ННЫЙ
ЕНИЯ

Кафедра «Прикладная математика -2»

А.И. Фроловичев

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
Часть I

Рекомендовано редакционным издательским советом университета в качестве методических указаний для студентов специальности АКБ.

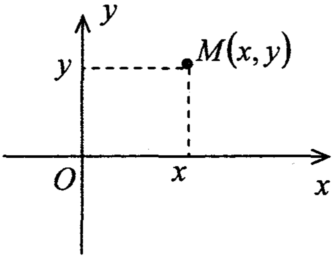
МОСКВА – 2007

УДК 514
Ф 91
Фроловичев А.И. Аналитическая геометрия.
Часть I.
Методические указания .- М.: МИИТ, 2007. - 46 с.

Предназначены для студентов I курса специальности АКБ по дисциплине геометрия. Содержит разделы: метод координат на плоскости и в пространстве, векторы, операции над векторами.

Тема 1. Прямоугольные координаты.

Прямоугольные координаты на плоскости.



Если на плоскости задана прямоугольная декартова система координат xOy, то точку M этой плоскости, имеющую координаты x и y, обозначают $M(x;y)$.

Расстояние d между точками $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ определяется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1.1)$$

Координаты точки $C(x;y)$, делящей отрезок AB в заданном отношении λ ($\lambda = \pm\frac{AC}{CB}$, λ положительно, если точка C лежит между точками A и B и отрицательно, если точка C лежит на прямой вне отрезка AB), определяются по формулам

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \qquad (1.2)$$

В частности, при $\lambda=1$ получаются формулы для координат середины отрезка:

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2}{2},\quad \bar{y}=\frac{y_1+y_2}{2} \qquad (1.3)$$

Площадь треугольника с вершинами $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ определяется по формуле (определитель берется со знаком «+»)

$$S=\frac{1}{2}\left|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix} \qquad (1.4)$$

Задача 1.1. Известно, что расстояние d между двумя данными точками $A(3;k)$ и $B(-1;2)$ равно 5. Найти значение k.

► Воспользовавшись формулой (1.1), получаем

$$d=\sqrt{(-1-3)^2+(2-k)^2}=\sqrt{16+(2-k)^2}=5.$$

Откуда $(2-k)^2=9$. Имеем два решения: $k_1=-1$ и $k_2=5$.◄

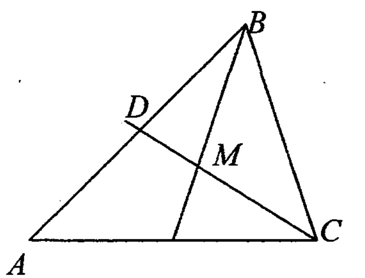
Задача 1.2. Точка $C(2;3)$ служит серединой отрезка AB. Определить координаты точки A, если $B(7;5)$.

► Здесь $\bar{x}=2$, $\bar{y}=3$, $x_2=7$, $y_2=5$. Откуда по формулам (1.3)

$$2=\frac{x_1+7}{2}, \qquad 3=\frac{y_1+5}{2}.$$

Следовательно, $x_1=-3$, $y_1=1$, т.е. $A(-3,1)$.◄

Задача 1.3. Даны вершины треугольника ABC: $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$. Определить координаты центра тяжести треугольника (точки пересечения медиан).



► Находим координаты точки D - середины отрезка AB; имеем $x_D=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y_D=\frac{y_1+y_2}{2}$. Точка M, в которой пересекаются медианы, делит отрезок CD в отношении 2:1, считая от точки C. Следовательно, координаты точки M определяются по формулам

$$\bar{x} = \frac{x_3 + 2x_D}{1+2}, \qquad \bar{y} = \frac{y_3 + 2y_D}{1+2},$$

т.е.

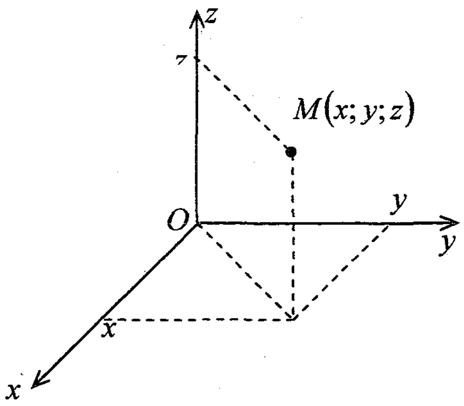
$$\bar{x} = \frac{x_3 + 2(x_1 + x_2)/2}{1+2}, \qquad \bar{y} = \frac{y_3 + 2(y_1 + y_2)/2}{1+2}.$$

Окончательно получим

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}. \blacktriangleleft$$

Прямоугольные координаты в пространстве.



Если в пространстве задана прямоугольная декартова система координат $Oxyz$, то точку M пространства, имеющую координаты x (абсцисса), y (ордината) и z (аппликата), обозначают $M(x;y;z)$.

Расстояние d между точками $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$ определяется по формуле

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (1.5)$$

Координаты точки $C(x;y;\mathrm{z})$, делящей отрезок AB в заданном отношении λ, определяются по формулам

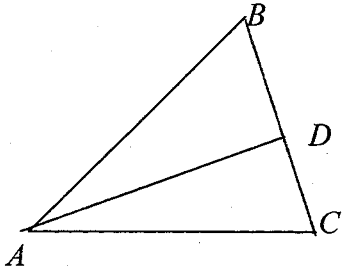
$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

(1.6)

В частности, при $\lambda=1$ получаются формулы для координат середины отрезка:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

(1.7)



Задача 1.4. Дан треугольник ABC с вершинами $A(1;1;1)$, $B(5;1;-2)$, $C(7;9;1)$. Найти координаты точки

D пересечения биссектрисы угла A со стороной BC.

►Найдем длины сторон треугольника, образующих угол A:

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2} =$$

$$= \sqrt{(7-1)^2 + (9-1)^2 + (1-1)^2} = 10;$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} =$$

$$= \sqrt{(5-1)^2 + (1-1)^2 + (-2-1)^2} = 5.$$

Следовательно, $CD : DB = 10 : 5 = 2$, так как биссектриса делит сторону BC на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Таким образом,

$$x_D = \frac{x_C + \lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{7 + 2\cdot 5}{1+2} = \frac{17}{3},$$

$$y_D = \frac{y_C + \lambda y_B}{1+\lambda} = \frac{9 + 2\cdot 1}{1+2} = \frac{11}{3},$$

$$z_D = \frac{z_C + \lambda z_B}{1+\lambda} = \frac{1 + 2\cdot(-2)}{1+2} = -1.◄$$

Задача 1.5. На оси Ox найти точку, равноудаленную от точек $A(2;-4;5)$ и $B(-3;2;7)$.

► Пусть M - искомая точка. Для нее должно выполняться равенство $AM = MB$. Так как эта точка лежит на оси Ox, то ее координаты $(x;0;0)$, а потому имеем

$$AM = \sqrt{(x-2)^2 + (-4)^2 + 5^2}, \ MB = \sqrt{(x+3)^2 + 2^2 + 7^2}.$$

Отсюда после возведения в квадрат получаем

$(x-2)^2 + 41 = (x+3)^2 + 53$, или $10x = -17$, т.е. $x = -1{,}7$.

Таким образом, искомая точка $M(-1{,}7;0;0)$. ◄

Задачи для самостоятельного решения.

1.6. Определить расстояние между точками $A(3;8)$ и $B(-5;14)$.

Ответ: 10.

1.7. Определить площадь треугольника с вершинами $A(-2;-4)$, $B(2;8)$, $C(10;2)$.

Ответ: 60.

1.8. Показать, что треугольник с вершинами $A(4;3)$, $B(7;6)$ и $C(2;11)$ - прямоугольный.

1.9. Показать, что треугольник с вершинами $A(2;-1)$, $B(4;2)$ и $C(5;1)$ - равнобедренный.

1.10. Даны вершины треугольника: $A(-1;-1)$, $B(0;-6)$ и $C(-10;-2)$. Найти длину медианы, проведенной из вершины A.

Ответ: 5.

1.11. Известны точки $A(-2;5)$, $B(4;17)$ - концы отрезка AB. На этом отрезке находится точка C, расстояние которой от A в два раза больше расстояния от B. Определить координаты точки C.

Ответ: $C(2;13)$.

1.12. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(11;4)$, $B(-1;-1)$, $C(5;7)$. Определить координаты четвертой вершины.

Ответ: $D(17;12)$.

1.13. Даны вершины треугольника: $A(7;2)$, $B(1;9)$, $C(-8;-11)$. Найти расстояния от точки пересечения медиан до вершин треугольника.

Ответ: $\sqrt{53}$, $\sqrt{82}$, $\sqrt{185}$.

1.14. Точки $L(0;0)$, $M(3;0)$ и $N(0;4)$ являются серединами сторон треугольника ABC. Вычислить площадь треугольника ABC.

Ответ: 24.

1.15. Даны точки $M_1(2;4;-2)$ и $M_2(-2;4;2)$. На прямой M_1M_2 найти точку M, делящую отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = 3$.

Ответ: $M(-1;4;1)$.

1.16. Дан треугольник ABC с вершинами $A(1;2;3)$, $B(7;10;3)$, $C(-1;3;1)$. Показать, что угол A - тупой.

1.17. В каком отношении точка M, равноудаленная от точек $A(3;1;4)$ и $B(-4;5;3)$ разделит отрезок оси Oy от начала координат до точки $C(0;6;0)$?

Ответ: пополам.

1.18. На оси Oz найти точку, равноудаленную от точек $M_1(2;4;1)$ и $M_2(-3;2;5)$.

Ответ: $M(0;0;17/8)$.

1.19. На плоскости xOy найти точку, равноудаленную от точек $A(1;-1;5)$, $B(3;4;4)$ и $C(4;6;1)$.

Ответ: $(16;-5;0)$.

Тема 2. Векторы и линейные операции над ними. Разложение вектора по базису. Координаты вектора. Линейные операции над векторами в координатах.

Вектором $\mathbf{a} = \overline{AB}$ называется направленный отрезок, где точка A - начало вектора, B - конец вектора.

Два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются *коллинеарными* ($\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$), если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Три вектора называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

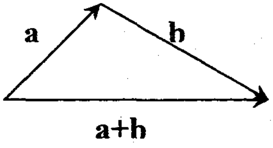
Два вектора называются *равными*, если они:

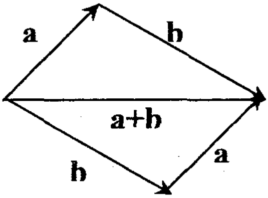
1) имеют равные длины (модули);
2) сонаправлены (коллинеарны и направлены в одну сторону).

Вектор, имеющий нулевую длину, называется *нулевым* вектором и обозначается $\overline{0}$. Его направление неопределено.

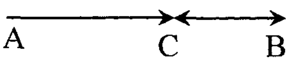
Для векторов определены операции сложения (вычитания) и умножения вектора на число. Они называются линейными операциями.

Сложение двух неколлинеарных векторов **a** и **b** происходит по правилу треугольника или параллелограмма:



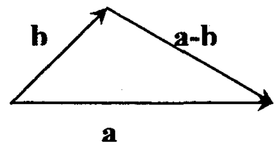


Сумму двух коллинеарных векторов можно найти по правилу аналогичному правилу треугольника, например:



$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$$

Разность векторов определяется как действие, обратное сложению векторов: $\mathbf{c}=\mathbf{a}-\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a}=\mathbf{b}+\mathbf{c}$. Для неколлинеарных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ геометрически ее можно определить по правилу



Произведением вектора $\mathbf{a}$ *на число* λ называется вектор $\lambda\mathbf{a}$, модуль которого равен $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda||\mathbf{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\mathbf{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно направлению вектора $\mathbf{a}$, если $\lambda < 0$. Если $\lambda = 0$, то $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, если $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$ и $\lambda \neq 0$.

Свойства сложения векторов и умножения вектора на число.

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
2. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
3. $\lambda(t\mathbf{a}) = (\lambda t)\mathbf{a}$
4. $(\lambda + t)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + t\mathbf{a}$
5. $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$

Разложение вектора по базису. Действия над векторами в координатной форме.

Любые два ненулевых неколлинеарных вектора $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ образуют *базис* в плоскости этих векторов, т.е. любой вектор $\mathbf{c}$, принадлежащий плоскости этих векторов, может быть единственным образом представлен в виде их линейной комбинации $\mathbf{c} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2$.

Аналогично, любой вектор $\mathbf{c}$ в пространстве может быть разложен в базисе трех некомпланарных векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, т.е. $\mathbf{c} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3$. Числа x_1, x_2, x_3 называются *координатами вектора* $\mathbf{c}$ в соответствующем базисе.

Пусть $\mathbf{a} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ (или $\mathbf{a}\{x_1; y_1; z_1\}$), где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ - единичные взаимно перпендикулярные векторы (орты). Эти векторы определяют соответственно три координатные оси Ox, Oy, Oz. *Координаты вектора* $\mathbf{a}$ суть его проекции на координатные оси, т.е. $x_1 = \text{пр}_{Ox}\mathbf{a}$, $y_1 = \text{пр}_{Oy}\mathbf{a}$, $z_1 = \text{пр}_{Oz}\mathbf{a}$.

1). *Координаты вектора* $\overline{AB}$ находятся по формуле

$$\overline{AB}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}, \qquad (2.1)$$

где $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$.

2). Пусть $\mathbf{a}\{x_1; y_1; z_1\}$, $\mathbf{b}\{x_2; y_2; z_2\}$. Тогда

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}, \qquad (2.2)$$

$$(\lambda \mathbf{a})\{\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1\}, \qquad (2.3)$$

где λ любое действительное число.

3). *Условие коллинеарности* векторов $\mathbf{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\mathbf{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ есть пропорциональность его соответствующих координат, т.е.

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \qquad (2.4)$$

4). *Длина вектора* $\mathbf{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ находится по формуле

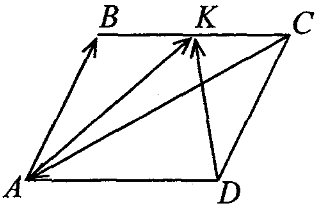
$$\mathrm{a} = |\mathbf{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}. \qquad (2.5)$$

5). Пусть α, β, γ - углы, которые образует вектор $\mathbf{a}\{x; y; z\}$ с осями координат Ox, Oy и Oz соответственно. $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами вектора* $\mathbf{a}$:

$$\cos\alpha = \frac{x}{a}, \ \cos\beta = \frac{y}{a}, \ \cos\gamma = \frac{z}{a}, \qquad (2.6)$$

причем $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Задача 2.1. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AK} = \mathbf{b}$, $BK = KC$. Выразить векторы $\overline{CA}$ и $\overline{DK}$ через векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, т.е. разложить по базису $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

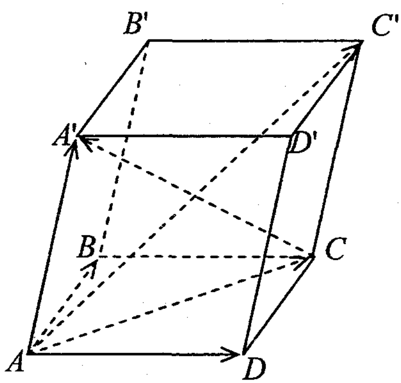


►Так как K середина AB, то $\overline{CK} = \overline{KB}$, $\overline{CB} = 2\overline{KB}$. Из треугольника ABC имеем $\overline{CA} = \overline{CB} + \overline{BA}$; из треугольника ABK: $\overline{KB} = \overline{AB} - \overline{AK} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Отсюда $\overline{CA} = 2(\mathbf{a} - \mathbf{b}) - \mathbf{a} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b}$.

Так как $\overline{CK} = \overline{KB} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\overline{DC} = a$, то из треугольника DKC получаем $\overline{DK} = \overline{DC} + \overline{CK} = \mathbf{a} + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Таким образом, $\overline{CA} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, $\overline{DK} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$. ◄



Задача 2.2. Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$, построенный на векторах $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, $\overline{AA'} = \mathbf{c}$. Через векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ выразить векторы $\overline{AC'}$ и $\overline{CA'}$.

►Так как $ABCDA'B'C'D'$, то $\overline{AB} = \overline{CD} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \overline{BC} = \mathbf{b}$, $\overline{AA'} = \overline{CC'} = \mathbf{c}$.

Из треугольника $AC'C$ имеем $\overline{AC'} = \overline{AC} + \overline{CC'} = \overline{AC} + \mathbf{c}$, а из треугольника ABC: $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Откуда $\overline{AC'} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

Аналогично, из треугольника $AA'C$, $\overline{CA'} = \overline{AA'} - \overline{AC} = \mathbf{c} - (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = -\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

Таким образом, $\overline{AC'} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\overline{CA'} = -\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$.◄

Задача 2.3. Даны точки $M_1(1;2;3)$ и $M_2(3;-4;6)$. Найти координаты вектора $\overline{M_1M_2}$, его длину и направление.

► По формуле (2.1) $\overline{M_1M_2}\{3-1;-4-2;6-3\}$, т.е. $\overline{M_1M_2}\{2;-6;3\}$.

Длину вектора $\overline{M_1M_2}$ найдем по формуле (2.5):

$$\left|\overline{M_1M_2}\right| = \sqrt{2^2+(-6)^2+3^2} = \sqrt{4+36+9} = \sqrt{49} = 7.$$

Направляющие косинусы вектора $\overline{M_1M_2}$ (формула (2.6)):

$$\cos\alpha = \frac{2}{7},\ \cos\beta = -\frac{6}{7},\ \cos\gamma = \frac{3}{7}.$$ ◄

Задача 2.4. Даны два вектора $\mathbf{a}\{2;3\}$ и $\mathbf{b}\{1;6\}$. Найти разложение вектора $\mathbf{c}\{6;27\}$ по векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

► Неколлинеарные векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ образуют базис в плоскости xOy. Вектор $\mathbf{c}$, принадлежащий этой плоскости, может быть разложен по векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ по формуле $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ единственным образом. При этом одноименные координаты вектора $\mathbf{c}$ и вектора суммы в правой части равенства должны быть равны.

Имеем, $\alpha\mathbf{a}\{2\alpha;3\alpha\}$, $\beta b\{\beta;6\beta\}$. Тогда $(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b})\{2\alpha+\beta;3\alpha+6\beta\}$, но $\mathbf{c}\{6,27\}$.

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 6, \\ 3\alpha + 6\beta = 27; \end{cases}$$

решая которую, получаем $\alpha = 1$, $\beta = 4$.

Таким образом, $\mathbf{c} = \mathbf{a} + 4\mathbf{b}$. ◄

Задачи для самостоятельного решения.

2.5. Даны неколлинеарные векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Построить векторы $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$.

2.6. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ неколлинеарные векторы. Выяснить, коллинеарны ли следующие пары векторов:

а). $\mathbf{p}_1 = \mathbf{a} - 2\sqrt{3}\mathbf{b}$, $\mathbf{p}_2 = \sqrt{3}\mathbf{a} - 6\mathbf{b}$;

б). $\mathbf{p}_1 = 7\mathbf{a}$, $\mathbf{p}_2 = 3\sqrt{5}\mathbf{a}$;

в). $\mathbf{p}_1 = 2\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{p}_2 = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$;

г). $\mathbf{p}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{p}_2 = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Ответ: а), б) коллинеарны; с), д). неколлинеарны.

2.7. Пусть AD, BE и CF - медианы треугольника ABC. Доказать, что $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \overline{0}$.

2.8. Дано: $\overline{AB} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, $\overline{BC} = -4\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\overline{CD} = -5\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$. Доказать, что $ABCD$ - трапеция.

2.9. В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Доказать, что $\overline{SA}+\overline{SC}=\overline{SB}+\overline{SD}$.

2.10. В треугольнике ABC $\overline{AB}=\mathbf{a}$, $\overline{AC}=\mathbf{b}$. O - точка пересечения медиан. Выразить вектор $\overline{AO}$ через векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Ответ: $1/3(\mathbf{a}+\mathbf{b})$.

2.11. Точки M и K - середины сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. $\overline{AM}=\mathbf{a}$, $\overline{AK}=\mathbf{b}$. Выразить вектор $\overline{AC}$ через векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Ответ: $2/3(\mathbf{a}+\mathbf{b})$.

2.12. В трапеции $ABCD$ основание AD в два раза больше основания BC, $\overline{AB}=\mathbf{a}$, $\overline{BC}=\mathbf{b}$. Выразить векторы $\overline{CD}$ и $\overline{DB}$ через векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Ответ: $\mathbf{b}-\mathbf{a}$, $\mathbf{a}-2\mathbf{b}$.

2.13. В параллелограмме $ABCD$ $\overline{AB}=\mathbf{a}$, $\overline{AD}=\mathbf{b}$. Выразить $\overline{AK}$ и $\overline{MK}$ через векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, если точка K делит отрезок CD в отношении 1:3, а точка M - середина ВС.

Ответ: $\dfrac{2}{3}\mathbf{a}+\mathbf{b}$; $-\dfrac{1}{3}\mathbf{a}+\dfrac{1}{2}\mathbf{b}$.

2.14. Даны векторы $\mathbf{a}\{3;-2;6\}$ и $\mathbf{b}\{-2;2;0\}$. Определить координаты и длины следующих векторов: а). $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, б). $\mathbf{a}-\mathbf{b}$, в). $2\mathbf{a}-\frac{1}{2}\mathbf{b}$.

Ответ: а). $\{1,0,6\}$, $\sqrt{37}$; б). $\{5;-4;6\}$, $\sqrt{77}$; в). $\{7;-5;12\}$, $\sqrt{218}$.

2.15. Даны точки $A(4;2;5)$, $B(0;7;2)$, $C(1,5,0)$. Найти координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $1/2\overline{AB}-3\overline{AC}$.

Ответ: $\overline{AB}\{-4;5;-3\}$, $\overline{AC}\{-3,3,-5\}$, $\left(1/2\overline{AB}-3\overline{AC}\right)\{7;-6,5;13;5\}$.

2.16. Проверить коллинеарность векторов:

а). $\mathbf{a}\{3;2;2\}$, $\mathbf{b}\{6;4;4\}$;

б). $\mathbf{a}\{3;0;4\}$, $\mathbf{b}\{6;0;8\}$;

в). $\mathbf{a}\{1;0;0\}$, $\mathbf{b}\{0;1;2\}$.

Ответ: а), б). коллинеарны; в) не коллинеарны.

2.17. При каких α и β векторы $\mathbf{a}=-2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\beta\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}=\alpha\mathbf{i}-6\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ будут коллинеарны?

Ответ: $\alpha=4$, $\beta=-1$.

2.18. Определить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ и $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Ответ: $\sqrt{14}$, $3\sqrt{2}$.

2.19. Дан вектор $\overline{AB}\{5;-4\}$. Зная координаты точки $A(-2;3)$, найти координаты точки B.

Ответ: $B\{3;-1\}$.

2.20. Найти единичный вектор $\mathbf{a}$, параллельный вектору $\mathbf{b}\{-4;3\}$.

Ответ: $\mathbf{a}\{-4/5;3/5\}$.

2.21. Проверить, что точки $A(3;-1)$, $B(1;2)$, $C(-1;1)$ и $D(3;-5)$ являются вершинами трапеции.

2.22. Лежат ли точки $A(1;1)$, $B(-1;7)$ и $C(0;4)$ лежат на одной прямой.

2.23. Векторы $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ и $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ являются сторонами треугольника. Определить длину третьей стороны этого треугольника.

Ответ: 5.

2.24. Найти разложение вектора $\mathbf{z}\{10;-1\}$ по векторам $\mathbf{x}\{-2;5\}$ и $\mathbf{y}\{4;2\}$.

Ответ: $\mathbf{z} = -\mathbf{x} + 2\mathbf{y}$.

2.25. Точка B делит дугу окружности $AC = 90^0$ в отношении $AB : BC = 2:1$, O - центр окружности. Представить вектор $\overline{OA} = \mathbf{a}$ как линейную комбинацию векторов $\overline{OC} = \mathbf{c}$ и $\overline{OB} = \mathbf{b}$.

Ответ: $\mathbf{a} = 2\mathbf{b} - \sqrt{3}\mathbf{c}$.

2.26. В прямоугольнике $ABCD$ точка M середина стороны $BC = 4$, а точка N - середина стороны $CD = 6$. Представить вектор $\overline{AC}$ как линейную комбинацию векторов $\overline{AM} = \mathbf{a}$ и $\overline{AN} = \mathbf{b}$.

Ответ: $2/3\mathbf{a} + 2/3\mathbf{b}$.

2.27. В равнобедренной трапеции $OABC$ угол $BOA = 60^0$, $OB = BC = CA = 2$, M и N - середины сторон BC и AC. Выразить векторы $\overline{AC}$, $\overline{OM}$, $\overline{ON}$ и $\overline{MN}$ через $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ - единичные векторы направлений $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$.

Ответ: $\overline{AC} = 2(\mathbf{n} - \mathbf{m})$, $\overline{OM} = 2\mathbf{n} + \mathbf{m}$, $\overline{ON} = 3\mathbf{m} + \mathbf{n}$, $\overline{MN} = 2\mathbf{m} - \mathbf{n}$.

2.28. Вектор $\overline{OM} = \mathbf{r}$ составляет с осями координат равные острые углы. Определить эти углы и построить вектор $\mathbf{r}$, если его длина равна $2\sqrt{3}$.

Ответ: $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

2.29. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(1;-2;3)$, $B(3;2;1)$ и $C(6;4;4)$. Найти его четвертую вершину.

Ответ: $D(4;0;6)$.

Тема 3. Скалярное произведение векторов.

Скалярным произведением двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos\varphi . \qquad (3.1)$$

Свойства скалярного произведения.

1. $\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2, \ |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^2}$ (3.2)

2. *Условие перпендикулярности* двух векторов, если $\mathbf{ab} = 0$, то $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

3. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$

4. $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$

5. $(m\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot(m\mathbf{b})=m(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$

Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ заданы своими координатами $\mathbf{a}\{x_1;y_1;z_1\}$ и $\mathbf{b}\{x_2;y_2;z_2\}$, то

1) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$; (3.3)

2) $$\cos\varphi=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}};$$

(3.4)

3) *условие перпендикулярности в координатах*:

$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$. (3.5)

4) проекция вектора $\mathbf{a}$ *на направление вектора* $\mathbf{b}$:

$$\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}=|\mathbf{a}|\cos\varphi=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+x_2^2}}. \quad (3.6)$$

Задача 3.1. Даны векторы $\mathbf{a}\{m;3;4\}$ и $\mathbf{b}\{4;m;-1\}$. При каком значении m эти векторы перпендикулярны?

► Из условия (3.3) получаем уравнение

$$4m+3m-28=0,$$

откуда $m=4$. ◄

Задача 3.2. Даны два вектора: $\mathbf{a}\{1;2;3\}$ и $\mathbf{b}\{6;4;-2\}$.

Найти:

1). векторы $\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$ и $\mathbf{d}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$;

2). угол α между векторами $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$;

3). проекцию вектора $\mathbf{c}$ на направление вектора $\mathbf{d}$.

► 1). По формуле (2.2) получаем $\mathbf{c}\{7;6;1\}$, $\mathbf{d}\{-5;-2;5\}$.

2). Косинус угла α между векторами $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ вычислим, используя формулу (3.4):

$$\cos\alpha=\frac{7\cdot(-5)+6\cdot(-2)+1\cdot 5}{\sqrt{7^2+6^2+1^2}\cdot\sqrt{(-5)^2+(-2)^2+5^2}}=$$

$$=\frac{-42}{\sqrt{86}\cdot\sqrt{54}}=\frac{-42}{6\cdot\sqrt{43\cdot 3}}=\frac{-7}{\sqrt{129}},$$

откуда

$$\alpha=\arccos\left(-\frac{7}{\sqrt{129}}\right)=\pi-\arccos\frac{7}{\sqrt{129}}.$$

3). По формуле (3.6) имеем

$$\text{пр}_{\mathbf{d}}\mathbf{c}=\frac{7\cdot(-5)+6\cdot(-2)+1\cdot 5}{\sqrt{(-5)^2+(-2)^2+5^2}}=\frac{-42}{\sqrt{54}}=\frac{-42}{3\sqrt{6}}=\frac{-14}{3\sqrt{6}}.$$

◄

Задача 3.3. Даны векторы $\mathbf{a}=\mathbf{m}+2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}=2\mathbf{m}-3\mathbf{n}$, где $|\mathbf{m}|=2$, $|\mathbf{n}|=1$, $(\mathbf{m}\hat{,}\mathbf{n})=\pi/3$. Найти:

1). $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$;

2). Длины векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;

3). Угол α между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;

4). Проекцию вектора $\mathbf{a}$ на направление вектора $\mathbf{b}$.

► 1). Используя определение и свойства скалярного произведения, получаем

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(\mathbf{m}+2\mathbf{n})(2\mathbf{m}-3\mathbf{n})=2\mathbf{m}^2+\mathbf{mn}-6\mathbf{n}^2=$$

$$=2|\mathbf{m}|^2+|\mathbf{m}||\mathbf{n}|\cos(\mathbf{m}\hat{,}\mathbf{n})-6|\mathbf{n}|^2=$$

$$=2\cdot 2^2+2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}-6\cdot 1^2=8+1-6=3\cdot$$

2). Аналогично, используя формулу (3.2), имеем

$$\mathbf{a}^2=(\mathbf{m}+2\mathbf{n})^2=\mathbf{m}^2+4\mathbf{mn}+4\mathbf{n}^2=|\mathbf{m}|^2+4|\mathbf{m}||\mathbf{n}|\cos(\mathbf{m}\hat{,}\mathbf{n})+4|\mathbf{n}|^2=$$

$$=2^2+4\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}+4\cdot 1^2=4+4+4=12,$$

$$\mathbf{b}^2=(2\mathbf{m}-3\mathbf{n})^2=4\mathbf{m}^2-12\mathbf{mn}+9\mathbf{n}^2=$$

$$=4|\mathbf{m}|^2-12|\mathbf{m}||\mathbf{n}|\cos(\mathbf{m}\hat{,}\mathbf{n})+9|\mathbf{n}|^2=$$

$$=4\cdot 2^2-12\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}+9\cdot 1^2=16-12+9=13,$$

откуда окончательно получаем $|\mathbf{a}|=2\sqrt{3}$, $|\mathbf{b}|=\sqrt{13}$.

3). По формуле (3.4) $\cos\alpha = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{13}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$. Откуда $\alpha = \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$.

4). По формуле (3.6) имеем

$$\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{3}{\sqrt{13}}. \blacktriangleleft$$

Задачи для самостоятельного решения.

3.4. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ образуют угол $\varphi = \pi/3$, $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$. Вычислить $(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b})(\mathbf{a} + 2\mathbf{b})$.

Ответ: -13.

3.5. Найти угол между векторами $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$, если $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 1$, угол φ между векторами $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ равен 60^0.

Ответ: $\arccos\dfrac{11}{14}$.

3.6. Найти $\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$, если $\mathbf{a}=\mathbf{m}+3\mathbf{n}$, $\mathbf{b}=\mathbf{m}+4\mathbf{n}$, если $|\mathbf{m}|=2$, $|\mathbf{n}|=1$, угол φ между векторами $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ равен 120^0.

Ответ: $3\sqrt{3}/2$.

3.7. Даны векторы $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=6\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$.

Найти $\text{пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ и $\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$.

Ответ: 20/3 и 20/7.

3.8. Определить угол между векторами $\mathbf{a}\{2;-4;4\}$ и $\mathbf{b}\{-3;2;6\}$.

Ответ: $\arccos 5/21$.

3.9. Могут ли векторы $\mathbf{a}\{x;2;5\}$ и $\mathbf{b}\{x;x;3\}$ быть перпендикулярными при каком-либо значении x.

Ответ: не могут.

3.10. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}$ и $\mathbf{b}=2\mathbf{j}-\mathbf{k}$.

Ответ: 90^0.

3.11. Из вершины прямоугольника со сторонами 6 и 8 проведены прямые, делящие противоположные стороны пополам. Найти угол между этими прямыми.

Ответ: $\arccos\frac{25}{\sqrt{949}}$.

3.12. При каком значении n векторы $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + n\mathbf{j} + \mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ перпендикулярны?

Ответ: -1.

3.13. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$, если известно, что он перпендикулярен векторам $\mathbf{a}\{4;-2;-3\}$ и $\mathbf{b}\{0;1;3\}$, образует с осью Oy тупой угол и $|\mathbf{x}| = 26$.

Ответ: $\mathbf{x}\{-6;-24;8\}$.

3.14. В плоскости xOy найти вектор $\mathbf{p}$ перпендикулярный вектору $\mathbf{q}\{-3;4;-5\}$ и имеющий с ним одинаковую длину.

Ответ: $\mathbf{q}\{\pm 4\sqrt{2};\pm 3\sqrt{2};0\}$.

3.15. Найти скалярное произведение векторов $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} + 4\mathbf{c}$ и $5\mathbf{a} + 6\mathbf{b} + 7\mathbf{c}$, если $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$, $|\mathbf{c}| = 3$, а $\left(\mathbf{a} \hat{,} \mathbf{b}\right) = \left(\mathbf{a} \hat{,} \mathbf{c}\right) = \left(\mathbf{c} \hat{,} \mathbf{b}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Ответ: 547.

3.16. Найти работу силы $\mathbf{F}$ на перемещении $\mathbf{s}$, если $|\mathbf{F}| = 2$, $|\mathbf{s}| = 5$, $\varphi = \left(\mathbf{F} \hat{,} \mathbf{s}\right) = \pi/6$.

Ответ: $5\sqrt{3}$.

3.17. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Ответ: $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{11}}\right)(\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k})$.

3.18. Векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ имеют равные длины и образуют попарно равные углы. Найти вектор $\mathbf{c}$, если $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Ответ: $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ или $\mathbf{b} = \dfrac{1}{3}(-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k})$.

3.19. Даны векторы $\overline{OA} = \mathbf{a}$ и $\overline{OB} = \mathbf{b}$, причем $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 4$, а $\left(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}\right) = 60^0$. Определить угол между медианой $\overline{OM}$ треугольника AOB и стороной $\overline{OA}$.

Ответ: $\arccos\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

3.20. В равнобедренной трапеции $OACB$ M и N - середины сторон $BC = 2$ и $AC = 2$. Острый угол трапеции равен 60^0. Определить угол между векторами $\overline{OM}$ и $\overline{ON}$.

Ответ: $\arccos\dfrac{17}{2\sqrt{91}}$.

Тема 4. Векторное произведение векторов.

Векторным произведением вектора $\mathbf{a}$ на вектор $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ такой, что:

1) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi$,; (4.1)

где φ - угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$

2) $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}, \mathbf{c} \perp \mathbf{b}$;

3) векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ образуют правую тройку (ориентированы также как орты $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$).

Свойства векторного произведения.

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.
2. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$, если $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, либо $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, либо $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ (коллинеарность ненулевых векторов).
3. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
4. $(m\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (m\mathbf{b}) = m(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

Модуль векторного произведения $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ численно равен *площади* параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Векторные произведения координатных ортов $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$:

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=\mathbf{0}, \qquad \mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}, \qquad \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},$$

$$\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}.$$

Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ заданы своими координатами $\mathbf{a}\{x_1;y_1;z_1\}$ и $\mathbf{b}\{x_2;y_2;z_2\}$, то

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \qquad (4.2)$$

Задача 1. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1;1;1)$, $B(2;3;4)$, $C(4;3;2)$ и длину высоты, опущенной из вершины C.

► По формуле (2.1) находим векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB}\{1;2;3\}, \ \overline{AC}\{3;2;1\}.$$

Исходя из геометрического смысла векторного произведения, площадь треугольника ABC будет равна половине модуля векторного произведения векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ (формула 4.2):

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

Следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 64 + 16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \text{ (кв.ед.)}$$

Высоту CH найдем, используя известную формулу:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH ,$$

откуда

$$CH = \frac{2S_{ABC}}{AB} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{6}}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{14}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{21}}{7} . \blacktriangleleft$$

Задача 2. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ и $3\mathbf{a} + \mathbf{b}$, если $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$, $\left(\mathbf{a}, \hat{\ } \mathbf{b}\right) = 30^0$.

►Имеем

$$(\mathbf{a}+3\mathbf{b})\times(3\mathbf{a}+\mathbf{b})=3\mathbf{a}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b}+9\mathbf{b}\times\mathbf{a}+3\mathbf{b}\times\mathbf{b}=$$
$$=\mathbf{a}\times\mathbf{b}-9\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-8\mathbf{a}\times\mathbf{b}$$

(по свойствам векторного произведения $\mathbf{a}\times\mathbf{a}=\mathbf{b}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$, $\mathbf{b}\times\mathbf{a}=-\mathbf{a}\times\mathbf{b}$).

По формуле (4.1), согласно геометрическому смыслу векторного произведения, получаем

$$S=8|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=8\cdot1\cdot1\cdot\sin30^0=4\ \text{(кв.ед.)}.$$ ◄

Задачи для самостоятельного решения.

4.3. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ образуют угол $\varphi=\frac{\pi}{6}$, $|\mathbf{a}|=6$, $|\mathbf{b}|=5$. Вычислить $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$.

Ответ: 15.

4.4. Найти векторное произведение векторов $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+5\mathbf{j}+\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$.

Ответ: $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-17\mathbf{i}+7\mathbf{j}-\mathbf{k}$.

4.5. Раскрыть скобки и упростить выражения:

1). $\mathbf{i}\times(\mathbf{j}+\mathbf{k})-\mathbf{j}\times(\mathbf{i}+\mathbf{k})+\mathbf{k}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$;

2). $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})\times\mathbf{c}+(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})\times\mathbf{b}+(\mathbf{b}-\mathbf{c})\times\mathbf{a}$;

3). $(2\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a})+(\mathbf{b}+\mathbf{c})\times(\mathbf{a}+\mathbf{b})$;

4). $2\mathbf{i}\cdot(\mathbf{j}\times\mathbf{k})+3\mathbf{j}\cdot(\mathbf{i}\times\mathbf{k})+4\mathbf{k}\cdot(\mathbf{i}\times\mathbf{j})$.

Ответ: 1). $2(\mathbf{k}-\mathbf{i})$; 2). $2\mathbf{a}\times\mathbf{c}$; 3). $\mathbf{a}\times\mathbf{c}$; 4). 3.

4.6. Построить параллелограмм на векторах $\mathbf{a}=2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{k}$. Вычислить его площадь.

Ответ: 3.

4.7. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}$, где $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ - единичные векторы, образующие угол 30^0.

Ответ: 1,5.

4.8. Вершины треугольника точки $A(1;1;1)$, $B(2;3;4)$, $C(4;3;2)$. Вычислить площадь треугольника ABC и длину высоты, опущенной из вершины B.

Ответ: $2\sqrt{6}$, $\dfrac{4\sqrt{21}}{7}$.

4.9. Используя векторное произведение, вычислить угол, образованный векторами $\mathbf{a}\{2;2;1\}$ и $\mathbf{b}\{2;3;6\}$.

4.10. Найти площадь параллелограмма, диагоналями которого служат векторы $2\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $4\mathbf{m} - 5\mathbf{n}$, где $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ - единичные векторы, образующие угол 45^0.

Ответ: $1{,}5\sqrt{2}$.

Тема 5. Смешанное произведение трех векторов.

Смешанным произведением векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ называется скалярное произведение вектора $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ на вектор $\mathbf{c}$, т.е. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.

Смешанное произведение трех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ по модулю равно *объему* параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Свойства смешанного произведения.

1. Смешанное произведение $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=0$, если:

а) хоть один из перемножаемых векторов равен нулю;

б) два из перемножаемых векторов коллинеарны;

в) три ненулевых вектора компланарны.

2. Смешанное произведение не изменяется, если в нем поменять местами знаки векторного $(\times)$ и скалярного $(\cdot)$ умножения, т.е. $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$. В силу этого свойства смешанное произведение векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ условимся записывать в виде $\mathbf{abc}$.

3. Смешанное произведение не изменяется, если переставлять перемножаемые векторы в круговом порядке:

$$\mathbf{abc}=\mathbf{cab}=\mathbf{bca}.$$

4. При перестановке любых двух сомножителей смешанное произведение изменяет только знак:

$$\mathbf{abc}=-\mathbf{bac},\ \mathbf{abc}=-\mathbf{acb},\ \mathbf{abc}=-\mathbf{cba}.$$

Если векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ заданы своими координатами: $\mathbf{a}\{x_1;y_1;z_1\}$, $\mathbf{b}\{x_2;y_2;z_2\}$ и $\mathbf{c}\{x_3;y_3;z_3\}$, то

$$\mathbf{abc}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (5.1)$$

Задача 1. Дана треугольная пирамида с вершинами $A(2;2;2)$, $B(4;3;3)$, $C(4;5;4)$ и $D(5;5;6)$. Найти ее объем и длину высоты h, опущенной из точки D на грань ABC.

► Найдем векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, совпадающие с ребрами пирамиды, сходящимися в вершине A: $\overline{AB}\{2;1;1\}$, $\overline{AC}\{2;3;2\}$, $\overline{AD}\{3;3;4\}$. Находим смешанное произведение этих векторов:

$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}-$$

$$-1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=2\cdot 6-1\cdot 2-1\cdot 3=7.$$

Исходя из геометрического смысла смешанного произведения и учитывая, что объем пирамиды $ABCD$ равен 1/6 объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, то

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right|=\frac{7}{6}\ \text{(куб.ед.)}.$$

Длину высоты h, опущенной из вершины D, найдем, используя формулу

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h.$$

Площадь грани ABC равна половине модуля векторного произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

Следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{1+4+16} = \frac{\sqrt{21}}{2} \text{ (кв.ед.)}.$$

Откуда окончательно получаем

$$h = \frac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}} = \frac{3 \cdot \frac{7}{6} \cdot 2}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}. ◄$$

Задача 2. Показать, что точки $A(5;7;-2)$, $B(3;1;-1)$, $C(9;4;-4)$ и $D(1;5;0)$ лежат в одной плоскости.

► Четыре точки A, B, C, D лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда три вектора

$\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ компланарны. Условие компланарности: $\overline{AB\,AC\,AD} = 0$

Найдем координаты векторов: $\overline{AB}\{-2;-6;1\}$, $\overline{AC}\{4;-3;-2\}$, $\overline{AD}\{-4;-2;2\}$.

Имеем

$$\overline{AB\,AC\,AD} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+6\cdot\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 20 - 20 = 0.$$

Значит векторы компланарны, а точки лежат в одной плоскости.◄

Задачи для самостоятельного решения.

5.3. Вектор **c** перпендикулярен к векторам **a** и **b**, угол между **a** и **b** равен 30^0, $|\mathbf{a}| = 6$, $|b| = 3$, $|c| = 3$. Вычислить $(\mathbf{abc})$.

Ответ: 27.

5.4. Показать, что

1). $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot[(\mathbf{a}+\mathbf{c})\times\mathbf{b}] = -\mathbf{abc}$;

2). $(\mathbf{a}+2\mathbf{b}-\mathbf{c})\cdot[(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c})] = 3\mathbf{abc}$;

3). $(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{b}+\mathbf{c})(\mathbf{c}+\mathbf{a}) = 2\mathbf{abc}$.

5.5. Даны три вектора $\mathbf{a}\{1;-1;3\}$, $\mathbf{b}\{-2;2;1\}$, $\mathbf{c}\{3;-2;5\}$. Вычислить $\mathbf{abc}$.

Ответ: -7.

5.6. Установить компланарны ли векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, если:

а). $\mathbf{a}\{2;3;-1\}$, $\mathbf{b}\{1;-1;3\}$, $\mathbf{c}\{1;9;-11\}$;

б). $\mathbf{a}\{3;-2;1\}$, $\mathbf{b}\{2;1;2\}$, $\mathbf{c}\{3;-1;-2\}$;

в). $\mathbf{a}\{2;-1;2\}$, $\mathbf{b}\{1;2;-3\}$, $\mathbf{c}\{3;-4;7\}$.

Ответ: а).,в). да; б). нет.

5.7. Доказать, что четыре точки $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$ и $D(2;1;3)$ лежат в одной плоскости.

5.8. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$ и $D(4;1;3)$. Построить тетраэдр.

Ответ: 3.

5.9. Даны вершины треугольной пирамиды $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$. Найти длину ее высоты, опущенной из вершины D.

Ответ: 11.

5.10. Построить параллелепипед на векторах $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ и вычислить его объем.

Ответ: 51.

5.11. Построить пирамиду с вершинами $O(0;0;0)$, $A(5;2;0)$, $B(2;5;0)$ и $C(1;2;4)$ и вычислить ее объем, площадь грани ABC и высоту h пирамиды, опущенную на эту грань.

Ответ: $V = 14$, $S = 6\sqrt{3}$, $h = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$.

5.12. Найти объем тетраэдра, построенного на векторах $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$, если эти векторы направлены по биссектрисам координатных углов и длина каждого вектора равна 2.

Ответ: $2\sqrt{2}/3$.

5.13. Показать, что объем параллелепипеда, построенного на диагоналях граней данного параллелепипеда, равен удвоенному объему данного параллелепипеда.

5.14. Доказать, что для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ векторы $\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{b}-\mathbf{c}$ и $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ компланарны.

5.15. Вычислить объем параллелепипеда $OABCO_1A_1B_1C_1$, в котором даны три вершины нижнего основания $O(0;0;0)$, $A(2;-3;0)$ и $C(3;2;0)$ и вершина верхнего основания $B_1(3;0;4)$, лежащая на боковом ребре BB_1, противоположном ребру OO_1.

Ответ: 52.

Индивидуальные задания.

Задание 1.

Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Построить пирамиду $ABCD$. Найти

1). объем пирамиды $ABCD$;
2). площадь грани ABC;
3). длину ребра AB;
4). длину высоты, опущенной из вершины D;
5). длину высоты CH треугольника ABC;
6). угол между ребрами AB и CD.

Варианты задания 1.

1	$A(-2;1;1)$	$B(-5;1;-2)$	$C(-3;0;3)$	$D(-6;0;1)$
2	$A(-3;-4;1)$	$B(-2;-3;-5)$	$C(0;0;0)$	$D(-6;0;3)$
3	$A(-2;4;5)$	$B(1;3;-4)$	$C(-5;-5;1)$	$D(-1;2;-2)$
4	$A(-1;2;0)$	$B(-4;2;-3)$	$C(-2;1;2)$	$D(-5;1;0)$
5	$A(-2;-3;0)$	$B(-1;-2;-6)$	$C(1;1;-1)$	$D(-5;1;2)$
6	$A(-1;5;-6)$	$B(2;4;-5)$	$C(-4;-4;0)$	$D(0;3;-3)$
7	$A(-3;2;2)$	$B(-6;2;-1)$	$C(-4;1;4)$	$D(-7;1;2)$
8	$A(-4;-3;2)$	$B(-3;-2;-4)$	$C(-1;1;1)$	$D(-7;1;4)$
9	$A(-3;5;-4)$	$B(0;4;-3)$	$C(-6;-4;2)$	$D(-2;3;-1)$
10	$A(0;1;1)$	$B(-3;1;-2)$	$C(-1;0;3)$	$D(-4;0;1)$
11	$A(1;-2;1)$	$B(1;-5;-2)$	$C(0;-3;3)$	$D(0;-6;1)$
12	$A(-4;-3;1)$	$B(-3;-2;-5)$	$C(0;0;0)$	$D(0;-6;3)$
13	$A(4;-2;-5)$	$B(3;1;-4)$	$C(-5;-5;1)$	$D(2;-1;-2)$
14	$A(2;-1;0)$	$B(2;-4;-3)$	$C(1;-2;2)$	$D(1;-5;0)$
15	$A(-3;-2;0)$	$B(-2;-1;-6)$	$C(1;1;-1)$	$D(1;-5;2)$
16	$A(5;-1;-6)$	$B(4;2;-5)$	$C(-4;-4;0)$	$D(3;0;-3)$
17	$A(2;-3;2)$	$B(2;-6;-1)$	$C(1;-4;4)$	$D(1;-7;2)$
18	$A(-3;-4;2)$	$B(-2;-3;-4)$	$C(1;-1;1)$	$D(1;-7;4)$
19	$A(5;-3;-4)$	$B(4;0;-3)$	$C(-4;-6;2)$	$D(3;-2;-1)$
20	$A(1;0;1)$	$B(1;-3;-2)$	$C(0;-1;3)$	$D(0;-4;1)$
21	$A(1;0;1)$	$B(-2;1;-5)$	$C(3;0;-3)$	$D(1;0;-6)$
22	$A(1;-4;-3)$	$B(-5;-3;-2)$	$C(0;0;0)$	$D(3;0;-6)$
23	$A(-5;4;-2)$	$B(-4;3;1)$	$C(1;-5;-5)$	$D(-2;2;-1)$

24	$A(0;2;-1)$	$B(-3;2;-4)$	$C(2;1;-2)$	$D(0;1;-5)$
25	$A(0;-3;-2)$	$B(-6;-2;-1)$	$C(-1;1;1)$	$D(2;1;-5)$
26	$A(-6;5;-1)$	$B(-5;4;2)$	$C(0;-4;-4)$	$D(-3;3;0)$
27	$A(2;2;-3)$	$B(-1;2;-6)$	$C(4;1;-4)$	$D(2;1;-7)$
28	$A(2;-3;-4)$	$B(-4;-2;-3)$	$C(1;1;-1)$	$D(4;1;-7)$
29	$A(-4;5;-3)$	$B(-3;4;0)$	$C(2;-4;-6)$	$D(-1;3;-2)$
30	$A(1;1;0)$	$B(-2;1;-3)$	$C(3;0;-1)$	$D(1;0;-4)$

Задание 2.

Даны векторы $\mathbf{a} = l\mathbf{p} + m\mathbf{q}$ и $\mathbf{b} = n\mathbf{p} - k\mathbf{q}$, угол φ между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ равен $\frac{\pi}{f}$. Вычислить:

1). длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;

2). угол между диагоналями;

3). проекцию вектора $\mathbf{a}$ на направление вектора $\mathbf{b}$;

4). площадь параллелограмма.

Варианты задания 2.

№	$\lvert\mathbf{p}\rvert$	$\lvert\mathbf{q}\rvert$	l	m	n	k	f
1	2	5	4	1	2	7	6
2	6	4	1	5	1	2	3
3	3	7	1	4	7	2	4
4	3	3	4	3	6	7	6
5	3	7	3	4	6	6	3
6	1	4	6	4	7	4	4

7	1	1	3	4	4	1	6
8	2	1	4	3	1	2	3
9	1	7	6	7	4	7	4
10	7	4	7	1	6	4	6
11	1	2	4	6	6	7	3
12	2	7	3	6	2	3	4
13	2	4	4	1	3	7	6
14	1	6	2	1	5	6	3
15	5	4	3	6	3	5	4
16	1	1	3	2	7	4	6
17	1	3	7	4	6	1	3
18	1	7	4	7	7	1	4
19	1	3	3	7	1	2	6
20	5	7	5	5	7	7	3
21	5	1	7	5	7	3	4
22	2	4	6	4	6	4	6
23	5	7	3	7	1	4	3
24	4	7	1	4	6	4	4
25	2	1	3	5	5	2	6
26	3	5	6	5	1	1	3
27	7	2	3	5	3	7	4
28	4	2	3	1	3	7	6
29	1	2	5	1	5	4	3
30	2	1	3	3	4	3	4

Учебно-методическое издание

Фроловичев Александр Иванович

Аналитическая геометрия. Часть I.
Методические указания

Подписано в печати 28.08.07 Формат 60×84/16 Изд.№ 287-07

Заказ№ 462 Усл. – п.л. 3,0 Тираж 150

127994 Москва, ул. Образцова, 15
Типография МИИТа