МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ФИНАНСОВОГО АНАЛИЗА

Портфельный анализ, модели ценообразования производные финансовые инструменты.

Расширенный план занятий

Преподаватель: А. Б. Шаповал

2005

Шаповал А. Б. Математические методы финансового анализа: Портфельный анализ, модели ценообразования, производные финансовые инструменты. — М.: Финансовая академия при Правительстве РФ, кафедра “Математика и финансовые приложения”, 2005. — 47 с.

Собранный материал основан на полугодовом курсе по финансовому анализу, прочитанном автором в Финансовой академии при Правительстве РФ. Изложение материала проводится в рамках математических моделей, которые иллюстрируются многочисленными примерами. В каждом разделе изложены основные теоретические сведения, приведены примеры решения задач и даны упражнения для самостоятельной работы.

Для студентов и аспирантов, начинающих изучать финансовый анализ.

Данный текст находится в Интернете по адресу: http://www.mccme.ru/~shapoval/Publctn/finanpr.pdf

[2] Л. Крушвиц Финансирование и инвестиции. Неоклассические основы теории финансов. СПб: Изд-во "Питер", 2000.

[3] Б. Оксендаль, Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения: Пер. с англ. М.: Мир, ООО “Издательство АСТ”, 2003.

[4] С.Л.Семаков, А. С. Солодовников Лекции по курсу введение в теорию случайных процессов, М.: ФА, кафедра “Математика и финанасовые приложения”, 2001, 75 с.

[5] Ю. В. Прохоров, Ю. А. Розанов Теория вероятностей, М.: Наука, 1973, 496 с.

[6] Т. Дж. Уотшем, К. Паррамоу Количественные методы в финансах: Учеб. пособие для вузов. М.: Финансы, ЮНИТИ, 1999.

[7] В. Феллер Введение в теорию вероятностей и ее приложения, Т. 1, 2. М.: Мир, 1984.

[8] Г. П. Фомин Финансовая математика: 300 примеров и задач. Учебное пособие. М.: "Гном-Пресс", 2000.

[9] У. Ф. Шарп, Г. Дж. Александер, Дж. В. Бейли Инвестиции: Пер. с англ. – М.: ИНФРА – М, 2001

[10] А. Н. Ширяев Основы стохастической финансовой математики. Том 1,2. М.: ФАЗИС, 1998.

[11] J. Hull, Options, Futures, and Other Derivatives, Prentice Hall, 2002.

[12] H. M. Markovitz Portfolio Selection, J. Finance, 7, 1952, pp. 77 – 91, H. M. Markovitz Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments, New York: John Wiley, 1959.

[13] S. M. Ross, An Elementary Introduction to Mathematical Finance, Options and Other Topics, Cambridge University Press, 2003.

15. $T = (0.014, 0.23)$.
16. $\sigma_\Pi = t\sigma_T$, $r_\Pi = tr_T + (1-t)r_f$, $t \geqslant 0$.
21. Может.
22. $\sigma_T = 16$.
23. Линия SML ценной бумаги: $r_i = 0.09 + 700c_{iT}$, где c_{iT} — ковариация i-ой ценной бумаги с касательным портфелем T.
24. Да.

Раздел 2

1. $\mathsf{P}\{\text{Цена } = 50 + 2u + 2(4-u)\} = C_4^u(3/5)^u(2/5)^{4-u}$
2. Наиболее вероятное значение 48.13.
4. Вероятнее ничья после четырёх бросаний.
6. $\Delta\big(tw(t)\big) = w(t)\Delta t + t\Delta w$.
7. $C \in [1.90, 210.13]$
8. $C_0 = 19.29$
9. $S(6) \sim N(10, 25)$
10. 6%

Раздел 3

5. Рассмотрите портфель, состоящий из -1 опциона и безрискового актива на сумму $P(t)$. В момент исполнения T цена портфеля $P(T)e^{r(T-t)} - \max\{K - S(T), 0\} \leqslant 0$.
8. 0.56
9. 0.3739
10. $\rho = e^{-r\Delta t}(\rho_u p + \rho_d q) = 0$
11. Одна акция и ν опционов колл на этот актив, где $\nu = -5$
12. Одна акция и ν опционов пут на этот актив, где $\nu = 5$.
13. 2.5847
16. $e^{-rT} = b(\geqslant\frac{n}{2}, p_*; n)e^{-r_2T} + b(\leqslant\frac{n}{2}, p; n)e^{-r_1T}$, где $p = \frac{e^{(r_1-r_2)\Delta t} - d}{u-d}$, $p_* = pue^{-(r_1-r_2)\Delta t}$.

Список литературы

[1] В. А. Бабайцев, А. В. Браилов, А. С. Солодовников Математика в экономике. Теория вероятностей. Часть 2: Курс лекций / Под ред. А. С. Солодовникова. – М.: Финансовая академия, 1999.

§1. Портфельный анализ

На рынке ценных бумаг находятся в обращении активы $A_1, \ldots, A_n$. Портфель определяется начальным капиталом c и долями $\nu_1, \ldots, \nu_n$, в соответствии с которыми капитал c вкладывается в активы $A_1, \ldots, A_n$. Доходность актива за один период вычисляется как разность между рыночной стоимостью актива в конце и начале периода, делённая на рыночную стоимость этого актива в начале периода. Аналогично определяется доходность портфеля.

Для построения математической модели вводятся случайные величины $R_1, \ldots, R_n$ с конечными математическим ожиданием и дисперсией. Эти случайные величины интерпретируются как доходности активов $A_1, \ldots, A_n$.

Ожидаемой доходностью r_i актива A_i называется математическое ожидание случайной величины R_i. *Риском* актива A_i называется среднеквадратичное отклонение σ_i случайной величины R_i. Произвольный актив A_i задаётся точкой (σ_i, r_i) на координатной плоскости (σ, r) с осями риск, ожидаемая доходность.

Портфелем Π, состоящем из активов $A_1, \ldots, A_n$, с начальным капиталом c называется вектор с координатами $\nu_1, \ldots, \nu_n$, где ν_i — это доля капитала c, которая вложена в актив A_i. В экономике для портфеля Π используется обозначение $\Pi = \nu_1 A_a + \ldots + \nu_n A_n$ вместо обычной записи вектора.

Определим случайную величину R_Π как средневзвешенную доходность активов:

$$R_\Pi = \nu_1 R_1 + \ldots + \nu_n R_n,$$

где $\nu_1 + \ldots + \nu_n = 1$. Пусть $r_\Pi = \mathbf{M}\, R_\Pi$, $\sigma_\Pi = \sqrt{\mathbf{D}\, R_\Pi}$. Тогда точка $\Pi(\sigma_\Pi, r_\Pi)$ координатной плоскости (σ, r) называется *допустимым портфелем*, состоящем из активов $A_1, \ldots, A_n$, с *ожидаемой доходностью* r_Π и *риском* σ_Π.

Ожидаемая доходность портфеля является взвешенной суммой ожидаемых доходностей активов:

$$r_\Pi = \sum_{i=1}^{n} \nu_i r_i. \tag{1.1}$$

Риск портфеля определяется формулой

$$\sigma_\Pi = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \nu_i \nu_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j}, \tag{1.2}$$

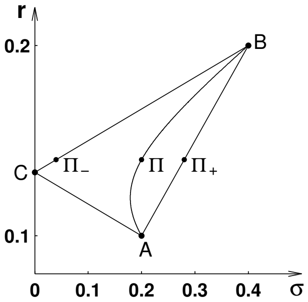

Рис. 1. Множество допустимых портфелей при ρ_{AB}, равном -1 (ломаная ACB), 0 (кривая AB) и 1 (отрезок AB).

где ρ_{ij} — коэффициент корреляции между случайными величинами R_i и R_j.

В самом простом случае портфель состоит только из двух активов A и B. Тогда множество допустимых портфелей имеет вид, изображенный на рис. 1. Множество допустимых портфелей зависит от коэффициента корреляции ρ_{AB} доходностей активов A и B. Если активы полностью коррелируют ($\rho_{AB} = 1$), то допустимые портфели находятся на отрезке AB, если полностью антикоррелируют ($\rho_{AB} = -1$), то допустимые портфели находятся на ломаной ACB, где

$$r_\Pi = \frac{\sigma_A r_B + \sigma_B r_A}{\sigma_A + \sigma_B}.$$

Если $-1 < \rho_{AB} < 1$, то множество допустимых портфелей $\Pi(\sigma, r)$ образуют кривую, которая является графиком некоторой выпуклой функции $\sigma(r)$.

1.1. Модель Марковица

Портфель $\Pi = (\sigma_\Pi, r_\Pi)$ называется *эффективным*, если нельзя выбрать допустимый портфель $\Pi_1 = (\sigma_{\Pi_1}, r_{\Pi_1})$ так, чтобы

$$r_{\Pi_1} > r_\Pi, \quad \sigma_{\Pi_1} < \sigma_\Pi.$$

Эффективные портфели находятся на левой и верхней границе множества допустимых портфелей. На рис. 2а множество эффективных портфелей обозначено через E.

Множество эффективных портфелей можно рассматривать как график некоторой функции $\sigma(r)$. Тогда устанавливается, что функция $\sigma(r)$ является выпуклой.

где $F_{S(T)}(x)$ — это функция распределения случайной величины $S(T)$.

5. Покажите, что S^{-2r/σ^2} может быть ценой финансового инструмента (S — цена актива, r — процентная ставка, σ — колебания цены актива).

6. С помощью паритета опционов колл и пут (3.7) и формулы (3.17) цены опциона колл выведите формулу (4.8) цены опциона пут.

7*. Текущая цена $S(\tau)$ некоторого актива равна 100. Колл опциона на этот актив сроком полгода имеет цену исполнения 105. В рамках модели Блэка-Шоулза вычислите цену колл опциона. Волатильность σ актива 0.08, ожидаемая доходность μ — 0.05, процентная ставка r — 0.04. Инвестор собирается вложить в финансовые инструменты $Q = 10\,000$ рублей. Он рассматривает две стратегии: вложить эти деньги в рассматриваемый актив или в колл опцион. Какие потенциальные преимущества каждой из стратегий? Вычислите среднюю прибыль для обеих стратегий. Сравните полученный результат с ответом, справедливым для нейтрального к риску рынка ($\mu = r$). Пусть V_1 и V_2 — случайные величины, задающие прибыль при исследуемых стратегиях. Вычислите $\mathsf{P}\{V_1 - V_2 > 0\}$, $\mathsf{P}\{V_1 - V_2 > 0.25Q\}$, $\mathsf{P}\{V_1 - V_2 > 0.5Q\}$, $\mathsf{P}\{V_1 - V_2 > Q\}$, $\mathsf{P}\{V_1 - V_2 < -0.25Q\}$, $\mathsf{P}\{V_1 - V_2 < -0.5Q\}$, $\mathsf{P}\{V_1 - V_2 < -Q\}$. Ответьте на вопросы задачи при $\sigma = 0.2$.

Ответы к упражнениям

Раздел 1

1. $r = 20\%$.

6. $\nu_A = 1.75$, $\nu_B = -0.05$, $\nu_C = -0.7$.

7. $\nu_1 = 0.85$, $\nu_2 = 0.24$, $\nu_0 = -0.09$.

8. Да.

9. Нет

11. $\Pi = \frac{3}{11}A + \frac{8}{11}B$.

12. $\Pi = 0.25A + 0.75B$.

13. $\Pi = 0.5A + 0.5B$.

14. $r_f = (1 - 0.9)/0.9 = 0.09$, $r_1 = 0.18$, $r_2 = 0.32$, $\sigma_1 = 0.067$, $\sigma_2 = 0.14$, $\mathbf{Cov}(A_1, A_2) = -0.009$

Применяя формулу (3.13) для колл опциона, имеем, что

$$c = e^{-r(T-t)}\Big(S_t e^{r(T-t)}\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)\Big) = S_t\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)e^{-r(T-t)},$$

что и требовалось доказать.

Вопросы и задачи

1. Цена фьючерса с ценой исполнения φ и днём исполнения T вычисляется в некоторый момент времени t по формуле $f = S - \varphi e^{-r(T-t)}$, где $S = S(t)$ — цена актива, на который выписан фьючерс в момент времени t. Проверьте, что функция f удовлетворяет уравнению Блэка-Шоулза.

2. Докажите, что чем выше текущая цена акции, тем выше цена колл опциона при неизменных цене исполнения опциона и волатильности. Определить увеличивается или уменьшается цена опциона колл при увеличении цены исполнения и неизменных остальных параметрах. Аналогичный вопрос о зависимости цены опциона колл от волатильности.

3. Докажите, что чем выше текущая цена акции, тем ниже цена пут опциона при неизменных цене исполнения опциона и волатильности. Определить увеличивается или уменьшается цена опциона пут при увеличении цены исполнения и неизменных остальных параметрах. Аналогичный вопрос о зависимости цены опциона пут от волатильности.

4. Цена акции \$40. Ожидаемая доходность акции — 15% годовых, волатильность — 30%. Найти распределение вероятностей для доходности акции, полученной за два года.

Указание. Цена акции $S(T)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\Delta S(T)}{S(T)} = \mu\Delta t + \sigma\Delta X.$$

Доходность — это случайная величина ζ, равная $(S(T) - S_0)/S_0 = S(T)/S_0 - 1$. Её функция распределения $F_\zeta(x)$ равна:

$$F_\zeta(x) = \mathsf{P}\left\{\frac{S(T)}{S_0} - 1 < x\right\} =$$
$$= \mathsf{P}\left\{S(T) < (x+1)S_0\right\} = F_{S(T)}\big((x+1)S_0\big),$$

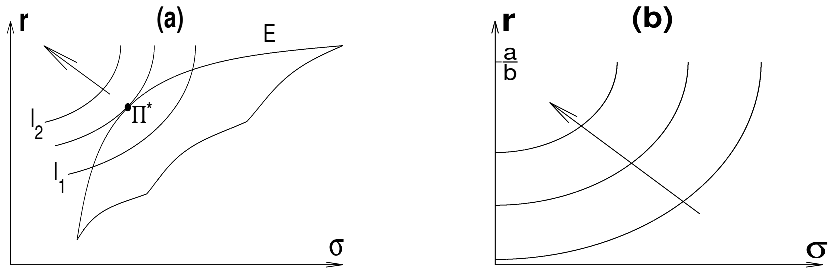

Рис. 2. (a) Оптимальный портфель Π^* находится в точке касания множества E эффективных портфелей и линии уровня. (b) Линии уровня функции $a^2r - b^2(r^2+\sigma^2)$.Стрелка показывает направление роста функции полезности.

Предполагается, что все инвесторы одинаково оценивают ожидаемую доходность и риск активов. Следовательно, эффективное множество портфелей не зависит от предпочтений инвестора. Следует ли из этого, что все инвесторы сформируют один и тот же портфель? Нет, не следует.

Каждому инвестору соответствует *функция полезности* $U(\sigma, r)$, Эта функция паре (σ, r) — (риск, ожидаемая доходность) — ставит в соответствие вещественное число. Значение функции $U(\sigma, r)$ можно понимать как удовольствие или удовлетворение инвестора от портфеля, риск которого равен σ, а ожидаемая доходность — r. Естественно, что *инвестор стремится сформировать портфель таким образом, чтобы полученное значение функции полезности было наибольшим.*

Решения $r(\sigma)$ уравнения $U(\sigma, r) = C$ называются *линиями уровня* функции U (или *кривыми безразличия* инвестора). Предполагается, что $U'_\sigma(\sigma, r) < 0$ (нерасположенность к риску), $U'_r(\sigma, r) > 0$ (ненасыщаемость) и линии уровня функции U как функции r от переменной σ выпуклы (существенная нерасположенность к риску). Типичный вид линий уровня функции полезности показан на рис. 2b. Стрелка на рисунке показывает направление роста функции полезности.

Портфель Π^*, имеющий ожидаемую доходность r^* и риск σ^*, называется *оптимальным* , если на нём функция полезности U достигает своего наибольшего значения $U^* = U(\sigma^*, r^*)$ среди всех до-

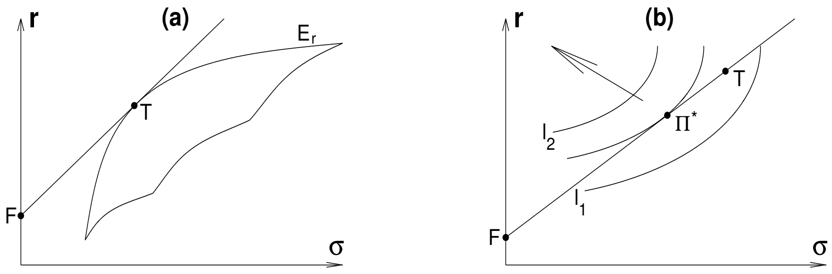

Рис. 3. (a) Эффективные портфели, состоящие только из рискованных активов —кривая E_r, из всех активов — луч FT; F — безрисковый актив, T — точка касания FT и E_r. (b) Оптимальный портфель Π^* находится в точке касания линии уровня функции полезности и луча $[FT)$. Стрелка показывает направление роста функции полезности.

пустимых портфелей. Оптимальный портфель на рис. 2a находится в точке Π^* касания линии уровня функции полезности и эффективного множества портфелей.

1.2. Модель Тобина

Предположим дополнительно, что на рынке ценных бумаг существует безрисковый актив $F = (0, r_F)$. Тогда эффективным множеством портфелей является отрезок FT (рис. 3a), где T — такая точка, в которой луч FT касается эффективного множества E_r рискованных активов. Портфель T называется *касательным* портфелем.

При любой возможной ожидаемой доходности портфеля r^* эффективный портфель находится как портфель с ожидаемой доходностью r^* и наименьшим риском. Доли рискованных активов в портфеле, имеющий наименьший риск среди всех портфелей с заданной ожидаемой доходностью r^*, определяются соотношением

$$\overrightarrow{\nu} = \frac{r^* - r_0}{(\overrightarrow{r} - r_0\overrightarrow{I})^T V^{-1}(\overrightarrow{r} - r_0\overrightarrow{I})} V^{-1}(\overrightarrow{r} - r_0\overrightarrow{I}), \qquad (1.3)$$

где $\overrightarrow{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n)^T$ — доли рискованных активов в портфеле, $V = \big(\mathbf{Cov}(R_i, R_j)\big)_{i,j=1}^n$ — матрица ковариаций случайных величин R_i,

Второй интеграл в (4.12) равен:

$$K\int_K^\infty \rho(x)dx = K\,\mathsf{P}\left\{S(T) > K\right\} = K\,\mathsf{P}\left\{\frac{\ln S(T) - m}{\sigma\sqrt{T-t}} > \frac{K-m}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\},$$

где $m = \ln S_0 + (r - \sigma^2/2)T$.

Случайная величина $(\ln S(T) - m)/\big(\sigma\sqrt{T-t}\big)$ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. Поэтому в силу определения d_2

$$K\int_K^\infty \rho(x)dx = K\,\mathsf{P}\left\{\frac{\ln S(T) - m}{\sigma\sqrt{T-t}} > -d_2\right\} = K\big(1 - \Phi(-d_2)\big),$$

где $\Phi(x)$ — нормальная функция распределения. Из симметричности нормального распределения следует, что $1 - \Phi(-d_2) = \Phi(d_2)$. Значит,

$$K\int_K^\infty \rho(x)dx = K\Phi(d_2) \qquad (4.13)$$

Упростим первый интеграл в правой части (4.12). Воспользуемся формулой 4.11 с $m = \ln S_0 + (r - \sigma^2/2)(T-t)$ и $s = \sigma\sqrt{T-t}$. Тогда

$$\int_K^\infty x\rho(x)dx = \int_K^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} e^{-\frac{(\ln x - m)^2}{2s^2}}dx.$$

Сделаем замену переменных $\zeta = (\ln x - m)/s - s$. Тогда нижный предел нового интеграла окажется равным

$$\frac{\ln K - \ln S_0 - (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} - \sigma\sqrt{T-t} = -d_1.$$

Следовательно,

$$\int_K^\infty x\rho(x)dx = \int_{-d_1}^\infty e^{-\frac{(\zeta+s)^2}{2}} e^{\zeta s + s^2 + m} d\zeta = e^{\frac{s^2}{2} + m}\int_{-d_1}^\infty e^{-\frac{\zeta^2}{2}}d\zeta.$$

Последний интеграл равен вероятности того, что нормально распределённая случайная величина с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1 оказалась больше, чем $-d_1$. Эта вероятность равна $1 - \Phi(-d_1)$ или $\Phi(d_1)$. Итак,

$$\int_K^\infty x\rho(x)dx = e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \ln S_0 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}\Phi(d_1) = S_0 e^{r(T-t)}\Phi(d_1). \qquad (4.14)$$

Окончательно, из (4.12), (4.13) и (4.14) получаем, что

$$\mathbf{M}\left(\max\left\{S(T) - K, 0\right\}\right) = S_0 e^{r(T-t)}\Phi(d_1) - K\Phi(d_2).$$

где

$$d_1 = \frac{\ln(S(t)/K) + (r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$
$$d_2 = \frac{\ln(S(t)/K) + (r-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

определяет решение $f(S(t),t) = c(t)$ уравнения (4.5) при условии (4.6). Таким образом, два различных подхода, исследованных в моделях Коха-Росса-Рубинштейна и Блэка-Шоулза приводят к одной и той же формуле цены опциона.

Аналогично находится формула цены $P(\tau)$ опциона пут с моментом исполнения T по цене K:

$$P(\tau) = Ke^{-r(T-\tau)}\Phi(-d_2) - S(\tau)\Phi(-d_1). \tag{4.8}$$

Для доказательства формулы solblschcall применим формулу (3.13) к колл опциону:

$$c(t) = e^{-r(T-t)}\,\mathbf{M}\left(\max\left\{S(T)-K, 0\right\}\right), \tag{4.9}$$

где

$$\ln S(T) \sim N\big(\ln S(0) + (r-\sigma^2/2)(T-t), \sigma^2(T-t)\big). \tag{4.10}$$

Формула (4.10) совпадает с (2.6), если в соответствии со свойствами нейтрального к риску рынка заменить μ на r.

Вычисление правой части (4.9) — рутинная процедура подсчета интегралов, которой и посвящена оставшаяся часть этого параграфа.

Пусть $\ln\xi$ распределена с нормально математическим ожиданием m и дисперсией s^2. Тогда плотность ρ случайной величины ξ равна:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}sx}e^{-\frac{(\ln x - m)^2}{2s^2}} \tag{4.11}$$

при $x > 0$ и равна нулю при $x \leqslant 0$.

Согласно (4.9), для нахождения цены колл опциона $c(t)$ достаточно вычислить математическое ожидание случайной величины $\max\{S(T) - K, 0\}$. Итак,

$$\mathbf{M}\left(\max\left\{S(T)-K,0\right\}\right) = \int_K^\infty (x-K)\rho(x)dx,$$

где $\rho(x)$ — плотность случайной величины $S(T)$. Тогда

$$\mathbf{M}\left(\max\left\{S(T)-K,0\right\}\right) = \int_K^\infty x(\rho(x)dx - K\int_K^\infty \rho(x)dx. \tag{4.12}$$

$\overrightarrow{r} = (r_1,\ldots,r_n)^T$ — ожидаемые доходности рискованных активов, r_0 — доходность безрискового актива, $\overrightarrow{I} = (1,\ldots,1)^T$.

1.3. Модель CAPM

Модель CAPM описывает взаимосвязь между активами на рынке ценных бумаг. Её основные (экономические) предположения заключаются в том, что все инвесторы одинаково оценивают ожидаемые доходности и риски активов, на рынке существует безрисковый актив F и рынок находится в равновесии.

Рыночной линией капитала (CML) называют эффективное множество портфелей. Касательный портфель в модели CAPM называется *рыночным.* На рис. 3 отрезок FT является рыночной линией капитала, а T — рыночным портфелем.

Модель CAPM утверждает, что для любого актива A_i

$$r_i = r_F + \frac{r_T - r_F}{\sigma_T^2}\,\mathbf{Cov}(R_i, R_T). \tag{1.4}$$

где $\mathbf{Cov}(R_i, R_T)$ — ковариация доходности R_i актива A_i и доходности R_T рыночного портфеля T.

Прямая $y = r_F + \big((r_T - r_F)/\sigma_T^2\big)x$ в координатных осях: ковариация с рыночным портфелем T, ожидаемая доходность — называется *рыночной линией активов (SML).*

Если актив A_i не коррелирует с рыночным портфелем (то есть $\mathbf{Cov}(R_i, R_T) = 0$), то из (1.4) следует, что ожидаемая доходность r_i равна доходности безрискового актива. Экономическое объяснение этого факта в том, что бумага A_i не вносит риск в рыночный портфель. Более того, если

$$\mathbf{Cov}(R_i, R_T) < 0,$$

то актив A_i вносит отрицательный риск в рыночный портфель и её ожидаемая доходность оказывается меньше безрисковой процентной ставки.

Бетой актива A_i называется величина $\beta_{iT} = \frac{\mathbf{Cov}(R_i,R_T)}{\sigma_T^2}$.

Рыночная модель определяется[1] уравнением

$$R_i = \alpha_i + \beta_{iT}R_T + \varepsilon_i, \tag{1.5}$$

[1] В литературе часто встречается рыночная модель, которая задаётся уравнением (1.5) с произвольными α_i и β_{iT}. Такая модель в отличие от рассматриваемой здесь модели не является равновесной.

где ε_i — случайная ошибка, некоррелирующая с рыночным портфелем и имеющая нулевое математическое ожидание. Тогда ожидаемая доходность бумаги A_i вычисляется по формуле (1.4). В этом смысле рыночная модель согласуется с CAPM.

В условиях рыночной модели

$$\mathbf{Cov}(R_i, R_j) = \beta_{iT}\beta_{jT}\sigma_T^2. \tag{1.6}$$

Примеры

Пример 1. Рассмотрим миниатюрный рынок ценных бумаг, состоящий только из двух активов A и B. Их доходность определяется бросанием монеты. Если монета упадёт гербом, то доходности активов A и B равны 0.1 и 0.3 соответственно, а если монета упадёт цифрой, то их доходности равны 0.2 и 0. (a) Вычислите ожидаемые доходности активов A и B.
(b) Составьте таблицу двумерного распределения доходностей активов A и B.
(c) Вычислите ожидаемую доходность и риск портфеля $\Pi = 0.25A + 0.75B$.

Решение. (a) Таблицы распределения доходностей R_A и R_B активов A и B:

R_A	0.1	0.2
P	0.5	0.5

R_B	0	0.3
P	0.5	0.5

Математические ожидание случайных величин R_A и R_B:

$$r_A = \mathbf{M}\, R_A = 0.1 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.5 = 0.15,$$
$$r_B = \mathbf{M}\, R_B = 0 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.5 = 0.15.$$

(b) Таблица двумерного распределения доходностей активов A и B:

$R_B \backslash R_A$	0.1	0.2
0	0	0.5
0.3	0.5	0

(c) Ожидаемая доходность портфеля $\Pi = 0.25A + 0.75B$ равна

$$r_\Pi = 0.25 r_A + 0.75 r_B = 0.15,$$

а его риск —

$$\sigma_\Pi = \sqrt{0.25^2\sigma_A^2 + 0.75^2\sigma_B^2 + 2 \cdot 0.25 \cdot 0.75 \cdot \mathbf{Cov}(R_A, R_B)}. \tag{1.7}$$

4.1. Нейтральность к риску

Для нахождения решений уравнения Блэка-Шоулза воспользуемся часто встречающимся в экономических приложениях методом перехода к нейтральному к риску рынку. В экономических терминах нейтральный к риску рынок означает, что все инвесторы нейтральны к риску.

Переменные в уравнении Блэка-Шоулза — это текущая цена актива, время, волатильность и процентная ставка. Все они не зависят от предпочтений инвесторов и от отношения инвесторов к риску. Здесь существенно, что ожидаемая доходность μ не входит в уравнение (4.5).

Так как переменные в уравнении Блэка-Шоулза не зависят от отношения инвесторов к риску, то и решения уравнения обладают тем же свойством. Следовательно, при поиске решений можно сделать произвольные предположения об отношении инвесторов к риску. В частности, можно считать, что инвесторы нейтральны к риску, и цены финансовых инструментов удовлетворяют уравнению (3.13).

В качестве примера выведем формулу цены $\varphi_{[\tau,T]}$ поставки фьючерса с помощью рассужденй о нейтральном к риску рынке. В момент поставки T цена фьючерса равна $S(T) - \varphi_{[\tau,T]}$. Следовательно, по формуле (3.13) цена $F(\tau)$ фьючерса в начальный момент τ равна

$$F(\tau) = e^{-r(T-\tau)}\,\mathbf{M}(S(T) - \varphi_{[\tau,T]}) =$$
$$= e^{-r(T-\tau)}\,\mathbf{M}\, S(T) - \varphi_{[\tau,T]} e^{-r(T-\tau)}.$$

По формуле (3.13) математическое ожидание случайной величины $S(T)$ равно $S(\tau)e^{r(T-\tau)}$, поэтому

$$F(\tau) = S(\tau) - \varphi_{[\tau,T]} e^{-r(T-\tau)}.$$

Так как в начальный момент цена фьючерса равна нулю, из полученного равенства следует, что $\varphi_{[\tau,T]} = S(\tau)e^{r(T-\tau)}$ Полученная формула совпадает с (3.3).

4.2. Формула Блэка-Шоулза

Формула Блэка-Шоулза (3.17)

$$c(t) = S(t)\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2),$$

рисковый портфель. Он состоит из -1 единицы производной бумаги и $\partial f/\partial S$ актива. Таким образом, владелец этого портфеля продает на 1 доллар производную бумагу и покупает акции на сумму $\partial f/\partial S$. Тогда цена Π портфеля равна

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S}S. \tag{4.2}$$

Изменения цены портфеля за время Δt равно

$$\Delta\Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S. \tag{4.3}$$

Подставляя (2.2) и (4.1) в (4.3), получим, что

$$\Delta\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t. \tag{4.4}$$

Так как построенный портфель безрисковый и арбитраж на рынке отсутствует, то цена Π портфеля изменяется как цена любой безрисковой ценной бумаги по формуле

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t.$$

Стоимость Π дана в формуле (4.2). Тогда из (4.4)

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t = -r\left(f - \frac{\partial f}{\partial S}S\right)\Delta t.$$

Итак, установлено, что цена произвольного производного финансового инструмента удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf. \tag{4.5}$$

Уравнение (4.5) называют уравнением Блэка-Шоулза.

Оказывается, что уравнение (4.5) имеет бесконечное множество решений. Единственность решения будет иметь место, если определить чему равна функция f при $t = T$ и любых S. Возможно добиться единственности решения уравнения (4.5) и иными способами, однако в рассматриваемом приложении к опционам естественно задавать именно это условие.

В силу определения колл опциона его цена удовлетворяет условию

$$f(S(T),T) = \max\{S(T) - K, 0\}, \tag{4.6}$$

а цена пут опциона —

$$f(S(T),T) = \max\{K - S(T), 0\}, \tag{4.7}$$

Случайные величины $(R_A - \mathbf{M}\,R_A)^2$ и $(R_B - \mathbf{M}\,R_B)^2$ в данном случае являются константами 0.05^2 и 0.15^2 соответственно. Поэтому

$$\sigma_A^2 = \mathbf{M}(R_A - \mathbf{M}\,R_A)^2 = 0.0025, \quad \sigma_B^2 = 0.0225.$$

Из таблицы двумерного распределения видно, что случайная величина $R_A R_B$ принимает значения 0 и 0.03 с вероятностью 0.5 каждое. Следовательно, $\mathbf{M}(R_A R_B) = 0.015$, $\mathbf{Cov}(R_A, R_B) = \mathbf{M}(R_A R_B) - \mathbf{M}\,R_A\,\mathbf{M}\,R_B = 0.0075$. Риск портфеля по формуле (1.7) равен 0.1.

Пример 2. Среди портфелей, которые состоят из двух рискованных активов $A(0.1, 0.1)$ и $B(0.2, 0.3)$ и безрискового актива $F(0, 0.09)$, найдите портфель, имеющий наименьший риск при ожидаемой доходности $r^* = 0.15$. Коэффициент корреляции $\rho_{AB} = 0.5$.

Решение. Задача нахождения портфеля с минимальным риском σ при заданной доходности r^* записывается в виде

$$\sigma^2 = \sum_{i,j=1}^{2}\nu_j\nu_j\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j \longrightarrow \min$$

$$\nu_0 + \sum_{i=1}^{2}\nu_i r_i = r^*.$$

Её решение вычисляется по формуле (1.3). Ковариация $\mathbf{Cov}(A,B) = \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B = 0.01$. Матрица ковариаций $V = \begin{pmatrix} 1 & 0.01 \\ 0.01 & 1 \end{pmatrix}$. Обратная матрица $V^{-1} = \frac{1}{\det V}\begin{pmatrix} 1 & -0.01 \\ -0.01 & 1 \end{pmatrix}$, где $\det V = 0.9999$. Далее, $\overrightarrow{r} - r_0\overrightarrow{I} = (0.01, 0, 21)^T$ и

$$V^{-1}(\overrightarrow{r} - r_0\overrightarrow{I}) = \frac{1}{0.9999}\begin{pmatrix} 0.0089 \\ 0.2009 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$(\overrightarrow{r} - r_0\overrightarrow{I})^T V^{-1}(\overrightarrow{r} - r_0\overrightarrow{I}) = \frac{1}{0.9999}(0.01, 0.21)\cdot\begin{pmatrix} 0.0089 \\ 0.2009 \end{pmatrix} = 0.042.$$

Тогда $\overrightarrow{\nu} = (0.0127, 0.2861)$.

Пример 3. Нарисуйте кривые безразличия инвестора, имеющего функцию полезности $U(\sigma, r) = 0.6r - r^2 - \sigma^2$.

Решение. Уравнение $U(\sigma, r) = C = \text{const}$ определяет окружности $-(r - 0.3)^2 - \sigma^2 = C - 0.09$. Кривые безразличия инвестора — дуги окружностей, изображённые на рисунке 2b. Стрелка на рисунке показывает направление, в котором возрастает функция полезности.

Пример 4. На рынке ценных бумаг существуют только два актива $A(0.1, 0.1)$ и $B(0.2, 0.3)$. Коэффициент корреляции их доходностей $\rho_{AB} = 0.5$. Найдите оптимальный портфель для инвестора, функция полезности которого равна $U(\sigma, r) = 0.6r - r^2 - \sigma^2$.

Решение. Согласно (1.1) и (1.2), допустимые портфели $\Pi = tA + (1 - t)B$ имеют ожидаемую доходность

$$r_\Pi = tr_A + (1-t)r_B = 0.3 - 0.2t$$

и риск

$$\sigma_\Pi = \sqrt{t^2\sigma_A^2 + (1-t)^2\sigma_B^2 + 2t(1-t)0.5\sigma_A\sigma_B} = \\ = \sqrt{0.03t^2 - 0.06t + 0.04}.$$

Оптимальный портфель Π^* находится в точке касания линии уровня функции $U(\sigma, r)$ и множества допустимых портфелей. Ожидаемую доходность r_Π можно рассматривать как функцию от риска σ_Π, заданную параметрически. Тогда касательная к множеству допустимых портфелей в точке $\Pi = tA + (1-t)B$ имеет наклон

$$k = \frac{dr_\Pi}{d\sigma_\Pi} = \frac{dr_\Pi}{dt} : \frac{d\sigma_\Pi}{dt} = \frac{2\sigma}{0.3 - 0.3t}.$$

Линии уровня функции $U(\sigma, r) = 0.6r - r^2 - \sigma^2$ определяются соотношением $-(r - 0.3)^2 - \sigma^2 = C - 0.09$. Чтобы найти наклон $dr/d\sigma$ касательной к линии уровня, продифференцируем почленно по σ полученное соотношение:

$$2(r - 0.3)\frac{dr}{d\sigma} + 2\sigma = 0.$$

Значит, $dr/d\sigma = \sigma/(0.3 - r)$. Приравнивая вычисленный наклон к полученному ранее наклону k касательной к множеству допустимых портфелей, имеем

$$\frac{\sigma}{0.3 - r} = \frac{2\sigma}{0.3 - 0.3t}.$$

центная ставка r постоянна, начисляется непрерывно и равна 7% годовых.

14. Проверьте, что числа p' и q', определённые формулой (3.11) удовлетворяют соотношению $p' + q' = 1$.

15. Цена $S(t)$ некоторого актива равна в текущий момент времени t равна 40, а его волатильность $\sigma = 20\%$ годовых. Составьте шестипериодную модель (с $\Delta t = 1$ месяц) ценообразования опционов и вычислите текущую цену шестимесячного опциона пут на рассматриваемый актив. Цена исполнения опциона $K = 41$, постоянная процентная ставка r, начисляемая непрерывно, равна 9% годовых.

16*. Банк предлагает следующий производный финансовый инструмент. Инвестор вкладывает деньги в банк в долларах или рублях под $r\%$ годовых, начисляемых непрерывно. Валюту, в которой хранятся деньги (и по которой начисляется процентная ставка), определяет инвестор в момент получения денег. Пусть, например, текущий курс: \$1 = 30 рублей, а в момент получения денег — \$1 = 29 рублей. Тогда инвестор потребует, чтобы вклад считался рублёвым. Вычислите справедливую процентную ставку r. Постоянная долларовая процентная ставка, начисяемая непрерывно, равна r_1, а рублёвая — r_2. Предположите, что банковское обязательство по доллару является безрисковым активом, цена рубля в долларах меняется в соответствии с n-периодной биномиальной моделью, а волатильность рубля относительно доллара равна σ.

§4. Модель Блэка-Шоулза

В этом разделе предполагается выполненными предположения модели ценообразования активов. В изложении используются формулы (2.2) и (2.6).

Пусть $S(t)$ цена некоторого базового актива в момент времени t, $f(S(t), t)$ — цена производного финансового инструмента, основанного на этом активе, а $w(t)$ — винеровский процесс. Тогда по лемме Ито с точностью до $\bar{o}(\Delta t)$

$$\Delta f = \sigma S\frac{\partial f}{\partial S}\Delta w + \left(\mu S\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \frac{\partial f}{\partial t}\right)\Delta t. \qquad (4.1)$$

Заметим, что винеровский процесс Δw в формулах (2.2) и (4.1) одинаков. Поэтому комбинируя опцион и акции можно составить безденег, нарисуйте график зависимости прибыли от колл опциона в зависимости от цены $S(T)$ актива ко дню исполнения T.

7. Инвестор продаёт акцию за \$30 и покупает колл на эту акцию за \$3. Цена исполнения опциона \$33. В момент исполнения опциона инвестор покупает акцию, либо исполняя опцион, либо на рынке. Естественно, что инвестор делает более выгодный для себя выбор. Пренебрегая разницей стоимости денег в различные моменты времени, нарисуйте график зависимости прибыли инвестора от этой операции.

8. Текущая цена актива равна 40. Предполагается, что месяц спустя цена актива может быть равна 38 или 42. В рамках однопериодной модели ценообразования опционов вычислите текущую стоимость месячного опциона колл на этот актив, цена исполнения которого равна 41. Процентная ставка r постоянна, начисляется непрерывно и равна 7% годовых.

9. Цена $S(t)$ некоторого актива в текущий момент времени t равна \$40, а его волатильность $\sigma = 20\%$ годовых. В рамках однопериодной биномиальной модели вычислите текущую цену $c(t)$ трёхмесячного опциона колл с ценой исполнения \$42. Процентная ставка r постоянна, начисляется непрерывно и равна 9% годовых.

10. Текущая цена актива равна 40. В рамках однопериодной модели ценообразования опционов вычислите текущую стоимость месячного опциона пут на этот актив, цена исполнения которого равна 39. Волатильность актива σ равна 20% годовых. Процентная ставка r постоянна, начисляется непрерывно и равна 7% годовых.

11. В однопериодной модели ценообразования опционов цена акции в начале периода равна 32, а в конце периода — 30 или 35. Цена исполнения колл опциона со сроком исполнения в конце периода равна 34. Приведите пример безрискового портфеля, состоящего из акций и колл опционов на эту акцию.

12. В однопериодной модели ценообразования опционов цена акции в начале периода равна 32, а в конце периода — 30 или 35. Цена исполнения пут опциона со сроком исполнения в конце периода равна 31. Приведите пример безрискового портфеля, состоящего из акций и пут опционов на эту акцию.

13. Текущая цена актива равна 40, волатильность — 20% годовых. В рамках двухпериодной биномиальной модели вычислите цену трёхмесячного колл опциона, цена исполнения которого равна 41. Про-

Так как искомая линия уровня не только имеет наклон k, но и проходит через точку Π^*, то $r = 0.3 - 0.2t$. Подставляя это выражение для r в предыдущую формулу, получим, что $t = 3/7$. Тогда $\Pi \approx (0.141, 0.214)$.

Пример 5. Предположим, что на рынке ценных бумаг существует только два актива A_1 и A_2, а рыночный портфель $T = 0.2A_1 + 0.8A_2$. Известно, что $\mathbf{Cov}(R_1, R_T) = 200$, $\mathbf{Cov}(R_2, R_T) = 220$. Найдите риск рыночного портфеля T.

Решение. Очевидно, $\sigma_T^2 = \mathbf{Cov}(R_T, R_T) = \mathbf{Cov}(0.2R_1 + 0.8R_2, R_T)$. По свойствам ковариации $\sigma_T^2 = 0.2\,\mathbf{Cov}(R_1, R_T) + 0.8\,\mathbf{Cov}(R_2, R_T)$. Тогда риск σ_T рыночного портфеля равен $\sqrt{216} \approx 14.7$.

Вопросы и задачи

1. Портфель состоит из трёх активов A, B и C, взятых в равных долях. Ожидаемые доходности равны $r_A = 20\%$, $r_B = 10\%$, $r_C = 30\%$. Найдите ожидаемую доходность портфеля.

2. С вероятностью $1/2$ доходность активов A и B равна 0.2 и 0 соответственно и с вероятностью $1/2$ эти доходности равны 0 и 0.3. (а) Вычислите ожидаемую доходность активов A и B.

(б) Составьте таблицу двумерного распределения доходностей активов A и B.

(в) Вычислите ожидаемую доходность и риск портфеля $\Pi = 0.5(A + B)$.

3. Инвестор может инвестировать деньги в активы A и B, ожидаемая доходность и риск которых указаны в таблице:

Активы	Ожидаемые доходности	Риски
A	0.12	0.15
B	0.20	0.45

Портфель $\Pi = tA + (1-t)B$. (а) Вычислите ожидаемую доходность и риск портфелей, соответствующих значениям t, равным 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0, 7, 0.8, 0.9, 1. Рассмотрите коэффициенты корреляции ρ_{AB}, равные -1, -0.5, 0, 0.5, 1.

(б) Нарисуйте на одном графике найденные 50 портфелей. Прокомментируйте замеченные закономерности.

(в) Какой минимум дисперсии среди портфелей, состоящих из двух полностью антикоррелирующих активов A и B?

(г) Какой минимум дисперсии среди портфелей, состоящих из двух

полностью коррелирующих активов A и B?
(д) Вопрос пункта (г) в случае, если доля актива B в портфеле П может быть отрицательной (то есть разрешена короткая продажа актива B).
(е) Предположим, что на рынке существуют n активов, имеющие ожидаемую доходность и риск такие же, как и актив A. Коэффициент корреляции любой пары активов равен 0.5. Найдите риск портфеля состоящего из этих активов. Доли всех активов в портфеле одинаковы.

4. Изобразите на координатной плоскости (σ, r) (риск, ожидаемая доходность) множество допустимых портфелей, состоящих из двух некоррелированных активов A и B, для которых ожидаемые доходности r_A и r_B равны 0.1 и 0.4, а риск σ_A и σ_B — 0.2 и 0.3 соответственно.

5. Портфели состоят из двух активов A_1 и A_2. Ожидаемые доходности активов равны 0.1 и 0.2, а риски — 0.1 и 0.3 соответственно. Коэффициент корреляции активов равен 0.5. Среди допустимых портфелей найдите портфель П, имеющий минимальный риск. Вычислите риск и ожидаемую доходность портфеля П.

6. Сформулируйте задачу нахождения портфеля Тобина — минимизировать риск при заданной ожидаемой доходности r^*. Портфель состоит из двух рискованных активов A и B, для которых $r_A = 0.2$, $r_B = 0.3$, $\sigma_A = 0.1$, $\sigma_B = 0,4$, $\rho_{AB} = 0.5$, и безрискового актива F, имеющего ожидаемую доходность $r_F = 0.05$. Решите сформулированную задачу при $r^* = 0.30$. Объясните, что означают полученные отрицательные доли.

7. Пусть ожидаемые доходности активов A_1 и A_2 равны 0.1 и 0.2, а их риск 0.1 и 0.3 соответственно. Ковариация этих активов равна нулю. Доходность безрискового актива F равна 0.09. Составьте портфель П из активов A_1, A_2 и F, такой, что его ожидаемая доходность равна 0.2, а риск минимален.

8. Пусть активы A, B и C на координатной плоскости (σ, r) задаются точками:

$$A = (0.1, 0.1),\ B = (0.14, 0.20),\ C = (0.3, 0.3).$$

Может ли эффективное множество портфелей быть линейной комбинацией только двух активов A и C?

9. Могут ли кривые безразличия инвестора пересекаться? Ответ обоснуйте.

трёхмесячного опциона колл с ценой исполнения \$41. Процентная ставка r постоянна, начисляется непрерывно и равна 7% годовых.

Решение. По формулам (3.8), $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$, $d = 1/u$, где $\sigma = 0.2$, $\Delta t = 0.4$. Тогда $u = 1.1348$, $d = 0.8812$. Два возможных значения цены $S(t+\Delta t)$ актива в момент времени $t + \Delta t$ равны $S(t)u = 45.3936$ и $S(t)d = 35.2473$. Цена опциона колл в момент исполнения равна $\max\{S(t+\Delta t) - K, 0\}$, то есть она принимает значение $c_u = \max\{S(t)u - K, 0\} = 4.3936$ или $c_d = \max\{S(t)d - K, 0\} = 0$. Согласно (3.8),

$$c = e^{-r\Delta t}(c_u p + c_d q),\ \text{где } p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}, \quad q = \frac{u - e^{r\Delta t}}{u - d}.$$

Подставляя найденные численные значения, получим: $p = 0.5804$, $c = 2.4795$.

Вопросы и задачи

1. Цена золота сегодня — \$500 за унцию. Цена исполнения фьючерсного контракта сроком на год равна \$700. Процентная ставка равна 10% годовых. Предположите, что хранение золота ничего не стоит и укажите арбитраж.

2. Двухмесячная (непрерывная) процентная ставка в США и Швейцарии равна 8% и 3% годовых соответственно. Текущая цена швейцарского франка равна 0.6600, а цена его поставки по двухмесячному фьючерсу — \$0.650. Какие появляются арбитражные возможности?

3. Докажите формулы (3.5) и (3.6).

4. Цена некоторой акции сегодня равна \$100. Процентная ставка (непрерывная) равна 8% годовых. Дивиденды, равные 1% годовых, за акцию будут выплачены через полгода и через год. Найти цену фьючерса со сроком исполнения 1 год.

5. Пут опцион на некоторый базовый актив с ценой $S(t)$ исполняется в момент времени T по цене K. Пользуясь отсутствием арбитража на рынке, докажите, что цена $P(t)$ пут опциона удовлетворяет неравенству

$$P(t) \leqslant K e^{-r(T-t)}.$$

6. Инвестор покупает двухмесячный колл опцион за 5 долларов с ценой исполнения 100 долларов. Пренебрегая стоимостью хранения

Пример 6. Проверьте, что при определении u и d формулой (3.16) дисперсия случайных величин $\ln(S(t+\Delta t)) - \ln(S(t))$ равна $\sigma^2 \Delta t$.

Решение. Случайная величина $S(t+\Delta t)$ задаётся таблицей

$S(t+\Delta t)$	$uS(t)$	$dS(t)$
P	p	q

По определению дисперсии случайной величины

$$\mathbf{D}(S(t+\Delta t)) = \mathbf{M}\left(S(t+\Delta t)^2\right) - \left(\mathbf{M}\,S(t+\Delta t)\right)^2 = pu^2S^2 + \\ + qd^2S^2 - (puS + qdS)^2 = S(t)^2(pu^2 + qd^2 - p^2u^2 - q^2d^2 - 2pqud).$$

Сгруппируем в последней формуле первое и третье, а также второе и четвёртое слагаемые и воспользуемся тем, что $p+q=1$. Тогда

$$\mathbf{D}(S(t+\Delta t)) = S(t)^2(u^2pq + d^2pq - 2udpq) = pqS^2(u-d)^2.$$

Подставляя значение p из формулы (3.15), имеем, что

$$\mathbf{D}(S(t+\Delta t)) = S(t)^2\left(e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}\right)\left(e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{r\Delta t}\right).$$

Раскладывая экспоненту в ряд Тейлора, получим, что

$$\left(e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}\right) = \sigma\sqrt{\Delta t} + (r-\sigma^2)\Delta t + O\left((\Delta t)^{3/2}\right),$$
$$\left(e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{r\Delta t}\right) = \sigma\sqrt{\Delta t} - (r-\sigma^2)\Delta t + O\left((\Delta t)^{3/2}\right).$$

Тогда

$$\mathbf{D}(S(t+\Delta t)) = S(t)^2\sigma^2\Delta t + O(\Delta t)^2.$$

Остаётся заметить, что $\ln\frac{S(t+\Delta t)}{S(t)} = \ln\left(1 + \frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{S(t)}\right)$ с точностью до $O\big((\Delta t)^2\big)$ равен $S(t+\Delta t)/S(t) - 1$. Значит, с точностью до $O(\Delta t)^2$ дисперсия

$$\mathbf{D}\left(\ln(S(t+\Delta t)) - \ln S(t)\right) = \sigma^2\Delta t.$$

Пример 7. Цена $S(t)$ некоторого актива в текущий момент времени t равна \$40, а его волатильность $\sigma = 20\%$ годовых. В рамках однопериодной биномиальной модели вычислите текущую цену $c(t)$

10. Согласны ли вы с предположениями о ненасыщаемости и нерасположенности к риску? Придумайте случай, противоречащий этим предположениям.

11. Функция предпочтений инвестора $U(r,\sigma) = r - r^2 - \sigma^2$, где $r \in [0, 0.4]$ — ожидаемая доходность, а σ — риск. Найдите оптимальный портфель инвестора, состоящий из двух некоррелированных активов A и B, для которых ожидаемые доходности r_A и r_B равны 0.1 и 0.4, а риски σ_A и σ_B — 0.2 и 0.3 соответственно.

12. Функция предпочтений инвестора $U(r,\sigma) = r - r^2 - \sigma^2$, где $r \in [0, 0.4]$ — ожидаемая доходность, а σ — риск. Найдите оптимальный портфель инвестора, состоящий из двух активов A и B, для которых ожидаемые доходности r_A и r_B равны 0.2 и 0.3, а риски σ_A и σ_B — 0.1 и 0.2 соответственно. Коэффициент корреляции ρ_{AB} доходностей активов A и B равен 0.5.

13. Функция предпочтений инвестора $U(r,\sigma) = r - r^2 - \sigma^2$, где $r \in [0, 0.4]$ — ожидаемая доходность, а σ — риск. Найдите оптимальный портфель инвестора, состоящий из двух активов A и B, для которых ожидаемые доходности r_A и r_B равны 0.2 и 0.4, а риски σ_A и σ_B — 0.1 и 0.3 соответственно. Коэффициент корреляции ρ_{AB} доходностей активов A и B равен 1.

14. На рынке находятся в обращении только три актива: два рискованных A_1 и A_2 и безрисковый F. Доходы по этим активам при вложении, равном 0.9, приведены в следующей таблице

Вероятность	$q = 0.6$	$q = 0.3$	$q = 0.1$
F	1.00	1.00	1.00
A_1	1.05	1.20	1.10
A_2	1.30	1.00	1.05

Например, вложив 0.9 в актив A_1, инвестор в конечный момент времени получит доход 1.20 с вероятностью 0.3. Найдите доходность r_f безрискового актива F, ожидаемые доходности r_1 и r_2 активов A_1 и A_2, их риски σ_1 и σ_2 и ковариацию $\mathbf{Cov}(R_1, R_2)$ доходностей активов A_1 и A_2.

15. В условии задачи 14 надите касательный портфель.

Указание. Пусть $\Pi = \nu_1 R_1 + \nu_2 R_2$. Тогда

$$r_\Pi = \nu_1 r_1 + \nu_2 r_2, \quad \sigma_\Pi^2 = \nu_1^2\sigma_1^2 + \nu_2^2\sigma_2^2 + 2\nu_1\nu_2\,\mathbf{Cov}(R_1, R_2).$$

Обозначим через $s(\nu_1, \nu_2)$ наклон прямой, проходящей через точки F и Π. Прямая с самым большим наклоном будет касательной к кривой допустимых портфелей $\Pi = \nu_1 A_1 + \nu_2 A_2$. Наклон $s = \big(r_\Pi - r_F\big)/\sigma_\Pi$. Итак,

$$\frac{\nu_1 r_1 + \nu_2 r_2 - r_F}{\sqrt{\nu_1^2\sigma_1^2 + \nu_2^2\sigma_2^2 + 2\nu_1\nu_2\,\mathbf{Cov}(R_1,R_2)}} \xrightarrow{\nu_1,\nu_2} \max, \tag{1.8}$$

$$\nu_1 + \nu_2 = 1. \tag{1.9}$$

Выразим из (1.9) ν_2 и подставим в (1.8). Тогда останется найти максимум функции одной переменной. Для этого найдите производную этой функции и приравняйте её к нулю.

16. В условии задачи 14 надите эффективное множество портфелей.

17. Сформулируйте предположения модели CAPM.

18. Безрисковый актив имеет доходность 9%. Ожидаемая доходность касательного портфеля равна 0.2, а его риск — 0.18. Нарисуйте рыночную линию капитала.

19. На рынке ценных бумаг находятся в обращении только два рискованных актива $A_1(\sigma_1, r_1)$ и $A_2(\sigma_2, r_2)$, а также безрисковый актив $F = (0, r_f)$. Рассмортим произвольный портфель Π, состоящий только из рискованных активов A_1 и A_2. Портфель Π является касательным, если угол наклона прямой $F\Pi$ наибольший среди всех допустимых Π. Запишите поставленную задачу нахождения максимума. Выпишите функцию Лагранжа для этой задачи. Получите условия первого порядка (необходимые условия существования экстремума).

Указание. Задача нахождения экстремума сформулирована в формулах (1.8) и (1.9). Функция Лагранжа:

$$L = \frac{\nu_1 r_1 + \nu_2 r_2 - r_f}{\sigma_T} + \lambda(\nu_1 + \nu_2 - 1),$$

где $\sigma_T = \sqrt{\nu_1^2\sigma_1^2 + \nu_2^2\sigma_2^2 + 2\nu_1\nu_2\,\mathbf{Cov}(R_1,R_2)}$. Для записи условий первого порядка понадобится вычисление частной производной от σ_T по переменной ν_1.

$$\frac{\partial\sigma_T}{\partial\nu_1} = \sigma_T^{-1}\big(\nu_1\sigma_1^2 + \nu_2\,\mathbf{Cov}(R_1,R_2)\big)$$

Тогда

$$\frac{\partial L}{\partial\nu_1} = \frac{r_1\sigma_T - \frac{1}{\sigma_T}\big(\nu_1\sigma_1^2 + \nu_2\,\mathbf{Cov}(R_1,R_2)\big)(\nu_1 r_1 + \nu_2 r_2 - r_f)}{\sigma_T^2} + \lambda.$$

Решение. Рассмотрим два портфеля. Первый состоит из одного опциона колл и наличных денег на сумму $Ke^{-r(T-t)}$. Второй портфель состоит из одного опциона пут и одного актива. Начальные цены портфелей равны $c + Ke^{-r(T-t)}$ и $p + S(t)$ соответственно. Конечная цена первого портфеля равна

$$\max\{S(T) - K, 0\} + K = \begin{cases} S(T), & \text{если } S(T) > K \\ K, & \text{если } S \leqslant K \end{cases}.$$

Конечная цена второго портфеля равна

$$\max\{K - S(T), 0\} + S(T) = \begin{cases} S(T), & \text{если } S(T) > K \\ K, & \text{если } S(T) \leqslant K \end{cases}.$$

Из равенства цен портфелей в момент времени T при отсутствии арбитражных возможностей следует равенство цен этих портфелей в начальный момент времени t. Формула доказана.

Пример 4. Корпорация купила за 5 долларов колл опцион на некоторый актив с ценой исполнения K, равной 100 долларов, и днём исполнения T, наступающим через два месяца. Игнорируя стоимость хранения денег, найдите зависимость прибыли, которую получит корпорация, от цены $S(T)$ актива в момент исполнения T.

Решение. Очевидно, что опцион будет реализован, только если цена актива $S(T)$ больше цены поставки K, $S(T) > 100$. Поэтому, игнорируя стоимость хранения денег, получим, что прибыль от опциона равна $\max\big\{S(T) - 100, 0\big\} - 5$.

Пример 5. Корпорация купила за 5 долларов колл опцион на некоторый актив с ценой исполнения K, равной 100 долларов, и днём исполнения T, наступающим через два месяца. Предполагая, что процентная ставка постоянна и равна 8% годовых, найдите зависимость прибыли, которую получит корпорация, от цены $S(T)$ актива в момент исполнения T.

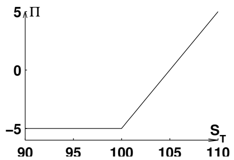

Рис. 7. Прибыль от колл опциона.

Решение. Опцион будет реализован, если цена актива $S(T)$ больше цены поставки K: $S(T) > 100$. Для вычисления прибыли в момент времени T нужно затраченные деньги на покупку опциона дисконтировать к этому моменту времени. Получится $5e^{0.08\cdot 2/12} \approx 5.07$. Поэтому прибыль от опциона равна $\max\big\{S(T) - 100, 0\big\} - 5.07$.

Портфель $\bar{\theta}$ соответствует рассмотренной ранее стратегии. Отрицательная третья координата вектора $\bar{\theta}$ означает, что инвестор заключает фьючерсный котракт на продажу (занимает короткую позицию по фьючерсу). Тогда, согласно (3.2) и (3.6),

$$\Pi^\theta(\tau) = e^{-q(T-\tau)}S(\tau), \quad \Pi^\theta(T) = S(T) + \varphi_{[\tau,T]} - S(T) = \varphi_{[\tau,T]}.$$

Следовательно, портфель $\bar{\theta}(t)$ является безрисковым в момент времени T. Согласно (3.1), $\Pi^\theta(T) = \Pi^\theta(\tau)e^{r(T-\tau)}$. Значит,

$$\varphi_{[\tau,T]} = S(\tau)e^{-q(T-\tau)}e^{r(T-\tau)}.$$

Формула (3.6) установлена.

Остаётся проверить, что портфель $\bar{\theta}(t)$ является допустимым, то есть с вероятностью 1 неравенство $\Pi^\theta(t) \geqslant -C$ выполнено для некоторого $C \geqslant 0$ и произвольных $t \in [\tau, T]$. Итак,

$$\Pi^\theta(t) = e^{-q(T-t)}S(t) - F(t).$$

Согласно (3.2) и (3.6),

$$\Pi^\theta(t) = e^{-q(T-t)}S(t) - \left(S(t)e^{(r-q)(T-t)} - \varphi_{[\tau,T]}\right)e^{-r(T-t)} =$$
$$= \varphi_{[\tau,T]}e^{-r(T-t)} > \varphi_{[\tau,T]}e^{-r(T-\tau)}.$$

Число $\varphi_{[\tau,T]}e^{-r(T-\tau)}$ не зависит от $t \in [\tau, T]$, следовательно, портфель $\bar{\theta}$ является допустимым.

Пример 2. Пут опцион на некоторый базовый актив с ценой $S(t)$ исполняется в момент времени T по цене K. Пользуясь отсутствием арбитража на рынке, докажите, что цена $P(t)$ пут опциона удовлетворяет неравенству

$$P(t) \geqslant Ke^{-r(T-t)} - S(t).$$

Решение. Рассмотрим два портфеля. Первый состоит из одного пут опциона и одного актива, а второй из наличных денег на сумму $Ke^{-r(T-t)}$. Тогда конечная цена первого портфеля не ниже цены второго портфеля. Следовательно, такое же соотношение между ценами портфелей справедливо и в начальный момент времени t.

Пример 3. Докажите формулу (3.7).

Условия первого порядка заключаются в равенстве нулю частных производных функции Лагранжа по переменным ν_1, ν_2 и λ.

$$\frac{r_1\sigma_T - \frac{1}{\sigma_T}\big(\nu_1\sigma_1 + \nu_2\,\mathbf{Cov}(R_1,R_2)\big)(\nu_1 r_1 + \nu_2 r_2 - r_f)}{\sigma_T^2} + \lambda = 0, \quad (1.10)$$

$$\frac{r_1\sigma_T - \frac{1}{\sigma_T}\big(\nu_2\sigma_2 + \nu_1\,\mathbf{Cov}(R_1,R_2)\big)(\nu_1 r_1 + \nu_2 r_2 - r_f)}{\sigma_T^2} + \lambda = 0, \quad (1.11)$$

$$\nu_1 + \nu_2 = 1. \quad (1.12)$$

20. Пользуясь условиями первого порядка, полученными в задаче 19, выведите уравнение SML.

Указание. Умножая равенства (1.10) и (1.11) на σ_T^2 и заменяя $\nu_1 r_1 + \nu_2 r_2$ на r_T, имеем:

$$r_1\sigma_T^2 - \big(\nu_1\sigma_1^2 + \nu_2\,\mathbf{Cov}(R_1,R_2)\big)(r_T - r_f) + \lambda\sigma_T^3 = 0, \quad (1.13)$$

$$r_2\sigma_T^2 - \big(\nu_2\sigma_2^2 + \nu_1\,\mathbf{Cov}(R_1,R_2)\big)(r_T - r_f) + \lambda\sigma_T^3 = 0. \quad (1.14)$$

Умножим первое из полученных уравнений на ν_1, а второе на ν_2 и сложим. В результате

$$r_1\nu_1\sigma_T^2 + r_2\nu_2\sigma_T^2 - \sigma_T^2(r_T - r_f) + \lambda\sigma_T^3 = 0.$$

Вновь заменяя $r_1\nu_1 + r_2\nu_2$ на r_T, получим после преобразований, что $\lambda = -r_f/\sigma_T$. Пользуясь линейностью ковариации по своим аргументам, найдём, что $\mathbf{Cov}(R_1, R_T) = \mathbf{Cov}(R_1, \nu_1 R_1 + \nu_2 R_2) = \nu_1\sigma_1^2 + \nu_2\,\mathbf{Cov}(R_1, R_2)$. Тогда (1.13) имеет вид

$$r_1\sigma_T^2 - \mathbf{Cov}(R_1, R_T)(r_T - r_f) - r_f\sigma_T^2 = 0.$$

Следовательно,

$$(r_1 - r_f)\sigma_T^2 = (r_T - r_f)\,\mathbf{Cov}(R_1, R_T).$$

Уравнение SML получено.

21. Может ли в условиях CAPM в рыночный портфель входить (в частности) два актива $A(\sigma_A, r_A)$ и $B(\sigma_B, r_B)$, для которых $\sigma_A < \sigma_B$ и $r_A > r_B$.

Указание. Воспользуйтесь уравнением SML.

22. Рыночный портфель состоит из трёх активов A_1, A_2 и A_3: $T = \nu_1 A_1 + \nu_2 A_2 + \nu_3 A_3$. Известно, что $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.4$, $\nu_3 = 0.3$, $\mathbf{Cov}(R_1, R_T) = 230$, $\mathbf{Cov}(R_2, R_T) = 280$, $\mathbf{Cov}(R_3, R_T) = 250$. Найдите риск рыночного портфеля T.

23. На рынке ценных бумаг существуют только два рискованных актива $A(0.067, 0.18)$ и $B(0.14, 0.32)$ и безрисковый актив F, доходность которого 0.09. Известно, что $\mathbf{Cov}(R_B, R_T) = 0.0007$, где T — рыночный портфель, имеющий ожидаемую доходность 0.23 и риск 0.014. Нарисуйте рыночную линию CML, рыночную линию SML ценных бумаг. Укажите точки A и B на прямой SML. Не забудьте подписать оси координат. Можно ли нарисовать линии CML и SML на одном графике?

24. Лежит ли безрисковый актив на прямой SML?

25. Дисперсия рыночного портфеля равна 490, ковариация ценных бумаг A и B равна 470, "бета" ценной бумаги A равна 1.20. Найдите "бету" ценной бумаги B.

Указание. Примените формулу (1.6).

26. Рассмотрим два портфеля: один, состоящий из четырёх ценных бумаг, а второй — из десяти. Все ценные бумаги некоррелированы, имеют "бета" коэффициент, равный 1, и собственный риск в 30%. В обоих портфелях доли всех ценных бумаг одинаковы. Вычислите общий риск обоих портфелей, если риск рыночного портфеля составляет 20%.

§2. Непрерывная модель ценообразования активов

2.1. Постановка задачи

Предположим, что цена актива зависит от общих тенденций рынка и неопределённости, связанной с данным активом. Естественно считать, что ожидаемая прибыль от актива пропорциональна цене актива; то есть, если инвестор оценивает прибыль как 10% годовых при рыночной цене актива в \$20, то при цене актива в \$100, он также оценивает прибыль в 10% годовых. Следовательно, за малый интервал времени Δt ожидаемое изменение цены актива пропорционально $S\Delta t$. Через μ обозначим коэффициент пропорциональности.

Согласно определению,

$$j_0 \sim \frac{\ln\big(K/S(\tau)\big) + n\sigma\sqrt{\Delta t}}{2\sigma\sqrt{\Delta t}}.$$

Так как $n\Delta t = T - \tau$, из двух последних формул следует, что

$$j_0 - np \sim \frac{\ln\big(K/S(\tau)\big) - (r - \sigma^2/2)(T-\tau)}{2\sigma\sqrt{\Delta t}}.$$

Далее, $npq \sim n/4$. Поэтому

$$\frac{j_0 - np}{\sqrt{npq}} \sim \frac{\ln\big(K/s(\tau)\big) - (r - \sigma^2/2)(T-\tau)}{\sigma\sqrt{n\Delta t}} \to -d_2.$$

По свойствам нормальной функции распределения $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$. Следовательно,

$$b(\geqslant j_0, n, p) \to \Phi(d_2).$$

Аналогично устанавливается, что $b(\geqslant j_0, n, p') \to \Phi(d_1)$. Тогда формула Блэка-Шоулза следует из (3.17).

Примеры

Пример 1. Докажите формулу (3.6).

Решение. Рассмотрим следующую стратегию:

- купить $e^{-q(T-\tau)}$ акций и вкладывать дивиденды в акции
- вступить во фьчерсный контракт на продажу 1 акции.

Тогда количество акций ко дню поставки $t = T$ увеличится и станет равным $e^{-q(T-\tau)}e^{q(T-\tau)} = 1$. Эта акция и будет продана в соответствии с фьючерсным контрактом по цене $\varphi_{[\tau,T]}$.

Итак, затрачено $S(\tau)e^{-q(T-\tau)}$ денег в начальный момент времени $t = \tau$, а получено $\varphi_{[\tau,T]}$ при $t = T$. Приравнивая денежные потоки в один и тот же момент времени с помощью дисконтирующего множителя $e^{r(T-\tau)}$, получим $\varphi_{[\tau,T]} = S(\tau)e^{-q(T-\tau)}e^{r(T-\tau)}$. Формула доказана.

Формализуем сделанное рассуждение в терминах раздела 2.4. Предположим, что рынок $\big(S_0(t), S(t), F(t)\big)$ состоит из безрискового актива, одного рискованного актива и фьючерса на этот актив. Рассмотрим портфель

$$\bar\theta(t) = \Big(0, e^{-q(T-t)}, -1\Big).$$

3.5. Предельный переход

Пусть цена некоторого актива в текущий момент времени τ равна $S(\tau)$. Цена исполнения опциона колл на этот актив с моментом исполнения T равна K. Вычислим цену этого опциона в момент времени τ. Разделим временной интервал $[\tau, T]$ на n периодов одинаковой длины $(T-\tau)/n$. Вычисление цены колл опциона проводится в рамках n-периодной биномиальной модели ценообразования опционов, а затем находится её предел при $n \to \infty$.

Итак, цена c опциона в n-периодной биномиальной модели определяется формулой (3.12). Согласно определению, j_0 стремится к $\ln\big(K/(S(t)d^n)\big)/\ln(u/d)$ при $n \to \infty$. По интегральной формуле Муавра-Лапласа

$$b(\geqslant j_0, n, p) \to 1 - \Phi\left(\frac{j_0 - np}{\sqrt{npq}}\right), \quad b(\geqslant j_0, n, p') \to 1 - \Phi\left(\frac{j_0 - np'}{\sqrt{np'q}}\right),$$

где $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2\pi} e^{-t^2/2}\, dt$ — нормальная функция распределения. Пользуясь определением (3.16) чисел u и d, получим, что при $n \to \infty$

$$c = S(\tau)\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-\tau)}\Phi(d_2), \tag{3.17}$$

где

$$d_1 = \frac{\ln(S(\tau)/K) + (r + \sigma^2/2)(T-\tau)}{\sigma\sqrt{T-\tau}},$$

$$d_2 = \frac{\ln(S(\tau)/K) + (r - \sigma^2/2)(T-\tau)}{\sigma\sqrt{T-\tau}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-\tau}.$$

Найденную формулу (3.17) для цены колл опциона называют формулой Блэка-Шоулза.

Доказательство формулы (3.17) использует разложение экспоненты в ряд

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots. \tag{3.18}$$

Подставив u и d из формулы (3.17) в равенство (3.8), определяющее числа p и q, получим:

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}.$$

Раскладывая экспоненты в ряд по формуле (3.18) и пренебрегая слагаемыми, малыми по сравнению с Δt, получим, что

$$p \sim \frac{\sigma\sqrt{\Delta t} + (r - \sigma^2/2)\Delta t}{2\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad q \sim \frac{\sigma\sqrt{\Delta t} - (r - \sigma^2/2)\Delta t}{2\sigma\sqrt{\Delta t}}.$$

Если неопределённость рыночной цены отсутствует, то цена актива S удовлетворяет уравнению

$$\Delta S = \mu S \Delta t, \tag{2.1}$$

где Δt — достаточно мало. При $\Delta t \to 0$ уравнение (2.1) становится дифференциальным

$$S' = \mu S.$$

Его решение $S(T) = S(0)e^{\mu T}$ определяет цену $S(T)$ актива в момент времени T.

На практике однако всегда существует неопределённость цены актива. Для описания неопределённости рассматриваются функции времени, которые при каждом значении аргумента являются случайными величинами. Это свойство определяет *случайный процесс*.

Случайный процесс $w(t)$ называется *винеровским*, если $w(0) = 0$, и случайные величины $w(t_1+s) - w(t_1)$ и $w(t_2+s) - w(t_2)$ имеют нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и с дисперсией, равной s и независимы при любых t_1, t_2, s, образующих непересекающиеся интервалы (t_1, t_1+s) и (t_2, t_2+s).

График винеровского процесса можно получить, например, следующим образом. Зафиксируем некоторое число $h > 0$ и определим семейство случайных величины $W_h(t)$ в моменты времени $t = 0$, h, $2h, \ldots$. Положим $W_h(0) = 0$. Разность $\Delta W_h = W_h\big((k+1)h\big) - W_h(kh)$ является случайной величиной и задаётся таблицей:

ΔW_h	$-\delta$	δ
P	$1/2$	$1/2$

Можно представлять, что значение случайной величины $W_h\big((k+1)h\big)$ получается из значения $W_h(kh)$ с помощью бросания монеты. Тогда математическое ожидание случайной величины ΔW_h равно $\mathbf{M}(\Delta W_h) = 0$, а дисперсия $\mathbf{D}(\Delta W_h) = \delta^2$. Число δ полагают равным $\sqrt{h}$, чтобы дисперсия $\mathbf{D}(\Delta W_h)$ оказалась равной h.

Оказывается, что винеровский процесс $w(t)$ получается из семейства случайных величин $W_h(t)$ при $h \to 0$. Сам предельный переход достаточно труден и здесь не рассматривается. Следовательно, график семейства $W_h(t)$ при малых h является хорошим приближением винеровского процесса. Например, для наглядного изображения винеровского процесса на отрезке $[0, 1]$ достаточно взять $h = 0.01$.

В простейшем случае, когда $\mu = 0$, то есть фондовый рынок в среднем не растёт и не убывает, предполагается, что

$$\Delta S = \sigma S \Delta w,$$

где $w(t)$ — винеровский процесс, а $\sigma > 0$ — некоторое положительное число. Тот факт, что приращения цены актива пропорциональны цене, выражает естественное предположение, что неопределённость выражения $\big(S(t+\Delta t) - S(t)\big)/S(t)$ не зависит от S. Это означает, что инвестор одинаково не уверен, какая получится доля прибыли при цене актива в \$20 и при цене актива в \$100.

Модель поведения цены активов в общем случае определяется уравнением

$$\Delta S(t) = \mu S(t)\Delta t + \sigma S(t)\Delta w, \tag{2.2}$$

Коэффициент σ, являющийся единицей неопределённости, называют *волатильностью (volatility)*.

2.2. Процессы с ненулевым средним

Случайные процессы, удовлетворяющие уравнению (2.2), достаточно сложны. Поэтому в качестве подготовительного этапа рассмотрим сначала случайные процессы $Y(t)$, малые изменения которого зависят от времени, но не зависят от Y:

$$\Delta Y = a\Delta t + b\Delta w, \tag{2.3}$$

где a и b — произвольные фиксированные числа, а w — винеровский процесс. Уравнение (2.3) изучается на некотором интервале $t \in [0, T]$, где T кратно Δt.

Как понимать уравнение (2.3)? Разобьём отрезок $[0, T]$ на интервалы длины Δt. Значение Y на правом конце интервала вычисляется с помощью (2.3) через значение на левом конце интервала, например,

$$Y(\Delta t) = Y(0) + a\Delta t + bw(\Delta t) - bw(0).$$

На рис. 4 показаны примеры трёх процессов $Y(t)$.

Заметим, что “случайность” в процесс Y вносит только второе слагаемое $b\Delta w$ правой части уравнения (2.3). Математическое ожидание

$$\mathbf{M}\,\Delta Y = a\Delta t + b\,\mathbf{M}\,\Delta w = a\Delta t,$$

Тогда (задача 14) $p' + q' = 1$, и число $\sum_{j=j_0}^{n} C_n^j (pu)^j (qd)^{n-j} e^{-nr\Delta t}$ равно вероятности $b(\geqslant j_0, n, p')$ по крайней мере j_0 успехов в схеме Бернулли из n испытаний с вероятностью успеха p' в каждом испытании. Значит,

$$c = S(t)b(\geqslant j_0, n, p') - Ke^{-nr\Delta t}b(\geqslant j_0, n, p). \tag{3.12}$$

3.4. Нейтральный к риску рынок

Нейтральным к риску называют такой рынок, в котором среднее значение произвольного финансового инструмента дисконтируется по процентной ставке. В терминах рассматриваемых моделей это означает, что случайные величины $P(t_1)$ и $P_(t_2)$, обозначающие цены произвольного финансового инструмента в моменты времени t_1 и t_2 связаны формулой

$$\mathbf{M}\,P(t_2) = e^{r(t_2-t_1)}\,\mathbf{M}\,P(t_1). \tag{3.13}$$

В частности, в момент времени t можно утверждать, что

$$\mathbf{M}\,S(t+\Delta t) = S(t)e^{r\Delta t}. \tag{3.14}$$

Нейтральный к риску рынок вообще говоря невозможен, однако некоторые важные наблюдения, сделанные для безрискового рынка переносятся в реальный рынок. Для начала заметим, что числа p и q, введённые в (3.8), можно интерпретировать для безрисковго рынка как вероятности событий $S(t+\Delta t) = S(t)u$ и $S(t+\Delta t) = S(t)d$ соответственно. Действительно, $\mathbf{M}\,S(t+\Delta t) = S(t)up + S(t)d(1-p)$. Согласно (3.14),

$$S(t)up + S(t)d(1-p) = S(t)e^{r\Delta t}.$$

Откуда

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \tag{3.15}$$

что совпадает с (3.8).

Константы u и d определяют так, чтобы случайная величина $\ln(S(t+\Delta t)) - \ln(S(t))$ была нормальна распределена с дисперсией $\sigma^2\Delta t$ при любом t. Это условие согласуется с непрерывной моделью ценообразования актива. Можно, например, определить u и d следующим образом:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = \frac{1}{u} = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}. \tag{3.16}$$

для c_u и c_d, получим

$$c = e^{-2r\Delta t}\bigl(c_{uu}p^2 + 2c_{ud}pq + c_{dd}q^2\bigr), \tag{3.9}$$

где $c_{uu} = \max\bigl\{u^2 S(t) - K, 0\bigr\}$, $c_{ud} = \max\bigl\{udS(t) - K, 0\bigr\}$,
$c_{dd} = \max\bigl\{d^2 S(t) - K, 0\bigr\}$.

3.3. Биномиальная n-периодная модель

Алгоритм, позволяющий вычислить цену опциона в двухпериодной модели естественным образом продолжается для n-периодной модели. В результате получается формула, обобщающая (3.9):

$$c = e^{-nr\Delta t}\left(\sum_{j=0}^{n} C_n^j p^j q^{n-j} \max\bigl\{u^j d^{n-j} S(t) - K, 0\bigr\}\right). \tag{3.10}$$

Формула (3.10) может быть упрощена. Пусть j_0 — наименьшее целое положительное число такое, что $u^{j_0} d^{n-j_0} S(t) > K$. Это определение эквивалентно тому, что j_0 — наименьшее положительное число, которое больше, чем $\ln(K/S(t)d^n)/\ln(u/d)$. Следовательно, для всех $j \leqslant j_0$ максимум $\max\bigl\{u^j d^{n-j} S(t) - K, 0\bigr\} = 0$, а для всех $j > j_0$

$$\max\bigl\{u^j d^{n-j} S(t) - K, 0\bigr\} = u^j d^{n-j} S(t) - K.$$

Значит, формула (3.10) для цены опциона c записывается в виде

$$c = e^{-nr\Delta t}\left(\sum_{j=j_0}^{n} C_n^j p^j q^{n-j} \left(u^j d^{n-j} S(t) - K\right)\right).$$

Разбивая правую часть на два слагаемых, получим, что

$$c = S(t)\left(\sum_{j=j_0}^{n} C_n^j (pu)^j (qd)^{n-j} e^{-nr\Delta t}\right) - Ke^{-nr\Delta t}\left(\sum_{j=j_0}^{n} C_n^j p^j q^{n-j}\right).$$

Число $\sum_{j=j_0}^{n} C_n^j p^j q^{n-j}$ равно вероятности $b(\geqslant j_0, n, p)$ по крайней мере j_0 успехов в схеме Бернулли из n испытаний с вероятностью успеха p в каждом испытании. Аналогично, обозначим

$$p' = pue^{-r\Delta t}, \quad q' = qde^{-r\Delta t} \tag{3.11}$$

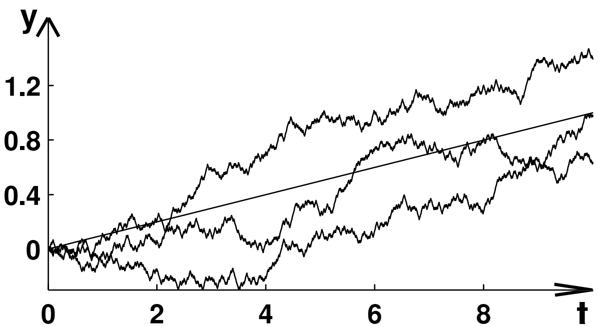

Рис. 4. Примеры процессов $Y(t)$ при $a = 0.1$, $b = 0.15$. Шаг разбиения горизонтальной оси $\Delta t = 0.01$.

так как математическое ожидание приращений винеровского процесса Δw равно нулю. Значит, $\mathbf{M}\,Y(\Delta t) = a\Delta t + Y(0)$, $\mathbf{M}\,Y(2\Delta t) = a\Delta t + \mathbf{M}\,Y(\Delta t) = a2\Delta t + Y(0)$ и так далее. Окончательно имеем, что

$$\mathbf{M}\bigl(Y(T)\bigr) = aT + Y(0). \tag{2.4}$$

Дисперсия случайной величины ΔY, напротив, задаётся слагаемым $b\Delta w$:

$$\mathbf{D}(\Delta Y) = b^2\,\mathbf{D}(\Delta w) = b^2 \Delta t.$$

Последовательное применение полученного равенства аналогично выводу (2.4) приводит к формуле дисперсии $Y(T)$:

$$\mathbf{D}\bigl(Y(T)\bigr) = b^2 T. \tag{2.5}$$

Заметим, что из нормальности случайной величины Δw следует нормальность случайных величин ΔY и $Y(t)$ при любых $t > 0$. Из приведенных рассуждений следует, что *случайный процесс $Y(t)$, удовлетворяющий соотношению (2.3), является при каждом фиксированном t области определения нормально распределённой случайной величиной, имеющей математическое ожидание $Y(0) + at$ и дисперсию $b^2 t$.*

2.3. Лемма Ито

Оказывается, что из уравнения (2.2) можно получить более простое уравнение вида (2.3). Для этого используется лемма Ито в следующей формулировке. *Пусть $f(S,t)$ — произвольная функция имеющая две частные производные по первому аргументу и одну частную производную по второму аргументу. Предположим, что ΔS удовлетворяет уравнению (2.2) при малых Δt, а Δw — винеровский процесс. Тогда*

$$\Delta f = \sigma S \frac{\partial f}{\partial S}\Delta w + \left(\mu S\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial t}\right)\Delta t + \bar{o}(\Delta t).$$

Воспользуемся леммой Ито для $f(S,t) = \ln S$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Следовательно, отбрасывая слагаемые малые, по сравнению с Δt, имеем

$$\Delta(\ln S) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma \Delta w.$$

Установлено, что приращения случайной величины $\ln S$ удовлетворяют уравнению вида (2.3). Это уравнение, в частности, означает, что случайная величина $\ln S(T) - \ln S(t)$ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $(\mu - \sigma^2/2)(T-t)$ и дисперсией $\sigma^2(T-t)$. Введём обозначение $\xi \sim N(m, s^2)$ для нормально распределённой случайной величины ξ, имеющей математическое ожидание m и дисперсию s^2. Тогда

$$\ln S(T) \sim N\left(\ln S(t) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma^2(T-\tau)\right). \qquad (2.6)$$

2.4. Построение модели

Рассуждения предыдущих разделов лежат в основе строгого математического построения. *Рынком* называется случайный вектор $\{S_0(t), S_1(t), \ldots, S_n(t), D_1(t), \ldots, D_m(t)\}$, где $D_j(t)$ является функцией от $S_0(t)$, …, $S_n(t)$, удовлетворяющий некоторым условиям согласованности. Случайные величины $S_i(t)$ интерпретируются как цена ценной бумаги или акции под номером i в момент времени t, а $D_j(t)$ — как цена j-ого производного финансового инструмента. В простейшей модели, построенной ниже, рассматривается рынок, состоящий только из независимых случайных величин (ценных бумаг)

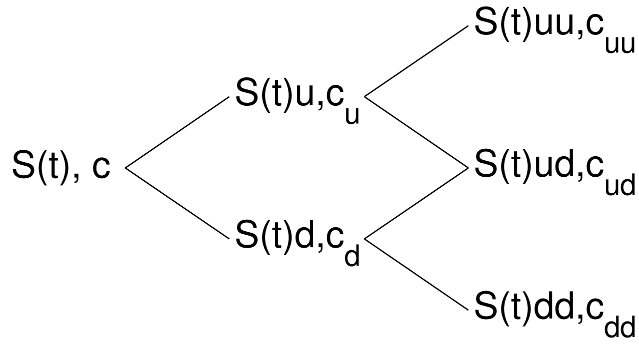

Рис. 6. Двухпериодная модель

Согласно формуле (3.1) цена $\Pi(t)$ этого портфеля в момент времени t вычисляется по формуле $\Pi(t) = \Pi(t+\Delta t)e^{-r\Delta t}$. С другой стороны, цена портфеля $\Pi(t) = S(t) + \nu c$, где $c = c(t)$ — текущая цена опциона колл. Итак,

$$S(t) - \frac{S(t)(u-d)}{c_u - c_d}c = S(t)\frac{c_u d - c_d u}{c_u - c_d}e^{-r\Delta t}$$

или

$$c = e^{-r\Delta t}(c_u p + c_d q), \text{ где } p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}, \quad q = \frac{u - e^{r\Delta t}}{u-d}. \qquad (3.8)$$

3.2. Двухпериодная биномиальная модель

Двухпериодная модель схематично показана на рис. 6. Вычисление цены опциона на актив с исполнением в конце второго периода по цене K нужно начинать с конца. Если в конце первого периода цена актива равна $S(t)u$, то цену c_u опциона можно вычислить в рамках одноопериодной модели по формуле (3.8):

$$c_u = e^{-r\Delta t}(c_{uu}p + c_{ud}q).$$

Аналогично

$$c_d = e^{-r\Delta t}(c_{ud}p + c_{dd}q).$$

Тогда цена опциона в начальный момент времени t выражается через c_u и c_d по формуле (3.8). Подставляя полученные выражения

Связь между случайными величинами $c(t)$ (аналогично, $P(t)$) в разные моменты времени t может быть определена различными способами. Мы рассмотрим биномиальную модель Коха-Росса-Рубинштейна и непрерывную модель Блэка-Шоулза.

3.1. Однопериодная биномиальная модель.

Пусть в текущий момент времени t цена актива равна $S(t)$. Предположим, что в момент времени $t+\Delta t$ возможны только два исхода: цена $S(t+\Delta t)$ актива равна $S(t)u$ или $S(t)d$ (рис. 5). Предположим для определённости, что $u>1$ и $d<1$. Вычислим текущую цену c опциона колл на этот актив со временем исполнения $t+\Delta t$ и ценой исполнения K.

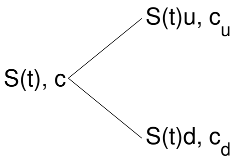

Рис. 5. Однопериодная модель

Опцион будет реализован, если рыночная цена актива $S(t+\Delta t)$ окажется выше, чем цена исполнения K. Следовательно, цена $c(t+\Delta t)$ опциона в момент исполнения: $c(t+\Delta t) = \max\{S(t+\Delta t)-K, 0\}$.

Сформируем безрисковый портфель в момент времени t, состоящий из 1 акции и ν опционов колл. Число ν подбирается так, чтобы цена портфеля в момент времени $t+\Delta t$ была одинаковой при любом из двух возможных значений $S(t+\Delta t)$. Если цена актива $S(t+\Delta t)=S(t)u$, то цена портфеля равна $S(t)u+\nu c_u$. Если цена актива $S(t+\Delta t)=S(t)d$, то цена портфеля в момент времени $t+\Delta t$ равна $S(t)d+\nu c_d$. Следовательно,

$$S(t)u + c_u\nu = S(t)d + c_d\Delta.$$

Значит,

$$\nu = \frac{S(t)(u-d)}{c_d-c_u}.$$

Легко сообразить, что полученное число ν отрицательное. Это означает, что ν опционов, входящих в безрисковый портфель, нужно продавать.

Цена $\Pi_{t+\Delta t}$ безрискового портфеля в момент времени $t+\Delta t$ равна

$$\Pi_{t+\Delta t} = S(t)u - \frac{S(t)c_u(u-d)}{c_u-c_d} = \frac{S(t)(c_u d - c_d u)}{c_u-c_d}.$$

S_i. В этом случае условия согласованности записываются в виде:

$$dS_0(t) = r(t)S_0(t)dt \tag{2.7}$$

$$dS_i(t) = \mu_i S_i(t)dt + \sigma_i S_i(t)dw. \tag{2.8}$$

Уравнение (2.7) определяет безрисковый актив S_0, поскольку в правой части равенства отсутствует винеровский процесс. Функция $r(t)$ называется *процентной ставкой*. Уравнение (2.8) можно понимать как дискретное уравнение (2.2) при малом интервале Δt.

Уравнения (2.7) и (2.8) интерпретируются в экономических терминах следующим образом:

1) Существует возможность покупки актива на любую желаемую сумму денег.

2) Короткие продажи (возможность продавать ценные бумаги, не имея их в наличии) разрешены. Никаких ограничений на них не накладываются.

3) Налоги и операционные издержки отсутствуют.

Портфелем называется вектор

$$\bar\theta = \big(\theta_0(t), \theta_1(t), \ldots, \theta_n(t), \theta_{n+1}(t), \theta_{n+m}(t)\big).$$

Компоненты вектора представляют собой количество ценных бумаг с номерами $0, \ldots, n$ и их производных, которыми инвестор владеет в момент времени t.

Цена $\Pi^\theta(t)$ портфеля $\bar\theta$ определяется равенством

$$\Pi^\theta(t) = \theta_0(t)S_0(t)+\ldots+\theta_n(t)S_n(t)+\theta_{n+1}(t)D_1(t)+\ldots+\theta_{n+m}(t)D_m(t). \tag{2.9}$$

Так как (2.7) и (2.8) понимаются как предел дискретных уравнений, из (2.9) следует, что

$$d\Pi^\theta(t) = \theta_0(t)dS_0(t)+\ldots+\theta_n(t)dS_n(t)+\theta_{n+1}(t)dD_1(t)+\ldots+\theta_{n+m}(t)dD_m(t).$$

Полученное уравнение означает, что никакие деньги не вводятся в портфель и не выводятся из него, возможно только перераспределение средств внутри портфеля. Такие портфели называются *самофинансирующимися.*

Портфель $\bar\theta(t)$ называется *допустимым*, если существует такое число $K>0$ (зависящее от портфеля $\bar\theta$), что $\Pi^\theta(t) \geqslant -K$ с вероятностью 1. Сделанное ограничение отражает естественное условие фондового рынка: должен существовать предел для размера долга, который могут допустить кредиторы.

Арбитраж — это допустимый портфель $\bar{\theta}$, цена которого Π^θ равна 0 в текущий момент времени t_0, а в некоторый будущий момент времени $t_1 > t_0$ цена $\Pi^\theta(t_1)$ неотрицательна с вероятностью 1, причём $\mathsf{P}\{\Pi^\theta(t_1) > 0\} > 0$. Таким образом, существование арбитража на рынке даёт возможность инвестору получить безрисковую прибыль. Оказывается, что при сформулированных предположениях арбитраж на рынке не существует.

Примеры

Пример 1. Текущая цена акции равна 20. За каждую единицу времени цена акции либо увеличивается на 2 с вероятностью 2/3, либо уменьшается на 2 с вероятностью 1/3. Найдите вероятность того, что 6 единиц времени спустя цена акции будет равна 24.

Решение. Чтобы цена акции оказалась равной 24 через 6 единиц времени, она обязательно должна была 4 раза повышаться и 2 раза понижаться. Изменение цены акции можно рассматривать как схему Бернулли из 6 испытаний. Результатом испытания является повышение или понижение цены за единицу времени. Успехом назовём повышение цены. По условию задачи вероятность успеха равна 2/3. Тогда цена акции окажется равной 24 при 4 успехах в 6 испытаниях схемы Бернулли. Их вероятность равна $C_6^4 \cdot (2/3)^4(1/3)^2 = 0{,}6584$.

Пример 2. С помощью леммы Ито определите какому эволюционному уравнению удовлетворяет процесс $\frac{1}{2}w_t^2$, где w_t — винеровский процесс.

Решение. Из леммы Ито следует, что

$$\Delta\big(f(t,w)\big) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\right)\Delta t + \frac{\partial f}{\partial w}\Delta w. \tag{2.10}$$

Положим $f(t,w) = \frac{1}{2}w^2$. Тогда $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial w} = w$ $\frac{\partial^2 f}{\partial w^2} = 1$. Следовательно, из 2.10

$$\Delta\Big(\frac{1}{2}w_t^2\Big) = w_t\Delta w + \frac{1}{2}\Delta t.$$

Пример 3. Пусть $S(0) = \$40$, $\mu = 16\%$ годовых $\sigma = 20\%$ годовых. Найдите распределение цены актива $S(T)$ через 1/2 года.

Предположим, что до дня поставки фьючерса ожидается получение дохода, который в текущий момент времени τ оценивается равным I. Тогда

$$\varphi_{[\tau,T]} = \big(S(\tau) - I\big)e^{r(T-\tau)}. \tag{3.5}$$

Пусть акция обеспечивает дивиденды, равные $q\%$ годовых. Тогда

$$\varphi_{[\tau,T]} = S(\tau)e^{(r-q)(T-\tau)} \tag{3.6}$$

Вывод формул (3.6) и (3.5) является содержанием задачи 3, а формула (3.6) устанавливается в примере 1.

Колл опцион или просто колл — это ценная бумага, которая даёт право её владельцу купить определённый актив до определённого дня за определённую цену. Этот актив называется *базовым* активом. *Пут опцион* или просто пут даёт право владельцу продать базовый актив до определённого дня за определённую цену. Цена называется *ценой исполнения*; указанный день — *днём исполнения*. Далее, мы будем обсуждать те опционы, которые могут быть исполнены только в последний день (*американские* опционы).

За обладание опционом нужно заплатить определённую цену. Эта цена называется *премией* или *ценой* опциона. Необходимость заплатить премию за обладание опционом принципиально отличает опционы от фьючерсов.

Цена опциона колл определяется случайным процессом $c(t)$, для которого известно, что в момент T исполнения опциона

$$c(T) = \max\big\{S(T) - K, 0\big\}.$$

Аналогично, цена опциона пут определяется случайным процессом $P(t)$, для которого известно, что в момент T исполнения опциона

$$P(T) = \max\big\{K - S(T), 0\big\}.$$

Пусть опционы колл и пут выписаны на одинаковый базовый актив с ценой $S(t)$. Опционы исполняются в момент времени T по цене K. Тогда цены $c(t)$ и $P(t)$ опционов колл и пут соответственно удовлетворяют соотношению

$$c(t) + Ke^{-r(T-t)} = P(t) + S(t). \tag{3.7}$$

Равенство (3.7) называется *паритетом* опционов колл и пут.

для любых t_1 и t_2.

Портфель, сформированный в момент времени t_1 называется *безрисковым* в момент времени t_2, если его цена $\Pi(t_2)$ известна заранее, то есть $\Pi(t_2)$ равно некоторому числу с вероятностью 1 при каждом t_2. В силу отсутствия арбитража на рынке цены $\Pi\big(t_1\big)$ и $\Pi\big(t_2\big)$ безрискового портфеля в моменты времени t_1 и t_2 связаны соотношением

$$\Pi\big(t_2\big) = e^{r(t_2-t_1)}\Pi\big(t_1\big). \tag{3.1}$$

Фьючерс — это соглашение продать или купить актив в определённое время в будущем за определённую цену. Цена φ, по которой будет совершена покупка или продажа, называется *ценой поставки актива* или *фьючерсной ценой актива,* а время T покупки или продажи называется *временем или днём поставки.* Актив, на который выписан фьючерс, называется *базовым.*

Фьючерс задаётся временем τ, когда заключается контракт, временем поставки T и ценой поставки $\varphi = \varphi_{[\tau,T]}$

Цена фьючерсного контракта $F_{[\tau,T]}(t)$, заключённого в момент времени τ с днём поставки T в промежуточный момент времени t определяется как разность фьючерсных цен, определённых в моменты времени t и τ с днём поставки T, приведённая к моменту времени t по безрисковой процентной ставке r. В случае, когда безрисковая процентная ставка постоянна данное определение может быть записано в виде:

$$F_{[\tau,T]}(t) = \big(\varphi_{[t,T]} - \varphi_{[\tau,T]}\big)\, e^{-r(T-t)}. \tag{3.2}$$

В момент времени τ, когда заключается фьючерсный контракт, цена фьючерса $F_{[\tau,T]}(\tau) = 0$, а в момент поставки $F_{[\tau,T]}(T) = S(T) - \varphi_{[\tau,T]}$.

Пусть до дня поставки фьючерса не предполагается ни получение дохода от актива, ни получение дивидендов. Тогда фьючерсная цена $\varphi_{[\tau,T]}$ равна ожидаемой будущей цене актива:

$$\varphi_{[\tau,T]} = S(\tau)e^{r(T-\tau)}. \tag{3.3}$$

При отсутствии выплат по базовому активу формула (3.3) позволяет упростить выражение (3.2) для цены $F_{[\tau,T]}(t)$ фьючерса в момент времени t:

$$F_{[\tau,T]}(t) = S(t) - \varphi_{[\tau,T]}e^{-r(T-t)}. \tag{3.4}$$

Укажите доверительный интервал значений $S(T)$ через 1/2 года с надёжностью 0.95.

Решение. По формуле (2.6) при $t = 0.5$

$$\ln S(T) \sim N(3.759,\ 0.14^2).$$

Доверительный интервал значений $S(T)$ с надёжностью 0.95 находится из соотношения

$$\mathsf{P}\left\{\, \ln S(T) - \mathbf{M}(\ln S(T))| \leqslant 1.96\sigma \right\} = 0.95.$$

Подставляя значения математического ожидания и среденквадратичного отклонения случайной величины $\ln S(T)$, получим

$$3.759 - 1.96\cdot 0.14 < \ln S(T) < 3.759 + 1.96\cdot 0.14 \text{ или } S(T) \in [32.5, 56.6].$$

Пример 4. Денежный поток Y фирмы, измеряемый в миллионах долларов, удовлетворяет уравнению

$$\Delta Y = 2\Delta t + 3\Delta w.$$

Какой должен быть начальный капитал фирмы, чтобы с вероятностью 0.95 капитал фирмы не оказался отрицательным 9 месяцев спустя.

Решение. Согласно, (2.4) и (2.5), капитал фирмы $Y(0.75)$ девять месяцев спустя является нормально распределённой случайной величиной с математическим ожиданием $m = 2\cdot 0.75 + Y(0) = 1.5 + Y(0)$ и дисперсией $\sigma^2 = 9\cdot 0.75 = 6.75$. По условию задачи вероятность $\mathsf{P}\{Y(0.75) > 0\} = 0.95$. Значит,

$$\mathsf{P}\left\{\frac{Y(0.75)-m}{\sigma} > -\frac{m}{\sigma}\right\} = 0.95.$$

Случайная величина $\frac{Y(0.75)-m}{\sigma} \sim N(0,1)$, поэтому

$$\mathsf{P}\left\{\frac{Y(0.75)-m}{\sigma} > -\frac{m}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{m}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ — нормальная функция распределения. Итак, $\Phi(m/\sigma) = 0.95$. Значения функции Φ приведены в таблице 1 в конце раздела. По таблице находим, что $m/\sigma = 1.645$, то есть $1.5 + Y(0) = 1.645\sqrt{6.75}$ или $Y(0) = 2.7738$. Следовательно, начальный капитал фирмы должен быть больше, чем 2.7738 миллионов долларов.

Таблица 1. Нормальная функция распределения $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} d\,x$.

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
0.0	0.500000	1.0	0.841345	2.0	0.977250	3.0	0.998650
0.1	0.539828	1.1	0.864334	2.1	0.982136	3.1	0.999032
0.2	0.579260	1.2	0.884930	2.2	0.986097	3.2	0.999313
0.3	0.617911	1.3	0.903200	2.3	0.989276	3.3	0.999517
0.4	0.655422	1.4	0.919243	2.4	0.991802	3.4	0.999663
0.5	0.691462	1.5	0.933193	2.5	0.993790	3.5	0.999767
0.6	0.725747	1.6	0.945201	2.6	0.995339	3.6	0.999841
0.7	0.758036	1.7	0.955435	2.7	0.996533	3.7	0.999892
0.8	0.788145	1.8	0.964070	2.8	0.997445	3.8	0.999928
0.9	0.815940	1.9	0.971283	2.9	0.998134	3.9	0.999952

Вопросы и задачи

1. Текущая цена акции равна 50. За каждую единицу времени цена акции либо увеличивается на 2 с вероятностью 3/5, либо уменьшается на 2 с вероятностью 2/5. Случайная величина S — цена акции через 4 единицы времени. Составьте таблицу распределения случайной величины S.

2. Текущая цена акции равна 50. За каждую единицу времени цена акции либо увеличивается в 1.04 раза с вероятностью 3/5, либо уменьшается в 1.06 раза с вероятностью 2/5. Случайная величина S — цена акции через 4 единицы времени. Составьте таблицу распределения случайной величины S и найдите её наиболее вероятное значение.

3. Предположим, что случайные величины $V_1, V_2, \ldots, V_6$ независимы и могут принимать только два значения 1 и -1. Вероятность $\mathsf{P}\{V_i = 1\} = 1/2$. Составить таблицу распределения случайной величины X, равной $V_1 + V_2 + \ldots + V_6$.

4. Двое друзей играют в орлянку. Что вероятнее, ничья после четырёх бросков или ничья после восьми бросков?

5. Случайные величины $V_1, V_2, \ldots, V_8$ независимы и имеют одинаковое распределение $\mathsf{P}\{X_i = -1\} = 1/2$, $\mathsf{P}\{X_i = 1\} = 1/2$. Что вероятнее $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 0$ или $X_1 + \ldots + X_8 = 0$?

6. С помощью леммы Ито определите, какому эволюционному уравнению вида (2.2) удовлетворяет процесс tw_t, где w_t — винеровский процесс.

7. Денежный поток C компании удовлетворяет уравнению

$$dC = \mu C dt + \sigma C dw,$$

где смещение μ равно 1.5 за квартал, а волатильность $\sigma = 1.2$ за квартал. Начальный капитал $C_0 = 20$. Найти доверительный интервал для капитала C в конце квартала с надёжностью 0.95.

8. Денежный поток C компании удовлетворяет уравнению

$$dC = \mu C dt + \sigma C dw,$$

где смещение μ равно 1.1 за год, а волатильность $\sigma = 1.0$ за год. При каком начальном капитале с вероятностью 0.95, денежный поток компании не будет отрицательным к концу года?

9. Случайный процесс $S(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\Delta S = \mu \Delta t + \sigma \Delta w.$$

В течение первых 3 лет $\mu = 2$ и $\sigma = 3$; в течение следующих 3 лет $\mu = 3$ и $\sigma = 4$. Начальное значение $S(0)$ случайного процесса S равно 5. Найти распределение вероятностей случайной величины $S(6)$ в конце шестого года.

10. Волатильность рыночной цены равна 36.5% годовых. Найти волатильность рыночной цены за один день.

11. Пусть текущая цена актива $S(0) = \$40$, ожидаемая доходность $\mu = 18\%$ годовых, волатильность — 20% годовых. Найти плотность распределения логарифма цены актива $\ln S(T)$ через $T = 0.3$ года.

12. В условии предыдущей задачи найти 99%-ный доверительный интервал значений $S(T)$.

§3. Ценообразование опционов.

Построения этого раздела проводятся в рамках непрерывной модели ценообразования актива, изложенной в разделе 2.4. В частности, выполнены уравнения (2.2) и (2.6).

Для простоты предполагается, что процентная ставка $r = r(t)$ не зависит от времени. Следовательно, цена безрисковой ценной бумаги S_0 изменяется по формуле:

$$S_0(t_2) = e^{r(t_2 - t_1)} S_0(t_1)$$