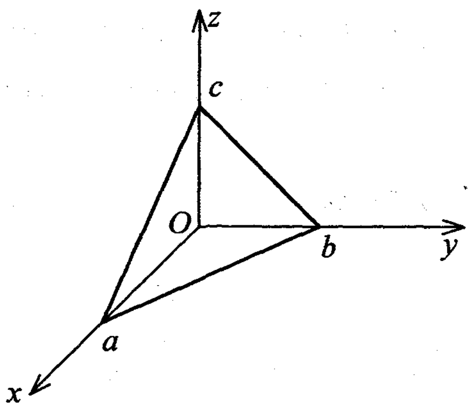
Уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$ ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$) называется общим уравнением плоскости.

Для приведения общего уравнения плоскости к нормальному виду нужно умножить его на множитель $M = \pm \dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, причем знак множителя нужно взять противоположным знаку свободного члена D.

3. *Исследование общего уравнения плоскости.*

А) Если $D=0$, то $Ax+By+Cz=0$ - плоскость проходит через начало координат.

Б) Если $C=0$, то $Ax+By+D=0$ - плоскость параллельна оси Oz.



В). Если $C=D=0$, то $Ax+By=0$ - плоскость проходит через ось Oz.

Г). Если $B=C=0$, то $Ax+D=0$ - плоскость параллельна плоскости yOz.

Д) Если $B=C=D=0$, то $x=0$ - плоскость yOz.

4. *Уравнение плоскости в отрезках.*

Если плоскость пересекает ось Ox в точке $(a;0;0)$, ось Oy - в точке $(0;b;0)$, ось Oz - в точке $(0;0;c)$, то ее уравнение имеет вид

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (2.4)$$

5. *Уравнение плоскости, проходящей через данную точку* $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *перпендикулярно данному вектору* $\mathbf{n}\{A;B;C\}$, имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \qquad (2.5)$$

а вектор $\mathbf{n}\{A;B;C\}$ называется нормальным вектором плоскости или вектором нормали.

6. *Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки* $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (2.6)$$

7. *Угол* φ *между двумя плоскостями* – это любой из двух двугранных углов, образованных этими плоскостями.

Если $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ - две данные плоскости, то один из углов между ними равен углу между их нормальными векторами $\mathbf{n}_1\{A_1;B_1;C_1\}$ и $\mathbf{n}_2\{A_2;B_2;C_2\}$, т.е.

$$\cos\varphi=\frac{\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1|\cdot|\mathbf{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (2.7)$$

Плоскости *перпендикулярны*, если $\mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2$, т.е. $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Плоскости *параллельны*, если $\mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2$, т.е. $\mathbf{n}_1 = \lambda \mathbf{n}_2$, т.е. $\lambda = \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$.

Плоскости *совпадают*, если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$.

8. *Уравнение пучка плоскостей.* Пучок плоскостей – множество плоскостей, имеющих общую прямую.

Любые две непараллельные плоскости, заданные уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ определяют пучок плоскостей

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \qquad (2.8)$$

из которого при подходящем λ можно получить уравнение любой (кроме второй) плоскости пучка.

9. *Точка пересечения трех плоскостей.* Чтобы найти координаты точки пересечения трех плоскостей, данных своими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0,$$

нужно решить эти уравнения совместно относительно x, y и z.

Если определитель системы отличен от нуля, то плоскости пересекаются в одной точке.

10. *Расстояние* d *от данной точки* $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *до данной плоскости* $Ax+By+Cz+D=0$ вычисляется по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (2.9)$$

Задача 7.1. Даны пять точек $A(3;-1;2)$, $B(4;-1;-1)$, $C(2;0;2)$, $D(1;1;1)$, $E(0;0;1)$. Написать уравнения:

1). плоскости ABC;

2). плоскости α, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC;

3). плоскости β, проходящей через точки E и D перпендикулярно плоскости ABC;

4). плоскости γ, проходящей через линию пересечения плоскостей α и β, параллельно оси Oy.

Найти:

5). расстояние d от точки D до плоскости ABC;

6). угол φ между плоскостями α и γ.

► 1). Воспользуемся уравнением (7.7):

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-(-1) & z-2 \\ 4-3 & -1-(-1) & -1-2 \\ 2-3 & 0-(-1) & 2-2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-3)\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$3(x-3)+3(y+1)+(z-2)=0.$$

Окончательно, уравнение ABC имеет вид:

$$3x+3y+z-8=0.$$

2). Плоскость α параллельна плоскости ABC, поэтому можно считать, что эти плоскости имеют один и тот же нормальный вектор $\mathbf{n}\{3;3;1\}$. По формуле (7.5) для точки $D(1;1;1)$ и вектора $\mathbf{n}\{3;3;1\}$ получаем уравнение плоскости α:

$$3(x-1)+3(y-1)+(z-1)=0.$$

Итак, уравнение плоскости α, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC, имеет вид

$$3x+3y+z-7=0.$$

3). Необходимо найти вектор нормали $\mathbf{N}$ искомой плоскости β. Он перпендикулярен искомой плоскости, а, следовательно, вектору $\overline{ED}\{1;1;0\}$ и нормальному вектору $\mathbf{n}\{3;3;1\}$ плоскости ABC, т.е. равен их векторному произведению.

Тогда

$$\mathbf{N}=\mathbf{n}\times\overline{ED}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & 3 & 1\end{vmatrix}=\mathbf{i}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{vmatrix}=\mathbf{i}-\mathbf{j}, \quad \text{т.е.}$$

$\mathbf{N}\{1;-1;0\}$.

Напишем уравнение плоскости, проходящей через точку $E(0;0;1)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{N}\{1;-1;0\}$ (см. 2.5):

$$1\cdot(x-0)-1\cdot(y-0)+0\cdot(z-1)=0.$$

Итак, уравнение плоскости β имеет вид

$$x-y=0.$$

4). Воспользуемся уравнением (2.8) пучка плоскостей, образованного плоскостями $3x+3y+z-7=0$ и $x-y=0$:

$$3x+3y+z-7+\lambda(x-y)=0;$$

$$(3+\lambda)x+(3-\lambda)y+z-7=0.$$

Так как искомая плоскость параллельна оси ординат, то коэффициент при y должен быть равен нулю: $3-\lambda=0$, т.е. $\lambda=3$. Подставив найденной значение λ в уравнение пучка, получаем уравнение искомой плоскости γ: $6x + z - 7 = 0$.

5). По формуле (2.9) для точки $D(1;1;1)$ и плоскости $3x + 3y + z - 8 = 0$ имеем

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 - 8|}{\sqrt{3^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{19}}.$$

6). Острый угол φ между плоскостями $3x + 3y + z - 7 = 0$ и $6x + z - 7 = 0$ найдем по формуле (2.7):

$$\cos\varphi = \frac{|3 \cdot 6 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{3^2 + 3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{6^2 + 1^2}} = \frac{19}{\sqrt{19} \cdot \sqrt{37}} = \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{37}},$$

откуда $\varphi = \arccos\left(\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{37}}\right) \approx 44{,}2^0$.◄

Задачи для самостоятельного решения.

2.2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;1;-1)$ и имеющей нормальный вектор $\mathbf{n}\{1;-2;3\}$. Построить плоскость.

Ответ: $x - 2y + 3z + 3 = 0$.

2.3. Даны две точки $M_1(3;-1;2)$ и $M_2(4;-2;-1)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$.

Ответ: $x - y - 3x + 2 = 0$.

2.4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(3;4;-5)$ параллельно двум векторам $\mathbf{a}\{3;1;-1\}$ и $\mathbf{b}\{1;-2;1\}$.

Ответ: $x + 4y + 7z + 16 = 0$.

2.5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;-1;3)$ и $M_2(3;1;2)$, параллельно вектору $\mathbf{a}\{3;-1;4\}$.

Ответ: $x - y - z = 0$.

2.6. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(3;-1;2)$, $M_2(4;-1;-1)$ и $M_3(2;0;2)$.

Ответ: $3x + 3y + z - 8 = 0$.

2.7. Определить при каком значении k плоскости, заданные уравнениями $3x - 5y + kz - 3 = 0$ и $x + 3y + 2z + 5 = 0$, перпендикулярны.

Ответ: $k = 6$.

2.8. Определить при каких значениях k и m плоскости $2x+ky+3z-5=0$ и $mx-6y-6z+2=0$ параллельны.

Ответ: $k=3, m=-4$.

2.9. Определить острый угол между плоскостями, заданными уравнениями $x+2y+2z-3=0$ и $16x+12y-15z-1=0$.

Ответ: $\arccos\frac{2}{15}$.

2.10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3;-2;-7)$ параллельно плоскости $2x-3z+5=0$.

Ответ: $2x-3z-27=0$.

2.11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;-1;1)$ перпендикулярно двум плоскостям $2x-z+1=0$ и $y=0$.

Ответ: $x+2z-4=0$.

2.12. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;2;1)$

1). параллельно плоскости: а). xOy; б). xOz; в). yOz;

2). проходит через: а). ось Ox; б). ось Oy; в). ось Oz.

Ответ: 1). а). $z=1$; б). $y=2$; в). $x=1$; 2). а). $y-2z=0$; б). $x-z=0$; в). $2x-y=0$.

2.13. Дано уравнение плоскости $x+3y-5z-15=0$. Найти объем пирамиды, ограниченной этой плоскостью и координатными плоскостями.

Ответ: 37,5.

2.14. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(4;3;2)$ и отсекающей на координатных осях отрезки равной длины.

Ответ: $x+y+z-9=0$, $x-y-z+1=0$, $x-y+z-3=0$, $x+y-z-5=0$.

2.15. Найти расстояние от точки $M(-2;-4;3)$ до плоскости $2x-y+2z+3=0$.

Ответ: 3.

2.16. Найти расстояние между параллельными плоскостями $x-2y-2z-12=0$ и $x-2y-2z-6=0$.

Ответ:2.

2.17. Две грани куба лежат на плоскостях $2x-2y+z-1=0$ и $2x-2y+z+5=0$. Вычислить объем этого куба.

2.18. На оси Ox найти точку, равноудаленную от двух плоскостей $12x-16y+15z+1=0$ и $2x+2y-z+1=0$.

Ответ: $(2;0;0)$ и $(11/43;0;0)$.

2.19. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и составляющей угол 60^0 с плоскостью $y=x$.

Ответ: $y=\pm z$.

2.20. Написать уравнения плоскостей, параллельных плоскости $2x+2y+z-8=0$ и удаленных от нее на расстояние $d=4$.

Ответ: $2x+2y+z=20$ и $2x+2y+z+4=0$.

2.21. Написать уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $4x-y+3z-6=0$ и $x+5y-z+10=0$ и перпендикулярной к плоскости $2x-y+5z-5=0$.

Ответ: $7x+14y+24=0$.

2.22. Найти уравнение плоскости, точки которой одинаково удалены от точек $P(1;-4;2)$ и $Q(7;1;-5)$.

Ответ: $6x+5y-7z-27=0$.

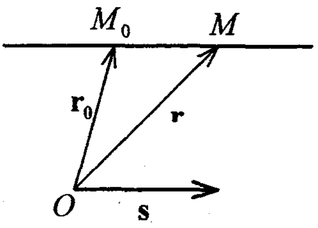
2.24. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку пересечения плоскостей $2x+2y+z-7=0$,

$2x - y + 3z - 3 = 0$, $4x + 5y - 2z - 12 = 0$ и через точки $M(0;3;0)$ и $N(1;1;1)$.

Ответ: $x - z = 0$.

Тема 3. Прямая и плоскость в пространстве.

1. *Уравнения прямой линии.*



Пусть прямая l проходит через точку M_0 параллельно вектору $\mathbf{s}$, называемому направляющим вектором прямой, M - произвольная точка этой прямой.

Уравнение вида

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{s},\ t \in \mathbf{R} \qquad (3.1)$$

называется *векторным уравнением прямой* линии.

Если точки и векторы задать в координатах, т.е. $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M(x; y; z)$, $\mathbf{s}\{m; n; p\}$, то получим систему уравнений

$$\begin{aligned} x &= x_0 + mt, \\ y &= y_0 + nt, \\ z &= z_0 + pt, \end{aligned} \qquad (3.2)$$

называемых *параметрическими уравнениями прямой.*

Если же из последних уравнений исключить параметр t, то получим уравнения

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}, \qquad (3.3)$$

называемые *каноническими уравнениями прямой.*

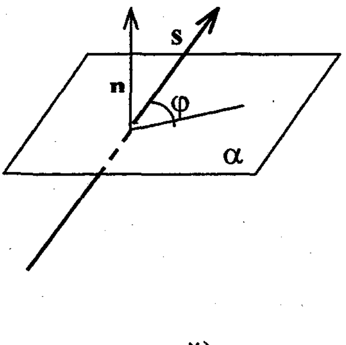
2. *Прямая как линия пересечения двух плоскостей.*

Любые две непараллельные плоскости с общими уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \qquad (3.4)$$

определяют прямую их пересечения. Эти уравнения, рассматриваемые совместно, называются *общими уравнениями прямой.* От общих уравнений можно перейти к каноническим, найдя точку на прямой (некоторое решение системы) и направляющий вектор прямой ($\mathbf{s}=\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2$, где $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ - нормальные векторы данных плоскостей).



3. *Угол* φ *между двумя прямыми.*

Пусть $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$,

$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$ - две данные прямые. Один из углов между ними равен углу между их направляющими векторами $\mathbf{s}_1\{m_1;n_1;p_1\}$ и $\mathbf{s}_2\{m_2;n_2;p_2\}$, т.е.

$$\cos\varphi=\frac{\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{s}_2}{|\mathbf{s}_1|\cdot|\mathbf{s}_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \qquad (3.5)$$

Прямые *перпендикулярны*, если $\mathbf{s}_1\perp\mathbf{s}_2$, т.е. $\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{s}_2=m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

Прямые *параллельны*, если $\mathbf{s}_1\parallel\mathbf{s}_2$, т.е. $\mathbf{s}_1=\lambda\mathbf{s}_2$, т.е. $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}=\lambda$.

4. *Уравнение прямой, проходящей через две данные точки* $M_1(x_1;y_1;z_1)$ *и* $M_2(x_2;y_2;z_2)$ имеет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (3.6)$$

5. *Угол* φ *между прямой* l, *заданной уравнением* $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ *и плоскостью* α: $Ax+By+Cz+D=0$.

$$\sin\varphi = \frac{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{s}|}{|\mathbf{n}|\cdot|\mathbf{s}|} = \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \qquad (3.7)$$

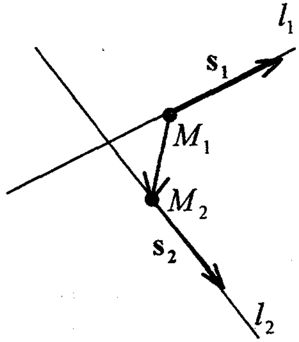
Прямая *параллельна* плоскости, если $\mathbf{s} \perp \mathbf{n}$, т.е. $\mathbf{s}\cdot\mathbf{n} = Am+Bn+Cp = 0$.

Прямая перпендикулярна плоскости, если $\mathbf{s} \parallel \mathbf{n}$, т.е. $\mathbf{s} = \lambda\mathbf{n}$, т.е. $\frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C} = \lambda$.

6. *Пересечение прямой с плоскостью.* Для нахождения точек пересечения (одной или множества) прямой и плоскости необходимо совместно решить их уравнения. При этом удобнее записать уравнение прямой в параметрическом виде. Пусть дана прямая $x = x_0 + mt,\ y = y_0 + nt,\ z = z_0 + pt$ и плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$. Для нахождения их общих точек необходимо решить систему

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases} \qquad (3.8)$$

7. *Условие, при котором две прямые лежат в одной плоскости.*



Пусть $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$ и $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$ - две данные прямые.

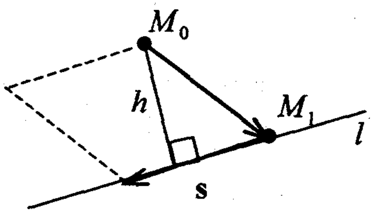
Две данные прямые лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда три вектора $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \overline{M_1M_2}$ компланарны, т.е. их смешанное произведение равно нулю.

Получаем условие

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0. \qquad (3.9)$$

8. *Расстояние h от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до прямой l, заданной уравнением* $\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$ вычисляется по формуле

$$h=\frac{\textit{площадь параллелограмма}}{\textit{длина его основания}}=\frac{\left|\overline{M_0M_1}\times\mathbf{s}\right|}{|\mathbf{s}|} \qquad (3.10).$$



В координатах это выглядит так

$$h = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

Задача 8.1. Уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x - 3y + 3z - 1 = 0, \\ 5x + 4y - z - 7 = 0; \end{cases}$$

привести к каноническому виду.

► <u>1 способ.</u> Исключив сначала y, а затем z, имеем

$$\begin{cases} 13x + 11z - 11 = 0, \\ 17x + 11y - 22 = 0. \end{cases}$$

Если разрешить каждое из уравнений относительно x, то получим

$$x = \frac{11(y-2)}{-17} = \frac{11(z-1)}{-13}, \text{ т.е. } \frac{x}{-11} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{13}.$$

<u>2 способ.</u> Найдем вектор $\mathbf{s}\{m;n;p\}$, параллельный искомой прямой. Так как он должен быть перпендикулярен нормальным векторам $\mathbf{n}_1\{2;-1;3\}$ и $\mathbf{n}_2\{5;4;-1\}$ заданных плоскостей, то за $\mathbf{s}$ можно принять векторное произведение векторов $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$:

$$\mathbf{s} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -11\mathbf{i} + 17\mathbf{j} + 13\mathbf{k}$$

Таким образом, $\mathbf{s}\{-11;17;13\}$.

В качестве точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$, через которую проходит искомая прямая, можно взять точку пересечения ее с любой из координатных плоскостей, например с плоскостью yOz. Так как при этом $x_0 = 0$, то координаты y_0 и z_0 этой точки определятся из системы уравнений заданных плоскостей, если в них положить $x = 0$:

$$\begin{cases} -y + 3z - 1 = 0, \\ 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $y_0 = 2$, $z_0 = 1$. Итак (по формуле (3.3)), искомая прямая определяется уравнениями

$$\frac{x}{-11} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{13}.$$

Замечание. В качестве точки M_0 может быть выбрана любая точка на прямой, что немного изменит вид получаемых канонических уравнений◀.

Задача 8.2. Дана плоскость $x+y-2z-6=0$ и вне ее точка $M(1;1;1)$. Найти точку N, симметричную точке M относительно данной плоскости.

▶ Запишем уравнения произвольной прямой (см. (3.3)), проходящей через точку M: $\frac{x-1}{l}=\frac{y-1}{m}=\frac{z-1}{n}$. Координаты $\{m;n;p\}$ направляющего вектора прямой, перпендикулярной плоскости, можно заменить координатами нормального вектора $\mathbf{n}\{1;1;-2\}$ данной плоскости. Тогда уравнения этой прямой запишутся в виде $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-2}$.

Найдем проекцию точки M на данную плоскость, решив систему

$$\begin{cases} x+y-2z-6=0, \\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-2}. \end{cases}$$

Перепишем уравнения прямой в параметрическом виде (3.2): $x = t+1$, $y = t+1$, $z = -2t+1$. Подставляя эти выражения для x, y и z в уравнение плоскости, найдем $t = 1$, откуда $x = 2$, $y = 2$, $z = -1$.

Координаты симметричной точки найдутся из формул (1.7): $\bar{x} = \dfrac{x_M + x_N}{2}$, $\bar{y} = \dfrac{y_M + y_N}{2}$, $\bar{z} = \dfrac{z_M + z_N}{2}$, т.е. $2 = \dfrac{1 + x_N}{2}$, $2 = \dfrac{1 + y_N}{2}$, $-1 = \dfrac{1 + z_N}{2}$, откуда $x_N = 3$, $y_N = 3$, $z_N = -3$. Следовательно, $N(3;3;-3)$.◄

Задача 8.3. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+1}{3}$ и точку $M(3;4;0)$.

► Очевидно, что точка $N(2;3;-1)$ принадлежит данной прямой, а, следовательно, искомой плоскости. В качестве нормального вектора $\mathbf{n}$ искомой плоскости можно взять векторное произведение направляющего вектора $\mathbf{s}\{1;2;3\}$ данной прямой и вектора $\overline{NM}\{1;1;1\}$:

$$\mathbf{n} = \mathbf{s} \times \overline{MN} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Напишем уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3;4;0)$, перпендикулярно вектору $\mathbf{n}\{-1;2;-1\}$ (см. 2.5), которое и будет искомым:

$$-(x-3)+2\cdot(y-4)-(z-0)=0, \qquad \text{т.е.}$$

$x-2y+z+5=0$.◄

Задачи для самостоятельного решения.

3.4. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $A(4;3;0)$ параллельно вектору $\mathbf{s}\{-1;1;1\}$

Ответ: $\dfrac{x-4}{-1}=y-3=z$.

3.5. Написать параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A(3;-1;4)$ и $B(1;1;2)$.

Ответ: $x=1+t$, $y=1-t$, $z=2+t$.

3.6. Найти косинус угла между прямыми

$$\begin{cases} x-y+z-4=0, \\ 2x+y-2z+5=0; \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+y+z-4=0, \\ 2x+3y-z+6=0. \end{cases}$$

Ответ: 11/26.

3.7. Доказать параллельность прямых $\begin{cases} x=2t+5, \\ y=-t+2, \\ z=t-7; \end{cases}$ и

$$\begin{cases} x+3y+z+2=0, \\ x-y-3z-2=0. \end{cases}$$

3.8. Доказать перпендикулярность прямых $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$ и $\begin{cases}3x+y-5z+1=0,\\2x+3y-8z+3=0.\end{cases}$

3.9. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2;3;-5)$ перпендикулярно к плоскости $6x-3y-5z+2=0$.

Ответ: $\frac{x-2}{6}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z+5}{-5}$.

3.10. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

а). $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$, $2x+3y+z-1=0$;

б). $\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-5}$, $x-2y+z-15=0$;

в). $\frac{x+2}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{2}$, $x+2y-2z+6=0$.

Ответ: а). $(2;-3;6)$; б). прямая параллельна плоскости; в). прямая принадлежит плоскости.

3.11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;-1;-1)$ перпендикулярно прямой $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{4}$.

Ответ: $2x-3y+4z-1=0$.

3.12. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;-2;1)$ перпендикулярно прямой $\begin{cases}x-2y+z-3=0,\\x+y-z+2=0.\end{cases}$

Ответ: $x+2y+3z=0$.

3.13. При каком значении m прямая $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{m}=\frac{z+3}{-2}$ параллельна плоскости $x-3y+6z+7=0$.

Ответ: $m=-3$.

3.14. При каких значениях k и c прямая $\frac{x-2}{k}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-3}$ перпендикулярна к плоскости $3x-2y+cz+1=0$.

Ответ: $k=-6$, $c=3/2$.

3.15. Найти проекцию точки $P(5;2;-1)$ на плоскость $2x-y+3z+23=0$.

Ответ: $(1;4;-7)$.

3.16. Найти точку Q, симметричную точке $P(2;-5;7)$ относительно прямой, проходящей через точки $M_1(5;4;6)$ и $M_2(-2;-17;-8)$.

Ответ: $Q(4,1,-3)$.

3.17. Вычислить расстояние d от точки $P(2;3;-1)$ до прямых:

а). $x=t+1$, $y=t+2$, $z=4t+13$, где $t\in\mathbf{R}$;

б). $\begin{cases}2x-2y+z+3=0,\\3x-2y+2z+17=0.\end{cases}$

Ответ: а). 6; б). 15.

3.18. Доказать, что прямые $\begin{cases}2x+2y-z-10=0,\\x-y-z-22=0;\end{cases}$ и $\frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}$ параллельны и вычислить расстояние d между ними.

Ответ:25.

3.19. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;-2;1)$ и прямую $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{-z+3}{2}$.

Ответ: $4x+6y+5z-1=0$.

3.20. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-2}$ и $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{-2}$.

Ответ: $6x-20y-11z+1=0$.

3.21. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую, заданную уравнениями $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-2}{2}$ перпендикулярно к плоскости $3x+2y-z-5=0$.

Ответ: $x-8y-13z+9=0$.

3.22. Найти кратчайшее расстояние между прямыми $x=-2y=z$, $x=y=2$.

Ответ: $\dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

3.23. В уравнениях прямой $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{n}$ определить параметр n так, чтобы эта прямая пересеклась с прямой $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+5}{2}=\dfrac{z}{1}$, и найти точку их пересечения.

Ответ: $n=1$, $M(2;-3;1)$.

3.24. Через прямую $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$ провести плоскость, параллельную прямой $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{-3}$.

Ответ: $x-y-z+4=0$.

3.25. Найти уравнение проекции прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3}$ на плоскость $x+y+2z-5=0$.

Ответ: $\frac{x}{1}=\frac{y-5/3}{-1}=\frac{z-5/3}{0}$.

3.26. Даны три последовательные вершины параллелограмма $ABCD$: $A(3;0;-1)$, $B(1;2;-4)$ и $C(0;7;-2)$. Найти уравнения сторон AD и CD.

Ответ: $\frac{x-3}{-1}=\frac{y}{5}=\frac{z+1}{2}$, $\frac{x}{2}=\frac{y-7}{-2}=\frac{z+2}{3}$.

3.27. Найти уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $(1;0;-1)$ на прямую $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-3}$.

Ответ: $\frac{x-1}{5}=\frac{y}{-4}=\frac{z+1}{-1}$.

Индивидуальные задания.

Задание 1. Прямая линия на плоскости.

1.1. Доказать, что четыре точки A, B, C, D не лежат на одной прямой.

1.2. Составить уравнения прямых, содержащих стороны треугольника ABC.

1.3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку C параллельно стороне AB.

1.4. Определить взаимное расположение прямой M_1M_2 и прямых, содержащих стороны треугольника ABC.

1.5. Составить уравнение прямой, содержащей медиану AM.

1.6. Составить уравнение прямой, содержащей высоту CH.

1.7. Составить уравнение прямой, содержащей биссектрису BK.

1.8. Определить координаты центра тяжести треугольника ABC (точки пересечения медиан).

1.9. Определить периметр треугольника ABC.

1.10. Определить длину высоты CH.

1.11. Определить углы треугольника ABC.

1.12. Составить уравнение прямой $A'B'$, симметричной прямой AB относительно точки C. Сделать чертеж.

Варианты задания 1.

№	A	B	C	M_1	M_2
1	$(-5;2)$	$(5;7)$	$(1;-1)$	$(1;2)$	$(5;4)$
2	$(-2;10)$	$(13;5)$	$(1;1)$	$(5;5)$	$(11;7)$
3	$(3;-1)$	$(-7;-6)$	$(-3;2)$	$(-3;-1)$	$(-7;-3)$
4	$(3;-9)$	$(-12;-4)$	$(0;0)$	$(-4;-4)$	$(-10;-6)$
5	$(-12;9)$	$(12;16)$	$(0;0)$	$(10;-3)$	$(-2;6)$
6	$(-7;4)$	$(3;9)$	$(-1;1)$	$(-1;4)$	$(3;6)$
7	$(-4;10)$	$(11;5)$	$(-1;1)$	$(3;5)$	$(9;7)$
8	$(-1;-4)$	$(-11;-9)$	$(-7;-1)$	$(-7;-4)$	$(-11;-6)$
9	$(3;3)$	$(-12;2)$	$(0;6)$	$(-4;2)$	$(-10;0)$
10	$(-11;8)$	$(13;15)$	$(1;-1)$	$(11;-4)$	$(-1;5)$
11	$(-4;2)$	$(6;7)$	$(2;-1)$	$(2;2)$	$(6;4)$
12	$(-2;8)$	$(13;3)$	$(1;-1)$	$(5;3)$	$(11;5)$
13	$(9;-5)$	$(-1;-10)$	$(3;-2)$	$(3;-5)$	$(-1;-7)$
14	$(-2;-8)$	$(-17;-3)$	$(-5;1)$	$(-9;-3)$	$(-15;-5)$

15	$(-13;10)$	$(11;17)$	$(-1;1)$	$(9;-2)$	$(-3;7)$
16	$(1;8)$	$(11;13)$	$(7;5)$	$(7;8)$	$(11;10)$
17	$(-1;9)$	$(14;4)$	$(2;0)$	$(6;4)$	$(12;6)$
18	$(0;-3)$	$(-10;-8)$	$(-6;0)$	$(-6;-3)$	$(-10;-5)$
19	$(-1;-7)$	$(-16;-2)$	$(-4;2)$	$(-8;-2)$	$(-14;-4)$
20	$(-10;8)$	$(14;15)$	$(2;-1)$	$(12;-4)$	$(0;5)$
21	$(-8;6)$	$(2;11)$	$(-2;3)$	$(-2;6)$	$(2;8)$
22	$(-3;11)$	$(12;6)$	$(0;2)$	$(4;6)$	$(10;8)$
23	$(6;-7)$	$(-4;-12)$	$(0;-4)$	$(0;-7)$	$(-4;-9)$
24	$(0;-6)$	$(-15;-1)$	$(-3;-3)$	$(-7;-1)$	$(-13;-3)$
25	$(-5;14)$	$(19;21)$	$(7;5)$	$(17;2)$	$(5;11)$
26	$(-6;7)$	$(4;12)$	$(0;4)$	$(0;7)$	$(4;9)$
27	$(0;6)$	$(15;1)$	$(3;-3)$	$(7;1)$	$(13;3)$
28	$(8;-6)$	$(-2;-11)$	$(2;-3)$	$(2;-6)$	$(-2;-8)$
29	$(3;-11)$	$(-12;-6)$	$(0;-2)$	$(-4;-6)$	$(-10;-8)$
30	$(-14;12)$	$(10;19)$	$(-2;3)$	$(8;0)$	$(-4;9)$

Задание 2. Плоскость и прямая в пространстве.

2.1. Доказать что точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости.

2.2. Составить уравнения плоскостей, содержащих грани пирамиды $ABCD$.

2.3. Составить уравнение плоскости, проходящей через вершину D пирамиды параллельно грани ABC.

2.4. Составить уравнение плоскости, проходящей через ребро AB параллельно ребру CD.

2.5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A и B перпендикулярно грани ACD.

2.6. Составить уравнения прямой, содержащей ребро CD.

2.7. Составить уравнения прямой, проходящей через точку B параллельно ребру AC.

2.8. Найти величину двугранного угла при ребре AD.

2.9. Найти величину угла между прямой CD и плоскостью ABC.

2.10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку D перпендикулярно ребру AB.

2.11. Составить уравнения прямой, содержащей высоту DH пирамиды $ABCD$.

2.12. Найти координаты основания H высоты пирамиды $ABCD$, опущенной из вершины D.

Варианты задания 2.

1	$A(-2;1;1)$	$B(-5;1;-2)$	$C(-3;0;3)$	$D(-6;0;1)$
2	$A(-3;-4;1)$	$B(-2;-3;-5)$	$C(0;0;0)$	$D(-6;0;3)$
3	$A(-2;4;5)$	$B(1;3;-4)$	$C(-5;-5;1)$	$D(-1;2;-2)$
4	$A(-1;2;0)$	$B(-4;2;-3)$	$C(-2;1;2)$	$D(-5;1;0)$
5	$A(-2;-3;0)$	$B(-1;-2;-6)$	$C(1;1;-1)$	$D(-5;1;2)$
6	$A(-1;5;-6)$	$B(2;4;-5)$	$C(-4;-4;0)$	$D(0;3;-3)$
7	$A(-3;2;2)$	$B(-6;2;-1)$	$C(-4;1;4)$	$D(-7;1;2)$
8	$A(-4;-3;2)$	$B(-3;-2;-4)$	$C(-1;1;1)$	$D(-7;1;4)$
9	$A(-3;5;-4)$	$B(0;4;-3)$	$C(-6;-4;2)$	$D(-2;3;-1)$
10	$A(0;1;1)$	$B(-3;1;-2)$	$C(-1;0;3)$	$D(-4;0;1)$
11	$A(1;-2;1)$	$B(1;-5;-2)$	$C(0;-3;3)$	$D(0;-6;1)$

12	$A(-4;-3;1)$	$B(-3;-2;-5)$	$C(0;0;0)$	$D(0;-6;3)$
13	$A(4;-2;-5)$	$B(3;1;-4)$	$C(-5;-5;1)$	$D(2;-1;-2)$
14	$A(2;-1;0)$	$B(2;-4;-3)$	$C(1;-2;2)$	$D(1;-5;0)$
15	$A(-3;-2;0)$	$B(-2;-1;-6)$	$C(1;1;-1)$	$D(1;-5;2)$
16	$A(5;-1;-6)$	$B(4;2;-5)$	$C(-4;-4;0)$	$D(3;0;-3)$
17	$A(2;-3;2)$	$B(2;-6;-1)$	$C(1;-4;4)$	$D(1;-7;2)$
18	$A(-3;-4;2)$	$B(-2;-3;-4)$	$C(1;-1;1)$	$D(1;-7;4)$
19	$A(5;-3;-4)$	$B(4;0;-3)$	$C(-4;-6;2)$	$D(3;-2;-1)$
20	$A(1;0;1)$	$B(1;-3;-2)$	$C(0;-1;3)$	$D(0;-4;1)$
21	$A(1;0;1)$	$B(-2;1;-5)$	$C(3;0;-3)$	$D(1;0;-6)$
22	$A(1;-4;-3)$	$B(-5;-3;-2)$	$C(0;0;0)$	$D(3;0;-6)$
23	$A(-5;4;-2)$	$B(-4;3;1)$	$C(1;-5;-5)$	$D(-2;2;-1)$
24	$A(0;2;-1)$	$B(-3;2;-4)$	$C(2;1;-2)$	$D(0;1;-5)$
25	$A(0;-3;-2)$	$B(-6;-2;-1)$	$C(-1;1;1)$	$D(2;1;-5)$
26	$A(-6;5;-1)$	$B(-5;4;2)$	$C(0;-4;-4)$	$D(-3;3;0)$
27	$A(2;2;-3)$	$B(-1;2;-6)$	$C(4;1;-4)$	$D(2;1;-7)$
28	$A(2;-3;-4)$	$B(-4;-2;-3)$	$C(1;1;-1)$	$D(4;1;-7)$
29	$A(-4;5;-3)$	$B(-3;4;0)$	$C(2;-4;-6)$	$D(-1;3;-2)$
30	$A(1;1;0)$	$B(-2;1;-3)$	$C(3;0;-1)$	$D(1;0;-4)$

Учебно-методическое издание

Фроловичев Александр Иванович
Аналитическая геометрия. Часть II.
Методические указания

Подписано в печати-30.08.07. Формат 60×84/16 Изд.№285-07
Заказ№ 467. Усл. – п.л. 3,25 Тираж 150.

127994 Москва, ул. Образцова, 15
Типография МИИТа