КОНТЕНТ

Элементы математической логики

В.Х.Хаханян (кафедра «Математика»)

Часть II. Логика предикатов и элементы теории алгоритмов

Лекция 1

Чистое исчисление предикатов

1.1. Язык и формулы чистого исчисления предикатов. Вхождения переменных в формулы.

Как уже упоминалось в Части I, существуют такие виды логических рассуждений, которые не могут быть обоснованы в рамках исчисления высказываний. Внутренняя структура таких предложений другая. Необходимо также понимать такие выражения, как «все», «некоторый» и др. В пункте 1.1. Части I (далее 1.1.(ЧI)) мы уже описывали понятие «предикат» и «квантор» и выясняли смысл этих понятий. Теперь мы опишем на формальном уровне исходные понятия исчисления предикатов, которое есть расширение аксиоматической теории **L**. К символам, описанным в пункте 3.1.(ЧI), добавим символ $\forall$, предметные (индивидные) константы (т.к. у нас их не будет, то и никаких обозначений не вводим), предметные (индивидные) переменные (пп), предикатные буквы (прб) $A_к^i$, где к – нижний индекс - номер прб, а i – валентность (местность) прб. Функциональных букв у нас не будет и такое исчисление предикатов называется чистым. Прб с переменными и будут элементарными формулами (эф) (заметим, что прб без переменных (валентности 0) есть высказывание). Фл исчисления предикатов определяются так: (a) всякая эф есть фл; (b) если А и В – фл, то $(\neg A)$, $(A \to B)$, $(\forall yA)$ также есть фл; (c) выражение является фл только если это следует из (a) и (b).

В последней формуле из пункта (b) А называется областью действия квантора $\forall y$ (А может и не содержать пп у). Квантор существования $\exists xA(x)$ определяется как сокращённая запись

$\neg\forall x\neg A(x)$. Оставляя в силе введённые ранее правила об опускании скобок, будем дополнительно считать, что кванторы $\forall y$ и $\exists y$ располагаются по силе между связками $\equiv,\to$ и связками $\neg$, $\wedge$, $\vee$. Пример: вместо $((\forall xA(x))\to B(x,y))$ пишем $\forall xA(x)\to B(x,y)$; вместо $(\forall x(A(x)\vee B(x,y)))$ пишем $\forall x(A(x)\vee B(x,y))$. Также, вместо нижних индексов просто употребляем разные прб, а верхние индексы опускаем, т.к. все пп, входящие в фл, пишем полностью.

Введём теперь важное понятие **связанного и свободного вхождения пп в фл.** Данное вхождение данной пп в фл называется связанным, если данное вхождение данной пп есть пп входящего в эту фл квантора или находится в области действия входящего в эту формулу квантора. В противном случае данное вхождение данной пп в формулу называется свободным.

Задача. В следующих трёх примерах $A(x,y)$; $A(x,y)\to\forall xB(x)$; $\forall x(A(x,y)\to\forall xB(x))$ укажите для всякого вхождения всякой пп каким это вхождение является.

Ответ: В первом примере обе переменные вхождят свободно. Во втором примере первое вхожденеи x и вхождение y – свободные, а второе вхождение x – связанное. В третьем примере все вхождения x – связанные, а y входит свободно.

Переменная называется свободной (связанной) в данной фл, если существуют свободные (связанные) её вхождения в эту фл. Одна и та же пп может быть свободной и связаной в данной фл.

В заключение данного раздела приведём несколько «текстовых» задач на логику предикатов.

1. Все учащиеся, пропускающие занятия, плохо сдают экзамены. Но т.к. некоторые учащиеся не пропускают занятий, то они хорошо сдают экзамены.

   Ответ: Это не факт. Можно не пропускать занятий, но сдавать экзамены плохо.
2. Верно ли, что существует такой человек, что если он пьёт, то пьют все? (принцип пьяницы!).

   Ответ: К сожалению, это так. Решение см. ниже.
3. Верно ли, что существует такой человек, что если кто-нибудь пьёт, то пьёт и он?

   Ответ: И это то же верное утверждение.

Замечание Два последних вывода дают понять, что в классической логике предикатов что-то не ладно по отношению к реальности!! (см. конец лекции).

4. Все отличники получают стипендию. Ваня получает стипендию, следовательно, Ваня отличник.
   Ответ: Не верное заключение, см. 1.
5. Все спортсмены, играющие в хоккей, хорошо катаются на коньках. Петя плохо катается на коньках, следовательно, Петя не играет в хоккей.
   Ответ: Это так. Пора научиться кататься на коньках.
6. Все спортсмены, играющие в хоккей – смелые и отважные люди. Коля не играет в хоккей, следовательно, Коля – трус.
   Ответ: Да нет, он м.б. смелым и отважным; например, прыгать с парашютом.
7. Некоторые студенты, которые часто болеют, пропускают много занятий. Следовательно, любой студент, который не пропускает много занятий, болеет не часто (сами решите!)
8. Некоторые люди плохо плавают и плохо бегают. Тогда все люди, которые хорошо плавают, хорошо и бегают (сами решите!)

1.2 Интерпретации и модели.

Наши формулы будут иметь смысл только тогда, если мы проинтерпретируем каким-либо образом входящие в них символы. Под **интерпретацией** будем понимать пару: **непустое множество D** (область интерпретации) и **соответствие**, которое каждой прб данной валентности сопоставляет некоторое (той же валентности) отношение на **D**. При этом пп мыслятся как пробегающие над областью **D**, а пс и кванторам придаётся обычный смысл. При данной интерпретации всякая фл без свободных переменных (замкнутая фл или зфл) представляет собой высказывание, которое будет либо истинно, либо ложно, а всякая фл со свободными пп выражает некоторое отношение на D, которое для одних значений пп может быть истинно, а для других значений тех же пп – ложно.

Упражнения Предлагаем читателю рассмотреть на области натуральных чисел (без 0) следующие фл: (i) $A(x,y)$; (ii) $\forall yA(x,y)$; (iii) $\exists y\forall xA(x,y)$, где $A(x,y)$ интерпретируется как $x\leq y$ и выяснить, какие отношения эти фл представляют (затем замените множество всех натуральных чисел на множество всех целых чисел и снова выясните, какие отношения эти же фл представляют).

Теперь мы определим понятия **выполнимости и истинности**, но не будем крайне формалистичны. Назовём оценкой любое отображение множества пп в область **D**. Определим значение фл A при оценке f индукцией по построению A. Если $A(x_1, \ldots, x_n)$ – эф и A интерпретируется как отношение ***A*** на $\mathbf{D^n}$, то подставим в ***A*** вместо переменных их значения при данной оценке f. Если при этом отношение $\boldsymbol{A}(f(x_1),\ldots f(x_n))$ выполнено на **D**, то значение эф $A(x_1, \ldots, x_n)$ при оценке f равно 1, в противном случае значение эф $A(x_1, \ldots, x_n)$ при оценке f равно 0. Далее, значение фл при оценке определяется по индукции с помощью таблиц истинностности для пс. Значение фл $\neg A$ при оценке f есть $\neg$(значение фл A при той же оценке). Значение фл $A \to B$ при оценке f есть (значение фл A при f)$\to$(значение фл B при f). Значение фл $\forall x A(x, x_1, \ \ , x_n)$ при оценке f есть 1, если отношение $\boldsymbol{A}(d, f(x_1), \ldots, f(x_n))$ выполнено при любом d из **D**. Иначе значение фл $\forall x A(x, x_1, \ \ , x_n)$ при оценке f есть 0.

Определение. Фл A **истинна в данной интерпретации**, если она выполнена при любой оценке f. Если формула **не выполнена ни при одной оценке, то она называется ложной (в данной интерпретации).** Следующие факты проверяются без труда: a) если фл A ложна в данной интерпретации, то фл $\neg A$ истинна в той же интерпретации и наоборот; в) никакая фл не может быть одновременно истинной и ложной в данной интерпретации; c) если фл A и $A \to B$ истинны в данной интерпретации, то фл B истинна в той же интерпретации; d) фл $A \to B$ ложна в данной интерпретации тогда и только тогда, когда фл A истинна, а фл B ложна в этой интерпретации; e) фл A истинна в данной интерпретации (т.е. при любой оценке!), когда фл $\forall x A(x)$ истинна в той же интерпретации;
f) всякий частный случай любой тавтологии истинен во всякой интерпретации (частным случаем пф называется фл, получаемая подстановкой в пф вместо пп произвольных фл так, что вместо одной и той же пп подставляется одна и та же фл); g) если свободные переменные фл A оценки f и g оценивают одинаково, то значение фл A при оценке f совпадает со значением фл A при оценке g.

Задача. Проверьте пункты a) – g) самостоятельно.

Указание: вспомнить определение интерпретации.

Фл A называется **общезначимой (озф),** если она истинна в любой интерпретации. Фл A называется **выполнимой (вф),** если найдётся интерпретация, при которой она истинна. Следующие факты также доказываются без труда: a) A есть озф тогда и только тогда, когда фл $\neg A$ не является вф; в) A есть вф тогда и только тогда, когда фл $\neg A$ не является озф; c) зфл A выполнима тогда и только тогда, когда она истинна в какой-либо интерпретации.

Фл A – противоречие, если $\neg$A – озф. Фл A влечёт фл B, если в любой интерпретации фл B истинна при всякой оценке, при которой выполнена фл A. Две фл эквивалентны, если каждая из них влечёт другую. Следующие факты докажите самостоятельно: а) фл A влечет фл B, если фл $A\rightarrow B$ озф; в) фл A и B эквивалентны, если фл $A\equiv B$ озф; с) если фл A влечёт фл B и фл A истинна в данной интерпретации, то фл B истинна в той же интерпретации.

Задача. Докажите, что: а) всякий частный случай тавтологии есть озф (определение частного случая было дано выше); в) если фл A не содержит x свободно, то фл $\forall x(A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow\forall xB(x))$ – озф; с) фл $\forall xA(x)\rightarrow A(y)$ – озф; d) фл $\forall x\exists yA(x,y)\rightarrow\exists y\forall xA(x,y)$ не является озф (рассмотрите подходящую интерпретацию для данной фл!).

Задача. Докажите, что фл $[\forall xA(x)\rightarrow\forall xB(x)]\rightarrow[\forall x(A(x)\rightarrow B(x))]$ не является озф; докажите также общезначимость таких фл:

а) $\forall xA(x)\rightarrow\exists xA(x)$; в) $\forall xA(x)\equiv\neg\exists x\neg A(x)$;

с) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x))\rightarrow(\forall xA(x)\rightarrow\forall xB(x))$;

d) $(\forall xA(x)\wedge\forall xB(x))\equiv\forall x(A(x)\wedge B(x))$ и тот же факт, но с заменой $\wedge$ на $\vee$;

e) $\exists x\forall yA(x,y)\rightarrow\forall x\exists yA(x,y)$.

1.3 Аксиомы чистого исчисления предикатов

К схемам аксиом из пункта 3.1.(ЧI) A1-A3 добавим ещё две: A4. $\forall xA(x)\rightarrow A(y)$ и A5. $\forall x(A\rightarrow B(x))\rightarrow(A\rightarrow\forall xB(x))$, где фл A не содержит пп x свободно. К правилам вывода из пункта 3.1.(ЧI) (MP) добавим такое правило вывода: фл $\forall xA$ есть непосредственное следствие фл A (правило Gen – дженерализация или обобщение).

Любая теория в **языке первого порядка (т.е. в языке без кванторов по прб)** содержит (если язык без функциональных символов, а последнее требование не ограничивает общности рассмотрения) отмеченные нами схемы аксиом и правила вывода (**логика теории**), а также какие-либо собственные аксиомы. **У чистого исчисления предикатов собственных аксиом нет.**

Определение. **Моделью чистого исчисления предикатов** называется любая интерпретация, в которой истинны все аксиомы чистого исчисления предикатов (обозначим это исчисление через **К**), а правила вывода при применении к истинным в данной интерпретации фл дают истинные в той же интерпретации фл.

Тогда всякая теорема теории **K** истинна в той же интерпретации. Ограничения на пункты схем А4 и А5 необходимы. Пусть А(х) есть $\neg\forall y B(x,y)$ и пп у не входит свободно в А(х). Рассмотрим частный случай схемы аксиом А4: $\forall x(\neg\forall y B(x,y)) \rightarrow \neg\forall y B(y,y)$ и теперь в качестве интерпретации возьмём область **D** с не менее чем двумя элементами, а в качестве В – отношение тождества (совпадения). Тогда антецедент (посылка) нашего частного случая А4 истинен, а консеквент (сукцедент, заключение) – ложен. В схеме аксиом А5 отказ от ограничения также невозможен. Пусть А и В есть С(х) (теперь х входит в А свободно!). Рассмотрим такой пример схемы аксиом А5: $\forall x(C(x)\rightarrow C(x))\rightarrow(C(x)\rightarrow\forall x C(x))$. Посылка примера общезначима, но если в нашей интерпретации С выполнено не для всех элементов области, то заключение не будет истинным.

Наряду с теорией **K** будем рассматривать теорию $\mathbf{K_4}$, которая получается следующим образом: берем исчисление высказываний в форме $\mathbf{L_4}$ (см. пункт 4.2.(ЧI) для определения (изменяется и язык!)) и добавляем в язык квантор существования $\exists$, а в качестве аксиом добавляем две схемы аксиом и два правила вывода (они известны как правила Бернайса). Схемы $\forall x A(x)\rightarrow A(y)$ и $A(x)\rightarrow\exists x A(x)$. Правила: если в $\mathbf{K_4}$ выводима фл $\forall x(B\rightarrow A(x))$, где пп х не входит свободно в В, то в $\mathbf{K_4}$ выводима фл $B\rightarrow\forall x A(x)$ (правило В1); если в $\mathbf{K_4}$ выводима фл $\forall x(B(x)\rightarrow A)$, то в $\mathbf{K_4}$ выводима фл $\exists x B(x)\rightarrow A$, где пп х не входит свободно в А (правило В2). В дальнейшем некоторые факты для **K** будут доказываться при нотации с квантором существования, однако в этих случаях этот квантор будет всегда выражен через квантор всеобщности так: $\exists x A(x) = \neg\forall x\neg A(x)$.

Вопросы и упражнения к Лекции 1.

1. Какие вхождения пропозициональных переменных в формулу называют связанными, а какие свободными?
2. Может ли одна и та же переменная входить в одну и ту же формулу связанно и свободно? (этот вопрос задавался и ранее!).
3. О принципах пьяницы. Доказательства этих верных утверждений связано с использованием закона исключенного третьего (зит). Зит в ряде случаев плохо отражает реальную ситуацию. Однако (и это очень спорный вопрос) он присутствует во всех математических рассуждениях. Задачи про пьяниц решаются так: в силу зит либо все пьют, либо это не верно. Если первое, тогда в качестве нужного

лица берём произвольного человека (ведь всё равно все пьют). Если нет, то тогда найдётся непьющий человек Т.к. не верно, что он пьёт, то отсюда следует, что если он пьёт, то пьют все. Вторая задача решается совершенно аналогично.

4. Что такое интерпретация? Что такое оценка?
5. Что означает, что фл истинна в данной интерпретации при данной оценке?
6. Что такое модель для чистого исчисления предикатов?
7. Что означает, что фл логики предикатов общезначима?
8. Дайте определение языка первого порядка.
9. Сформулируйте дополнительные схемы аксиом и дополнительные правила вывода для исчисление **К**.

Лекция 2

Чистое исчисление предикатов

2.1. Свойства чистого исчисления предикатов.

На самом деле все наши дальнейшие результаты будут верны для любой теории первого порядка, а не только для исчисления **К.**

Утверждение 2.1.1. Если фл А теории **К** есть частный случай тавтологии, то фл А есть теорема теории **К** и может быть выведена только с употреблением схем А1 – А3 и правила МР.

Доказательство. Возьмём вывод тавтологии А в **L** и сделаем в нём всюду такие изменения: (i) если пп входит в вывод, то на места всех её вхождений во все фл вывода подставляем ту фл теории **К**, которая подставлялась вместо этой пп при получении фл А; (ii) если данная пп не входит в вывод, то на места всех её вхождений во все фл вывода подставляем одну и ту же фл теории **К** (произвольную). Полученная новая последовательность фл и будет выводом нашей фл А в **К**, при этом использовались только отмеченные в Утверждении 2.1.1 схемы и правила вывода.

Упражнение. Возьмите какой-либо из выводов, полученных ранее для теории **L,** и преобразуйте сначала полученную тавтологию, а затем её вывод так, как указано выше!

Утверждение 2.1.2. Чистое исчисление предикатов непротиворечиво.

Доказательство. Для фл А через П(А) обозначим фл, которая получится из А опусканием всех кванторов и стоящих за ними пп.

Полученное выражение является пф (вместо пп в них будут стоять прб). Наша операция П проносится через пс (проверьте это!). Если фл А есть пример схем аксиом А1 – А5, то П(А) – тавтология (проверьте это для схем А4 и А5). Проверьте также, что правила MP и Gen преобразуют тавтологии в тавтологии. Если бы теперь в К выводились фл В и $\neg$В, то оба выражения П(В) и П($\neg$В) были бы тавтологиями, однако последнее невозможно (почему?). Итак, теория **К** – непротиворечива.

Замечание. Чуть ниже мы приведём другое доказательство непротиворечивости **К**, использующее теорему о полноте для чистого исчисления предикатов **К**.

Теорема о дедукции прямо на исчисление предикатов **К** не переносится. Например, пусть А $\vdash$ $\forall$xA(x), однако не всегда $\vdash$ А $\to\forall$xA(x). Вот пример. Рассмотрим область из двух элементов а и в. Пусть фл А интерпретируется свойством, которым обладает только элемент а. Тогда фл А выполнена при любой оценке, отображающей пп х в а, а фл $\forall$xA(x) не выполнена ни при какой оценке, т.е. фл А $\to\forall$xA(x) не есть озф. Но в теореме о полноте мы докажем, что всякая теорема теории **К** является озф.

Но все же некоторая ослабленная форма теоремы о дедукции остаётся верной и для исчисления **К**. Рассмотрим конечное множество фл Г, фл А$\in$Г и вывод $B_1,\ldots,B_n$ из Г, снабженный обоснованием каждого шага.

Определение. Скажем, что B_i в этом выводе зависит от А, если B_i есть А и обоснованием B_i служит принадлежность B_i к Г или B_i обосновано как следствие по MP или Gen некоторых предшествующих фл, хотя бы одна из которых зависит от А. Приведём пример. Докажем, что А, $\forall$xA(x)$\to$C $\vdash$ $\forall$xC.

1.	А	гипотеза
2.	$\forall$xA(x)	из 1. по Gen
3.	$\forall$xA(x)$\to$C	гипотеза
4.	C	из 2. и 3. По MP
5.	$\forall$xC	из 4 по Gen.

В приведенном выводе шаг 1 зависит от А, шаг 2 зависит от А, шаг 3 зависит от $\forall$xA(x)$\to$C, шаг 4 зависит от А и от $\forall$xA(x)$\to$C и шаг 5 зависит от А и от $\forall$xA(x)$\to$C.

Утверждение 2.1.3. Если фл В не зависит от фл А в выводе Г, А $\vdash$ В, то Г $\vdash$ В.

Доказательство. Пусть $B_1,\ldots,B_n=B$ – вывод B из {Г, A} и пусть B не зависит от A. Проведём индукцию по длине вывода. Итак, пусть наше Утверждение 2.1.3 верно для всякого вывода, длина которого меньше n. Если B принадлежит Г или есть аксиома, то наше утверждение верно. Если B есть непосредственное следствие каких-либо фл (одной или двух в зависимости от правила вывода), то, т.к. B не зависит от A, то от A не зависит ни одна из этих фл и по предположению индукции из Г выводятся эти фл а, следовательно, и фл B.

Утверждение 2.1.4**. Теорема о дедукции для исчисления К**.

Пусть Г, A □ B и пусть при этом существует такой вывод, в котором ни при каком применении правила Gen к фл, зависящим в этом выводе от A, не связывается квантором никакая свободная переменная фл A. Тогда Г □ $A\to B$.

Прежде чем доказывать Утверждение 2.1.4, дадим его более слабые, но полезные в применении следствия.

Следствие 2.1.5. Если Г, A □ B и вывод свободен от применения правила Gen к свободным переменным из фл A, то Г □ $A\to B$.

Следствие 2.1.6. Если фл A замкнута и Г, A □ B, то Г □ $A\to B$.

Докажем теперь Утверждение 2.1.4. Используем индукцию по построению вывода. Пусть $B_1,\ldots,B_n=B$ есть вывод B из {Г,A}, удовлетворяющий условиям Утверждения 2.1.4. Докажем теперь для всякого $i \le n$ наше Утверждение 2.1.4. Если B_i есть аксиома или B_i принадлежит Г, то Г □$A\to B_i$, т.к. $B_i\to(A\to B_i)$ есть аксиома. Если $B_i=A$, то Утверждение 2.1.4 верно в силу выводимости $A\to A$. Если есть j и k меньшие i такие, что $B_к$ есть $B_j\to B_i$, то в силу индукционного предположения, имеем Г□$A\to B_j$ и Г□$A\to(B_j\to B_i)$. Используя схему аксиом A2 и правило MP, получим Г□$A\to B_i$. Наконец, пусть найдётся $j< i$ такое, что $B_i=\forall x_к B_j$. По предположению, Г □$A\to B_j$ и B_j либо не зависит от A, либо переменная x_k не свободна в фл A. Если первое, то в силу Утверждения 2.1.3 имеем Г □B_j и, по правилу Gen, Г□$\forall x_к B_j$, т.е. Г□B_i. Используя схему аксиом A1 и MP, имеем Г□$A\to B_i$. Если же $x_к$ не свободная переменная фл A, то по схеме A5 □$\forall x_k(A\to B_j)\to(A\to\forall x_k B_j)$. Т.к. Г□$A\to B_j$, то по правилу Gen получаем Г□$\forall x_k(A\to B_j)$ и, по MP, Г□$A\to\forall x_k B_j$, т.е. Г □$A\to B_i$. Это и завершает наше доказательство. Т.к. $i \le n$, то имеем требуемое.

Приведём полезный пример. Докажем, что □$\forall x\forall yA\to\forall y\forall xA$.

1. $\forall x\forall yA$ гипотеза.
2. $\forall x\forall yA\to\forall yA$ схема A4

3. $\forall yA$ из 1 и 2 по MP
4. $\forall yA \to A$ схема A4
5. A из 3 и 4 по MP
6. $\forall xA$ из 5 по Gen
7. $\forall y \forall xA$ из 6 по Gen

В силу 1 – 7 получаем, что $\forall x \forall yA$□$\forall y \forall xA$ и что в нашем выводе ни при одном применении правила Gen не связывается никакая свободная переменная фл $\forall y \forall xA$. Поэтому, на основании Следствия 2.1.5, получаем требуемый результат.

Задача. Докажите выводимость в **К** таких фл:

а) □$\forall x(A \to B) \to (\forall xA \to \forall xB)$; в) □$\forall x(A \to B) \to (\exists xA \to \exists xB)$;

с) □$\forall x(A \wedge B) \equiv (\forall xA \wedge \forall xB)$.

Указание. Используйте **теорему о дедукции** для исчисления $\mathbf{K_4}$.

2.2 Теорема Гёделя о полноте. Приведение формул логики предикатов к предваренному виду

Утверждение 2.2.1. **Теорема о полноте для исчисления К**. **В чистом исчислении предикатов К фл А выводима тогда и только тогда, когда А есть озф.**

Мы докажем только половину (более лёгкую) этой теоремы. Относительно второй половины скажем только, что она есть следствие следующих двух утверждений: а) **лемма Линденбаума**: если теория первого порядка непротиворечива (в частности, чистое исчисление предикатов), то существует ее полное непротиворечивое расширение (т.е. расширение, в котором для любой замкнутой фл выводимы либо сама фл, либо её отрицание); в) всякая непротиворечивая теория первого порядка (в частности, чистое исчисление предикатов) имеет счётную модель (модель, у которой область **D** счётная).

Доказательство первой половины Утверждения 2.2.1.

Легко проверить, что любой пример любой схемы аксиом является озф (проверьте этот факт!). Также, нетрудно видеть (частично это уже делалось в пункте 1.2 в самом конце), что понятие озф сохраняется при применении правил вывода MP и Gen. Следовательно, всякая теорема исчисления **К** является озф. Также, как следствие первой половины нашего Утверждения 2.2.1, получаем ещё одно доказательство непротиворечивости исчисления **К** (проделайте это самостоятельно).

Пусть А – фл с одной точно свободной пп (наше ограничение сделано для простоты рассмотрения). Рассмотрим фл А(x) и А(y), где x и y – разные переменные. **Фл выше называются подобными**, если пп x свободна для пп y в фл А(y) и А(y) не имеет свободных вхождений пп x. Нетрудно видеть, что наше отношение подобия симметрично.

Утверждение 2.2.2. Если фл А(x) и А(y) подобны, то $\vdash \forall x A(x) \equiv \forall y A(y)$.

Доказательство. По схеме аксиом А4 $\vdash \forall x A(x) \rightarrow A(y)$. Теперь применим правило Gen: $\vdash \forall y(\forall x A(x) \rightarrow A(y))$ и, по схеме аксиом А5, имеем $\vdash \forall x A(x) \rightarrow \forall y A(y)$. Вторая половина Утверждения 2.2.2 доказывается аналогично в силу симметрии. Применяя тавтологию $A\rightarrow(B\rightarrow(A\wedge B))$ (которая выводима в **К**, Утверждение 2.1.1), завершаем доказательство.

Задача. Докажите, что если фл А(x) и А(y) подобны, то $\vdash \exists x A(x) \equiv \exists y A(y)$.

Указание. Формула $\exists x A(x) = \neg\forall x\neg A(x)$.

Замечание. **Теорема о полноте** была впервые доказана **К. Гёделем** (т.н. первая теорема Гёделя) в **1930** г. и её оригинальное доказательство было совсем другим. Мы приведём сейчас несколько следствий из теоремы о полноте, которые очень парадоксальны.

а) фл А истинна в каждой <u>счётной</u> модели $\Leftrightarrow$ $\vdash_K A$;

в) если фл В является следствием множества фл Г, то $\Gamma \vdash_K A$;

с) **теорема Сколема – Лёвенгейма**: если теория **К** (любая теория первого порядка!) имеет какую-нибудь модель, то она имеет счётную модель (и это несмотря на то, что в формальной теории **К** речь может идти о несчётных множествах! Пример: теория множеств Цермело-Френкеля является теорией первого порядка). Следствие (конечно, не прямо из теоремы о полноте, а из доказательства второй её половины) достаточно парадоксальное.

В завершение изучения исчисления предикатов **К** приведем еще несколько дополнительных метатеорем (метатеоремой называется утверждение о свойствах какой-либо формальной теории) и рассмотрим вопрос о приведении фл языка теории **К** к некоторому важному стандартному (т.н. **предваренному нормальному!**) виду.

Утверждение 2.2.3. (**правило индивидуализации**)

$\forall x A(x) \vdash A(y)$ Использовать схему аксиом А4 и правило МР.

Утверждение 2.2.4. Если пп x не свободна в фл A, то следующие фл являются теоремами теории **K**:

a) $A\to \forall xA(x)$; в) $\exists xA(x)\to A$; c) $\forall x(A\to B)\equiv(A\to\forall xB)$;

d) $\forall x(B\to A)\equiv(\exists xB\to A)$.

Задача. Докажите последнее Утверждение 2.2.4 самостоятельно. Указание. Воспользуйтесь исчислением $\mathbf{K_4}$.

Утверждение 2.2.5. (**правило существования**)

□ $A(y)\to\exists xA(x)$ (пп y не входит свободно в фл $\exists xA(x)$).

Доказательство. По аксиоме A4 □ $\forall x\neg A(x)\to\neg A(y)$.

Из тавтологии $(A\to\neg B)\to(B\to\neg A)$ по MP получаем □$A(y)\to\neg\forall x\neg A(x)$ и □ $A(y)\to\exists xA(x)$, ч.т.д.

Приведём теперь ещё без доказательства **правило переименования связанных пп**.

Утверждение 2.2.6. (**правило переименования связанных пп**).

Если $\forall xB(x)$ есть подформула фл A, фл B(y) подобна фл B(x) и $A^{\bullet}$ есть результат замены по крайней мере одного вхождения $\forall xB(x)$ в A на $\forall yB(y)$, то □ $A\equiv A^{\bullet}$.

Наконец, приведем т.н. **правило C**, сделав предварительно небольшой комментарий. В математике распространены выводы следующего типа. Пусть доказано утверждение вида $\exists xA(x)$. Тогда рассуждают так: если a есть объект такой, что верно A(a), то… (проводим некоторое рассуждение)… получим фл B, которая уже не содержит произвольно выбранного объекта a. Отсюда заключают, что верно утверждение $\exists xA(x) \to B$. На самом деле выбор элемента a со свойством A не нужен и в выводе в **K** можно обойтись без этого выбора. Мы не будем приводить как точную формулировку, так и обоснование **правила C**, а заметим только, что можно определить понятие вывода в **K** с **правилом C** и доказать, что если есть вывод в теории **K** с **правилом C**, то есть вывод просто в теории **K** (за более точными формулировками и доказательствами относительно **правила C** отсылаем читателя к книге Мендельсона «Введение в математическую логику», М., Мир, 1971 г., стр. 83-85).

Завершая изучение чистого исчисления предикатов **K**, докажем, что всякую фл A языка теории **K** можно привести к следующему, назовём его **предваренным нормальным**, виду: $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_nB$, где каждое Q_i есть либо квантор $\forall$, либо $\neg\forall$, а фл B кванторов не содержит.

Утверждение 2.2.7. Всякая фл равносильна (в смысле общезначимости, а значит и в смысле выводимости в **К**) некоторой фл в **предваренной нормальной форме**.

Доказательство. Следующие фл являются озф при условии, что y не входит свободно ни в A, ни в B:

I) $(\forall xA(x)\to B) \equiv \exists y(A(y)\to B)$;

II) $\exists xA(x)\to B \equiv \forall y(A(y)\to B)$;

III) $B\to\forall xA(x) \equiv \forall y(B\to A(y)$;

IV) $B\to\exists xA(x) \equiv \exists y(B\to A(y))$.

На фл в пунктах Y и YI предыдущее ограничение на y не распространяется.

Y) $\neg\forall xA \equiv \exists x\neg A$; YI) $\neg\exists xA \equiv \forall x\neg A$.

Общезначимость фл в Y) и YI) доказывается очень просто (докажите самостоятельно). Докажем, что фл из I) есть озф. Пусть фиксированы интерпретация и оценка. Предположим, что истинна (при данных интерпретации и оценке) фл $\exists y(A(y)\to B)$ (напомним, что переменая y не входит свободно в B. Без ограничения общности считаем, что B – замкнутая фл и что в фл A свободно входит только переменная x. Это означает, что найдется элемент $d\in\mathbf{D}$ ($\mathbf{D}$ – область интерпретации) такой, что истинна фл $A(d)\to B$. Если для всякого $d\in\mathbf{D}$. A(d) – истинная фл, то и B – то же истинная фл и тогда истинна фл $\forall xA(x)\to B$. Если же A(d) истинна не для всякого d, то истинна фл $\forall xA(x)\to B$ в силу ложности посылки. Обратно, предположим, что $\forall xA(x)$ – ложная фл. Но тогда для некоторого d фл A(d) – ложна и, следовательно, фл $\exists y(A(y)\to B)$ – истинна. Если же $\forall xA(x)$ – истинная фл, то B – истинная фл и фл $\exists y(A(y)\to B)$ также истинна. Общезначимость фл из пункта II доказывается аналогично.

Задача. Докажите, что фл III и IV также есть озф.

Утверждение 2.2.7 доказано. Это доказывает возможность приведения каждой фл исчисления **К** к **предваренной нормальной форме**.

Вопросы и упражнения к Лекции 2.

1. Какие свойства исчисления предикатов Вы знаете?
2. Верно ли, что исчисления предикатов непротиворечиво? Полно? (заметим, что в 1936 г. А.Чёрч доказал, что исчисление предикатов неразрешимо; но исчисление одноместных предикатов оказывается всё же разрешимо!)
3. Докажите, что исчисление предикатов непротиворечиво.

4. Сформулируйте теорему о дедукции для исчисления предикатов.
5. Что такое предваренный нормальный вид для формулы?
6. Верно ли, что любая формула исчисления предикатов приводима к этому виду (эквивалентным образом)?
7. Что такое правило индивидуализации?
8. Что такое правило переименования связанных переменных?
9. Сформулируйте правило существования.
10. Тот же вопрос для правила С.

Лекция 3

Элементы теории алгоритмов

3.1 Вычислимые функции.

Введём некоторые понятия, причем эти понятия не определяем, т.к. считаем их интуитивно ясными: это понятия «алгоритм», «исходное данное» и ряд др. С каждым алгоритмом будем связывать множество возможных исходных данных. Если x - возможное исходное данное, то при применении алгоритма A к x возможны три исхода: применение A к x **завершится за конечное число шагов и будет получен некоторый результат**; применение A к x **закончится, но безрезультатно**; алгоритм A будет работать на x бесконечно, **т.е. применение не закончится**. В первом случае говорят, что **A применим к x**, в двух других случаях говорят, **что A не применим к x.** Приведём нужные примеры. Например, можно, начиная с 0, всё время прибавлять 1. Применение **никогда не закончится**. Или, начиная с 0, прибавить 5 раз по 1 и закончить вычисление. **Применение состоялось**. Или, начиная с 0, прибавить 0 и остановится – **нет результата**.

Множество тех исходных данных, к которым алгоритм применим, будем называть областью применения алгоритма.

Частичной функцией из множества X в множество Y назовем любое подмножество $A \subseteq X \times Y$ такое, что если первые компоненты упорядоченных пар равны, то и их вторые компоненты равны (в частности, A м.б. пустым). Частичные функции назовём просто функциями, при этом такая функция м.б. и всюду определенной. Каждому алгоритму на множестве исходных данных X м.б. сопоставлена естественным образом функция на X так, что $f(x) \simeq$

$\Im(x)$, где $\Im$ - алгоритм на множестве X. При этом знак $\cong$ называется условным равенством, т.е. $\Im$ и f одновременно определены или неопределены и первом случае имеет место $f(x)=\Im(x)$.

Функция называется вычислимой, если существует вычисляющий ее алгоритм. Например, нигде не определенная функция вычислима.

Конечно, понятие алгоритма имеет смысл только в случае, если исходные данные и результат вычисления (обработки) исходных данных являются «конструктивными» объектами. Мы будем считать, что натуральные числа или конечные слова в алфавите (также конечном) суть «конструктивные» объекты и никаких дальнейших пояснений о «конструктивных» объектах не делаем.

Замечание. Не следует думать, что для доказательства вычислимости функции нужно предъявлять соответствующий алгоритм. Функция f, равная 1, если верна гипотеза Ферма и равная 0 в противном случае, вычислима, т.к. равна тождественно 1 или 0 (т.к. проблема Ферма уже решена, то можно вместо неё взять любую другую, нерешённую ещё, математическую проблему).

Функция вычислима, если существует алгоритм, ее вычисляющий.

Задачи: а) приведите примеры вычислимых функций; б) определим функцию так: $f(n)=0$, если в десятичное разложение числа π входит кортеж 012345678910…n и $f(n)=1$ в противном случае; является ли f вычислимой функцией?

Решения: а) например, вычисление целой части из корня квадратного – вычислимая функция (алгоритм таков: перебираем натуральные числа с 0, возводим в квадрат и находим ближайший меньший данного);

б) функция вычислима (постройте соответствующий алгоритм, который постепенно вычисляет десятичные знаки числа π).

Замечание. Если множество X бесконечно и множество Y не пусто, то найдётся невычислимая функция из X в Y (т.к. множество всех алгоритмов счётно, а множество всех функций (частичных!!) несчётно). Сколько элементов должно содержать множество Y, чтобы нашлась всюду определенная невычислимая функция из X в Y? Достаточно двух элементов.

3.2 Разрешимые множества.

Пусть X и Y – множества «конструктивных» объектов. Подмножество $A \subseteq X$ – назовём **разрешимым, если найдется**

алгоритм, который по всякому $x \in X$ решает, $x \in A$ или нет (другими словами, если характеристическая функция A (т.е. такая функция f(x), что f(x)=1, если $x \in A$ и f(x)=0 иначе) является вычислимой).

Утверждение 3.2.1. Пересечение, объединение и дополнение разрешимых множеств разрешимо.

Задача. Докажите Утверждение 3.2.1. См. решение ниже.

Следствия Утверждения 3.2.1: множества нечетных чисел, простых чисел, кубов натуральных чисел разрешимы (докажите!).

Замечание. Если X – бесконечное множество, то существует неразрешимое подмножество X (вспомнить, что множество вычислимых функций – счётно).

Доказательство 3.2.1. Если A и B – разрешимые множества, то есть алгоритмы для их характеристических функций. Запускаем работать оба алгоритма. Если оба алгоритма указывают на принадлежность элемента как к A, так и к B, то полагаем соответствующую функцию равной 1, а иначе – 0. Для объединения аналогично, но оба алгоритма должны быть равны 0 для случая непринадлежности элемента ни к A, ни к B. Для дополнения совсем просто.

3.3 Полуразрешимые множества

Назовём множество $A \subseteq X$ **полуразрешимым**, если найдется алгоритм, который применим к элементам множества A и не работает на элементах из дополнения A, т.е. если **A является областью определения какой-либо вычислимой функции.**

Замечание. Для бесконечного X не всякое его подмножество полуразрешимо, т.к. множество вычислимых функций счётно.

Утверждение 3.3.1. Всякое разрешимое множество полуразрешимо.

Задача. Докажите Утверждение 3.3.1. См. решение ниже.

Замечание. Несколько ниже мы докажем, что обращение Утверждения 3.3.1 невозможно, т.е. приведём пример или докажем существование полуразрешимого множества, не являющегося разрешимым.

Утверждение 3.3.2 Любое конечное $A \subseteq X$ – разрешимо.

Задача. Докажите Утверждение 3.3.2. См. решение ниже.

Замечание. Мы считаем, что любое множество «конструктивных» объектов не более чем счётно, а также, что любое множество «конструктивных» объектов можно «перебрать», т.е. существует такая вычислимая функция, которая пересчитывает все объекты из X без повторений. Мы также принимаем без доказательства тот факт, что если X и Y – множества «конструктивных» объектов, то $X \times Y$ – также множество «конструктивных» объектов.

Пусть $A \subseteq X \times Y$. Проекцией A назовём множество $\text{пр}A = \{x: \exists y \in Y(\langle x,y \rangle \in A)\}$.

Утверждение 3.3.3 Проекция разрешимого множества является полуразрешимым множеством.

Доказательство. Укажем требуемый алгоритм: «перебираем элементы множества Y до тех пор, пока не найдется такой $y \in Y$, что $\langle x,y \rangle \in A$; если такой y найден, то выдать результатом 0».

Замечание. Если нужного y нет, то на таком x алгоритм работает бесконечно.

Всюду определенная функция $f\colon N \rightarrow X$ называется **вычислимой последовательностью, если f – вычислимая функция.**

Утверждение 3.3.4. Множество значений вычислимой последовательности является полуразрешимым множеством..

Доказательство. Укажем нужный алгоритм: «для исходного данного x перебирать все натуральные числа, пока не найдётся такое $n \in N$, что $f(n)=x$; при нахождении такого n выдать результатом 0».

Доказательства.

3.3.1. Если элемент принадлежит множеству A (разрешимому!), то полагаем функцию равной 1, а если нет, то бесконечно прибавляем к ней 1 (она не остановится и будет неприменима).

3.3.2. Конечное множество задаётся своим списком!

Вопросы и упражнения к Лекции 3

1.В каком случае считают, что алгоритм применим к данному объекту?

2. Что такое вычислимая последовательность?
3. Что такое разрешимое множество? Полуразрешимое множество?
4. Дать определение проекции множества?
5. Дать описание (не определение!!) понятия «вычислимая функция».

Лекция 4

Основные теоремы теории алгоритмов

4.1. Алгоритм пошагового вычисления и его следствия

Пусть $\Im$ - некоторый алгоритм с исходными данными из множества «конструктивных» объектов X в множество «конструктивных» объектов Y. Следующий алгоритм $\Re$ информирует о работе $\Im$ по шагам: исходные данные $\Re$ есть пары $\langle x,n\rangle$, $x\in X$, $n\in N$ и алгоритм $\Re$ примененный к паре $\langle x,n\rangle$ сообщает, закончится ли применение алгоритма $\Im$ к x за n шагов и если «да», то каков ответ применения (можно для $\Re$ среди значений ввести дополнительный символ, появление которого сигнализирует о том, что работа $\Im$ на x не закончена). Докажем теперь такие усиления Утверждений 3.3.3 и 3.3.4.

Утверждение 4.1.1. Следующие свойства подмножества A множества «конструктивных» объектов эквивалентны:

1) A есть область определения вычислимой функции (A – полуразрешимое множество);
2) A есть проекция разрешимого множества;
3) $A=\varnothing$ или A есть множество значений вычислимой последовательности;
4) A есть множество значений вычислимой функции.

Доказательство. 1)$\Rightarrow$2) Если A=Domf и f: $X\to Y$ – вычислимая функция, то A есть проекция разрешимого множества $B=\{\langle x,n\rangle : x\in X, n\in N$ и алгоритм, вычисляющий f, применяется к x не более чем за n шагов$\}$.

2)$\Rightarrow$3). Пусть множество $B\subseteq X\times Y$ – разрешимо и A=прB. По очереди перебираем все элементы множества «конструктивных» объектов $X\times Y$ и если n-ый элемент $\langle x_n,y_n\rangle$ попал в множество B, то пусть $f(n)=x_n$; в противном случае, т.к. A не пусто, то пусть f(n) равно какому-нибудь фиксированному элементу из A. Тогда последовательность значений функции f будет перечислять элементы множества A (дайте более формальное доказательство).

3)$\Rightarrow$4). В случае пустоты A оно есть множество значений нигде не определенной функции. Если же A есть множество значений вычислимой последовательности, то соответствующая функция и есть требуемая вычислимая функция.

4)$\Rightarrow$1). Пусть $f:Y\rightarrow X$ – вычислимая функция со множеством значений A. Требуемая функция с областью определения, равной A, вычисляется алгоритмом: «перебирать все пары $\langle n,y\rangle$, $n\in N$, $y\in Y$ и для каждой такой пары делать n шагов вычислений f(y); как только для хотя бы одной пары будет получен ответ f(y)=x, то в качестве результата выдать 0». Ясно, что если нужного y нет, то алгоритм не остановится, а если есть (f(y)=x), то алгоритм остановится на некотором шаге m. Утверждение 4.1.1 доказано.

Напомним, что множество A называется счётным, если $A=\varnothing$ или A есть множество значений некоторой последовательности.

Подмножество A множества «конструктивных» объектов назовем **перечислимым**, если $A=\varnothing$ или A есть множество значений некоторой вычислимой последовательности. Ясно, что понятие **перечислимого множества есть вычислимый аналог счётного множества.** Утверждение 4.1.1 говорит, что множество перечислимо тогда и только тогда, когда оно полуразрешимо.

Утверждение 4.1.2. Пусть $A\subseteq X$, $B\subseteq X$ – перечислимые множества. Тогда $A\cup B$ и $A\cap B$ – перечислимые множества. Если $C\subseteq X\times Y$ перечислимое множество, то прC также перечислимое множество.

Доказательство Утверждения 4.1.2. Если A пусто или B пусто, то доказывать нечего. В противном случае, по Утверждению 4.1.1, A и B есть множества значений вычислимых функций f и g. Но тогда $A\cup B$ есть множество значений последовательности h, которая определяется так: h(2k)=f(k), h(2k+1)=g(k) (опишите работу требуемого алгоритма!).

Докажем перечислимость прC (перечислимость же множества $A\cap B$ также докажите сами в качестве упражнения). Пусть $f:Z\rightarrow X\times Y$ и пусть $g:X\times Y\rightarrow X$. Полагаем h=g(f(z)). Функция h вычислима как композиция вычислимых функций (опишите соответствующий алгоритм). Очевидно, что функция h перечисляет множество прC. Утверждение 4.1.2 доказано.

Утверждение 4.1.3 **(Теорема Поста)**. Подмножество A множества «конструктивных» объектов X разрешимо тогда и только тогда, когда A и его дополнение X\A перечислимы.

Доказательство. Если A разрешимо, то X\A – разрешимо и оба множества перечислимы. Далее, если одно из множеств A или X\A пусто, то все очевидно. Иначе требуемый алгоритм таков: «для исходного x перебираем натуральные числа до тех пор, пока не будет f(n)=x или g(n)=x (здесь f и g - вычислимые функции, перечисляющие A и X\A соответственно); для первого такого n, если f(n)=x, то $x \in A$, если g(n)=x, то $x \in (X \setminus A)$». Т.к. одновременное выполнение обеих равенств невозможно (почему?), то требуемый алгоритм описан и разрешимость A доказана.

Из **теоремы Поста** следует, что неразрешимое множество обязательно имеет неразрешимое дополнение.

Утверждение 4.1.4 **(теорема о графике)** Функция $f:X \to Y$ вычислима тогда и только тогда, когда её график $\{\langle x,y\rangle : y=f(x)\}$ является перечислимым множеством.

Доказательство. Если f – вычислимая функция с непустым графиком (иначе теорема тривиальна), то её область определения (по Утверждению 4.1.1, пункт 1)) есть {g(0), g(1), …}, где g – вычислимая функция. Тогда график f перечислим как множество значений вычислимой функции $h(n)=\langle g(n),f(n)\rangle$. Обратно. Если график функции f перечислим и не является пустым множеством, то график есть область значений для некоторой, всюду определенной на N, функции $g:N \to X \times Y$. Тогда исходная функция f вычислима таким алгоритмом: «для исходного данного x перебирать все натуральные числа, пока не найдётся n такое, что $g(n)=\langle x,y\rangle$; если нашлось, то взять первое такое n и в качестве результата выдать то y, что $g(n)=\langle x,y\rangle$». Заметим, что если f(x) не определено, то алгоритм работу не заканчивает. Утверждение 4.1.4 доказано.

4.2. Универсальная вычислимая функция

Пусть X и Y – множества «конструктивных» объектов. Рассмотрим все алгоритмы, исходными данными которых являются элементы X, а значения принадлежат Y. Через Выч(X,Y) обозначим множество всех вычислимых функций из X в Y. Также, пусть P – третье множество «конструктивных» объектов.

Определение. Функция $F: P \times X \to Y$ называется **универсальной для класса функций Выч(X,Y),** если для всякой функции f из этого класса найдётся такое p из P, что $(\forall x \in X)(F(p,x) \cong f(x))$. Совершенно очевидно, что для класса Выч (X,Y) существует универсальная функция, т.к. данный класс счётен и если $f_0, f_1, \dots f_n, ..$ – пересчет этого класса, то пусть P=N и полагаем $F(n,x) \cong f_n(x)$ для всех $n \in N$,

$x \in X$. Для приведённой универсальной функции полагаем: $F_p(x) \cong F(p,x)$ для всех x из X.

Утверждение 4.2.1. Для любых множеств «конструктивных» объектов X и Y существует множество «конструктивных» объектов P и вычислимая функция $F : P \times X \rightarrow Y$, которая является универсальной для класса Выч (X,Y).

Доказательство. Для доказательства Утверждения 4.2.1 мы постулируем существование алгоритмического языка, на котором можно записать программу любого алгоритма с множеством исходных данных X и результатов применения из Y. Эти программы есть элементы какого-то множества «конструктивных» объектов P. Теперь зададим функцию $F : F(p,x)=y \Leftrightarrow$ «p является синтаксически правильной программой, дающей на входе x результат y». Функция F является вычислимой (**алгоритм, вычисляющий F, называется интерпретатором введённого языка программирования**) и универсальна, т.к. если функция $f \in$ Выч(X,Y) и вычисляется алгоритмом $\mathfrak{I}$ и если p – программа для $\mathfrak{I}$, тогда для некоторого p $(\forall x \in X)\ (f(x) \cong F(p,x))$. Утверждение 4.2.1 доказано.

Замечание. Если $F_p = f$, то соответствующих f программ p может быть много.

Если в Утверждении 4.2.1 в качестве P взять множество натуральных чисел N, то получим такое

Следствие 4.2.2. Для любых множеств «конструктивных» объектов X и Y существует вычислимая функция $H : N \times X \rightarrow Y$, универсальная для класса Выч(X,Y).

Действительно, по Утверждению 4.2.1 есть множество P и универсальная функция F. Если h – вычислимая биекция из N в P, то пусть $h(n)=p_n$. Положим $H(n,x) \cong F(p_n,x)$. Ясно, что $H: N \times X \rightarrow Y$ – вычислимая функция и является универсальной для класса Выч (X,Y).

Замечание. Если $H: N \times X \rightarrow Y$ универсальная функция и $f \in$ Выч(X,Y), то программу вычисления f относительно H называют номером f относительно H, а отображение $n \rightarrow H_n$ (последняя функция получается из H фиксацией первого аргумента) – нумерацией вычислимых функций, соответствующей универсальной функции H.

Пусть теперь $H: N \times N \rightarrow N$ есть универсальная вычислимая функция для класса Выч(N,N). Пусть функция f определена так: $f(n) \cong H(n,n)+1$. Но таким образом мы все же <u>не пришли</u> к противоречию (какому?), т.к. значение $H(s,s)$ м.б. не определено (здесь s есть номер функции f выше относительно нумерации $n \to H_n$).

Предположим теперь, что $f^\wedge$ - всюду определенное продолжение функции f (т.е. $f^\wedge$ всюду определена и там, где определена f, имеем $f(x)=f^\wedge(x)$. Сама f определена так: $f(n) \cong H(n,n)+1$, где H – универсальная функция для класса Выч((N,N)). Теперь уже не верно, что $f(n) \cong H_n(n)$, т.к. левая часть равенства определена, а правая – нет. Если же правая часть определена, то и $f(n)$ определено и равно $H_n(n)+1$ и $f^\wedge(n)$ совпадает с $f(n)$ и не равно $H_n(n)$. Тогда $f^\wedge$ отлична от всех функций H_n и поэтому не является вычислимой функцией. Следовательно, доказано

Утверждение 4.2.3. Существует вычислимая функция f: $N \to N$, не имеющая всюду определенного, вычислимого продолжения.

Утверждение 4.2.4. Существует перечислимое и неразрешимое множество.

Доказательство. Если множество A есть область определения функции f из Утверждения 4.2.3, то A – перечислимое множество. Если бы A было разрешимым множеством, то легко бы было построить всюду определенное вычислимое продолжение уже упомянутой выше функции f (постройте это продолжение самостоятельно).

4.3. Тезис Черча

Предположим, что неформальное определение вычислимой функции через понятие алгоритма удалось некоторым образом формализовать (таких формализаций было несколько и оказалось, что все они эквивалентны). Тогда можно высказать следующий философский принцип (который нельзя как доказать, так и опровергнуть). Этот принцип носит название Тезис Черча (по имени автора, впервые его выдвинувшего).

Тезис Черча. Всякая вычислимая (неформально) функция является формально вычислимой (в данной предложенной формализации).

Вопросы и упражнения к Лекции 4

1. Что такое алгоритм пошагового вычисления?
2. Опишите условия теоремы Поста.
3. Дайте определение (любое) перечислимого множества.
4. Дайте определение универсальной функции для данного класса функций.

5. Поясните, почему существует перечислимое и неразрешимое множество?
6. Сформулируйте тезис Чёрча. Можно ли доказать тезис Чёрча?